Werk

Titel: Analysis (Dirichletsche Reihen, Zetafunktion s. Algebra, Zahlentheorie; spezielle...

Jahr: 1933

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0006|log39

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

diesem zweiten Teil wird eine Schranke für die Anzahl dieser eigentlichen Darstellungen hergeleitet. Es wird die Existenz einer nur von F, nicht von t und $P_1, \ldots, P_t$ abhängigen positiven Zahl $c = c(F)$ bewiesen derart, daß höchstens c^{t+1} eigentliche Darstellungen von Potenzprodukten der $P_1, \ldots, P_t$ durch F vorhanden sind. Insbesondere ist also die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer gegebenen ganzrationalen Zahl g mit t verschiedenen Primteilern durch c^{t+1} beschränkt; für Primzahlen $g = P$ also durch c selbst, von $g = P$ ganz unabhängig. — Als weitere Folgerung ergibt sich, daß die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ganzrationalen Zahl g von der Form $O(|g|^{\varepsilon})$ mit beliebig kleinem positiven ε ist. Schließlich wird noch ein Satz von T. Nagell verallgemeinert, nach dem für ein ganzrationalzahliges Polynom $f(x)$ mit nicht lauter rationalen Wurzeln der größte Primteiler des Produkts $f(1) \ldots f(p)$ mit p von höherer Ordnung als p unendlich wird. Für Binärformen F (wie oben) strebt der größte Primteiler von $F(p_1, q_1) \ldots F(p_m, q_m)$ für eine wachsende Anzahl m von verschiedenen teilerfremden Argumentpaaren p_μ, q_μ zu Unendlich mindestens wie $\log m \log\log m$. *H. Hasse* (Marburg).

Boehle, Karl: Über die Transzendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten (Verallgemeinerung eines Satzes von A. Gelfond). Math. Ann. **108**, 56—74 (1933).

Die Gelfondsche Beweismethode [C. R. Acad. Sci., Paris **189**, 1224 (1929)] wird verallgemeinert und damit bewiesen: „Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s$ linear unabhängige Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K s-ten Grades ($s \geqq 2$), ist ferner $a(a-1) \neq 0$ und a sonst beliebig, so wird mindestens eine der Zahlen $a^{\vartheta_1}, a^{\vartheta_2}, \ldots, a^{\vartheta_s}$ transzendent."

Beweis: K habe die Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$; von den zu K konjugierten Körpern seien $K^{(1)}, \ldots, K^{(r_1)}$ reell, $K^{(r_1+l)}$ und $K^{(r_1+r_2+l)}$ für $l = 1, 2, \ldots, r_2$ konjugiert komplex ($r_1 + 2r_2 = s$). Jeder ganzen Zahl ζ von K mit den Konjugierten $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(s)}$ läßt sich mittels $x_k(\zeta) = \zeta^{(k)}$ für $k = 1, 2, \ldots, r_1$; $x_k(\zeta) = \dfrac{\zeta^{(k)} + \zeta^{(k+r_2)}}{\sqrt{2}}$ für $k = r_1+1, r_1+2, \ldots, r_1+r_2$; $x_k(\zeta) = \dfrac{\zeta^{(k-r_2)} - \zeta^{(k)}}{i\sqrt{2}}$ für $k = r_1+r_2+1, r_1+r_2+2, \ldots, s$ ein reeller Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ im s-dimensionalen Raum zuordnen; diese Punkte bilden ein Punktgitter. Sei $q(\zeta) = \max_{k=1,2,\ldots,s}(|x_k(\zeta)|)$. Die ganzen Zahlen aus K werden angeordnet in eine Folge $\zeta_0 = 0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$, so daß $q(\zeta_m) \leqq q(\zeta_n)$ für $m < n$ ist und jede Zahl ζ genau einmal vorkommt. Dann besteht eine konvergente Interpolationsreihe $a^z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(z)$ mit $P_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \zeta_k)$, $b_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{a^z\,dz}{P_{n+1}(z)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f(\zeta_k)}{\pi_k}$, $\pi_k = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n}(\zeta_k - \zeta_l)$; der Integrationsweg C ist ein Kreis um $z = 0$, in dem alle Punkte $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ liegen. Sei jetzt der Satz falsch; dann erzeugen $a^{\vartheta_1}, a^{\vartheta_2}, \ldots, a^{\vartheta_s}$ einen Oberkörper M von K, in dem alle Zahlen a^{ζ_n}, also auch b_n liegen. Ideal- und Gitterpunktsbetrachtungen führen zu der Konstruktion einer Zahl $H_n \neq 0$ aus M, so daß $H_n b_n$ ganz ist; dieses Produkt und seine Konjugierten in bezug auf M genügen den Ungleichungen $|H_n b_n| \leqq e^{-\frac{s-1}{s} n \log n + O(n)}$, $|H_n^{(h)} b_n^{(h)}| \leqq e^{O(n)}$ ($h = 1, 2, \ldots, m$), so daß für großes n $|N(H_n b_n)| \leqq e^{-\frac{s-1}{s} n + O(n)} < 1$, also $b_n = 0$ ist; dann müßte die Funktion a^z ein Polynom sein, und das ist falsch. *K. Mahler* (Krefeld).

Analysis.

Ascoli, G.: Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor nel campo reale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 604—606 (1932).

Pringsheim hat [Math. Ann. **44**, 57—82 (1894)] bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Entwicklung

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + h^n/n!\,f^{(n)}(a) + \cdots$$

für $0 \leqq h < R$ ist, daß $f(x)$ in a (rechts) unbeschränkt differenzierbar ist und daß für

jedes x zwischen a und $a + R$ und für jedes r, das der Ungleichung $0 < r < R$ genügt, der Ausdruck (Rest)

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} h^n f^{(n)}(a + \theta h)$$

als Funktion von θ und h betrachtet, im Gebiet $0 \leqq \theta \leqq 1$, $0 \leqq h \leqq r$ für $n = \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. — Der Satz bleibt auch für die allgemeinere (von Schlömilch und Roche angegebene) Form des Restes

$$R_n^{(h)} = \frac{(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} h^n f^{(n)}(a + \theta h)$$

richtig, wenn und nur wenn $\lim_{n\to\infty} p/n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ ist. Weiter folgt noch ein zweiter Satz, der diesen als besonderen Fall enthält. Die Beweise sollen in den Atti Accad. Sci. Torino erscheinen. — Anhangsweise wird ein Beweis von Fubini für einen Satz von Bernstein und den genannten Satz von Pringsheim [Atti Accad. Sci. Torino **51**, 896—898 (1915—1916)] vereinfacht. *L. Schrutka* (Wien).

Pfeiffer, G.: La simplification des recherches de L. Bianchi, généralisantes le caractère de S. Lie, que les paramètres soient essentiels. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 420—426 (1932).

Die Arbeit enthält eine übrigens unwesentliche Vereinfachung eines von L. Bianchi stammenden Verfahrens zur Ermittlung der Anzahl der in einem Funktionensysteme vorhandenen wesentlichen Parameter (L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni, S. 30—36 Pisa 1918.] *O. Borůvka.*

Aliprandi, Giuseppe: Sui metodi di estrapolazione parabolica e dei „quozienti". Atti Mem. Accad. Sci. Padova, N. s. **48**, 221—228 (1932).

L'a. generalizza il procedimento indicato con il nome „estrapolazione per quozienti". *Autoreferat.*

Khintchine, A.: Über eine Ungleichung. Rec. math. Soc. math. Moscou **39**, Nr 3, 35—39 (1932).

Verf. beweist: Ist eine quadratische Matrix von q Zeilen gegeben, in der A Elemente den Wert 1 und die übrigen den Wert 0 haben, so ist: Summe der Quadrate der Zeilensummen + Summe der Quadrate der Spaltensummen $\leqq A\left(q + \frac{A}{q}\right)$. Der Beweis erfolgt in 2 Schritten: Zunächst wird gezeigt, daß man sich auf Matrizen beschränken darf, in denen rechts von jeder Null und über jeder Null keine Eins steht. In diesem Falle läßt sich der Satz leicht durch eine geometrische Induktion beweisen. — Durch Grenzübergang erhält man die folgende Integralabschätzung: Ist $f(x)$ im Intervall $(0 \ldots q)$ monoton nicht steigend, $f(0) = q$, $f(q) = 0$,

$$\int_0^q f(x)\,dx = A, \quad \text{so ist} \quad \int_0^q f^2(x)\,dx + 2\int_0^q x f(x)\,dx \leqq A\left(q + \frac{A}{q}\right).$$

Hans Heilbronn (Göttingen).

Abramesco, N.: Les polynomes orthogonaux. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **24**, 67—87 (1932).

The paper contains a lucid, although concise, exposition of the fundamental properties of orthogonal Tchebycheff polynomials $P_n(x)$, of degree $n = 0, 1, 2, \ldots$, corresponding to a given interval (a, b) and to a characteristic function $\varphi(x)$ therein integrable and positive. It also contains a short bibliography on the subject. The topics covered are as follows. a) Existence and uniqueness (disregarding constant factors) of $P_n(x)$. b) Representation of $P_n(x)$ as a quotient of two determinants. c) For a, b finite, the representation $\varphi(x) P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (b-x)^n \psi_n(x)]$, $\psi_n(x)$ finite for $x = a, b$, which clearly shows the nature of the zeros of $P_n(x)$. d) The generating function for $P_n(x)$, when taking $\psi_n(x)$ independent on n: $\psi_n(x) = (x-a)^\lambda (b-x)^N$, which leads to Jacobi polynomials (to which also belong the hypergeometric poly-

nomials of Darboux. Ref.), satisfying a differential equation of a known type. e) The linear recurrence-relation connecting P_{n+2}, P_{n+1}, and P_n. f) Existence and explicite expression for $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n(x)}$. This is established by means of a theorem of G. Szegö on a certain class of determinants [Math. Ann. **76**, 490—503 (1915)] without making use of the asymptotic expressions $(n \to \infty)$ of the elements of the above recurrence-relation [which give, for $a \leqq x \leqq b$ finite, a more precise result concerning $\lim_{n\to\infty} P_{n+1}(x)/P_n(x)$. Ref.]. In closing the author mentions the relation of the sequence $\{P_n(x)\}$ to algebraic continued fractions and their application to mechanical quadratures. *J. Shohat* (Philadelphia).

Wundheiler, Alexandre: Une démonstration simple de la formule d'interpolation de S. Bernstein. Enseignement math. **31**, 75—77 (1932).

L'auteur retrouve la démonstration de la formule de S. Bernstein

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

fondée sur la remarque que

$$x^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^p \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k},$$

sans avoir eu connaissance probablement que la même idée a été utilisée par S. Bernstein lui même (Note „Sur les séries normales" à la fin du tome II des „Leçons sur les principes de l'analyse" de R. d'Adhémar, 267—270) pour établir que toute fonction continue est développable en une série absolument et uniformément convergente de la forme $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{pq} x^p (1-x)^q$ sur (0,1). *S. Bernstein* (Charkow).

Shohat, J.: On interpolation. Ann. of Math., II. s. **34**, 130—146 (1933).

L'auteur étudie la convergence des polynomes interpôlateurs de dégré $2n-1$

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\varphi''(x_i)}{\varphi'(x_i)}(x-x_i) + 1\right]\left[\frac{\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}\right]^2 y_i, \qquad (1)$$

où $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$, $y_i = f(x_i)$, vers la fonction $f(x)$, dans le cas où $\varphi(x)$ sont des polynomes orthogonaux de Jacobi (J), Laguerre (L) ou Hermite (H) et complète sur certains points les résultats presque simultanés de G. Szegö („Über gewisse Polynome ...", ce Zbl. **5**, 13) ainsi que les résultats antérieurs de L. Fejer. En raprochant la formule (1) à celle de la formule de quadrature mécanique correspondante, il la présente sous la forme

$$\Omega(x) = \sigma_n \sum_{1}^{n} H_i b_i(x) h_i^2(x) y_i,$$

où $\sigma_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ dans le cas (J) et $\sigma_n = O(1)$ dans les deux autres cas, H_i désignant les coefficients de la quadrature mécanique relatifs aux polynomes J, L, H, respectivement,

$$h_i(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-x_i)}, \qquad b_i(x) = A(x_i) + (x-x_i)B(x_i),$$

avec $A(x) = 1 - x^2$, x, 1 et $B(x) = \alpha - \beta - (\alpha+\beta)x$, $\alpha - x$, $-2x$, respectivement, et après avoir observé que dans un intervalle fixe contenant x_i, on a $b_i(x) > 0$, l'auteur obtient les théorèmes suivants (dont j'abrège un peu les détails): 1) $f(x)$ étant supposée bornée, si $\varphi(x)$ sont des polynomes (J) avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\Omega(x)$ converge vers $f(x)$ en touts les points de continuité de $f(x)$ intérieurs à $(-1, +1)$; si, de plus $\alpha < 1$, $\beta < 1$, la convergence est uniforme sur le segment fermé $(-1, +1)$, lorsque la fonction $f(x)$ reste continue sur tout ce segment. 2) Dans le cas (L) avec $\alpha > 0$, $\Omega(x)$ converge vers $f(x)$ pour toute valeur $x > 0$, en supposant que $f(x)$ est borné et

$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+1} |f(x)|\, dx$ a un sens, la convergence étant uniforme en tout intervalle fermé (ε, A), où $f(x)$ est continue ($\varepsilon > 0$); si $\alpha < 1$, on a aussi $\Omega(0) \to f(0)$. 3) Dans le cas (H), on a $\Omega(x) \to f(x)$ en tous les points de continuité de $f(x)$, en supposant $f(x)$ borné et $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 |f(x)|\, dx$ ayant un sens. En utilisant les mêmes considérations, l'auteur étudie la convergence de la formule d'interpôlation $M(x)$ de Lagrange et démontre dans les cas correspondants: (J) $M(x) \to f(x)$ uniformément en tout intervalle intérieur à $(-1, +1)$, où $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $k > \frac{1}{2}$; (L ou H) $M(x) \to f(x)$ en tout intervalle, où $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $k > \frac{1}{4}$ [dans le cas (L) il faut de plus que $x > 0$]. *S. Bernstein.*

Walsh, J. L.: Interpolation and an analogue of the Laurent development. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **19**, 203—207 (1933).

Verf. betrachtet folgende Art von Interpolation einer auf den Einheitskreis definierten Funktion $f(z)$, die sich so zur Lagrangeschen Interpolation in den n-ten Einheitswurzeln verhält, wie die Laurentsche Reihe zur Taylorschen. Es sei $r_{2n}(z)$ diejenige (eindeutig bestimmte) Funktion von der Form $r'_n(z) + r''_n(z)$ — wobei $r'_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades von z, $r''_n(z)$ aber ein Polynom n-ten Grades von z^{-1} ohne Absolutglied bedeutet —, welche in den $(2n+1)$-ten Einheitswurzeln dieselben Werte annimmt wie $f(z)$. Für den Fall, daß $f(z)$ in einem Ringgebiet $1/R < |z| < R$ $(R > 1)$ regulär ist, wird bewiesen, daß $r_{2n}(z)$ dortselbst für $n \to \infty$ gegen $f(z)$ konvergiert, und zwar für $R_1 < R$ gleichmäßig im Ringgebiet $1/R_1 \leqq |z| \leqq R_1$. Bezeichnen ferner $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die beiden Teile der Laurentschen Entwicklung von $f(z)$ im Ringgebiet $1/R < |z| < R$ [$f_1(z)$ Potenzreihe in z, $f_2(z)$ Potenzreihe ohne Absolutglied in z^{-1}], so gilt für $|z| < R$ (und zwar gleichmäßig für $|z| \leqq R_1$) $r'_n(z) \to f_1(z)$, für $|z| > 1/R$ (und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq 1/R_1$) $r''_n(z) \to f_2(z)$. Der Beweis wird mit Hilfe eines Satzes von Jackson über trigonometrische Interpolation (The theory of approximation, New York 1930, S. 121, Theorem I) erbracht. — Für den Fall einer auf dem Einheitskreis nur stetigen (oder auch nur im Riemannschen Sinn integrierbaren) Funktion $f(z)$ wird für $|z| < 1$ (und zwar gleichmäßig für $|z| \leqq r < 1$) $r'_n(z) \to f_1(z)$, für $|z| > 1$ (und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq R > 1$) $r''_n(z) \to f_2(z)$ bewiesen, wobei $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in diesem Falle durch die üblichen Integraldarstellungen zu definieren sind. Der Beweis geschieht durch die Vergleichung der (zur Lagrangeschen analogen) Interpolationsformeln mit gewissen Näherungssummen der Integrale, ähnlich wie beim Beweis des analogen Satzes für Lagrangesche Interpolation in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **4**, 209; vgl. auch Fejér, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1918**, 327—328.) — Schließlich wird durch ein Beispiel gezeigt, daß sich ein Satz des Verf. über die Beziehung zwischen Lagrangescher Interpolation und bester Approximation im Sinne der kleinsten Quadrate (aus der obenerwähnten Arbeit) nicht auf die hier betrachtete Interpolation übertragen läßt. *Kalmár* (Szeged).

Wintner, Aurel: Bemerkung zum Eindeutigkeitssatz der Laplaceschen Transformierten. Math. Z. **36**, 638—640 (1933).

Ist $\varphi(t)$ auf $(0; +\infty)$ von beschränkter Schwankung und

$$L(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\, d\varphi(t) = 0$$

für $z = z_n$, $0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_n < \cdots$, mit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z_n} = +\infty,$$

so ist $L(z)$ identisch gleich Null, so daß auch $\varphi(t)$ in allen ihren Stetigkeitspunkten verschwindet. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

McCrea, W. H.: Operational proofs of some identities. Math. Gaz. **17**, 43—45 (1933).

An einigen Beispielen (Besselsche, Legendresche Funktionen, parabolische Zylinderfunktionen) wird die Möglichkeit veranschaulicht, gewisse Identitäten zwischen diesen Funktionen in einfacher Weise durch Anwendung von Operatorrechnungen zu gewinnen. *Lüneburg* (Göttingen).

Kogbetliantz, E.: Sur la série de Laguerre. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 523—525 (1933).

L'auteur montre que le procédé de sommation d'Euler (E, k) s'applique souvent aux séries

$$f(x) \sim \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+1)\, L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha L_n^{(\alpha)} f(u)\, du .$$

Les résultats de l'auteur sont applicables si, outre quelques restrictions usuelles, on suppose que $f(x) = O(e^{qx})$ $(q < 1)$. On ne peut pas dans ces conditions affirmer la sommabilité (c, δ). [Voir pour les notations C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 387 (1931) et **194**, 1422 (1932); ce Zbl. **2**, 255 et **4**, 210]. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Kogbetliantz, E.: Sur la détermination du saut $D(x_0)$ de $f(x)$. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 464—466 (1933).

Ausgehend von den Formalentwicklungen einer Funktion in Reihen, die nach Hermiteschen und Laguerreschen Polynomen fortschreiten, gibt Verf., ohne Beweis, Ausdrücke, welche einerseits durch die Poissonsche Summe, andererseits durch die arithmetischen Mittel der Glieder der Formalentwicklung von $f'(x)$ den Sprung $f(x+0) - f(x-0)$ bestimmen. *Karamata* (Beograd).

Winn, C. E.: On absolute summability for any positive order. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 173—178 (1933).

Absolute (C, k)-Summierbarkeit im Sinne von Fekete wird als „$|C, k|$-Summierbarkeit" bezeichnet. Verf. dehnt die folgenden von Fekete [Math. természett. Értes. 1911 (719—726)] für ganzzahlige positive Ordnungen bewiesenen Sätze auf beliebige positive Ordnungen aus: I. Wenn eine Reihe $|C, k|$-summierbar ist $(k \geqq 0)$, dann ist sie für jedes $\varkappa \geqq k$ auch $|C, \varkappa|$-summierbar. II. Wenn die Reihen $\sum u_\nu$ und $\sum v_\nu$ $|C, k|$- bzw. $|C, l|$-summierbar sind $(k \geqq 0, l \geqq 0)$, dann ist die Cauchysche Produktreihe $\sum(u_0 v_\nu + v_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0)$ $|C, k+l|$-summierbar. *R. Schmidt* (Kiel).

Walsh, C. E.: A note on sequences determined by a recurrence relation. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 147—150 (1932).

En s'appuyant sur le théorème connu de M. O. Toeplitz [Prace mat. fiz. **22**, 113—119 (1911)] concernant les conditions de convergence de la suite

$$\{c_{n1}\theta_1 + c_{n2}\theta_2 + \cdots + c_{nn}\theta_n\}, \quad \text{où} \quad \theta_n \to 0,$$

l'auteur démontre quelques propositions rélatives à la convergence des suites $\{u_n\}$ satisfaisant à une rélation recurrente que voici:

$$u_n = a_n u_{n-1} + b_n u_{n-2} + c_n \theta_n, \quad \text{où} \quad \theta_n \to 0.$$

Ces propositions généralisent certains des résultats connus [voir I. Schur, Math. Ann. **74**, 447—458 (1913); Copson and Ferrar, J. London Math. Soc. **4**, 258—264 (1929); Izumi, Tôhoku Math. J. **33**, 181—186 (1931) et ce Zbl. **1**, 135]. *F. Leja.*

Walsh, C. E.: Supplement to a note on recurrent sequences. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 220—222 (1933).

Généralisation d'un lemme inséré dans le travail de l'auteur [Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 147—150 (1932)] relatif aux suites $\{s_n\}$ données par une relation recurrente que voici: $s_n = a_{n-1} s_{n-1} + a_{n2} s_{n-2} + \cdots + a_{nr} s_{n-r}$, où $r > n$, et une application de ce lemme aux suites $\{u_n\}$ satisfaisant à une équation recurrente de la forme: $u_n = \alpha_{n1} u_{n+1} + \alpha_{n2} u_{n+2} + \cdots + \alpha_{nr} u_{n+r} + c_n \theta_n$, où $\theta_n \to 0$. (Voir le réf. préc.) *F. Leja* (Warszawa).

Verblunsky, S.: On some classes of Fourier series. [Proc. London Math. Soc. (2), 33, 287—327 (1932).] Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 562—563 (1932).

Corrigenda of some results enounced in an earlier paper (this Zbl. **6**, 53).

A. Zygmund (Wilno).

Randels, William: A remark on Fourier series of continuous functions. Amer. Math. Monthly **40**, 97—99 (1933).

Nach einer Bemerkung von Lebesgue (Hobson, Th. of Fcts. of a Real Variable, 2nd ed., **2**, 514) läßt sich der Riemann-Lebesguesche Satz ($a_n \to 0$) im Bereich aller stetigen Funktionen nicht verschärfen. — Eine Lücke in der Lebesgueschen Begründung hierfür wird vom Verf. ausgefüllt. *R. Schmidt* (Kiel).

Kaczmarz, S.: On some classes of Fourier series. J. London Math. Soc. **8**, 39—45 (1933).

Completing some results of Verblunsky (this Zbl. **6**, 53), the author finds necessary and sufficient conditions for sequences $\{\lambda_n\}$ transforming the Fourier series $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ of functions that belong to one of the following six classes: a) L-integrable, b) bounded, c) R-integrable, d) continuous, e) of bounded variation, f) absolutely continuous, into the Fourier series

$$\tfrac{1}{2}a_0\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

of functions belonging to L^p $(p > 1)$, and vice versa. *A. Zygmund* (Wilno).

Landau, Edmund: Über eine trigonometrische Ungleichung. Math. Z. **37**, 36 (1933).

Die Fejérsche Vermutung

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi$$

wurde zuerst 1911 unabhängig von den Herren Jackson und Gronwall bewiesen. Folgender Beweis ist kürzer als alle bekannten.

Es sei $n > 1$ und der Satz für $n - 1$ wahr. Aus

$$0 = 2 \sin\frac{x}{2} S_n'(x) = 2 \sin\frac{x}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

folgt für $0 < x < \pi$

$$\sin nx = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \sin\frac{x}{2} = \left\{\begin{matrix} 0 \text{ oder} \\ \sin x \end{matrix}\right\} \geqq 0,$$

$$S_n(x) \geqq S_{n-1}(x) > 0.$$

$S_n(x)$ hat also für $0 < x < \pi$ kein Minimum $\leqq 0$, also keinen Wert $\leqq 0$.

Unverkürzte Wiedergabe.

Wintner, Aurel: Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen. Math. Z. **36**, 618—629 (1933).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Werteverteilung einer reellen fastperiodischen Funktion $x(t) = \sum_k r_k \cos\lambda_k(t - \delta_k)$ mit linear unabhängigen Frequenzen λ_k [das in Formel (4) angegebene Beispiel von solchen Frequenzen ist jedoch unkorrekt]. Aufgaben dieser Art sind nach Bohr mit Hilfe des Kronecker-Weylschen Satzes zu behandeln, welcher gestattet, die Argumente $\lambda_k(t - \delta_k)$ als voneinander unabhängige Variable zu betrachten. Der Verf. behandelt die Aufgabe mit anderen Hilfsmitteln (die lineare Unabhängigkeit wird jedoch in derselben Weise ausgenutzt wie in den analytischen Beweisen des Kronecker-Weylschen Satzes). In früheren Arbeiten [Math. Z. **30**, 290—319 (1929); Amer. J. Math. **54**, 339—345 (1932); dies. Zbl. **4**, 213] hat der Verf. bewiesen, daß für jede reelle fastperiodische Funktion $x(t)$ eine asymptotische Werteverteilung $X(\xi)$ existiert, derart, daß an allen Stetigkeitsstellen von $X(\xi)$ die

Relation $X(\xi) = \lim_{l=+\infty} \text{mes}\,[x < \xi]_l/2l$ besteht, wo $\text{mes}\,[x < \xi]_l$ das Maß desjenigen Teils von $-l < t < l$ bedeutet, worin $x(t) < \xi$. Er gibt jetzt für den oben angegebenen Fall einen expliziten Ausdruck für $X(\xi)$ an. Als wesentliches Hilfsmittel dient dabei der Zusammenhang mit dem Momentenproblem, wonach $X(\xi)$ durch die Relationen $\int_{-\infty}^{\infty} \xi^n\, dX(\xi) = M_t\{(x(t))^n\}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ charakterisiert ist. Bezeichnet man mit $P_k(\xi)$ die Werteverteilung der einzelnen Partialschwingung $r_k \cos\lambda_k(t - \delta_k)$, dann bestimmt die „Faltung"

$$X_N(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\xi - \eta_1)\, dP_2(\eta_1 - \eta_2) \ldots dP_N(\eta_{N-1})$$

die Werteverteilung der endlichen Summe $\sum_{k=1}^{N} r_k \cos\lambda_k(t - \delta_k)$. Für eine unendliche Summe erhält man die Werteverteilung durch einen Grenzübergang. Die Momente der Faltung berechnen sich aus den Momenten der einzelnen Funktionen $P_k(\xi)$ auf Grund des Zusammenhangs des Faltungsprozesses mit der Laplace-Fourierschen Transformierten. — Der Verf. bezeichnet die Methode von Bohr als eine „mehr qualitative"; dies gilt jedoch nur für die ursprüngliche Ausgestaltung der Methode, die allein auf dem Kroneckerschen Satze beruht, während die ausführlichen Untersuchungen von Bohr und dem Ref. über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion [Acta math. **54**, 1—35 (1930), **58**, 1—55 (1932); dies. Zbl. **3**, 389; vgl. auch Danske Vid. Selsk., Skr. (8) 12, 3, 1—82 (1929)] gerade die quantitative Seite der Frage behandeln. Verf. ist auch die Habilitationsschrift des Ref. entgangen [Bidrag til Integralteorien for Funktioner af uendelig mange Variable, Kopenhagen 1930], welche gerade den allgemeinen Fall der linearen Unabhängigkeit, und zwar für komplexwertige Funktionen, behandelt und (in anderer Formulierung) die Ergebnisse des Verf. enthält. *B. Jessen* (Cambridge).

Differentialgleichungen:

Sheffer, I. M.: On the properties of polynomials satisfying a linear differential equation. I. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 184—214 (1933).

The present paper is closely related to a previous one by the same author (Amer. J. Math. **53**; see this Zbl. **1**, 7). It deals with polynomial solutions

$$y_n(x) = y_{n0} + y_{n1}x + \cdots + y_{nn}x^n \qquad (y_{nn} \neq 0;\ n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

of a differential equation of the type

$$L[y(x)] \equiv \sum_{i=0}^{k} L_i(x)\, y^{(i)}(x) = \lambda y(x), \tag{2}$$

($L_i(x)$ polynomial of degree $\leqq i$, λ parameter). The existence and uniqueness of such solutions for certain values $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ ["characteristic numbers" of (2)] is established by means of Poincaré-Perron theorem on Linear Difference Equations and Perron's theorem [Math. Ann. **84**, 1—15 (1921)]. The author further investigates power series solutions $D_n(t)$ of the dual of (2), i. e. the differential expression $\mathfrak{L}[D(t)] = \lambda D(t)$ $(\lambda = \lambda_n)$, obtained from (2) by replacing each $y^{(i)}$, x^i resp. by t^i, $D^{(i)}(t)$. By means of certain inequalities for the coefficients of $y_n(x)$, $D_n(t)$ the author is able to establish the region of convergence of

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(x) D_n(t)}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\, D_n(t)/(\lambda_n - \lambda)\, n!$$

with regard to x, t, λ. The author finally discusses expansion of functions in terms of the two sets of $\{D_n(t)\}$, $\{Y_n(x)\}$, where

$$Y_n(x) = 0!\, y_{n0} + 1!\, y_{n1}x + \cdots + n!\, y_{nn}x^n.$$ [See (1).]

J. Shohat (Philadelphia).

Rosenblatt, Alfred: Sur quelques théorèmes de la théorie des équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre. C. R. Acad. Sci., Paris **196,** 593—594 (1933).

Zur Frage, wann es durch zwei Punkte x_0, $y(x_0)$; x_1, $y(x_1)$ eindeutig eine Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$ gibt, wird ein neues Kriterium abgeleitet, das gegenüber dem bekannten Picardschen eine Verschärfung darstellt. *Rellich.*

Carrus, S.: Intégration sans signe de quadrature de certains systèmes d'équations différentielles. J. École polytechn., II. s. cahier **30,** 115—127 (1932).

Es seien eine oder mehrere Differentialgleichungen der Form $f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, t)=0$ gegeben, wo t die unabhängige Veränderliche ist und die Funktionen f in den $dx_1, \ldots, dx_n$ homogen sind. Es wird ein Verfahren angegeben, alle Lösungen eines solchen Systems integrallos mit Hilfe von willkürlichen Funktionen anzugeben. Ausdehnung auf Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung. Anwendung auf differentialgeometrische Fragen. *Rellich* (Göttingen).

Papillon, Pierre: Sur certaines équivalences. (Aires et volumes.) Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. **24,** 89—127 (1932).

Papillon, Pierre: Sur certaines équivalences. (Volumes et potentiels.) Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. **24,** 203—226 (1932).

Es werden drei Arten von Abbildungen zwischen zwei Flächen (x, y, z) und (X, Y, Z) in Betracht gezogen: die Parallelprojektion ($x = X, y = Y, z = \varrho Z$), die Zentralprojektion ($x = \varrho X, y = \varrho Y, z = \varrho Z$) und die konoidale Projektion ($x = \varrho X$, $y = \varrho Y, z = Z$). Von den Flächen wird immer vorausgesetzt, daß diese Abbildungen eineindeutig sind. Es werden nun Flächen so bestimmt, daß aufeinander abgebildete Bereiche gleichen Flächeninhalt haben. Geht man von einer bestimmten Fläche aus, so ergibt sich zur Bestimmung aller in diesem Sinne zugeordneten Flächen eine partielle Differentialgleichung (etwa bei der Parallelprojektion mit der üblichen Bezeichnung: $p^2 + q^2 = w(x, y)$). In einigen sehr speziellen Fällen kann man das vollständige Integral unmittelbar angeben (z. B. bei der Parallelprojektion, wenn man von einer Ebene, einer Schraubenfläche oder einem Paraboloid ausgeht). In anderen wird über die Flächengleichung eine willkürliche Voraussetzung gemacht (z. B. wird die Homogenität gefordert), so daß sich eine gewöhnliche Differentialgleichung ergibt. So ergibt sich eine Reihe von Sätzen über spezielle Flächen und dabei auftretende Kurven. An Stelle des Flächeninhalts kann man natürlich irgendein Flächenintegral betrachten. Es werden demnach auf die gleiche Weise behandelt: das Volumen zwischen einem Flächenelement und einer Ebene bzw. einem Punkt (zylindrisches bzw. konisches Volumen); das Volumen, das durch Rotation eines Flächenelements entsteht; das konoidale Volumen, durch das das Flächenelement auf eine Gerade projiziert wird; schließlich ganz kurz das Potential einer Flächenbelegung. — Für Leser sei bemerkt, daß ein Satz auf S. 97 irrtümlich ausgesprochen ist; Berichtigung auf S. 203.

Willy Feller (Kiel).

Finzi, B.: Velocità di gruppo per onde associate a fenomeni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16,** 489—496 (1932).

Let Φ be the phase and $\tau(t, P, \nu)$ the characteristics for a family of waves in which an individual member is distinguished by an appropriate value of the parameter ν. The symbol P means that τ is a function of position. — Let $p_0 = \frac{\partial \tau}{\partial t}$, $p_1 = \frac{\partial \tau}{\partial x}$, $p_2 = \frac{\partial \tau}{\partial y}$, $p_3 = \frac{\partial \tau}{\partial z}$, then the phase velocity V is given by the formula

$$V = \left| \frac{p_0}{g} \right| n, \quad \text{where} \quad g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

The group velocity u is

$$u = \left| \frac{\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} p_0\right)}{\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{p_0}{V}\right)} \right| n = \left| V + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} g}{\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} g\right)} \frac{dV}{d\nu} \right| n.$$

The second formula shows that when V is independent of ν the group velocity coincides with the wave-velocity. A discussion is given of the Maggi waves for which $\Phi = \Phi(\nu, \tau)$, $\tau = t - \sigma(\nu, p)$, waves on deep water, electromagnetic waves and Schrödinger waves, the result obtained in the last case being practically equivalent to that obtained by de Broglie. *H. Bateman* (Pasadena).

Kourensky, M.: L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — IV. Systèmes contenant trois dérivées du second ordre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 612—616 (1932).

Untersuchung eines weiteren Sonderfalls in einem vom Verf. in früheren Arbeiten berücksichtigten Problem (vgl. dies. Zbl. **6**, 116). *G. Cimmino* (Napoli).

Tsortsis, A.: Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 159—161 (1933).

Se rattachant aux recherches de Cartan et Vessiot sur les équations du second ordre, l'auteur considère une équation du troisième ordre à charactéristiques triples, dans le cas où le sous-faisceau charactéristique de transformations infinitésimales admet le nombre maximum $(4n - 1)$ d'invariants; il donne (sans démonstration) les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce cas a lieu, et il écrit les équations définissant la M_n la plus générale (prolongée au troisième ordre) satisfaisant à l'équation en question. *W. Stepanoff* (Moskau).

Evans, G. C.: Note on the gradient of the Green's function. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 879—886 (1932).

Es sei $g(M, P)$ die Greensche Funktion für ein Gebiet T mit dem Pol im Punkte M. Der Verf. betrachtet das Integral

$$J(M) = \int_T |\operatorname{grad} g(M, P)|\, d\sigma_P$$

und gewinnt, falls T ein offenes, beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet der Ebene ist, die Abschätzung: $J(M) < 2{,}16\,(\pi T)^{1/2}$,

welche besagt, daß $J(M)$ für alle Punkte M des Gebietes T beschränkt bleibt. Eine entsprechende Ungleichung $J(M) \leqq 4{,}76\,(\pi^2 T)^{1/3}$

ergibt sich für den dreidimensionalen Raum, jedoch nur für ein abgeschlossenes Teilgebiet F von T, das dadurch gekennzeichnet ist, daß jeder Strahl, der von einem Punkte von F ausgeht, den Rand von T nur in einem Punkte trifft. *Lüneburg* (Göttingen).

Masotti, A.: Teoremi di univocità per le soluzioni della equazione di Poisson soddisfacenti speciali condizioni al contorno. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei **85**, 393—409 (1932).

Theorems are here established asserting the uniqueness of solutions $u = u(x, y)$ of the Poisson equation $\Delta_2 u = f(x, y)$ when these solutions (besides meeting certain qualitative conditions) are required to satisfy, on the contour of the region, relations of either of the types

$$F(s, u, \mu v + \nu w) = 0\,, \qquad F(s, v, \mu u + \nu z) = 0\,,$$

where v is the normal derivative du/dn, w is the tangential derivative du/ds, and $z = dv/ds$, while μ and ν are assigned functions of s. *R. D. Carmichael* (Urbana).

Humbert, Pierre: Sur les potentiels du troisième ordre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A **52**, 293—305 (1932).

Mit dem Ziel, die Eigenschaften der Lösungen der Potentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ für den zweidimensionalen Raum zu verallgemeinern, gelangte der Verf. in einer früheren Arbeit [J. Math. pures appl., sér. **9**, VIII, 145 (1929)] zu dem Differentialausdruck

$$\Delta_3 U = U_{xxx} + U_{yyy} + U_{zzz} - 3U_{xyz}$$

für den dreidimensionalen Raum. Dabei gewinnt der Ausdruck

$$p = (x - a)^3 + (y - b)^3 + (z - c)^3 - 3(x - a)(y - b)(z - c)$$

die analoge Bedeutung für diese Differentialgleichung wie der Ausdruck $(x-a)^2+(y-b)^2$ für die Potentialgleichung. In der vorliegenden Arbeit wird die Analogie zwischen den Ausdrücken $\Delta_2 U$ und $\Delta_3 U$ durch eine Anzahl von Resultaten demonstriert. Unter anderem werden die Lösungen der Gleichung

$$\Delta_3 U + \frac{3q}{x}(U_{xx} - U_{yz}) = 0$$

untersucht, auf die man — analog wie bei dem Potentialausdruck — durch Betrachtung der Integrale $U(x,y,z) = \int\int_{\Sigma} p^{-q}\, d\sigma$

geführt wird, erstreckt etwa über die Ebene $a = 0$. *Lüneburg* (Göttingen).

Nikodym, Otton: Sur un théorème de M. S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques. J. Math. pures appl., IX. s. **12**, 95—108 (1933).

This paper contains a very simple proof of a theorem of Zaremba which may be stated as follows: Let $\mathfrak{F}$ denote the set of elements (vector-fields)

$$\Phi(x,y,z) = [\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z), \varphi_3(x,y,z)],$$

where $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ are measurable functions of integrable square over a three-dimensional open region D. Let next $\mathfrak{U}$ be the set of harmonic (one- or many-valued) functions in D such that $\operatorname{grad} u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right]$ belong to $\mathfrak{F}$. Then, for each element $\Phi=[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ in $\mathfrak{F}$ there exists a harmonic function u_0 in $\mathfrak{U}$ such that

$$\iiint_D \left[\left(\varphi_1 - \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\varphi_2 - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\varphi_3 - \frac{\partial u_0}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right] d\tau = 0$$

for any harmonic function u in $\mathfrak{U}$. — The proof of Nikodym consists in regarding the set $\mathfrak{F}$ as an abstract Hilbert space with $(\Phi, \Psi) = \iiint_D (\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\varphi_3\psi_3)\, d\tau$ and $\| \Phi \| = (\Phi, \Phi)^{1/2}$ for any pair of elements $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ and $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]$ in $\mathfrak{F}$. Then the set of the elements grad u where $u \varepsilon \mathfrak{U}$, is a linear closed manifold in $\mathfrak{F}$. It thus appears that the theorem of Zaremba is an immediate consequence of the following general theorem: If $\mathfrak{H}$ is an abstract Hilbert space and g_0 is the projection of an element $h_0 \in \mathfrak{H}$ on a linear closed manifold $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ then $(h_0 - g_0, g) = 0$ for any element $g \in \mathfrak{G}$. *Saks* (Warszawa).

Gevrey, Maurice: Compléments à une note précédente sur les systèmes du type parabolique; problèmes aux limites non linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1061 bis 1063 (1932).

Verf. gibt einige Ergänzungen zu einer früheren Note (C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 690—692; dies. Zbl. **5**, 397), in welcher er seine Methode der „Quasi-Greenschen Funktionen" auf Systeme parabolischer Differentialgleichungen angewendet hatte. Insbesondere werden in der vorliegenden Note für solche Systeme Randwertaufgaben mit nicht-linearen Randbedingungen behandelt. *E. Rothe* (Breslau).

Hidaka, Koji: Randwertaufgabe in Beziehung zur Wärmeleitung bei nichtkonstanten Koeffizienten. Geophys. Mag. **5**, 331—341 (1932).

Die partielle Diff.-Gl. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$

mit den Randbedingungen $(u)_{x=0} = F(t)$, $(u)_{x=a} = 0$, $(u)_{t=0} = 0$ wird durch

$$u(x,t) = \sum_1^\infty K(0)\, X_\nu'(0) \cdot X_\nu(x) \int_0^t F(\zeta)\, e^{-\lambda_\nu(t-\zeta)}\, d\zeta \qquad (I)$$

gelöst, worin die $X_\nu(x)$ die der Diff.-Gl.

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dX_\nu}{dx}\right] + \lambda_\nu X_\nu = 0$$

mit den Randbedingungen $X_\nu(0) = 0$, $X_\nu(a) = 0$ genügenden normierten Eigenfunktionen bedeuten. Mit Hilfe der Lösung (I) werden die Spezialfälle 1. $K(x) = K_0 \cdot x^{6/7}$,

2. $K(x) = K_0(1 + \sigma x)^2$ [$\sigma > 0$] und 3. $K(x) = K_0(1 - x/a + \varepsilon)^{4/3}$ ausführlich durchgerechnet. *Ertel* (Potsdam).

Hidaka, Koji: A contribution to the integration of the general equation of linear heat conduction. Geophys. Mag. **5**, 361—373 (1932).

Für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit temperaturabhängigen Koeffizienten:

$$c_0\varrho_0(1 + \beta\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k_0(1 + \alpha\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right]$$

(α und β klein) wird folgende, die Grenzbedingungen

$$\vartheta = 0 \text{ für } t = 0,\ x > 0, \quad \vartheta = \theta \text{ für } x = 0,\ t > 0$$

befriedigende Lösung abgeleitet [$z = \frac{1}{2}x(c_0\varrho_0/k_0 t)^{1/2}$]:

$\vartheta = \theta[1 - \Phi(z) + \alpha\theta\psi_1(z) + \beta\theta\psi_2(z) + \alpha^2\theta^2\chi_1(z) + \alpha\beta\theta^2\chi_2(z) + \beta^2\theta^2\chi_3(z) + \cdots]$,

in der $\Phi(z)$ das Fehlerintegral bedeutet und die ψ_ν, χ_ν Funktionen darstellen, die sich aus $\Phi(z)$ in komplizierter Weise ableiten (ψ_1, ψ_2, χ_1, χ_2, χ_3 sind tabuliert für $z = 0{,}0$ bis $z = 3{,}0$). Aus der erhaltenen Lösung wird die Abkühlung eines Stahlstabes in drei Approximationen berechnet. *H. Ertel* (Potsdam).

Integralgleichungen:

Leray, Jean: Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. pures appl., IX. s. **12**, 1—82 (1933).

(Vgl. hierzu dies. Zbl. **4**, 215 und 317.) Sei eine nichtlineare Integralgleichung vorgelegt, die von endlich vielen Parametern abhängt und überall vom Schmidtschen Typ ist. Betrachtet werden die reellen Lösungen, die zu Parameterwerten eines gewissen abgeschlossenen Bereichs C gehören. Von den Lösungen sei bekannt, daß sie beschränkt und gleichgradig stetig seien. Aus dem Arzelaschen Prinzip und dem Überdeckungssatz von Borel-Lebesgue, angewandt auf die Gesamtheit dieser Lösungen, folgt dann, daß nur endlich viele Lösungen nach der Schmidtschen Umgebungsmethode zu untersuchen sind, um Sätze über Geradheit oder Ungeradheit der Anzahl der reellen Lösungen, die zu einem Punkt aus C gehören, aufstellen zu können. Lösungsscharen werden dabei im allgemeinen von der Betrachtung ausgeschieden. (Merkwürdig scheint Ref., daß die Lösungen nicht mit ihrer üblichen Vielfachheit auftreten.) Es folgen einige Beispiele von Integralgleichungen, wo die Lösungsanzahl ungerade ist, also mindestens eine Lösung existiert; z. B. die folgenden:

1. $$u(s) = h\int_0^1 K(s,t)\,u(t)\,dt + k\int_0^1 H(s,t,u(t))\,dt,$$

wo K und H (letzteres für alle u) beschränkt und in bezug auf das erste Argument stetig sind (H braucht dies nur für endliche u-Werte zu sein). h und k sind beliebige Parameter, doch sei h von allen Eigenwerten des Kernes $K(s,t)$ verschieden.

2. $$u(s) + h\int_0^1 K(s,t)\,F(u(t))\,dt = 0.$$

Dabei sei $K(s,t)$ stetig und $K(s,t) + K(t,s)$ ein positiv definiter Kern, für $uF(u) < 0$ sei $|F(u)|$ beschränkt, $h \geqq 0$. — 3. Das Problem von Carleman: $\Delta u = g(x,y,z)$, wenn auf der Grenze des Grundbereiches $du/dn = F(u)$ werden soll, wobei $F(u)$ für positive u-Werte analytisch ist und $F(+\infty) = +\infty$, $F(+0) \leqq 0$. 4. Einfache elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Es folgt ein Beispiel einer Integralgleichung mit gerader Lösungszahl. — Bemerkt sei noch, daß z. B. im Falle 1. die Existenz mindestens einer Lösung behauptet werden kann, falls $H(s,t,u)$ nicht analytisch ist, sich aber als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge $H_\nu(s,t,u)$ darstellen läßt, wo sämtliche H_ν analytisch sind. — Der Hauptteil der Arbeit wendet, unter Benutzung der Ergebnisse von Odqvist (Math. Z. **32**, 1930), die Methode an auf die Bestimmung stationärer Bewegungen $u_i(x,y,z)$ von reibenden Flüssigkeiten in einem (im wesentlichen singularitätenfreien) Gebiet Π von endlichem Zusammen-

hang, wenn die Werte α_i der u_i auf der Begrenzung Σ von Π derart vorgegeben sind, daß der Vektorfluß durch jeden zusammenhängenden Teil von Σ einzeln verschwindet. Die Vektoren α_i und die äußeren Kräfte X_i werden dabei mit einem Parameter h multipliziert, der von 0 an variiert. Ist Π beschränkt, so sagt ein erstes Lemma, daß die Integrale $\iiint_{\Pi} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_k}\right)^2 dV$ beschränkt sind, wenn alle zu Parameterwerten zwischen $\mp h_0$ gehörenden Lösungen u_i regulär sind. Daraus folgt ein erstes Theorem, das auf den Nachweis der Existenz mindestens einer Lösung hinausläuft. Der Fall, daß Π nicht beschränkt ist, wird unter Einführung weiterer Voraussetzungen durch Grenzübergang aus dem vorigen behandelt, führt jedoch auf große Schwierigkeiten. Ähnliche Schwierigkeiten treten auf, wenn Π zwar beschränkt, aber zeitabhängig ist. — Den Schluß der Arbeit bildet der Beweis des Satzes, daß die Navierschen Gleichungen für eine ebene (reibende) Flüssigkeitsbewegung für alle Zeiten $t \geqq 0$ eine einzige reguläre Lösung besitzen, die zur Zeit $t = 0$ mit gegebenen Werten übereinstimmt; dabei wird in den Begriff regulär hineingenommen, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht und $\iint_{\Pi} \sum u_i^2 dF$, $\iint \sum \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_k}\right)^2 dF$, sowie die Maximallänge des Geschwindigkeitsvektors beschränkt sind. *R. Iglisch* (Aachen).

Giraud, Georges: Validité de la théorie de Fredholm pour certains noyaux non bornés. C. R. Acad. Sci., Paris **196,** 595—597 (1933).

Es bedeute E einen beschränkten und abgeschlossenen Bereich des m-dimensionalen Raumes, X und A zwei Punkte desselben, $\varphi(X)$ eine daselbst gegebene stetige Funktion. Es handelt sich darum, die Gültigkeit der drei Fredholmschen Fundamentaltheoreme für die Gleichung

$$\varphi(X) = \varrho(X) - \lambda \int_E^{(m)} G(X, A)\, \varrho(A)\, dV_A \tag{1}$$

auszudehnen auf gewisse nicht beschränkte Kerne G. Verf. zeigt das für den Fall, daß G der Bedingung $|G(X, \Xi)| < k f(L) L^{-m}$ genügt, wo L die Entfernung der beiden Punkte X, Ξ und k eine Konstante ist. Die Funktion f soll nur die Eigenschaft haben, daß $f(t)$ für $t > 0$ positiv ist und monoton wächst, während $f(t) t^{-m}$ abnimmt, und daß $\int_0 f(t)/t\, dt$ konvergent ist. Der Schwerpunkt des Beweises liegt darin, daß unter obigen Voraussetzungen $\varrho(X)$ zugleich mit (1) auch einer anderen Integralgleichung derselben Form genügen muß, bei der jedoch der Kern $G^*(X, \Xi)$ stetig ist, auch wenn die beiden Punkte X und Ξ zusammenfallen. — Die Note schließt mit dem Hinweis der Anwendbarkeit auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus. *Wiarda* (Dresden).

Differenzen- und Funktionalgleichungen:

Birkhoff, George D., and W. J. Trjitzinsky: Analytic theory of singular difference equations. Acta math. **60,** 1—89 (1933).

This notable paper presents a complete solution of what has been one of the most important outstanding problems in the field of difference equations, a problem which has previously been attacked by several writers with comparatively little success. — The equation considered is essentially $L_n(y) = y(x+n) + a_1(x) y(x+n-1) + \cdots + a_n(x) y(x) = 0,$ (1) in which the coefficients $a_i(x)$ are functions expressible as power series in $x^{-1/p}$ (p = any positive integer), convergent for $|x|$ sufficiently large. More generally, it may be assumed that the $a_i(x)$ are merely represented asymptotically, in certain regions of the complex x-plane, by power series in $x^{-1/p}$; under these circumstances the results obtained are similar except for the restriction of their region of validity. Such an equation is called "singular" if the roots of what is usually regarded as "the characteristic equation" do not satisfy the condition of being distinct and different from zero. — Setting

$$y_i(x+1) = y_{i+1}(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$y_n(x+1) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y_{n+1-i}(x),$$

one obtains a related system of n equations of the first order, which may be written in matrix notation as $$Y(x+1) = D(x)Y(x). \tag{2}$$

In a recent paper [Acta math. **54**, 205—246 (1930)] Birkhoff has shown the existence of a fundamental set of n formal series solutions of (1): each is of the form

$$e^{Q(x)}s(x), \qquad Q(x) = \mu x \log x + \gamma x + \delta x^{(p-1)/p} + \cdots + \nu x^{1/p},$$

where $$s(x) = x^r(P_0 + P_1 \log x + \cdots + P_m \log^m x);$$

$\mu, \gamma, \delta, \ldots, \nu, r$ are constants; p is a positive integer, no tnecessarily the same as the p of the preceding paragraph; and each P_i represents a power series in $x^{-1/p}$. If this set of formal solutions be denoted by $y_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, the matrix

$$(y_{ij}(x)) = (y_j(x + i - 1))$$

is a formal matrix solution of (2). — In determining formal solutions of (1) Birkhoff made essential use of the notion of factorization of the operator $L_n(y)$. That same device is now made to play a fundamental rôle in the proof of existence of analytic solutions of (1) which are asymptotically represented by the formal series. The situation being essentially the same in all four quadrants, detailed discussion is mainly confined to the quadrant

$$\Gamma: \quad u = \Re(x) \leqq -\varrho < 0; \qquad v = \Im(x) \geqq -h, \quad h > 0.$$

Since the exponential factor in the formal series exerts a dominating influence as $|x|$ tends to infinity, it is natural to consider $Q_{ij}(x) = Q_i(x) - Q_j(x)$.

A curve extending to infinity along which the real part of the derivative, $\Re Q'_{ij}(x)$, vanishes is called a B' curve. The fundamental existence theorem is to the effect that every equation (1) possesses fundamental sets of solutions with the asymptotic form of the formal series in each of the regions into which Γ is divided by the B' curves, the different fundamental sets being connected by "proper" periodic functions. — This existence theorem is the culmination of a dozen lemmas and theorems on B' and "proper" curves, iteration, summation, the construction of "proper" solutions to the right of proper curves, factorization, and products of "completely proper" operators. To a large extent the methods of demonstration are natural modifications of those introduced by Birkhoff in his study of non-singular equations [Trans. Amer. Math. Soc. **12**, 243—284 (1911)]: use of matrices, iteration, "determinant limits", solutions associated with determinant limits, and summation by means of a contour integral adapted to the purpose in hand from that devised by Guichard in 1887. A new process of group summation also plays an important part. — The authors continue with an examination of the relation between the solutions associated with the quadrant Γ and those associated with other quadrants. It is also shown, in effect, that if there be given a collection of sets of functions having the properties now known to be possessed by a collection of fundamental sets of solutions of an equation of type (1), there always exists an equation of this type which has each of these sets as a fundamental set of solutions. The concluding section of the paper is devoted to the Riemann problem [cf. Birkhoff, Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **49**, 521—568 (1913)] for a singular system of equations. *C. R. Adams* (Providence).

Carmichael, R. D.: Systems of linear difference equations and expansions in series of exponential functions. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 1—28 (1933).

The system of (generalized) difference equations considered is

$$\sum_{j=1}^{n} c_{\nu j} E(a_{\nu j}) \cdot g_j(x) = \varphi_\nu(x), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

where the $c_{\nu j}$ and $a_{\nu j}$ are given constants, the $\varphi_\nu(x)$ are given entire functions, and the operator $E(a)$ is defined thus: $E(a) \cdot g(x) = g(x + a)$. This system is called singular if and only if $\Delta \cdot e^{xt} = 0$ for all t, where $\Delta = \det c_{\nu j} E(a_{\nu j})$. By aid of an integral analogous to that used by Pincherle [Mem. Accad. Bologna, IV. s. **9**, 45—71 (1888)], entire functions $g_j(x)$ satisfying a non-singular system are found; for such a system with each $\varphi_\nu(x)$ of "exponential type", a set of "principal" solutions (not unique) of like type is exhibited. A consequence is the possibility of expanding a set of entire functions $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ simultaneously in series of the form $\sum_{j=1}^{n} g_j(x - a_{\nu j})$, $g_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x^k$ (convergent for all finite x), with $\det [\exp(-a_{\nu j} t)] \not\equiv 0$ in t; if the $f_\nu(x)$ are of exponential type, there exist expansions in which the $g_j(x)$ are of like type. In conclusion a development in series of exponential functions (generalization of a Fourier series) is found for a function of exponential type defined by a certain contour integral, the series being convergent in a corresponding convex polygon. *Adams.*

Arany, Daniel: Solution d'une équation aux différences finies. (*55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.*) Assoc. Franç. Avancement Sci. 28—29 (1931).

Noaillon, P.: Sur les intégrales de Stieltjes. J. Math. pures appl., IX. s. **12**, 83—93 (1933).

Es sei $A\{y\}$ ein lineares Funktional, welches, nach dem bekannten Satz von Riesz als

$$\int_E y\,\alpha(dE)$$

darstellbar ist, wobei E eine Menge des R^n und $y(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ eine auf E definierte Funktion ist. Ist $m(E)$ die vollständige Variation von $\alpha(E)$ auf der Menge E, so kann man $A\{y\}$ als

$$A\{y\} = \int_E y\,\omega\, m(dE)$$

darstellen, wobei ω nur die Werte ± 1 annimmt. Verf. versucht in R^n neue Koordinaten $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ einzuführen, so daß $A\{y\}$ als Lebesguesches Integral

$$A\{y\} = \int\int \cdots \int_E y\,\omega\, d\xi_1' d\xi_2' \ldots d\xi_n'$$

darstellbar wird. Die Beweise scheinen dem Ref. nicht überzeugend zu sein.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Konečný, Miroslav: Trois théorèmes sur la limite des transformations itérées. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr **163**, 1—19 (1932).

Soit $g(x) = \int_0^1 p(x, y) f(y) dy$ une transformation fonctionnelle linéaire, $p(x, y)$ étant une fonction continue de deux variables x, y. Pour que le noyau $p^{(m)}(x, y)$ de la transformation itérée tende vers une fonction limite en tous les points du carré $(0 \leqq x, y \leqq 1)$ il faut et il suffit que le déterminant de Fredholm $D(z)$ correspondant n'ait pas, sauf la racine $z = 1$, d'autres racines dont la valeur absolue soit $\leqq 1$. La fonction limite ne dépend pas de la variable x dans le cas et dans ce cas seulement quand la racine $z = 1$ est une racine simple. Ces théorèmes ont des applications importantes dans la théorie des chaînes continues de Markoff. Des propositions analogues déjà connues pour le cas discontinu sont aussi démontrées par une méthode nouvelle. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Banach, S., et S. Mazur: Sur la dimension linéaire des espaces fonctionnels. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 86—88 (1933).

Es werden zwei lineare Räume A und B konstruiert, welche nicht isomorph sind und dennoch die gleiche Dimension haben (d. h. daß A mit einem Unterraum von B und B mit einem Unterraum von A isomorph sind). *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Funktionentheorie:

Higuchi, Seiichi: Note on the derivation of an equi-potential family of some simple plane curves. Technol. Rep. Tôhoku Univ. Sendai **10**, 532—544 (1932).

Ist $z = f(\alpha)$ mit reellem α analytische Parameterdarstellung einer Kurve C in der komplexen z-Ebene, so bildet $z = f(\alpha + i\beta)$ für nicht zu große $|\beta|$ die Geraden $\beta =$ konst. der $(\alpha + i\beta)$-Ebene auf „Äquipotentialkurven" zu C ab. Hierzu werden einige elementare Beispiele angegeben und gezeichnet. *Th. Zech* (Darmstadt).

Levi, B.: Sulla natura analitica di una classe di funzioni definite da serie di potenze convergenti sulla circonferenza di convergenza. Boll. Un. Mat. Ital. **12**, 1—5 (1933).

En réponse à une question posée dans un précédent Boll. Un. Mat. Ital., l'auteur démontre que la fonction définie par la série $\sum x^n/(n^k + h)$, ne peut pas s'exprimer rationnellement au moyen des transcendantes élémentaires. Il montre pour cela que la surface de Riemann correspondante possède une infinité de feuillets, l'un de ces feuillets se trouvant isolé des autres. *E. Blanc* (Poitiers).

Wolff, Julius, et F. de Kok: Les fonctions holomorphes à partie réelle positive et l'intégrale de Stieltjes. Bull. Soc. Math. France **60**, 221—227 (1932).

Wenn die in der rechten Halbebene reguläre analytische Funktion $f(\zeta)$ einen positiven reellen Teil hat, so existieren eine monoton wachsende Funktion $\psi(y)$ und zwei Konstanten $\lambda(>0), \mu$, so daß

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta - iy} + \frac{1}{1+iy}\right)d\psi(y) + \lambda\zeta + \mu .$$

Diese Formel, welche unabhängig von den Verff. neuerdings auch von Cauer (dies. Zbl. **5**, 361) angegeben worden ist, war früher nur unter gewissen zusätzlichen Bedingungen über das asymptotische Verhalten der Funktion $f(\zeta)$ bekannt. Die Verf. gewinnen sie durch Integration einer entsprechenden Integraldarstellung für $f''(\zeta)$. Die Heranziehung des tiefer liegenden Fatouschen Satzes ist bei der Herleitung dieser Darstellung überflüssig; in der Tat lassen sich die Überlegungen der Verff. leicht so modifizieren, daß sie unter Anwendung elementarer Sätze der reellen und komplexen Funktionentheorie zum Ziele führen. — Als Anwendung der Formel werden der Wolff-Carathéodorysche Satz über die Winkelderivierte sowie eine exakte Abschätzung für $|f^{(n)}(\zeta)|$ abgeleitet. *Rolf Nevanlinna* (Helsinki).

Aronszajn, N.: Sur les décompositions des fonctions uniformes. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 521—522 (1933).

Cette note apporte quelques compléments aux résultats antérieurs de l'auteur [voir Zbl. **3**, 312 (1932)]. En considérant la notion d'ensemble singulier d'une fonction analytique sous un aspect plus général, l'auteur est conduit à des extensions des théorèmes classiques de Mittag-Leffler, de Weierstrass et de M. E. Picard sur les développements d'une fonction analytique en séries et en produits infinis des expressions élémentaires correspondant respectivement aux singularités isolées et aux zéros de la fonction donnée. *Saks* (Warszawa).

Grötzsch, Herbert: Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. II. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **84**, 269—278 (1932).

Sei $\mathfrak{B}$ ein schlichter Bereich der z-Ebene, der $z = \infty$ im Innern enthält. Eine schlichte Abbildung $w = f(z)$ von $\mathfrak{B}$ heiße normiert, wenn $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$ ist. Unter $\log\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}$ verstehe man den (in ganz $\mathfrak{B}$ eindeutigen) Zweig der Funktion, der beim Grenzübergang $z_1 \to \infty$, $z_2 \to \infty$ in 0 übergeht. Der Verf. stellt und beantwortet die Frage nach dem genauen Wertebereich des so festgesetzten $\log\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}$, wenn z_1, z_2 festgehalten werden, $f(z)$ jedoch sämtliche normierten Funktionen durchläuft. Er ergibt sich als eine von z_1, z_2 abhängige abgeschlossene Kreisscheibe. Nur bei starren Bereichen, d. h. solchen, die nur $w = z$ als normierte Abbildung zulassen, artet er in einen Punkt aus. Ein Randpunkt des Kreises wird genau durch eine Abbildung geliefert. Der Bildbereich ist ein Schlitzbereich, dessen Schlitze die Ellipsen mit den Brennpunkten $f(z_1)$, $f(z_2)$ unter einem bestimmten Winkel schneiden und der im Falle unendlich hohen Zusammenhangs außerdem einer Minimalforderung genügt. — Die Grenzfälle $z_1 = z_2$ und $z_2 \to \infty$ führen auf Fragestellungen, die der Verf. bereits in früheren Arbeiten beantwortet hat. (Siehe Leipz. Ber. **83**; dies. Zbl. **3**, 14 und **261**, **4**, 299). Auf den erstgenannten Grenzfall wird die allgemeine Fragestellung zurückgeführt. *K. Löwner* (Prag).

Grötzsch, Herbert: Über zwei Verschiebungsprobleme der konformen Abbildung. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **2**, 87—100 (1933).

Es sei $\mathfrak{B}$ ein schlichter Bereich der z-Ebene, der $z = 0$ enthält, nicht aber $z = \infty$. Betrachtet wird die Gesamtheit der schlichten Abbildungen $w = f(z)$ von $\mathfrak{B}$ auf Bereiche derselben Art mit der Normierungsbedingung $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Unter $\log\frac{f(z)}{z}$

verstehe man den (in ganz $\mathfrak{B}$ eindeutigen) Zweig der Funktion, der für $z = 0$ verschwindet. Im ersten Verschiebungstheorem wird ausgesprochen, daß der genaue Wertebereich von $\log \frac{f(z_1)}{z_1}$ für ein festes z_1 aus $\mathfrak{B}$ eine abgeschlossene Kreiselscheibe $K(z_1)$ ist, die nur im Falle eines starren $\mathfrak{B}$ in einen Punkt ausartet. Zu jedem Randpunkt von $K(z_1)$ gehört nur eine, leicht zu charakterisierende Abbildung, zu einem inneren Punkt eine unendliche Gesamtheit von Abbildungen. Im zweiten Verschiebungstheorem, von dem das erste als Spezialfall aufgefaßt werden kann, wird z_1 auf einer Randkomponente R_1 gelegen angenommen, die nicht die äußere Randkomponente sein soll und nur aus punkthaften Primenden bestehen darf. Von den Abbildungen wird vorausgesetzt, daß sie R_1 in einer Randkomponente vom gleichen Typus überführen. Es wird wieder der genaue Wertebereich von $\log \frac{f(z_1)}{z_1}$ bestimmt. Unter $\log \frac{f(z_1)}{z_1}$ wird der Limes von $\log \frac{f(z)}{z}$ bei einer festzuhaltenden linienhaften Annäherung an z_1 verstanden. Es ergibt sich, daß der Wertebereich eine offene Kreisscheibe, ergänzt durch einen wohlbestimmten Randpunkt, darstellt. — Das erste Theorem ist in seinem wesentlichen Teile auch von Grunsky (siehe dies. Zbl. **5**, 362) bewiesen worden. *K. Löwner* (Prag).

Tsuji, Masatsugu: On analytical transformations of a Reinhardt's domain into itself. Jap. J. Math. **9**, 219—226 (1932).

Die Reinhardtschen Körper sind solche Bereiche des vierdim. Raumes der komplexen Veränderlichen w und z, die 1. durch die Transformationen $w' = we^{i\vartheta} w$, $z' = ze^{i\varphi}$ mit beliebigen reellen ϑ und φ in sich übergeführt werden und 2. den Punkt (0,0) als inneren Punkt enthalten. Alle beschränkten Bereiche unter diesen Körpern, die nicht von der Gestalt $A\,|\,w\,|^2 + B\,|\,z\,|^2 < 1$ sind, weisen außer den definierenden als mittelpunktstreue Transformationen höchstens auf: $w' = c\,e^{i\vartheta} w$, $z' = \frac{1}{c}\,e^{i\varphi} z$ mit geeigneter Konstante c. Henri Cartan bewies diesen Satz, indem er zuerst zeigte, daß die gesuchten Abbildungen eine geschlossene Gruppe linearer Transformationen bilden müssen und dann einen gruppentheoretischen Satz von Elie Cartan anwandte. Verf. zeigt nun, wie man durch elementare, rechnerische Betrachtungen ohne Benutzung des Satzes von Elie Cartan den Beweisgang von Henri Cartan zu Ende führen kann. *Thullen* (Münster).

Behnke, H., und P. Thullen: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Das Konvergenzproblem der Regularitätshüllen. Math. Ann. **108**, 91—104 (1933).

La notation $\mathfrak{H}(D)$ désignera le domaine d'holomorphie associé à un domaine D (Regularitätshülle). Pour les notions relatives aux dom. d'holom., voir H. Cartan et P. Thullen (Math. Ann. **106**, 617—647; ce Zbl. **4**, 357). — Une suite infinie de domaines D_ν sera dite de 1ère espèce si $D_{\nu+1} \ll D_\nu$ (c.-à-dire si $D_{\nu+1}$ est complètement intérieur à D_ν); il s'ensuit $\mathfrak{H}(D_{\nu+1}) \ll \mathfrak{H}(D_\nu)$. Une suite sera de 2e espèce si $D_{\nu+1} \gg D_\nu$, et par suite $\mathfrak{H}(D_{\nu+1}) \gg \mathfrak{H}(D_\nu)$. — Tout domaine D peut être considéré comme limite d'une suite de 2e espèce; si, en outre, il existe Δ tel que $D \ll \Delta$, alors D peut être considéré comme limite d'une suite de 1ère espèce. Posons $\lim \mathfrak{H}(D_\nu) = \mathfrak{R}(D)$ pour une suite de 1ère esp., et $= \mathfrak{L}(D)$ pour une suite de 2e espèce; $\mathfrak{R}(D)$ et $\mathfrak{L}(D)$ sont indépendants de la suite particulière choisie. — Behnke et Thullen posent le problème: D étant donné, comparer $\mathfrak{R}(D)$ et $\mathfrak{L}(D)$ à $\mathfrak{H}(D)$. — 1° étude de $\mathfrak{R}(D)$. — On a $\mathfrak{R}(D) > \mathfrak{H}(D)$. La Nebenhülle $\mathfrak{R}(D)$ est un dom. d'holom.; c'est l'intersection (Durchschnitt) des dom. d' holom. qui contiennent D et sa frontière; la notion de Nebenhülle est invariante vis-à-vis de toute transf. pseudo-conf. régulière dans D et sur sa frontière. Pour que $\mathfrak{R}(D) = \mathfrak{H}(D)$, il faut et il suffit que $\mathfrak{H}(D)$ soit limite d'une suite (1ère esp.) de dom. d'holom.; par ex., il suffit que $\mathfrak{H}(D)$ soit limite d'une suite (1ère esp.) de dom. équivalents à $\mathfrak{H}(D)$ [c.-à-dire en corresp. pseudoconforme avec $\mathfrak{H}(D)$]; cas partic.: $\mathfrak{H}(D)$ est étoilé. Pour que $\mathfrak{R}(D) \neq \mathfrak{H}(D)$, il suffit que $\mathfrak{H}(D)$ ait un point frontière P

par lequel passe une variété analytique (lieu des points dont les coordonnées complexes sont fonctions holom. d'un param. complexe) dont tous les points voisins de P sont intérieurs à D [exemple: 2 var. complexes x, y; le domaine $|x| < 1$, $|y| < |x|$, le point $x = y = 0$, la variété $y = 0$; la Nebenhülle est $|x| < 1$, $|y| < 1$]. — 2^0 étude de $\mathfrak{L}(D)$. — On a $\mathfrak{L}(D) < \mathfrak{H}(D)$. Pour que $\mathfrak{L}(D) = \mathfrak{H}(D)$, il faut et il suf. que $\mathfrak{L}(D)$ soit un dom. d'holom. Condition suffisante: $\mathfrak{L}(D)$ est limite d'une suite ($1^{\text{ère}}$ esp.) de dom. équivalents à $\mathfrak{L}(D)$. Autre cond. suffisante: toute fonct. hol. dans D_ν (de la suite de 2^e esp.) y est développable en série unif. converg. de f. hol. dans D [exemple: les D_ν sont des domaines de Runge, c.-à-d. que toute f. hol. dans D_ν y est développable en série de polynomes]. *H. Cartan* (Strasbourg).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Fréchet, Maurice: Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités „en chaîne". Bull. Soc. Math. France **60**, 242—277 (1932).

Die Abhandlung bringt eine ausführliche Darstellung einiger früher angekündigter Sätze des Verf. (vgl. dies. Zbl. **5**, 255, auch betreffs der Bezeichnungen). Darüber hinaus wird folgendes eingehend erläutert: 1. Verlauf von $P(s, t)$ für $t \to \infty$; 2. Aussonderung von Lösungen, die gewisse wahrscheinlichkeitstheoretisch wichtige Nebenbedingungen erfüllen; 3. spezielle Fragestellungen betreffend zweireihige Matrizen. *A. Khintchine* (Moskau).

● **Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Publié par Émile Borel. Tome 1. Les principes de la théorie des probabilités. Fasc. 4. — Risser, R., et C.-E. Traynard: Les principes de la statistique mathématique.** Paris: Gauthier-Villars et Cie. 1933. XI, 338 S. Frcs. 80.—.

Das Buch liefert eine im wesentlichen erschöpfende Darstellung der wichtigsten klassischen und modernen Begriffsbildungen und Methoden der mathematischen Statistik. Der theoretische Teil ist von dem rein beschreibenden nicht getrennt; fast alle Kapitel enthalten beiderlei Fragestellungen, bisweilen in mehrmaliger Nacheinanderfolge. Die Anordnung des geschilderten Materials läßt keine bestimmten Richtlinien erkennen, so daß das Buch eher einen Bericht über eine große Reihe vereinzelter Methoden und Ergebnisse bildet als eine systematische Grundlegung der Theorie. Auch die an verschiedenen Stellen benutzten Methoden weisen keine Einheitlichkeit auf; die Verff. folgen vielmehr in dieser Hinsicht meistenteils den betreffenden Originalabhandlungen. Prinzipielle Fragen, insbesondere die viel diskutierten Probleme über die Beziehung zwischen „theoretischen" und „empirischen" Maßzahlen, werden in der Regel nicht aufgeworfen; sofern in dieser Richtung ein Standpunkt zu erkennen ist, ist es derjenige der bekannten Tschuprowschen Untersuchungen. Die logischen Ansprüche des Mathematikers (Allgemeinheit, Strenge, präzise Ausdrucksweise) werden nicht viel mehr berücksichtigt als es für die meisten Lehrbücher der praktischen Statistik üblich ist; als Beispiel sei nur die gewöhnliche unzureichende Ableitung der Pearsonschen Differentialgleichung erwähnt. Kurze Inhaltsübersicht: Erster Teil: Tabellen, graphische Darstellungen, Frequenzkurven; Berechnung von Mittelwerten verschiedener Art; Binomialgesetz und Pearsonsche Kurven; Entwicklungen von Bruns-Charlier und Romanovsky; Präzision der empirischen Maßzahlen; die wichtigsten theoretischen Schemata (Bernoulli, Poisson, Lexis, Borel); Zerlegung von Frequenzkurven. Zweiter Teil: ältere und neuere Maßzahlen für stochastische Abhängigkeit zwischen zufälligen Variablen; entsprechende empirische Maßzahlen; Abschätzung von theoretischen Maßzahlen auf Grund eines empirischen Materials; Tschuprowsche Untersuchungen über den Erwartungswert eines Quotienten und ähnliche Beispiele; genauere Abschätzung der Verteilungsfunktion des Bernoullischen Problems nach Edgeworth; Hermitesche Polynome und ihre Anwendung; Normalkorrelation im mehrdimensionalen Fall; die Methode der Differenzen; Klassifikation der statistischen Reihen nach Anderson. Erste Note: ein neues Abhängigkeitsmaß nach Steffensen. Zweite Note: Untersuchungen von Guldberg über die Auswahl von Interpolationskurven für statistische Reihen. *Khintchine.*

Andersson, Walter: Researches into the theory of regression. Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr **64**, 1—197 (1932).

Eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der parabolischen Regression. Kap. I und II behandeln die Aufstellung der Regressionsgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Diese Regressionsgleichung ist in der Tchebycheffschen Form $\tilde{y}_x = \alpha_0 \psi_0(x) + \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x) + \cdots + \alpha_k \psi_k(x)$ gegeben, wobei die Polynome $\psi_i(x)$ in bezug auf die gegebene Distribution von x orthogonal sind. Im Falle der nor-

malen Korrelation sind auch die mittleren Fehler der Regressionskoeffiziente α_i nach K. Pearson gegeben. Alle Formeln sind bis zur fünften Ordnung explizit aufgeschrieben. Im Kap. III werden mehrere Beispiele ausführlich behandelt. Im zweiten Teil des Buches (Kap. IV—V) setzt Verf. im Gegensatz zu der früheren „empirischen" Methode voraus, daß die Variablen x und y eine Wahrscheinlichkeitsdichte $F(x, y)$ von gegebener analytischer Form haben. Dann hat die „analytische Regressionskurve" die Gleichung

$$\bar{y}_x = \frac{\int y F(x, y) dy}{\int F(x, y) dy}.$$

Man könnte diese Regressionskurve durch Parabeln verschiedener Ordnungen annähern. Bei dem heutigen Stande unseres Wissens über die zweidimensionalen Verteilungen erweist sich aber diese Methode nach Verf. als unpraktisch. Deshalb entwickelt Verf. eine kombinierte Methode: nur die analytische Form der Verteilung von x wird dabei als bekannt vorausgesetzt. Dann kann man die entsprechende Tchebycheffschen Polynome $\psi_i(x)$ theoretisch bestimmen. Die Rechnungen sind bis zur fünften Ordnung für alle Pearsonschen und Charlierschen Verteilungen durchgeführt. Die Bestimmung der Regressionskoeffiziente α_i verläuft in diesem Falle viel einfacher als bei der Benutzung der rein empirischen Methode. Kap. VI bestätigt das durch mehrere Beispiele. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Fisher, R. A.: The concepts of inverse probability and fiducial probability referring to unkown parameters. Proc. Roy. Soc. London A **139**, 343—348 (1933).

Kritik einer Arbeit von Jeffreys [Proc. Roy. Soc. London A **138**, 48ff. (1932); vgl. dies. Zbl. **5**, 368]. Es wird nachgewiesen, daß die dort erhaltenen Sätze auf Voraussetzungen beruhen, die man nicht als a priori gegeben annehmen darf. *K. Stumpff.*

Kolmogoroff, A.: Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 83—91 (1933).

Eine zufällige Variable unterliege dem Verteilungsgesetz $F(x)$; es werde eine Reihe von n gegenseitig unabhängigen Versuchen angestellt, und $F_n(x)$ sei das sich dabei ergebende „empirische" Verteilungsgesetz (also $nF_n(x)$ die Anzahl der Versuchsergebnisse, welche x nicht übertreffen). $\Phi_n(\lambda)$ bedeute die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die obere Schranke von $|F_n(x) - F(x)|$ in $(-\infty, +\infty)$ kleiner als $\lambda/\sqrt{n}$ ausfällt. Hauptsatz: Ist $F(x)$ stetig, so strebt $\Phi_n(\lambda)$ für $n \to \infty$ gegen $\Phi(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$, und zwar gleichmäßig in bezug auf λ. Ein auch an sich interessanter Hilfssatz behauptet, daß schon $\Phi_n(\lambda)$ von $F(x)$ unabhängig ist, sofern $F(x)$ stetig vorausgesetzt wird. Ein zweiter Hilfssatz betrifft das Verhalten von Summen zufälliger Variablen und steht in engem Zusammenhang mit den diesbezüglichen Untersuchungen des Verf. (vgl. Bull. Acad. Sci. USSR **1931**, 959; dies. Zbl. **3**, 357). *A. Khintchine* (Moskau).

Glivenko, V.: Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 92—99 (1933).

In den Bezeichnungen des vorstehenden Ref. sei m_n die obere Schranke von $|F_n(x) - F(x)|$ in $(-\infty, +\infty)$. Aus dem Hauptsatz der vorstehend referierten Kolmogoroffschen Abhandlung folgt: Für jedes $\lambda > 0$ strebt die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $m_n > \lambda$ mit $1/n$ gegen Null (Gesetz der großen Zahlen); darüber hinaus wird mittels einer unabhängigen Methode bewiesen, daß im vorliegenden Fall auch das „starke" Gesetz der großen Zahlen allgemeine Geltung hat, d. h. daß die Wahrscheinlichkeit der Grenzrelation $m_n \to 0$ für $n \to \infty$ gleich Eins ist. Die Einschränkung auf stetige $F(x)$ (vgl. vorstehendes Ref.) läßt sich dabei aufheben.

A. Khintchine (Moskau).

Mazzoni, P.: Sulle aree moltiplicabili del Cantelli. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 100—108 (1933).

Aus der paarweisen Unabhängigkeit irgendwelcher zufälliger Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ folgt bekanntlich im Falle $n > 2$ ihre gegenseitige Unabhängigkeit noch nicht. Verf.