

Werk

Titel: Analysis (Dirichletsche Reihen, Zetafunktion s. Algebra, Zahlentheorie; spezielle...

Jahr: 1933

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0006|log69

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

véritablement remarquables le théorème classique de Lebesgue sur l'existence presque partout de la dérivée d'une fonction monotone, le théorème sur les points de densité des ensembles, le théorème de M. Denjoy et de Mme Young sur les relations entre les nombres dérivés d'une fonction arbitraire, et ensuite le théorème fondamental sur la dérivation des fonctions d'intervalle intégrables au sens de M. Burkill, d'où le résultat de Lebesgue-Tonelli concernant la formule $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ pour des courbes rectifiables. Les lemmes „sur le recouvrement des ensembles“ („Überdeckungssätze“), qu'on emploie d'habitude pour les démonstrations des théorèmes de ce genre sont remplacés par le lemme suivant d'évidence presque immédiate: Soit $g(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E l'ensemble des points x intérieurs à (a, b) et tels qu'il existe un point $\xi > x$, assujetti à la condition $g(\xi) > g(x)$; alors, l'ensemble E est soit vide, soit une somme d'une suite d'intervalles ouverts et disjoints (a_k, b_k) tels que $g(b_k) \geq g(a_k)$. *Saks (Warszawa).*

Denjoy, Arnaud: Sur les courbes rectifiables. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1358 bis 1360 (1933).

L'auteur définit, sur une courbe rectifiable quelconque dans un espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions, ce qu'il faut entendre par additivité complète pour la mesure des ensembles sur la courbe. Il généralise pour cela l'idée intuitive que l'on peut avoir de l'additivité restreinte. Il définit ensuite la région positive et la région négative d'une courbe simple fermée de Jordan, par le sens de rotation d'arcs sans points communs, entièrement contenus dans la région considérée et joignant un point de cette région à des points se succédant sur la courbe dans un sens déterminé. La note se termine par la question suivante: La formule de Cauchy est-elle valable lorsque le chemin C d'intégration a une longueur quadratique nulle et que la fonction, holomorphe dans la région limitée par C , est continue et à nombres dérivés bornés sur C . *E. Blanc (Poitiers).*

Analysis.

Barna, Béla: Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Mitt. math. Semin. Univ. Debrecen H. 7, 1—17 u. dtsh. Zusammenfassung 18—23 (1932) [Ungarisch].

Zwei Aufgaben über das arithmetisch-geometrische Mittel $M(a, b)$ von zwei komplexen Zahlen. 1. Die Zahl z liege in der längs der negativen reellen Achse aufgeschlitzten Ebene, $\bar{M}(1, z)$ bezeichne den Wert der mehrdeutigen Funktion $M(1, z)$ mit größtem Betrage. Dann gilt, wenn z auf einem beliebigen Wege gegen Null strebt,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \bar{M}(1, z) \log \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}.$$

Für diesen bekannten Satz wird hier ein recht elementarer, auf der Reihendarstellung

$$\{\bar{M}(1, \sqrt{1-\lambda})\}^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2 \lambda^n$$

beruhender Beweis gegeben. 2. Es sei $ab(a^2 - b^2) \neq 0$. Bekanntlich läßt sich $a:b$ als Quotient von zwei Quadraten von ϑ -Reihen mit dem Argumente $q = e^{\pi i \omega}$ darstellen; hierbei können die möglichen Werte von ω durch $M(a, b)$ und $M(a, \sqrt{a^2 - b^2})$ ausgedrückt werden. Es wird derjenige Wert ω bestimmt, für den $|q|$ möglichst klein ausfällt, so daß die obigen ϑ -Reihen möglichst gut konvergieren. *Szegő.*

Abason, Ernest: Remarque sur une formule de la moyenne. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 3, 169—171 (1933).

Ergänzende Bemerkung zu einer früheren Note (dies. Zbl. 2, 186). *Rellich.*

Hardy, G. H.: The constants of certain inequalities. J. London Math. Soc. 8, 114—119 (1933).

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung beweist der Verf. eine Reihe von Integralungleichungen, stets mit den „besten“ Konstanten. Die wichtigsten Resultate lauten: Es seien $f(y)$ und $K(u)$ positiv,

$$F(x) = \int_0^\infty K(xy) f(y) dy, \quad \Phi(s) = \int_0^\infty K(u) u^{s-1} du.$$

Unter der Voraussetzung, daß sämtliche vorkommenden Integrale existieren, gilt für $p > 1$

$$\int_0^\infty F^p dx < \Phi^p\left(\frac{1}{p}\right) \int_0^\infty x^{p-2} f^p dx; \quad \int_0^\infty x^{p-2} F^p dx < \Phi^p\left(\frac{1}{p'}\right) \int_0^\infty f^p dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Ferner seien a_n und $a(x)$ positiv, $p > 1$. Dann gelten, alle Integrale und Reihen als existierend vorausgesetzt,

$$\int_0^\infty \left\{ \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-(n+\frac{1}{2})x} \right\}^p dx < \Gamma^p\left(\frac{1}{p}\right) \sum_{n=0}^\infty \left(n + \frac{1}{2}\right)^{p-2} a_n^p,$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ \int_0^\infty a(x) e^{-(n+\frac{1}{2})x} dx \right\}^p < \Gamma^p\left(\frac{1}{p}\right) \int_0^\infty x^{p-2} a^p(x) dx.$$

Für $p = 2$ liefert die erste Ungleichung den Hilbertschen Bilinearformensatz, der somit als unmittelbare Folge der Schwarzschen Ungleichung erscheint. Zu der zweiten Ungleichung sei bemerkt, daß sie sich in dem Spezialfalle $p = 2$ bei I. Schur findet (Schwarz-Festschrift, S. 397, 1914). — Schließlich wird eine Ungleichung vom Young-Hausdorffschen Typus aufgestellt, wobei jedoch die Frage nach der genauen Konstante offen bleibt.

G. Szegő (Königsberg, Pr.).

Tricomi, F.: Determinazione del valore asintotico di un certo integrale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 116—119 (1933).

This paper derives an asymptotic value for $I_m = \int_{-\infty}^\infty \lambda e^{-\lambda^2} (1 + \theta(\lambda))^m 2^{-m} d\lambda$, where $\theta(\lambda) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^\lambda e^{-x^2} dx$, as $m \rightarrow \infty$. By replacing $(1 + \theta(\lambda))/2$ by e^{-t} , the integral is reduced to the form $\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-(m+1)t} T(2e^{-t} - 1) dt$, i. e. to the consideration of $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$, where $F(t) \sim \sqrt{-\log t}$ as $t \rightarrow 0$, and $\sim -\sqrt{t}$ as $t \rightarrow \infty$. It follows that $f(s) \sim \sqrt{\log s/s}$ as $s \rightarrow \infty$, so that $I_m \sim \sqrt{\pi \log m/m}$ as $m \rightarrow \infty$. Similarly if $F(t) \sim A(\log t)^\alpha$ as $t \rightarrow 0$ ($\alpha > 0$) and $F(t) \sim Bt^\beta$ as $t \rightarrow \infty$ ($\beta \geq 0$) then $f(s) \sim (\log s)^\alpha/s$ as $s \rightarrow \infty$.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Shohat, J.: On interpolation. Econometrica 1, 148—158 (1933).

Bericht über einige wichtige Fragestellungen der Theorie von reellen Interpolationsreihen. Neben dem allgemeinen Konvergenz- und Stabilitätsproblem werden die Eigenschaften der Fejérschen Treppenpolynome, ferner die Jacksonsche und S. Bernsteinsche Interpolationsformel kurz gestreift.

Szegő (Königsberg, Pr.).

Shohat, J.: On the continued fractions associated with, and corresponding to, the

integral $\int_a^b \frac{p(y)}{x-y} dy$. Amer. J. Math. 55, 218—230 (1933).

Bekanntlich können dem im Titel genannten Integrale [es sei darin $a = 0$, $b = 1$, $p(x)$ nichtnegativ und integabel, $\int_0^1 p(x) dx > 0$] zwei Kettenbruchentwicklungen der Form

$$\frac{b_1}{|x|} - \frac{b_2}{|1|} - \frac{b_3}{|x|} - \frac{b_4}{|1|} - \dots,$$

$$\frac{\lambda_1}{|x - c_1|} - \frac{\lambda_2}{|x - c_2|} - \frac{\lambda_3}{|x - c_3|} - \dots$$

zugeordnet werden. Die normierten Näherungsnenner $\varphi_n(x) = a_n x^n + \dots$ ($a_n > 0$) der zweiten Entwicklung erfüllen die Orthogonalitätsgleichungen

$$\int_0^1 p(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn},$$

durch die man sie auch direkt definieren kann. — Die asymptotischen Eigenschaften von a_n, b_n, c_n, λ_n sowie von anderen verwandten Größen ($n \rightarrow \infty$) folgen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen [Existenz des Integrals $\int_0^1 [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}} \log p(x) dx$] aus einer Arbeit des Referenten [Math. Ann. **82**, 188—212 (1921)]; etwas später [Rend. Circ. mat. Palermo **47**, 25—46 (1923)] hat der Verf. die gleiche Frage behandelt. In der vorliegenden Arbeit beschäftigt er sich mit der asymptotischen Untersuchung der Größen a_n, b_n, λ_n für gewisse Belegungen $p(x)$, welche die obige Bedingung nicht erfüllen. Sie verschwinden mit Ausnahme einer Menge E von endlich vielen Teilintervallen von $[0, 1]$; in E besitzen sie endlich viele Nullstellen x_v ; in einer gewissen Umgebung von x_v gilt $p(x) |x - x_v|^{-k_v} > A$, während außerhalb dieser Umgebungen (auf E) $p(x) \geq B$ bleibt (A, B positive Konstanten). — Die Beweise beruhen auf gewissen Grenzwertsätzen über die Polynome $L_{n,k}(x) = x^n + \dots$, welche die Integrale $\int_0^1 p(x) |x^n + \dots|^k dx$ zum Minimum machen ($k \geq 1$). Diese Sätze sind analoger Art wie die Grenzwertsätze von Fekete über die zu E gehörigen Tschebyscheffschen Polynome. Szegő (Königsberg, Pr.).

Reihen:

Lawrence, B. E.: An extension of Ostrowski's gap theorem to double series. J. London Math. Soc. **8**, 96—99 (1933).

Suppose that the non-vanishing terms of $\sum a_{mn} x^m y^n$ can be arranged in sets $A_0, A_1, A_2, \dots$, each containing only a finite number of terms and such that, if both $|m - \mu| < \min(\theta m, \theta \mu)$ and $|n - \nu| < \min(\theta n, \theta \nu)$ for some fixed positive θ , $a_{mn} x^m y^n$ and $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ belong to the same set. Then $\sum A_k$ converges absolutely and uniformly in a full neighbourhood of any regular point on a pair of circumferences of associated circles of convergence. A. Zygmund (Wlno).

Babini, José: Eine Familie von Reihen, die sich aus der harmonischen Reihe ableiten lassen. Bol. Semin. mat. Argent. **3**, 93—104 (1933) [Spanisch].

Davison, B.: On the uniform convergence of the trigonometrical series. Rec. math. Soc. math. Moscou **39**, Nr 3, 71—86 (1932).

The following results are obtained. 1. Let $f(z), z = r e^{i\theta}$, be a power series such that (I) $\int_0^{2\pi} |R[f'(r e^{i\theta})]| d\theta = o\left(\frac{1}{1-r}\right)$, while, (II) for an open set G of points in the interval $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $R[f'(r e^{i\theta})] = o[(1-r)^{-1} (\log(1-r))^{-1}]$ uniformly in θ . Then $f(e^{i\theta})$ converges uniformly over every closed sub-set F of G , whenever (III) it is uniformly summable over F by Cesàro means of any positive order. — II. If $f(e^{i\theta})$ is a Fourier series the conclusion of 1. holds if hypothesis (III) is satisfied, while hypotheses (I—II) are replaced by (IV) $\frac{\partial}{\partial \theta} R[f(r e^{i\theta})] = o[(1-r)^{-1} (\log(1-r))^{-1}]$ uniformly on G .

Some sufficient conditions are found for the uniform convergence of the series $f'(e^{i\theta})$ in the case where the analytic function $f(z)$ is univalent in the circle $|z| < 1$. The author proves that the classical Dini-Lipschitz criterion follows from his criterion 2., but

leaves open the question whether it is equivalent to 2. He also states (without proof) that criterion 1. does not imply that the real or imaginary parts of $f(e^{i\theta})$ are Fourier series, and that this criterion does not follow from Fejér's criterion $\sum |a_n|^2 < \infty$.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Maliev, A.: Les séries de Fourier de convergence élevée pour les fonctions définies dans l'intervalle donné. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 10, 1437—1450 (1932) [Russisch].

The author, interested exclusively in technological applications, propounds (with numerical examples) some methods of improving the convergence of trigonometrical series defining $f(x)$ in an interval (a, b) . The methods consist, roughly speaking, in completing the values of $f(x)$ outside (a, b) in such a way, that the new function $f_1(x)$ ($a_1 \leq x \leq b_1$, $a_1 \leq a < b \leq b_1$), continued by the condition of periodicity, has its Fourier series converging sufficiently rapidly. *A. Zygmund* (Wilno).

Obrechhoff, N.: Sur les moyennes de Cesàro et Riesz des séries trigonométriques de Fourier. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 211—215 (1933).

Soit $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Posons $\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)]$, $R_n(\omega) = \omega^{-k} \sum_{n \leq \omega} A_n(\omega - n)^k$ ($A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $n > 0$). Entre autre l'auteur démontre que si $\int_0^h |\varphi(t) - S - gt^\alpha| dt = O(h^{1+\alpha})$ ($h \rightarrow 0$), alors pour $\alpha < k \leq 1$, on a

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^\alpha [R_k(\omega) - S] = g \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(1-k+\alpha)}{\pi(k-\alpha)} \cdot \frac{\sin \pi(1-k+\alpha)}{\sin \frac{1+\alpha}{2}}.$$

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Fejér, Leopold: Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe. Z. angew. Math. Mech. 13, 80—88 (1933).

Fortsetzung der in J. London Math. Soc. 8, 53—62 (1933) (dies. Zbl. 6, 257) angekündigten Untersuchung. Die folgenden Resultate seien hervorgehoben. 1. Die arithmetischen Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(x)$ von den Partialsummen der Fourierschen Sinusreihe einer im $(0, \pi)$ nichtnegativen Funktion sind ebenfalls nichtnegativ. 2. Wenn die Funktion außerdem nach oben nichtkonkav ist, so haben die $S_n^{(3)}(x)$ dieselbe Eigenschaft. Die Mittel $S_n^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2$, brauchen dagegen im ersten Falle nicht positiv zu sein, im zweiten Falle nicht konvex. 3. Die Mittel $S_n^{(3)}(x)$ der Fourierschen Kosinusreihe einer im $(0, \pi)$ monotonen Funktion sind sämtlich ebenda im selben Sinne monoton. — Die Beweise dieser Sätze werden auf die einfachsten Spezialfälle zurückgeführt (gerader Linienzug, Dachfunktion und Treppenfunktion). — 4. Wenn eine Potenzreihe reelle Koeffizienten hat, im $|z| < 1$ regulär und schlicht ist und ein konvexes Bild des Kreises $|z| < 1$ liefert, dann sind die arithmetischen Mittel dritter Ordnung der Partialsummen der Reihe sämtlich schlicht im $|z| < 1$. *Hille* (New Haven, Conn.).

Agnew, Ralph Palmer: On Riesz and Cesàro methods of summability. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 532—548 (1933).

L'auteur considère les différentes méthodes de sommabilité de M. Riesz définies par le passage à l'infini de quantités suivantes:

$$A_r: \alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r u_k, \quad B_r: \beta(t) = \sum_{k=0}^{[t]-1} \left(1 - \frac{k}{t}\right)^r u_k, \quad D_r: \delta(t) = \sum_{k=0}^{[t-]} \left(1 - \frac{k}{t}\right)^r u_k,$$

la série $u_0 + u_1 + \dots$ étant donnée, r étant complexe, $[t]$ et $[t-]$ désignant respectivement le plus grand entier $\leq t$ et le plus grand entier $< t$. On envisage particulièrement les cas où $\Re(r) < 0$. En introduisant par exemple quelques modifications à la définition de D_r , on démontre son équivalence avec B_r ($\Re(r) < 0$). On compare aussi B_r à C_r .

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Vignaux, J. C.: Sulla sommabilità della serie doppia di Taylor col metodo esponenziale. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 86, 276—286 (1933).

Partant de la définition

$$S = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a-b} \cdot u(a, b) \cdot da \cdot db$$

où

$$u(a, b) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \frac{a^m \cdot b^n}{m! n!}$$

de sommabilité (B) d'une série double $\sum \sum u_{mn}$ par le procédé de M. E. Borel avec la somme S , l'auteur trouve que la série double $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^m w^n$ est sommable (B) avec la somme $(1-z)^{-1} \cdot (1-w)^{-1}$ si les parties réelles de $1-z$ et de $1-w$ sont positives toutes les deux. Il en déduit l'existence des systèmes des polygones de sommabilité associés à l'intérieur desquels la série de Taylor d'une fonction $f(z, w)$ des deux variables complexes $f(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cdot z^m \cdot w^n$ possédant un système des cercles de convergences associés est sommable (B).
E. Kogbellantz (Paris).

Differentialgleichungen:

Dietrich, Rudolf: Eine Darstellung des Integrales der Riccatischen Gleichung: $y' + y^2 = f(x)$. J. reine angew. Math. 169, 252 (1933).

Mothwurf, Wilma: Über Saiten mit nur harmonischen Obertönen. Mh. Math. Phys. 40, 296 (1933).

Eine an den Endpunkten festgehaltene Saite habe den Querschnitt $q(x)$ und die Dichte $\sigma(x)$; die spannende Kraft P sei konstant. Euler hat bemerkt, daß im Falle $\sigma = \text{const}$, $q = \frac{d}{(e + fx)^4}$ bei konstantem d, e, f (also nicht nur im Falle $\sigma = \text{const}$, $q = \text{const}$) die Saite für jede Länge l lauter harmonische Obertöne besitzt. Hier wird gezeigt: Soll eine Saite (mit konstantem P , aber veränderlichem σ, q) für jede Länge l nur-harmonische Obertöne besitzen, so muß $\sigma \cdot q = \frac{P}{(ax + b)^4}$ mit geeigneten Konstanten a und b sein.
Rellich (Göttingen).

Germa, R. H. J.: Sur les solutions de certaines équations différentielles et intégral-différentielles du second ordre. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 7, 161—181 (1932).

Ausdehnung der Untersuchungen von É. Picard über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des 1. Randwertproblems von $y'' = f(x, y, y')$, wenn die Randwerte genügend benachbart sind, auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung sowie auf Integrodifferentialgleichungen der Form

$$y'' = f(x, y, y') + \int_0^x \varphi[x, s; y(s), y'(s)] ds$$

und Systeme von Gleichungen dieser Bauart.

R. Iglisch (Aachen).

Germa, R.-H.-J.: Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégral-différentielles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 78—83 (1933).

* Verf. behandelt nach der Majorantenmethode ein nichtlineares Integrodifferentialgleichungsproblem, das er schon früher (dies. Zbl. 6, 118) mit sukzessiver Approximation gelöst hat, unter den einschränkenden Voraussetzungen, daß alle darin auftretenden Funktionen in geeigneten Bereichen analytisch sind. R. Iglisch (Aachen).

Underwood, F.: On the existence of a common integrating factor for a system of first order differential equations. Trans. Roy. Soc. S. Africa 21, 103—108 (1933).

Verf. sucht nach Bedingungen, damit mehrere lineare Differentialformen einen gemeinsamen integrierenden Faktor zulassen.
G. Cimmino (Napoli).

Buhl, A.: Structures analytiques et théories physiques. Mém. Sci. physiques Fasc. 22, 1—60 (1933).

Verf. will die logische Struktur einiger physikalischer Theorien klären, indem er zeigt, wie man aus rein mathematischen Formeln durch plausible Umformungen und Einfachheitsbetrachtungen ganz formal verschiedene Gleichungen der Physik ableiten kann, ohne weiter auf ihre physikalische Bedeutung zurückzukommen. So erhält er z. B., nachdem die bekannten Umwandlungsformeln für Raum- und Flächenintegrale aus der einfachsten abgeleitet wurden, die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen durch Betrachtung der einfachsten Möglichkeit, wie man eine von diesen Formeln auf die Form $0 = 0$ bringen kann, und durch einige naheliegende Umformungen. Allerdings führt das dazu, neben den zähen und den idealen Flüssigkeiten auch noch (gewissermaßen transzendente) Flüssigkeiten zu betrachten, bei denen es gar keinen Druck gibt. — Die Hamilton-Jacobischen Gleichungen erhält Verf. aus der einfachsten Möglichkeit, die Gleichung $\text{div } \Phi = 0$ für ein $2n$ -dimensionales Vektorfeld zu befriedigen. — Ausführlich wird die Theorie der Wellenfronten behandelt, d. h. von Flächenscharen, bei denen ein bestimmtes Integral (etwa der Flächeninhalt) erstreckt über homologe Gebiete denselben Wert hat (die Gebiete entsprechen sich etwa durch Projektion aus dem Nullpunkt). Zum Schluß werden auch Unbestimmtheitsrelationen eingeführt: wenn man für die Wellenflächen (Lösungen von Differentialgleichungen) auch unstetige Lösungen zuläßt, so entsteht eine große Unbestimmtheit, da man aus Elementen der Lösungsflächen sehr allgemeine Mengen konstruieren kann. Nimmt man die erwähnten Elemente sehr klein, so entstehen gewissermaßen Korpuskeln. Je genauer diese festliegen, d. h. je kleiner die Flächenelemente sind, um so weniger kann man von der Wellenfläche sprechen, der sie angehören. Verf. erblickt darin einen Zusammenhang mit den Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelationen und sogar mit den Paradoxien der Mengenlehre.

Willy Feller (Kiel).

Barba, G.: Sui sistemi differenziali aventi integrali algebrici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 355—361 (1933).

Dato un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie di tipo normale, che possiamo sempre scrivere sotto la forma:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(x) y_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

l'autore si propone di determinare le condizioni affinché il sistema (1) ammetta un integrale primo espresso da un polinomio nelle y_i , omogeneo ed a coefficienti costanti. — Egli esamina innanzitutto il caso di un integrale primo lineare nelle y_i . Poscia fa vedere che ad ogni sistema (1) dotato di un integrale primo non lineare si può sempre associare un certo altro sistema dello stesso tipo, dotato di un integrale lineare: lo studio dei primi viene così ricondotto a quello dei secondi. Infine tratta della coesistenza di due integrali primi lineari ed accenna a qualche tipo speciale di integrale fratto.

A. Colucci (Napoli).

Lampariello, G.: Sulla natura analitica delle soluzioni dei sistemi canonici integrabili per quadrature. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 129—135 (1933).

Betrachtet wird ein konservatives kanonisches System mit n Freiheitsgraden, für welches n zeitfreie Integrale

$$F_i(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = J_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (F_1 = H)$$

bekannt sind, die ein Involutionssystem bilden. Es sei bekannt, daß die n Integralflächen $F_i = J_i$ in dem $2n$ -dimensionalen Phasenraum eine geschlossene, doppel-punkt- und singularitätenfreie Mannigfaltigkeit $\sigma = \sigma(J_1, J_2, \dots, J_n)$ bestimmen. In dem Spezialfall der Staude-Stäckelschen bedingtperiodischen Systeme, wobei die Funktionen F_i quadratisch sind, ist die allgemeine Lösung von der Form

$$p_i = \varphi_i(J_1, J_2, \dots, J_n; u_1, u_2, \dots, u_n), \quad q_i = \psi_i(J_1, J_2, \dots, J_n; u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (*)$$

wobei alle $2n$ Funktionen φ_i, ψ_i in den n Variablen u_k nach 2π periodisch sind und $u_k = \omega_k t + \beta_k$ zu setzen ist; dabei sind die ω_k Funktionen der Integrationskonstanten J und die β_k sind die übrigen n Integrationskonstanten. Es wird nun gezeigt, daß die Darstellung (*) bestehen bleibt, auch wenn nur die erwähnte Annahme über die Mannigfaltigkeit σ , nicht aber auch die Staudé-Stäckelschen Bedingungen erfüllt sind. Nur ist dann $u_k = \omega_k t + \beta_k$ zu

$$u_k = g_k(v_1, v_2, \dots, v_n); \quad v_1 = t + \beta_1, \quad v_2 = \beta_2, \dots, \quad v_n = \beta_n$$

zu verallgemeinern. Dabei sind die g_k gewisse Funktionen von n Variablen v_j mit der Eigenschaft, daß $g_k(v_1, v_2, \dots, v_n)$ bei Ersatz von v_j durch $v_j + \gamma_{jk}$ in $g_k(v_1, v_2, \dots, v_n) + 2\pi$ übergeht, wobei γ_{jk} eine nur von den Integrationskonstanten J abhängige Konstante bezeichnet. Der Beweis verwendet nur die Elemente der Theorie der Pfaffschen Formen und läßt auch den Staudé-Stäckelschen Spezialfall in einem neuen Licht erscheinen.

Wintner (Baltimore).

Thomas, Joseph Miller: Pfaffian systems of species one. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 356—371 (1933).

A Pfaffian system comprising r independent equations is said to be of species $\sigma (\geq 0)$ if $r + \sigma$ is the minimum number of differentials by means of which an equivalent system can be expressed. Such a system is characterized by the property that the adjunction of σ (but not less than σ) independent (suitably chosen) equations to it gives a completely integrable system. In the paper the systems of species one are particularly considered. Several theorems mostly concerning the reduction of general and nested systems of species one (the latter are such that a reduction can be effected simultaneously for them and all of their derived systems) to a canonical form, are here developed.

O. Borůvka (Brno).

Thomas, Joseph Miller: Regular differential systems of the first order. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 451—453 (1933).

Vorgelegt sei ein System partieller Differentialgleichungen $R_{i\alpha} = 0$ erster Ordnung, von denen jede nach einer Ableitung der Unbekannten aufgelöst ist:

$$R_{i\alpha} \equiv \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - F_{i\alpha} = 0.$$

Man setze die Gleichung $R_{i\alpha}$ in die i -te Zeile und α -te Spalte einer Matrix von n Zeilen und r Spalten. Das System heiße regulär, wenn eine Anordnung (durch Numerierung der Unbekannten und der Variablen) möglich und durchgeführt ist derart, daß die leeren Plätze in der beschriebenen Matrix rechts von jeder Zeile und nach unten in jeder Spalte eine geschlossene Reihe bilden. Dann gilt: 1. Jedes reguläre System erster Ordnung ist orthonom (Riquier). 2. Jedes passive (Riquier) reguläre System erster Ordnung ist vollständig integrabel. 3. Jedes System partieller Differentialgleichungen ist bis auf lineare Transformation der unabhängigen Variablen äquivalent einem regulären System erster Ordnung.

Rellich (Göttingen).

Russyan, C.: Intégrales complètes des rangs divers de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial z}{\partial x} = \theta(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y})$. Rend. Circ. mat. Palermo 57, 87—100 (1933).

The author obtains a complete solution of rank n (i. e., one which involves $n + 2$ arbitrary constants) by the consideration of two complete systems comprising one and two equations, respectively, and arising from a pfaffian system associated with the given equation. Actually, the pfaffian system is of the type known in the literature as special, and the author's process is equivalent to its reduction to a form involving the minimum number of differentials.

J. M. Thomas (Durham, N.C.).

Robertson, James: On the solution of problems in heat-conduction by the method of wave-trains. Philos. Mag., VII. s. 15, 937—957 (1933).

Verf. behandelt einige Probleme der linearen Wärmeleitung von folgendem Typus: Die Anfangstemperatur ist 0, das eine Ende ($x = 0$) des Leiters wird auf einer festen

Temperatur θ_0 gehalten, während für das andere Ende verschiedene Bedingungen behandelt werden, z. B. Verschwinden der Temperatur oder Wärmeundurchlässigkeit oder: $x = a$ ebenfalls auf fester Temperatur θ_0 , $x = b$ auf fester Temperatur 0, während die Leitfähigkeit zwischen 0, a und a , b verschieden ist. Die Methode der Behandlung ist in Anlehnung an einige Arbeiten von Green (s. dies. Zbl. 2, 365) die folgende: Man geht aus von dem durch die periodische Quelle $\theta \cdot \cos kt$ erzeugten Wellenzug. Durch passende Reflexion an den Enden erhält man immer neue Wellenzüge, deren Superposition eine den verschiedenen Randbedingungen genügende Lösung liefert. Integration über k liefert dann den Effekt, der durch die Anfangstemperatur θ_0 (bei $x=0$) erzeugt wird und schließlich Integration über t die endgültige durch die permanente Temperatur θ_0 (bei $x=0$) erzeugte Lösung.

E. Rothe (Breslau).

Brelot, Marcel: Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne. *Mathematica* 7, 147—166 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 6, 15.

Evans, G. C.: Application of Poincaré's sweeping-out process. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 19, 457—461 (1933).

Beweis, daß der Limes superior des Konduktorpotentials einer beschränkten (reduzierten) Punktmenge positiver Kapazität bei Annäherung an einen Punkt der Menge gleich Eins ist. Daraus ergibt sich wieder der Satz von Kellogg über die Existenz regulärer Punkte in der Menge und auch ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Regularität eines Punktes.

Willy Feller (Kiel).

Cioranescu, Nicolas: Quelques nouveaux problèmes sur les fonctions harmoniques. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 11, 135—154 (1932).

Le $n+1$ funzioni reali

$$x_i = x_i(Q, \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1), \quad (1)$$

siano definite al variare del punto Q in un certo dominio Π dello spazio euclideo E_n ad n dimensioni e del parametro λ nell'intervallo $(0,1)$ e siano tali che: a) per ogni valore di λ positivo dell'intervallo $(0,1)$ le (1) siano le equazioni parametriche di una ipersuperficie regolare Σ_λ dello spazio E_{n+1} , dotata di iperpiano tangente variabile con continuità, ed omeomorfa all'ipersfera dello stesso spazio; b) per $\lambda = 0$ si riducano alle costanti x_i^0 ; c) la ipersuperficie $\Sigma \equiv \Sigma_1$ sia la completa frontiera di un dominio Ω (di E_{n+1}) al quale è interno il punto M_0 di coordinate $x_1^0, \dots, x_{n+1}^0$ e tale che ad ogni suo punto M corrisponda uno ed un sol valore λ dell'intervallo $(0,1)$ per cui la ipersuperficie Σ_λ contiene il punto M . Ogni funzione u definita in $\Omega + \Sigma$ può ritenersi funzione di Q e di λ , definita al variare di Q in Π e di λ nell'intervallo $(0,1)$. — L'autore dice la $u(Q, \lambda)$ armonica in $\Omega + \Sigma$ se essa vi è continua ed è armonica in Ω . Ciò posto l'autore considera il seguente nuovo generale problema: Assegnate due funzioni $\omega_1(Q, \lambda)$ e $\omega_2(Q, \lambda)$ in $\Omega + \Sigma$, una funzione $f(Q)$ in Π , due funzioni $\alpha(\lambda)$ e $\beta(\lambda)$ a variazione limitata in $(0,1)$, costruire una funzione $u(Q, \lambda)$ armonica in $\Omega + \Sigma$ verificante l'equazione:

$$\int_0^1 \omega_1(Q, \lambda) u(Q, \lambda) d\alpha(\lambda) + \int_0^1 \omega_2(Q, \lambda) \left[\frac{du}{d\lambda} \right]_{\Sigma_\lambda} d\beta(\lambda) = f(Q),$$

avendo designato, per ogni $\lambda > 0$, con n la normale alla Σ_λ volta verso l'interno del dominio limitato che ha per frontiera Σ_λ . — L'autore si pone nell'ipotesi che una almeno delle due funzioni $\alpha(\lambda)$ e $\beta(\lambda)$ abbia un salto per $\lambda = 1$ e, secondo che è la prima o la seconda che ha tale salto, egli ricerca la soluzione u ponendola sotto la forma di un potenziale di strato doppio o semplice deposto su Σ . Nell'un caso o nell'altro egli perviene ad una equazione integrale di terza specie, nella densità dello strato, equazione che si riduce ad una di seconda quando ω_1 oppure ω_2 non si annulla su Σ .

M. Picone (Roma).

Variationsrechnung:

Hestenes, M. R.: Sufficient conditions for the general problem of Mayer with variable end points. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 479—490 (1933).

A previous joint paper by Bliss and Hestenes (reviewed this Zbl. **6**, 259) treated the following problem of Mayer: In the class of all functions $y_i = y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$; $x_1 \leq x \leq x_2$) which satisfy the differential equations $\varphi_\alpha(x, y, y') = 0$ ($\alpha = 1, \dots, m < n$) and the boundary conditions $\psi_\mu(x_1, y_i(x_1), x_2, y_i(x_2)) = 0$ ($\mu = 1, 2, \dots, p \leq 2n + 1$), to find one for which $g(x_1, y_i(x_1), x_2, y_i(x_2))$ has minimum value. In that joint paper only the special case $p = 2n + 1$ was treated. In the present study Hestenes uses the methods and results of the preceding to obtain sufficient conditions in the general case, $p \leq 2n + 1$. The sufficiency theorems of the previous paper are included as special cases. The comments on the generality of the results and on the relation to the literature made in the above-mentioned review apply here with equal weight.

E. J. McShane (Göttingen).

Frank, Philipp: Die schnellste Flugverbindung zwischen zwei Punkten. Z. angew. Math. Mech. **13**, 88—91 (1933).

„Die Frage, welchen Weg ein Flugzeug einschlagen muß, um bei gegebener Windverteilung möglichst schnell von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen“ (vgl. dies. Zbl. **1**, 341; **2**, 144; **3**, 12), wird hier in Analogie gesetzt zu der Frage nach dem Lichtweg in einem geeignet anisotropen Medium. Dieses ist dadurch charakterisiert, daß die Lichtgeschwindigkeit v vom Ort τ und der Strahlrichtung $\hat{s}$ abhängt gemäß der Gleichung

$$v = v(\tau, \hat{s}) = \hat{s} \cdot \mathfrak{B} + \sqrt{(\hat{s} \cdot \mathfrak{B})^2 + v_0^2 - W^2}$$

($\mathfrak{B}$ Windgeschwindigkeit, W deren Betrag, v_0 Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs). Die Flugdauer bzw. die Lichtzeit ist dann gegeben durch

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \frac{\sqrt{\tau' \tau''}}{v(\tau, \hat{s})} du, \quad \tau' = \frac{d\tau}{du}, \quad \hat{s} = \frac{\tau'}{\sqrt{\tau' \tau''}}.$$

Mit Hilfe der Formeln aus der Optik anisotroper Medien wird ein „Brechungsgesetz“ für die schnellste Flugzeugbahn beim Durchsetzen der Trennungsfläche zweier Luftschichten verschiedener Geschwindigkeit aufgestellt (vgl. v. Mises, dies. Zbl. **3**, 12).

Rellich (Göttingen).

Morse, Marston, and S. B. Littauer: A characterization of fields in the calculus of variations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **18**, 724—730 (1932).

Die Verf. geben eine anschauliche geometrische Deutung der konjugierten und fokalen Punkte für den Fall eines mehrdimensionalen Problems in der Variationsrechnung. Diese Deutung besteht in der Überdeckungsweise einer Umgebung des betreffenden Punktes mittels einiger bestimmter Extremalenfamilien. *Schnirelmann*.

Douglas, Jesse, and Philip Franklin: A step-polygon of a denumerable infinity of sides which bounds no finite area. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 188—191 (1933).

Ein einfaches Beispiel einer geschlossenen Jordankurve, die keine Fläche mit endlichem Flächeninhalt begrenzt (vgl. auch das folgende Referat). — Man denke sich eine Folge von x, y -achsenparallelen Quadraten der Seitenlänge $1/\sqrt{n}$, deren linke untere Ecke auf der z -Achse in der Höhe $z_n = 1 - 1/2^{n-1}$ liegt. Das n -te Quadrat wird durch x -achsenparallele Strecken in $2^n + 1$ kongruente Rechtecke zerlegt: die Endpunkte dieser Strecken werden durch die dazwischenliegenden Stücke der Quadratseiten abwechselnd verbunden, so daß eine Zickzacklinie (Meanderfigur) entsteht, mit dem Anfangspunkt $A_n(0, 0, z_n)$ und Endpunkt $B_n(0, 1/\sqrt{n}, z_n)$. Nun verbinde man abwechselnd A_{2n-1} mit A_{2n} durch ein Stück der z -Achse, und B_{2n} mit B_{2n-1} durch zwei y - bzw. z -achsenparallele Strecken. Schließlich wird der Häufungspunkt $(0, 0, 1)$ in geeigneter Weise mit B_1 verbunden, so daß das Polygon geschlossen wird. — Daß keine durch dieses Polygon begrenzte Fläche endlichen Inhalt hat, ergibt sich daraus,

daß ein Kreiszylinder aus jeder Fläche, die durch eine geschlossene seine Achse enthaltende sonst aber ganz im Äußeren verlaufende Jordankurve begrenzt wird, ein Flächenstück ausschneidet, dessen Inhalt mindestens dem des halben Meridianrechtecks gleich ist. Man kann nun um die Mittelstücke der x -achsenparallelen Polygonseiten Zylinder legen, die einander höchstens berühren, und so, daß die Summe über die Inhalte der Meridianrechtecke divergiert.

Willy Feller (Kiel).

Douglas, Jesse: An analytic closed space curve which bounds no orientable surface of finite area. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **19**, 448–451 (1933).

Ein neues, besonders instruktives Beispiel für eine geschlossene Jordankurve im Raume, die keine zweiseitige Fläche mit endlichem Flächeninhalt berandet (vgl. das vorstehende Referat und dies Zbl. **6**, 176). — Auf dem Kreiszylinder $r = 1$ betrachte man die Spirale $z = \varphi^{1/5}$. Die gesuchte Kurve entsteht aus ihr durch Spiegelung an der Einheitskugel, wobei aus dem Zylinder ein Torus wird. Die Kurvengleichungen sind in Polarkoordinaten $\varrho = \sin \vartheta$, $\varphi = \cot^5 \vartheta$. Die Projektion auf die x, y -Ebene besteht aus zwei symmetrischen Spiralen, die sich um den Nullpunkt winden. Der Flächeninhalt des begrenzten ebenen Gebiets (natürlich sozusagen als Riemannsche Fläche aufgefaßt) ist unendlich, wie eine triviale Integralabschätzung ergibt. A fortiori gilt das von jeder zweiseitigen Fläche, die sich auf dieses Gebiet projiziert.

Willy Feller (Kiel).

Funktionentheorie:

● **Montel, Paul:** *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Recueilli et rédigé par F. Marty. Avec une note de Henri Cartan. (Collect. de monogr. sur la théorie des fonctions. Publiée par Émile Borel.)* Paris: Gauthier-Villars 1933. IV, 159 S. Frs. 40.—

In den letzten Jahren ist die Theorie der schlichten Abbildungen in mannigfacher Richtung wesentlich gefördert worden. In dem vorliegenden Bande der Sammlung Borel stellt sich Montel hauptsächlich die Aufgabe, die Eigenschaften von solchen Abbildungen im Innern des Regularitätsbereiches darzustellen. Er sieht also von der Untersuchung der Abbildung in der Nähe der Randelemente ab. Sein besonderes Interesse gilt dabei jenen reizvollen Untersuchungen, die neuerdings insbesondere über Potenzreihen angestellt worden sind, welche in einem gegebenen Kreise konvergieren und diesen oder einen Teil desselben schlicht abbilden. Über diese und verwandte Fragen liegt (abgesehen von einem Kapitel in der Funktionentheorie von Bieberbach) keine zusammenhängende und den heutigen Stand der Dinge erfassende Darstellung vor. Darum füllt das vorliegende Buch eine Lücke aus. Die Einzelheiten der in Rede stehenden Probleme konnten naturgemäß nicht immer in extenso ausgeführt werden; vielfach sind nur die Resultate formuliert worden. Es ist bedauerlich, daß die tiefliegenden Untersuchungen von Löwner (abgesehen von der Anwendung $|a_2| \leq 3$) sowie die neueren Untersuchungen von Grötzsch (abgesehen von einem einzigen Resultate, vgl. S. 57) keine Aufnahme gefunden haben. Dafür wird aber der Leser durch eine Fülle von interessanten Einzelproblemen entschädigt. — Über die Einteilung und den behandelten Stoff sei folgendes gesagt. Im ersten Kapitel werden die analytischen Funktionen eingeführt, welche in einem gegebenen Bereiche jeden Wert höchstens p -mal und gewisse Werte genau p -mal annehmen. Für $p = 1$ entstehen die schlichten Funktionen. Von diesem klassifizierenden Standpunkte aus werden gleichmäßig konvergente Folgen von analytischen Funktionen betrachtet. Sodann wird der Definitionsbereich einer regulären Funktion (nach Marty u. a.) in schlichte Teilgebiete zerlegt. Schließlich werden besondere Klassen von schlichten Abbildungen, insbesondere die sternartigen und konvexen erklärt. Ausgangspunkt des zweiten Kapitels ist der Gracesche Satz über apolare Polynompaare mit den bekannten Anwendungen auf die Komposition von Polynomen sowie auf schlichte Polynome (Szegő, Alexander, Kakeya). Hier werden auch die neueren Untersuchungen von Dieudonné und Rogosinski über schlichte Polynome berührt. (Sie beziehen sich freilich allgemeiner auf schlichte Funktionen im Einheitskreise.) Kapitel III beginnt mit der Einbeziehung von Normalscharen. Durch Betrachtung der schlichten Funktionen von diesem Gesichtspunkte aus werden der Verzerrungs- und Drehungssatz sowie der Fundamentalsatz über schlichte Abbildungen (nach Fejér-Fr. Riesz) bewiesen. Kapitel IV enthält die geläufigen aus dem Verzerrungssatz hervorgehenden Abschätzungen, den Flächensatz von Bieberbach, die Koeffizientenabschätzungen von Löwner, Littlewood und Landau, die Berechnung der Studyschen Rundungsschranke, die Abschätzung der Sternigkeitsschranke nach Marx und eine große Anzahl von weiteren besonderen Resultaten, die hier nur durch die Namen Bieberbach, Birnbaum, Grötzsch, Kössler, Landau, Löwner, Montel, R. Nevanlinna, Pick, Pólya, Reinhardt, Szegő angedeutet

werden mögen. Kapitel V enthält einige ältere Ergebnisse von Mittag-Leffler und Phragmén-Lindelöf, ferner von Bieberbach über allgemeine und besondere ganze Funktionen, welche in gewissen Bereichen (Winkelräumen) schlicht sind. In Kapitel VI wird die aus dem Bieberbachschen Flächensatz hervorgehende Extremaleigenschaft der Kreisabbildung als Ausgangspunkt der approximativen Berechnung der Abbildungsfunktion dargestellt. (Man vermißt hier eine Andeutung über die wichtigen Untersuchungen von Faber und seinen Nachfolgern betreffend die Tschebyscheffschen Polynome.) Schließlich enthält Kapitel VII den Blochschen Satz sowie die weiteren damit zusammenhängenden Untersuchungen von Carathéodory, Landau, Bohr, Fekete, Valiron usw. — In einem Anhang entwirft H. Cartan einen kurzen Abriss der Abbildungstheorie bei Paaren von Funktionen zweier Veränderlichen und weist auf die Schwierigkeiten hin, welche einer unmittelbaren Übertragung vielfach entgegenstehen.

Szegő (Königsberg, Pr.).

Leau, L.: Les suites de fonctions en général (domaine complexe). Mém. Sci. math. Fasc. 59, 1—48 (1932).

Das Heft behandelt allgemeine Konvergenzprobleme von Folgen sowohl unter der Voraussetzung, sie gehörten einer Normalfamilie an, als auch ohne eine solche. Es ist gegliedert nach Folgen regulärer, meromorpher, algebroider Funktionen von einer, und Folgen von Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Anwendungen in den Problemkreisen der konformen Abbildung, der Iterationen, des Picardschen Satzes bleiben unberücksichtigt (für letztere vgl. Mém. Sci. math. 38). — Etwas ausführlicher sind Folgen regulärer Funktionen behandelt, so: die Natur der Grenzfunktion bei Konvergenz schlechthin; die Menge der (für gleichmäßige Konvergenz) irregulären Punkte; Erweiterungen des Vitalischen Satzes in der von Blaschke eingeschlagenen Richtung, d. i. bei Konvergenz in einer Punktfolge, die sich nur gegen den Rand des gemeinsamen Regularitätsgebiets (Einheitskreis) häuft; Folgen, die in einer Teilmenge des Randes konvergieren; Güte der Konvergenz. Ferner wird folgendem Problem Beachtung gewidmet: Konvergenz ist bekanntlich in gewissen Fällen „ansteckend“ (z. B. sind, unter Annahme einer Normalfolge, die Sätze von Stieltjes und Vitali von dieser Art); es wird nach hinreichenden Bedingungen gefragt, um aus der Konvergenz in einer Punktmenge (Gebiet, Bogen, Punktfolge) die (gleichmäßige) Konvergenz in einem umfassenden Bereich zu erschließen. — Anlage und Umfang der Schrift bes. auch in den übrigen drei Kapiteln lassen den Einfluß von Montels Buch (Familles normales, Coll. Borel, Paris 1927) nicht verkennen; wenn auch mehrfach neuere Literatur ergänzend referiert ist, so scheinen doch diese Partien etwas knapp gegenüber der Wiedergabe von Sätzen aus dem genannten Werke, mögen diese auch grundlegend sein. Dies gilt etwa für Carathéodorys Begründung der Theorie der Normalfamilien. Im Schlußkapitel (Folgen von Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen) wird Julius Arbeit [Acta math. 47 (1926)] erwähnt, doch sind dem Verf. offenbar die schönen Erfolge von H. Cartan, Behnke und Thullen unbekannt geblieben, welche Probleme lösen, die Julia aufwarf. — Ref. kann ein Bedenken gegen die Anlage der Schrift nicht unterdrücken. Es ist wohl ein Vorteil der Theorie der Normalfamilien, daß sie die Sätze zu klassifizieren gestattet (etwa: Normalitätskriterien, Konvergenzeigenschaften, Schrankensätze, α -Stellensätze usw.) und daß man dann durch Verknüpfung solcher Sätze berühmte klassische Theoreme wie auch neue Aussagen erhält (z. B. ist der Schottkysche Satz nichts als die Verbindung eines Normalitätskriteriums mit einem allgemeinen Schrankensatz). Es schiene uns wünschenswert, die Theorie in diesem Sinne folgerichtig aufzubauen, um dann aus einem knappen System weniger Sätze alles übrige durch einfache Verbindungen herauszuholen; dies würde sich dem Geist der axiomatischen Methode nähern. In der Literatur findet man gewöhnlich statt dessen Sätze verwickelterer Art mit immer neuen Beweisen, die sich aber in obigem Sinne einfach auflösen lassen und erheblich an Durchsichtigkeit gewinnen (vgl. etwa Satz XXXIII). — Auch die Wiedergabe mancher Sätze und Zitate läßt mehr Sorgfalt wünschen; als Beispiel sei XXXV genannt: „Konvergiert eine Folge regulärer Funktionen gleichmäßig gegen eine p -wertige Grenzfunktion, so sind die Funktionen der Folge von einem Index ab p -wertig.“ In dieser Form ist der Satz falsch, wie die Folge $z^{2+1/n}$ in dem Gebiet $\mathcal{G}$: $0 < r < |z| < R < \infty$, $\Re z > 0$ zeigt; sie konvergiert da gleichmäßig, keine der Funktionen bildet $\mathcal{G}$ schlicht ab, und doch ist die Grenzfunktion z^2 schlicht in $\mathcal{G}$. Will man nun die dafür genannte Arbeit von Montel vergleichen, so findet man nach Berichtigung des Zitats (1925), daß der Satz dort zwar auch nicht in aller Schärfe gefaßt ist, daß aber aus dem Beweise sein Sinn klar wird; er gilt nur für abgeschlossene Bereiche, oder in der Terminologie der Normalfamilien: Ist die Grenzfunktion im Normalitätsgebiet p -wertig, so sind es auch die Funktionen der Folge auf jedem abgeschlossenen Teilbereiche $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, von einem Index ab.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Gončarov, V.: Sur l'intégrale de Cauchy dans le domaine hypercomplexe. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 10, 1405—1423 (1932).

Es werden die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für ein beliebiges hyperkomplexes System aufgestellt, d. h. die Bedingungen dafür, daß das Kurvenintegral über eine Funktion unabhängig vom Wege ist. Die Veränderliche selbst ist

regulär (genügt den Gleichungen) dann und nur dann, wenn die Multiplikation kommutativ ist. Ist das der Fall, so ist das Produkt zweier beliebiger regulärer Funktionen dann und nur dann wieder regulär, wenn die Multiplikation auch assoziativ ist. Dann ist auch der Quotient zweier regulärer Funktionen, soweit er existiert, regulär, und es gilt unter gewissen Voraussetzungen das Analogon zur Cauchyschen Formel:

$$\int_{(c)} \frac{y(x) dx}{x-a} = y(a) \int_{(c)} \frac{dx}{x-a}.$$

Verf. untersucht nun die von Study vollständig angegebenen komplexen Systeme mit höchstens vier Einheiten danach, ob man bei ihnen das zweite Integral nach links schaffen kann. Es ist das für $n=2$ nur bei den gewöhnlichen komplexen Zahlen möglich, für $n=3$ nie, und schließlich für $n=4$ nur in zwei Systemen (I_c und III_b in der Studyschen Bezeichnung). *Willy Feller (Kiel).*

Botea, N.: Sur les fonctions holomorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1197 bis 1199 (1933).

Die ins Komplexe übertragenen Mittelwertsätze (Darbouxscher Satz), ihre Reziproken (Pompeiu, dies. Zbl. 3, 300) wie auch ihre Verallgemeinerungen (Montel, dies. Zbl. 4, 249 und 5, 290) werden wie folgt erweitert: I. Sei $D_{n+1}(f)$ die Determinante des letztgenannten Referates, und seien $f(z)$, $\varphi(z)$, $f^{(n)}(z)/\varphi^{(n)}(z)$ regulär in z_0 , dann existieren in der Umgebung von z_0 , $n+1$ Punkte z_i , $i=1, 2, \dots, n+1$, derart, daß

$$D_{n+1}(f) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{\varphi^{(n)}(z_0)} D_{n+1}(\varphi)$$

wird. (Für $n=1$ existieren sogar die Punkte z_1 und z_2 auf jeder geschlossenen, den Punkt z_0 umgebenden Kurve.) — II. Sind hingegen die genannten Funktionen regulär im Konvexitätsbereich der Punkte z_i , so existiert in diesem Bereich ein Punkt a derart, daß

$$D_{n+1}(f) = \lambda \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)} D_{n+1}(\varphi)$$

wird, wo $|\lambda| \leq 1$ ist.

Karamata (Beograd).

Fekete, M., und G. Szegő: Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. J. London Math. Soc. 8, 85–89 (1933).

Für die Gesamtheit der im Einheitskreise $|z| < 1$ regulären, schlichten, ungeraden Funktionen $\varphi(z) = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots$ existiert nach Littlewood und Paley (Zbl. 5, 18) eine absolute Konstante B , so daß $|b_{2\nu+1}| \leq B$ für $\nu \geq 1$. Die Verff. teilen über diese Funktionenklasse frühere Ergebnisse mit, insbesondere die interessante Beziehung: $\max |b_5| = e^{-1/5} + \frac{1}{5} > 1$. *Otto Szász (Frankfurt a. M.).*

Whittaker, J. M.: The asymptotic periods and geometric difference of an integral function. J. London Math. Soc. 8, 119–125 (1933).

L'auteur appelle période asymptotique d'une fonction entière $f(z)$ tout nombre β tel que l'ordre de $f(z+\beta) - f(z)$ soit inférieur à celui de $f(z)$. Il a démontré (Mémoire à paraître aux Proc. Edinburgh Math. Soc.) que l'ensemble des périodes asymptotiques d'une fonction entière est linéaire de mesure nulle. Il établit ici, sur un exemple simple, que cet ensemble peut avoir effectivement la puissance du continu. Il considère ensuite la différence $G(z, q) = f(qz) - f(z)$. Il montre, en s'appuyant sur un théorème de Lusin et sur le théorème d'Egoroff sur la convergence, que, si $f(z)$ est d'ordre ρ , $G(z, q)$ est aussi d'ordre ρ quel que soit q , sauf au plus pour un ensemble de q de mesure linéaire nulle tel que $|q|=1$. Cet ensemble exceptionnel peut être non dénombrable. Whittaker complète ensuite un th. de Hardy [Proc. London Math. Soc. (2) 3, 441 (1905)]: 1°) l'équation

$$g(qz) - g(z) = f(z), \quad (1)$$

$f(z)$ donnée, entière, $f(0) = 0$, $|q| = 1$, admet une solution ayant même ordre que $f(z)$, sauf au plus pour un ensemble de q de mesure nulle; 2°) pour $f(z) = e^z - 1$, (1) n'a pas de solutions régulières à l'origine pour un ensemble

non dénombrable de q . La démonstration repose sur l'étude du comportement de $|\sin nx|^{1/n}$ pour $n \rightarrow \infty$. G. Valiron (Paris).

Kantorovič, L.: Sur quelques méthodes de la détermination de la fonction qui effectue une représentation conforme. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 2, 229—235 (1933) [Russisch].

Um die Funktion zu ermitteln, welche die konforme Abbildung einer gegebenen Kurve auf den Einheitskreis leistet, werden, in mehr formeller Weise, Methoden angegeben, welche einerseits auf Systeme mit unendlich vielen Unbekannten zurückführen, andererseits sich auf sukzessive Approximation stützen. Karamata.

Jacob, Caius: Sur quelques problèmes mixtes dans une couronne circulaire. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1363—1365 (1933).

Gesucht ist 1. eine in einem Kreisring $R' < |z| < R$ reguläre Funktion $F_1(z) = U + iV$, die auf dem Rande fast überall den Relationen genügt:

$$\lambda U - \mu \frac{dU}{dn_i} = \varphi(\vartheta) \quad \text{für } z = Re^{i\vartheta}, \quad \lambda' U - \mu' \frac{dU}{dn_i} = \psi(\vartheta) \quad \text{für } z = R'e^{i\vartheta} \\ (0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

2. eine dort reguläre Funktion $F_2(z) = U + iV$, für welche fast überall auf den Rändern gilt:

$$\lambda U - \mu \frac{dU}{dn_i} = \varphi(\vartheta) \quad \text{für } z = Re^{i\vartheta}, \quad \lambda' V - \mu' \frac{dV}{dn_i} = \psi(\vartheta) \quad \text{für } z = R'e^{i\vartheta} \\ (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Dabei sind $\varphi(\vartheta), \psi(\vartheta)$ gegebene, nach Lebesgue integrable Funktionen, $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ reelle Parameter. Es wird in beiden Fällen (referierend) eine explizite Lösung angegeben, falls gewisse Bedingungen — im 1. Falle über $\varphi(\vartheta), \psi(\vartheta)$ und weitere über $\lambda, \lambda', \mu, \mu', R, R'$, im 2. Falle nur Relationen für $\lambda, \lambda', \mu, \mu', R, R'$ — erfüllt sind. — Wenn insbesondere $\lambda \mu' R + \lambda' \mu R' = 0$ ist, können die Fragen durch Quadraturen auf die Integration der Differentialgleichung $\lambda F(z) + \frac{\mu}{R} \frac{dF}{dz} = G(z)$ zurückgeführt werden, wo von $G(z)$ der Realteil auf gewissen Teilbögen der Randkreise und der Imaginärteil auf den anderen Randbögen bekannt ist. Danach kann in gewissen Fällen (s. Demtschenko, dies. Zbl. 1, 19) $G(z)$ bestimmt werden. Es gibt „im allgemeinen“ unendlich viele Lösungen für $F(z)$. S. Warschawski (Göttingen).

Bonder, Julian: Sur la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un arc symétrique de conique. Trav. Inst. aérodyn. Varsovie, Fasc. 6, 1—96 (1932).

The region outside a circle is mapped conformally on the region outside any parabolic arc by means of an integral reducing to elliptic integrals of the first and second kinds. A careful study is made of the transformation and the degenerate cases are examined. A method of numerical calculation is developed which permits the calculation of elliptic integrals of the first two types when the limits are imaginary use being made of Legendre's tables. — A transition is next made from the parabolic skeleton to a derived profile for a wing by mapping a circle which touches the circle mapping into the parabolic arc. A special study of the profile is made at the angle of no lift. It is found that the moment coefficient c_m diminishes as the parameter β of the conformal representation increases from negative to positive values. The coefficient c_m is smaller or greater than for Joukowski profiles according as $\beta \geq 0$. — Similar analysis is used to map the region outside a rectilinear segment on the region outside a symmetrical hyperbolic arc and the corresponding mapping for the region outside a symmetrical elliptic arc is also considered. H. Bateman (Pasadena).

Paatero, V.: Über Gebiete von beschränkter Randdrehung. Sonderdruck aus: Ann. Acad. Sci. Fennicae A 37, Nr 9 (1933) 20 S.

Enthält ergänzende Ausführungen zur Dissertation des Verf. (dies. Zbl. 1, 143). Für Gebiete von beschränkter Randdrehung (die bekanntlich eine Verallgemeinerung

der konvexen Gebiete bilden) wird zunächst bewiesen, daß der Rand rektifizierbar ist und fast überall eine bestimmte Krümmung besitzt. Für die Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ existiert fast überall auf dem Rande $|z| = 1$ eine allseitige erste Ableitung und in einem inneren Winkel sogar die zweite Ableitung. — Schließlich folgen Abschätzungen der zweiten und höheren Ableitungen. Es gilt z. B., wenn α die Randdrehung bezeichnet (für konvexe Gebiete ist $\alpha = 2\pi$),

$$|\zeta''(z)| \leq \frac{\alpha}{\pi} \frac{(1 + |z|)^{\frac{\alpha}{2\pi}-1}}{(1 - |z|)^{\frac{\alpha}{2\pi}+2}}.$$

Die Schranke ist genau. In ähnlicher Weise wird eine verallgemeinerte Rundungsschranke hergeleitet. *Ahlfors (Helsingfors).*

Doob, Joseph L.: The boundary values of analytic functions. II. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 418–451 (1933).

Es sei $\{f_n(z)\}$ eine Folge von in $|z| < 1$ regulären gleichmäßig beschränkten Funktionen. Nach Fatou existiert für fast alle z auf $|z| = 1$ $\lim_{r \uparrow 1} f_n(rz) = F_n(z)$.

Anknüpfend an die Verallgemeinerung des Vitalischen Satzes von Khintchine und Ostrowski wird nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Folge $\{F_n(z)\}$ gefragt, damit $\{f_n(z)\}$ in $|z| < 1$ (und daher in jedem echten Teilbereich gleichmäßig) konvergiert. Es werden in speziellen Fällen Beziehungen zwischen der Konvergenz der Randfunktionen $F_n(z)$ im Mittel auf einer Randmenge positiven Maßes und der Konvergenz der $f_n(z)$ im Innern hergeleitet. Das Hauptresultat lautet: $\{A_n\}$ und $\{A'_n\}$ seien Bögen auf $|z| = 1$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} m A_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} m A'_n > 0$, $S(A_n)$

resp. $S(A'_n)$ das von A_n bzw. A'_n und der zugehörigen Sehne begrenzte Segment. Dann läßt sich $f_n(z)$ in der Form $f_n(z) = g_n(z) \cdot h_n(z)$ schreiben, wo $g_n(z) \neq 0$ in $S(A_n)$, $h_n(z) \neq 0$ in $S(A'_n)$ sind und die Randfunktionen $G_n(z)$, $H_n(z)$ haben (Abspaltung passender Blaschkescher Produkte). Notwendig und hinreichend, damit $f_n(z) \rightarrow 0$ in $|z| \leq \rho < 1$ gilt, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\inf \{|G_n(z)|, E_n\}}{1 + \text{Oscill.} \{\text{arc } G_n(z), E_n\}} \cdot \frac{\inf \{|H_n(z)|, E'_n\}}{1 + \text{Oscill.} \{\text{arc } H_n(z), E'_n\}} = 0$$

für alle Teilmengen

$$E_n \subset A_n, E'_n \subset A'_n \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} m E_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} m E'_n > 0.$$

($\inf \{|G_n(z)|, E_n\}$ = untere Grenze von $|G_n(z)|$ auf E_n , $\text{Oscill.} \{\text{arc } G_n(z), E_n\}$ bedeutet die Schwankung von $\text{arc } G_n(z)$ auf E_n .) — Ferner werden notwendige und hinreichende Bedingungen für das Verhalten der Fatouschen Randfunktion $F(z)$ eines in $|z| < 1$ regulären, beschränkten $f(z)$ in der Umgebung eines Randpunktes e^{it} angegeben, damit $f(z)$ 1. den Randwert $\lim_{r \uparrow 1} f(re^{it}) = F(e^{it}) = \alpha$ und 2. allgemeiner den Häufungswert α bei tangentieller oder nichttangentieller Annäherung $z \rightarrow e^{it}$ ($|z| < 1$) hat.

Neben einigen Resultaten, die eine Beziehung zwischen der Existenz des Randwertes (Häufungswertes) und der Fast-Stetigkeit („Quasi-Fast-Stetigkeit“, wird in der Arbeit definiert) von $F(z)$ in e^{it} ergeben, wird der Satz bewiesen: 1. Ist in einer Umgebung von e^{it} $f(z) \neq \alpha$, so ist notwendig und hinreichend, damit $F(e^{it})$ definiert und $= \alpha$ ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\inf \{|F(z) - \alpha|, E_n\}}{1 + \text{Oscill.} \{\text{arc } (F(z) - \alpha), E_n\}} = 0 \quad (1)$$

für jede Folge meßbarer Mengen E_n , die je einem passenden Intervall A_n auf $|z| = 1$ mit dem Mittelpunkt e^{it} angehören mit der Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m A_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m E_n}{m A_n} > 0. \quad (2)$$

2. Damit $f(z)$ bei $z \rightarrow e^{it}$ den Häufungswert α hat, ist notwendig und hinreichend, daß es irgendeine Folge von gegen e^{it} konvergierenden Intervallen A_n auf $|z| = 1$ gibt,

so daß für jede meßbare Menge E auf $|z| = 1$ (1) und (2) mit $E_n = A_n \cdot E$ gilt. Sind hierbei A_n symmetrisch bezüglich e^{it} , so ist diese Bedingung auch notwendig und hinreichend, damit α nichttangentieller Häufungswert ist. — In zwei weiteren Abschnitten werden ähnliche Fragen für in $|z| < 1$ meromorphe Funktionen behandelt. (I. vgl. dies. Zbl. 3, 404.) S. Warschawski (Göttingen).

Nevanlinna, Rolf: Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion. (Zürich, Sitzg. v. 5.—12. IX. 1932.) Verh. internat. Math.-Kongr. 1, 221—239 (1932).

Bericht über die neuere Entwicklung der Theorie der analytischen Funktionen in der vom Vortragenden vertretenen Richtung. Kennzeichnend für diese Entwicklung ist bekanntlich, daß in erster Linie die Verzweigungsverhältnisse der Riemannschen Fläche als Ausgangspunkt der Betrachtungen gewählt werden. Man beschränkt sich dabei gewöhnlich auf die Untersuchung der einwertigen Funktionen, d. h. der Umkehrfunktionen der eindeutigen, meromorphen Funktionen. Der Vortragende hat gewisse neue Klassen dieser Funktionen aufgestellt und genau untersucht; sie führen zu bemerkenswerten und überaus schönen Verallgemeinerungen der klassischen Theorie der elliptischen Funktionen. In anderen Fällen werden mehr heuristische Betrachtungen angestellt, welche neue Fragestellungen von der größten Tragweite veranlassen. — Zu dem von Nevanlinna vertretenen Problemkomplex gehört auch die Frage von den inneren Entscheidungsgründen zwischen dem Grenzpunkt- und Grenzkreisfall. Die diesbezüglichen Kriterien werden aufgezählt. Ahlfors (Helsingfors).

Cecioni, Francesco: Osservazioni sopra alcuni tipi di aree e sulle loro curve caratteristiche nella teoria della rappresentazione conforme. Rend. Circ. mat. Palermo 57, 101—122 (1933).

Une aire, d'un ordre de connexion quelconque, appartenant à un plan ou, plus généralement, à une surface de Riemann est dite symétrique, lorsqu'elle est transformée en soi-même par une transformation conforme inverse à période 2, qui change en soi chacun de ses contours. Dans ce travail, avec plusieurs remarques intéressantes, se trouve démontré que les courbes caractéristiques [dans le sens de F. Schottky, J. reine angew. Math. 83, 300 (1877)] des aires symétriques sont des courbes (ortosymétriques), contenant une involution γ_2^1 qui change en soi-même chacun des circuits réels, en invertissant leurs sens; plus particulièrement, les courbes caractéristiques des aires planes symétriques sont les courbes hyperelliptiques de genre p qui ont le maximum nombre, $p + 1$, de circuits réels. Les courbes caractéristiques des aires qui admettent une transformation conforme à période 2 (directe ou inverse), sont les courbes (ortosymétriques) contenant une γ_2^1 , et réciproquement. Beniamino Segre (Bologna).

Pompeiu, D.: Sur un point de la théorie des fonctions algébriques. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 3, 164—168 (1933).

Algebraische Funktionen sind — abgesehen von ihren Singularitäten — stetig.

Ott-Heinrich Keller (Berlin).

Lettenmeyer, F.: Über den Koeffizientenkörper von Reihenentwicklungen, insbesondere algebraischer Funktionen. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 1, 103—127 (1933).

Die Arbeit knüpft an folgenden bekannten Satz an: (R) Ist

$$P(x; y) = A_0(x) + A_1(x)y + \dots + A_n(x)y^n$$

ein Polynom in y , bei dem die $A_\nu(x)$ Potenzreihen in x mit Koeffizienten aus einem Körper k der Charakteristik 0 bedeuten, so liegen die Koeffizienten einer Potenzreihe

$Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ ($\nu_0 \geq 0$), die für y eingesetzt die Gleichung $P(x; y) = 0$ formal befriedigt,

stets in einem algebraischen Oberkörper endlichen Grades über k , und zwar ist der Grad dieses Koeffizientenkörpers höchstens gleich dem Grad n von $P(x; y)$ in y . — Für diesen Satz, der ohne weiteres aus den bekannten formalen Existenzbeweisen für die annullierende Potenzreihe Y herausgelesen werden kann (vgl. etwa Hensel-Landsberg), gibt Verf. einen neuen Beweis, bei dem er die Existenz der annullierenden Po-

tenzreihe Y von vornherein voraussetzt. Dabei liefert dieser Beweis jedoch mehr als die Behauptung (R) . Er zeigt nämlich einmal, daß sich die Abschätzung für den Grad des Koeffizientenkörpers im allgemeinen verschärfen läßt, ferner, daß die Behauptung (R) mit dieser Verschärfung unter gewissen Einschränkungen auch für eine Gleichung $\mathfrak{P}(x, y) = 0$ gilt, wo auf der linken Seite allgemeiner eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma\sigma} x^{\sigma} y^{\sigma}$$

mit Koeffizienten aus k steht. Diese schärferen und weitergehenden Resultate lassen sich nach einfachen Transformationen zusammenfassen in den Satz: (L) Ist $\mathfrak{P}(x, y)$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten aus k , deren Anfangsglied a_{00} verschwindet, und hat $\mathfrak{P}(0, y)$ den Anfangsgrad s in y , so gehen die Koeffizienten einer Potenzreihe $Y = \sum_{v=1}^{\infty} c_v x^{\frac{v}{k}}$, die für y eingesetzt, der Gleichung $\mathfrak{P}(x, y) = 0$ genügt, stets einen algebraischen Oberkörper höchstens vom Grade s über k an. — Da Verf. den Nachdruck auf einen einfachen Beweis von (R) legt und (L) mehr als Nebenresultat betrachtet, vermeidet er jede Heranziehung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes, durch den ja (L) unmittelbar auf den bekannten Satz (R) zurückgeführt werden kann. *F. K. Schmidt.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Hadamard, Jacques, et Maurice Fréchet: Sur les probabilités discontinues des événements „en chaîne“. *Z. angew. Math. Mech.* 13, 92–97 (1933).

Bericht über die Geschichte und gegenwärtige Lage der Theorie der „verketteten“ Vorgänge für diskrete Folgen bei endlichem Wertevorrat der zufälligen Variablen.

A. Khintchine (Moskau).

Fréchet, Maurice: Les probabilités continues „en chaîne“. *Comment. math. helv.* 5, 175–245 (1933).

Man betrachtet einen beweglichen Punkt, welcher schrittweise in einem k -dimensionalen Bereich V sich bewegt, und zwar so, daß es eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(E, F)$ dafür gibt, daß dieser Punkt im Laufe eines Schrittes aus E in F übergeht. Die solche Bewegungen betreffenden Resultate von Hostinsky und vom Verf. sind in der vorliegenden Abhandlung systematisiert und vervollständigt. Man nennt dabei die Bewegung regulär, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte $P^{(n)}(E, F)$ des Übergangs aus E in F im Laufe von n Schritten mit $n \rightarrow +\infty$ gegen einen von E unabhängigen Limes $P(F)$ konvergiert und dabei $\int_V P(F) d\sigma_F = 1$ ist. Neben diesem

regulären Fall unterscheidet man noch mehrere andere Fälle. Neu ist, außer diesen feineren Unterscheidungen, die Behandlung gewisser Mittelwerte. Es seien nämlich $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ die konsekutiven Lagen des beweglichen Punktes und $Y(F)$ eine beschränkte reelle Funktion von F . Dann konvergiert der Mittelwert $EY(F_n)$ im regulären Falle gegen einen von der Anfangslage F_0 unabhängigen Limes

$$M = \int_V Y(F) P(F) d\sigma_F.$$

Die Streuung von $Y(F_n)$ konvergiert im regulären Falle gegen $\int_V Y^2(F) P(F) d\sigma_F - M^2$.

Es sei weiter A_n das arithmetische Mittel der ersten n Größen $Y(F_i)$. Im regulären Falle konvergiert der Mittelwert $E(A_n)$ unabhängig von der Anfangslage F_0 gegen M und die Streuung von A_n gegen Null. Die letzte Streuung ist dabei asymptotisch gleich μ^2/n , wobei μ eine nur von der Funktion $P(E, F)$ abhängige Konstante ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Bernstein, Serge: Sur l'équation différentielle de Fokker-Planck. *C. R. Acad. Sci., Paris* 196, 1062–1064 (1933).

Bei der üblichen Ableitung der Fokker-Planckschen Differentialgleichung, welcher die Limesverteilung einer stochastischen Reihe zu genügen hat, muß die Existenz

und Differenzierbarkeit dieser Limesverteilung vorausgesetzt werden. Es wird eine umfassende Klasse von Fällen angegeben, wo keine solche Limesverteilung existieren kann; darunter das stochastische Analogon des Differentialprozesses $dy/dt = y^2$ mit der Zusatzbedingung, daß die Streuung von Δy im Intervall Δt gleich $B\Delta t$ ($B = \text{konst.}$) ist. Ferner werden hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Fokker-Planckschen Gleichung aufgestellt; das Verhalten der Limesverteilung für große t -Werte wird untersucht; es werden Bedingungen dafür angegeben, daß sich für $t \rightarrow \infty$ eine Grenzverteilung ergibt und daß diese ihrerseits einer Fokker-Planckschen Gleichung genügt. Beweise werden nicht angeführt. Die Note enthält mehrere interessante und lehrreiche Beispiele. *A. Khintchine* (Moskau).

Kudela, Fr.: Sur quelques inégalités entre les moments absolus d'ordre positif d'une suite de variables aléatoires indépendantes et le second théorème-limite du calcul des probabilités au domaine de la loi de Laplace-Gauss dans la formulation de Liapounoff. *Aktuár. Vědy* 3, 102–109 u. 174–184 (1932).

Es werden einige Momentenungleichungen aufgestellt und zur Diskussion der Ljapounoffschen Bedingung für die Gültigkeit des Laplaceschen Grenzwertsatzes verwendet.

Bemerkungen: 1. Die Ableitung der Hauptergebnisse (17) und (20) ist falsch; 2. aus der Ljapounoffschen Bedingung (30) werden als Spezialfälle einfachere Bedingungen abgeleitet, die fast alle falsch sind; so ist z. B. die Divergenz der Reihe der Streuungen bekanntlich für den Grenzwertsatz unzureichend; 3. diese (in der Regel falschen) Spezialfälle bezeichnet Verf. als „weniger bindende“ und „allgemeinere“ Bedingungen; 4. die Beschränktheit der Streuungen wird (S. 180) mit der Beschränktheit der zufälligen Variablen selbst identifiziert, was selbstverständlich unzulässig ist. *A. Khintchine* (Moskau).

Kolmogorov, A.: Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Bull. Acad. Sci. URSS*, VII. s. Nr 3, 363–372 (1933).

Unter Benutzung einer neuen Methode von Petrovski wird der Laplace-Ljapounoffsche Satz sowie die von Kolmogoroff (*Bull. Acad. Sci. URSS* 1931, 959; dies. Zbl. 3, 357) gegebene Verallgemeinerung desselben neuerlich bewiesen.

Bruno de Finetti (Trieste).

Krutkov, G.: Sur l'ensemble canonique. *C. R. Acad. Sci. URSS A*, Nr 1, 3–9 (1933) [Russisch].

Die Note bringt einen auf der Darwin-Fowlerschen „Sattelpunktmethode“ gegründeten Beweis dafür, daß ein „kleiner“ Teil eines mikrokanonisch in der Phase verteilten Systems selbst angenähert kanonisch in der Phase verteilt ist. Es sei bemerkt, daß im wesentlichen derselbe Beweis vom Ref. vor einigen Jahren veröffentlicht wurde [Ber. des Sem. für Wahrscheinlichkeitstheorie und math. Statistik an der ersten Moskauer Univ., Lieferung 1, S. 1–11 (1930)], wobei auch die in der gegenwärtigen Abhandlung fehlende Abschätzung des Restglieds durchgeführt war. Es läßt sich übrigens, wie Ref. in einer bald erscheinenden Note zu zeigen beabsichtigt, die Anwendung der mit schwerfälligen Rechnungen verbundenen Darwin-Fowlerschen Methode gänzlich vermeiden; der Beweis des Satzes ergibt sich vielmehr in wenigen Zeilen und ohne jede Rechnung aus dem klassischen Laplaceschen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *A. Khintchine* (Moskau).

Cramér, Harald: Ein Grenzproblem in der Spieltheorie. *Z. angew. Math. Mech.* 13, 76–79 (1933).

Im Anschluß an eine Aufgabe der Versicherungslehre wird folgendes Problem behandelt: eine zufällige Variable erhält in jedem Zeitintervall dt mit Sicherheit den Zuwachs $(1 + \lambda) dt$ ($\lambda > 0$) und kann außerdem von Zeit zu Zeit zufallsmäßig eine momentane Verminderung um 1 erfahren, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein solcher Sprung während eines infinitesimalen Zeitintervalls dt stattfindet, dt beträgt; gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit $\psi(a)$ dafür, daß die zufällige Variable, falls sie bei $t = 0$ den Wert a hat, einmal gleich Null wird. Die Antwort wird durch

$$\psi(a) \sim \frac{\lambda}{(1 + \lambda)R - \lambda} e^{-Ra} \quad (a \rightarrow \infty)$$

gegeben, wo R die positive Wurzel der Gleichung

$$e^R - 1 = (1 + \lambda) R \quad A. Khintchine (Moskau).$$

bedeutet.

Cvetnič, L.: Über die mittlere Abweichung. *Aktuár. Vědy* 3, 165–174 (1932).

Romanovsky, V.: Sur une généralisation de la loi sinusoidale limite. *Rend. Circ. mat. Palermo* 57, 130–136 (1933).

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. über denselben Gegenstand (vgl. dies. Zbl. 4, 264). Es wird gezeigt, daß die a. a. O. erwähnte Slutskysche Konstruktion auch dann zum angestrebten Ziele führt, wenn die Ausgangsvariablen derart miteinander stochastisch verbunden sind, daß der Korrelationskoeffizient $R_{|i-k|}$ zwischen x_i und x_k von $|i-k|$ allein abhängt. Allerdings müssen dabei die R_n noch eine gewisse Zusatzbedingung erfüllen, deren Wortlaut kompliziert ist und deren Sinn nur in Spezialfällen unmittelbar klar wird.

A. Khintchine (Moskau).

Guldberg, Alf: Les fonctions de fréquence discontinues et les séries statistiques. *Ann. Inst. H. Poincaré* 3, 229–278 (1933).

Ausführlicher Bericht über die mathematischen Hilfsmittel der beschreibenden Statistik. Zunächst werden die wichtigsten statistischen Maßzahlen (Momente, Faktorialmomente, Thielesche Semiinvarianten) besprochen und für die gebräuchlichsten Verteilungsfunktionen berechnet. Dann folgt eine Aufzählung und Diskussion der statistischen Interpolationsansätze (Pearsonsche Kurven, Zerlegungen von Bruns und Charlier u. dgl. m.). Das Hauptproblem der Abhandlung bilden jedoch die Methoden, die für eine gegebene statistische Reihe einen „passenden“ Interpolationstypus zu wählen gestatten. Nachdem die Lexissche Dispersionstheorie von diesem Standpunkte aus einer Kritik unterworfen wird, entwickelt Verf. an zahlreichen Beispielen eine Methode, die im wesentlichen darauf hinauskommt, daß für die versuchsmäßig gewählte Interpolationsfunktion eine Differenzengleichung aufgestellt wird, welcher im Fall einer „richtigen“ Wahl auch das zur Behandlung stehende empirische Material zu genügen hat.

A. Khintchine (Moskau).

Yuan, Pae-Tsi: On the logarithmic frequency distribution and the semi-logarithmic correlation surface. *Ann. math. Statist.* 4, 30–74 (1933).

In Part I, the author examines systematically the uni-modal three-parameter distribution function expressed in standard units by $\frac{1}{\sqrt{2\pi} c(z-a)} e^{-\frac{1}{2c^2} \left(\log \frac{z-a}{b} \right)^2}$. This

“logarithmic frequency function” includes the normal function as a limiting case. It has been mentioned by Galton, Pearson, Jørgensen, Wicksell and others. For small third standard moment, this function differs little from Pearson’s Type III curve. In Part II, extension is made to surfaces. The “logarithmic frequency surface” in which distribution is logarithmic on both axes, has been treated by S. D. Wicksell in several papers appearing in 1917 and 1918. The author examines the analogous “semi-logarithmic correlation surface”, for which one marginal distribution is normal, the other logarithmic.

Albert A. Bennett (Providence).

Gumbel, E.-J.: Représentation des répartitions unimodales, unilatéralement limitées. *C. R. Acad. Sci., Paris* 196, 1268–1269 (1933).

● **Traité du calcul des probabilités et de ses applications.** Publié par Émile Borel. Tome 3. Les applications de la théorie des probabilités aux sciences économiques et aux sciences biologiques. Fasc. 4. — Galbrun, Henri: Théorie mathématique de l’assurance invalidité et de l’assurance nuptialité. Définitions et relations fondamentales. Paris: Gauthier-Villars et Cie. 1933. 156 S. Frs. 40.—

Das mit großer Klarheit und mathematischer Exaktheit geschriebene Buch behandelt die folgende allgemeine Sachlage: Aus einer Gesamtheit A (lebende Aktive bzw. Ledige) scheiden die Mitglieder durch eines der Zufallsereignisse D (Tod) oder E (Invalidität bzw. Heirat) aus; vom Ereignis D wird vorausgesetzt, daß jedes Mitglied nur einmal davon betroffen werden kann und damit vollständig aus den Betrachtungen ausscheidet; E kann für jedes Mitglied von A ebenfalls nur einmal eintreten, wodurch dieses Mitglied aus A in eine

andere Gesamtheit B (Invalide bzw. Verheiratete) hinüberkommt, in welcher es dann so lange verbleibt, bis es durch Eintritt des Ereignisses D endgültig ausscheidet. — Alle Überlegungen werden mit Hilfe der kontinuierlichen Methode durchgeführt und der Zusammenhang zwischen den kontinuierlichen und den diskontinuierlichen bzw. empirischen Größen wird eingehend untersucht. Aus der angeführten Formulierung des Hauptproblems folgt, daß sowohl die Möglichkeit einer Reaktivierung (in der Invaliditätsversicherung), als auch diejenige verwitwet zu werden (in der Heiratsversicherung) und durch eines dieser Ereignisse wieder in die Ausgangsklasse A zurückzukehren, nicht in Betracht gezogen wird; dies ist um so mehr zu bedauern, als bei der angewendeten kontinuierlichen Methode z. B. die E. Schönbaumschen Ergebnisse über die Integralgleichungen der Invaliditätsversicherung sehr gut einzufügen gewesen wären. — Die Anwendungen des im vorliegenden Buche fertiggestellten theoretischen Apparates auf praktische Aufgaben der Invaliditäts- bzw. Heiratsversicherung werden einem weiteren Bande vorbehalten. *Birnbaum* (Lwów).

Berger, Alfred: Studien zur Versicherungsmathematik. Assekuranz-Jb. 52, 3—31 (1933).

Die Arbeit zerfällt in vier lose zusammenhängende Abschnitte. Im ersten bildet die folgende, von E. Blaschke und O. P. Gram angegebene Eigenschaft der Gompertz-Makehamschen Sterbeformel den Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen: Kennt man die Werte der temporären Leibrenten $a_{x:\overline{n}|}$ für alle Zinsfüße und eine Sterbensintensität $\mu_x = \alpha + \beta e^{\gamma x}$ mit gewissen Werten der Parameter α, β, γ , so kann man daraus mit Hilfe sehr einfacher Beziehungen die temporären Leibrenten für jeden Zinsfuß und jede durch eine Formel $\bar{\mu}_x = \bar{\alpha} + \bar{\beta} e^{\bar{\gamma} x}$ gegebene Sterbensintensität erhalten. Eine Tafel, welche die $a_{x:\overline{n}|}$ für eine Sterbensintensität $\mu_x = \alpha + \beta e^{\gamma x}$ und hinreichend viele Zinsfüße enthält, bildet daher eine Universaltafel, da sie mit Leichtigkeit die $a_{x:\overline{n}|}$ für andere Sterbensintensitäten zu finden gestattet. Verf. beweist nun den folgenden allgemeinen Satz: Damit zwischen den kontinuierlichen Leibrentenwerten $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ und $\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{(1)}$, welche auf Grund der Sterbensintensitäten μ_x bzw. $\mu_x^{(1)}$ und der Zinsintensitäten δ bzw. $\delta^{(1)}$ gerechnet sind, für alle x und n die Beziehung besteht $\bar{a}_{x+t:\overline{n}|}^{(1)} = \frac{1}{r} \cdot a_{rx+rt+\delta t:\overline{n}|}$, ist die Relation $\mu_{x+t}^{(1)} + \delta^{(1)} = r(\mu_{rx+rt+\delta} + \delta)$ notwendig und hinreichend. Unter der speziellen Annahme, daß μ_x und $\mu_x^{(1)}$ Gompertz-Makeham'sche Sterbensintensitäten sind, folgen aus diesem allgemeinen Satze unmittelbar die Ergebnisse von Blaschke und Gram. Der Satz wird noch auf die Prämienreserven sehr allgemeiner Versicherungskombinationen verallgemeinert. — Im zweiten Abschnitt wird für eine von A. W. Evans (J. I. A. 56, 220) angegebene Methode zur Berechnung der einseitigen Überlebenskapitalversicherung ein besonders einfacher Beweis angegeben. Diese Methode gilt nur für nach Gompertz-Makeham ausgeglichene Sterbetafeln, und der vom Verf. angegebene Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß für $\mu_x = \alpha + \beta q^x$ und für jedes positive integrierbare $f(x)$ der Mittelwertsatz

$$\int_0^n f(t) \mu_{u+t} dt = \mu_{u+\theta} \int_0^n f(t) dt \quad (*)$$

gilt, wo θ zwar von $f(t)$ und von n , jedoch nicht von u abhängt. Verf. zeigt, daß die einzigen Funktionen μ_x , welche samt ihren ersten Ableitungen monoton zunehmen und für ein positives $f(x)$ die Beziehungen (*) mit von u unabhängigem θ erfüllen, die linearen und die Gompertz-Makehamschen Funktionen sind. — Im dritten Abschnitt wird ein von Broggi stammendes Ergebnis, betreffend die Verallgemeinerungsmöglichkeit der Beziehung $\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x$, auf sehr einfachem Wege und im vierten Abschnitt werden von M. Jacob, E. Lenzi und A. Loewy angegebene Darstellungen von Prämienreserven nahezu ohne jede Rechnung hergeleitet. *Birnbaum* (Lwów).

Insolera, Filadelfo: Probabilità e sopravvivenza. Atti Ist. naz. Assicurat. 5, 165 bis 182 (1933).

L'autore ricorda i due postulati che il Bohlmann ha posto a fondamento della teoria matematica della sopravvivenza, e precisamente: I. Per un dato numero positivo ε e per ogni x e y tali che sia $\varepsilon \leq x \leq y \leq \omega$, in cui ω rappresenta l'età estrema, esiste una probabilità $p(x, y)$ che ogni individuo di età x sopravviva all'età y . II. La