Riebesell, P.: Bausparmathematik. Wirtschaft u. Recht d. Versich. (Beih. d. Öffentlich-rechtl. Versich.) **63**, Nr 3, 1—40 (1931).

In knapper Form wird eine systematische Darstellung der in der Praxis des Bausparwesens hauptsächlich vorkommenden rechnerischen Aufgaben gegeben. Viele numerische Beispiele erleichtern dem mathematisch weniger geschulten Leser das Verständnis. Die theoretisch interessanten Fragen, welche mit den offenen Systemen zusammenhängen, werden auch hier noch nicht einer endgültigen Lösung zugeführt. Die auf den Beharrungszustand bezüglichen Ausführungen könnten beim Leser den Eindruck erwecken, daß der Beharrungszustand in allen Fällen nach einer gewissen Zeit eintreten muß, was bekanntlich nicht allgemein gilt. Sehr nützlich ist das erschöpfende Literaturverzeichnis. *Birnbaum* (Wien).

● **Krahn, A., und B. Kaltenboeck: Das deutsche Bausparen.** Berlin: Reimar Hobbing 1932. 127 S. RM. 4.20.

Der Hauptteil des Buches ist der Darlegung der wirtschaftlichen und organisatorischen Fragestellungen gewidmet, welche mit der in Deutschland ausgebildeten Form des Bausparens verknüpft sind. Ein mathematischer Anhang enthält eine (wenn auch nicht ganz vollständige) Übersicht über die wichtigsten einschlägigen mathematischen Tatsachen. Von den im allgemeinen eleganten und einfachen Herleitungen der Sätze wäre höchstens noch an einigen Stellen eine genauere Formulierung der Voraussetzungen zu wünschen. So wird insbesondere nicht hervorgehoben, daß manche Sätze nur unter der Annahme Zinsfuß = Tilgungsrate — Sparrate gelten. Als eine der ersten zusammenfassenden Darstellungen der Bausparmathematik ist das Buch sehr zu begrüßen. *Birnbaum* (Wien).

Geometrie.

● **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. Unter Mitwirkung v. Kurt Gödel u. Georg Nöbeling. Hrsg. v. Karl Menger. H. 3. Bericht über das Kolloquium 1930/31. Gesammelte Mitteilungen des Jahres 1930/31.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. 26 S. RM. 2.—.

Enthält verschiedene Beiträge zur Dimensionstheorie, Grundlegung der Mathematik und Verwandtem. Von dem nicht anderweitig Erschienenen sei erwähnt: Jede k-dimensionale kompakte Menge im R_n hat ein positives Mengersches Maß. — Die Haussdorffsche Dimension einer Teilmenge des R_n ist mindestens gleich der Menger-Urysohnschen. — In einem regulären, topologischen Raum mit abzählbarer Basis (V) brauchen nach Menger die V nicht als Punktmengen eingeführt zu werden, sondern wenn zwischen gewissen dieser V die Beziehung „$\supset$" erklärt ist, können die Punkte durch absteigende Teilfolgen (V_ν) aus (V) definiert werden, aber nicht jede absteigende Folge liefert einen Punkt. Dieser Mangel läßt sich im wesentlichen dadurch beseitigen, daß man die Forderung $V_{\nu-1} \supset V_\nu$ ersetzt durch $V_{\nu-1} \supset \overline{V}_\nu$. — Es werden Kurven konstruiert, deren sämtliche Punkte die Ordnung 3 oder 6, 3 oder 8, n oder $2n - 2$ haben. — Das Hilbertsche Axiom I_5: „Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt gemein", kann man ersetzen durch: Zwei Ebenen, die alle Punkte gemeinsam haben, sind identisch. — Mit Hilfe von I_5 und des Parallelenaxioms kann I_2 bewiesen werden. — III_3 ist eine Folge der Anordnungs-, Verknüpfungs- und der übrigen Kongruenzaxiome. — Es liege ein System S von Dingen vor und zwei Operationen $\sim p$ und $p \supset q$, die angewandt auf Dinge aus S wieder ebensolche liefern. Dann kann man jedem Ding aus S eindeutig einen der Werte „w" (wahr) oder „f" (falsch) so beilegen, daß, falls ein Ding a aus S sich aus anderen, $b, c, \ldots, k$, mittels der beiden Operationen zusammensetzen läßt, der a beigelegte Wert sich aus den zu $b, c, \ldots, k$ gehörigen Werten auf Grund der Deutungen von $\sim p$ und $p \supset q$ als Wahrheitsfunktion im Sinne des Aussagenkalküls ergibt. *H. Busemann.*

Carruccio, Ettore: Applicazione della legge di dualità sulla sfera alla teoria degli isoperimetri. Period. Mat., IV. s. **12**, 150—158 (1932).

Bemerkungen über das Dualitätsprinzip auf der Kugel. Historisches und Zusammenstellung einiger Sätze über sphärische Polygone und der daraus durch Übergang zum polaren Polygon hervorgehenden Sätze. Z. B.: Unter allen sphärischen Polygonen mit gegebenen Seitenlängen hat das einem Kreis eingeschriebene den größten Flächeninhalt. Unter allen sphärischen Polygonen mit gegebenen Winkeln hat das einem Kreis umbeschriebene den kleinsten Umfang. *W. Fenchel* (Göttingen).

Procissi, A.: Sul massimo volume di alcune specie di poliedri dei quali è data la somma degli spigoli. Period. Mat., IV. s. **12**, 159—172 (1932).

Unter allen Prismen mit gegebener Summe der Kantenlängen hat dasjenige mit gleichseitig-dreieckiger Grundfläche und quadratischen Seitenflächen das größte Volumen. Dies ergibt sich ganz elementar mit Benutzung der isoperimetrischen Eigenschaft der regulären Polygone. Ähnliche Sätze für gewisse Klassen von Pyramiden und Doppelpyramiden. *W. Fenchel* (Göttingen).

Sommerville, D. M. Y.: Isohedral and isogonal generalizations of the regular polyhedra. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **52**, 251—263 (1932).

Üblicherweise wird ein Polyeder als gleicheckig (gleichflächig) bezeichnet, wenn je zwei Ecken (Flächen) kongruent oder symmetrisch und die entsprechenden von den Ecken ausgehenden Kanten (die an entsprechenden Kanten liegenden Kantenwinkel) gleich sind (vgl. Brückner, Vielecke und Vielflache. Leipzig 1900; oder den Enzyklopädieartikel von Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen). Bei dieser Definition gibt es an Verallgemeinerungen der regulären Körper sowohl gleicheckige als auch gleichflächige Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, gleicheckige Ikosaeder (jedoch keine gleichflächigen) und gleichflächige Pentagondodekaeder (jedoch keine gleicheckigen). Verf. läßt nun in der obigen Definition die zweite Forderung über Gleichheit entsprechender Kanten bzw. Kantenwinkel fort. In diesem allgemeineren Sinne gibt es auch gleichflächige Ikosaeder und gleicheckige Pentagondodekaeder, während in den anderen Fällen nichts wesentlich Neues hinzukommt. Im alten Sinne gleicheckige (gleichflächige) Polyeder besitzen eine umbeschriebene (einbeschriebene) Kugel. Für die im Sinne des Verf. gleicheckigen bzw. gleichflächigen ist das jedoch im allgemeinen nicht der Fall. Die erwähnten neuen Typen von Ikosaedern (Dodekaedern) besitzen nur dann eine einbeschriebene (umbeschriebene) Kugel, wenn sie regulär sind. *W. Fenchel* (Göttingen).

● **Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie. Hrsg. v. Erwin Kruppa. Unter Verwendung d. gleichnamigen Aufgabensamml. v. Emil Müller u. Anton E. Mayer. Mappe 1.** Leipzig u. Wien: Franz Deuticke 1932. Blatt 1—12. RM. 2.—.

Niculescu, Gh.: Dreiecke „mit inversen Seiten". Gaz. mat. **37**, 283—288 (1932) [Rumänisch].

Thébault, V.: Systèmes de points concycliques. Gaz. mat. **37**, 321—323 (1932).

Jonescu, D. V.: Certaines courbes qui généralisent les coniques. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 2006—2009 (1932).

Goormaghtigh, R.: Sur le point et la conique de Frégier. Gaz. mat. **37**, 281—282 (1932).

Klíma, Josef: Sur quelques applications de la parabole de Steiner-Pelz. Čas. mat. fys. **61**, 236—241 u. franz. Zusammenfassung 241 (1932) [Tschechisch].

Die Steiner-Pelzsche Parabel eines Punktes bezüglich eines Kegelschnitts (Enveloppe der Geraden, die zu den Geraden eines Büschels gleichzeitig konjugiert und senkrecht sind) wird angewandt: 1. auf den Zusammenhang zwischen metrischer und projektiver Bestimmung eines Kurvenelementes 3. Ordnung; 2. auf die projektive Bedeutung des Krümmungsverhältnisses zweier sich berührender Kurven; 3. auf Liouville's Theorem über das Verhältnis der Krümmungen eines Kegelschnitts in 2 Punkten; 4. auf ein Theorem von Jeřábek über Kegelschnitte (Enzyklopädie, III AB 9, 1082). *Čech* (Brno).

Goormaghtigh, R.: Généralisation de la formule du rayon de courbure en coordonnées polaires. Gaz. mat. **37**, 324—326 (1932).

Mehmke, R.: Bemerkungen zu der Abhandlung „Ein neues Analogon zum Satz von Desargues in Räumen von gerader Dimension" von E. A. Weiss (Math. Zeitschr. Bd. 33 (1931), S. 388—395). Math. Z. **35**, 618—623 (1932).

(Vgl. dies. Zbl. **1**, 157.) Der Verf. beweist die in der genannten Abhandlung erwähnten Sätze mit Hilfe Graßmannscher Methoden. *K. Kommerell* (Tübingen).

Ragonesi, Rosario: Le trasformazioni piane quadratiche (l, l'), e configurazione dei loro elementi uniti. Atti Accad. Gioenia Catania **18**, Mem. XXIII, 1—17 (1931).

Zwei übereinander liegende Ebenen des R_4 seien durch eine quadratische Transformation vom Typus (l, l') aufeinander bezogen. Außerdem seien zwei zueinander und zu der ausgezeichneten Ebene windschiefe Geraden vorgegeben. Zwei zugeordnete Punkte der beiden Ebenen bestimmen dann — jeder mit einer der beiden Geraden — zwei Ebenen, die sich in einem Punkte schneiden. Durchläuft das Paar zugeordneter Punkte das Ebenenpaar, so beschreibt der Schnittpunkt eine M_2, mit deren Hilfe die möglichen Typen quadratischer Transformationen gefunden und auf ihre Ruheelemente hin untersucht werden. *E. A. Weiss* (Bonn).

Strubecker, Karl: Über rhombische Netze aus Geraden und Kreisen. S.-B. Akad. Wiss. Wien **141**, 33—39 (1932).

Die rhombischen Geradennetze in der Ebene sind bestimmt durch die Tangenten eines Kegelschnittes oder durch zwei Geradenbüschel. (Volk, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1924**). Verf. zeigt, daß dieser Satz auch bei projektivischer, elliptischer oder hyperbolischer Abmessung der Ebene gilt. Der Beweis stützt sich auf eine Funktionalgleichung von Perron, die sich aber bei anderer Normierung hätte umgehen lassen (vgl. darüber eine im J. reine angew. Math. erscheinende Note des Ref.). Legt man als Maßkegelschnitte in der projektivischen Ebene reelle null- oder einteilige Kreise zugrunde, so ergeben sich hieraus durch gnomonische Projektion auf eine Kugel und Beltramis Abbildung auf die Pseudosphäre die Sätze für die Kugel und Pseudosphäre, wie sie von Perron (Math. Z. **24**) formuliert worden sind. Durch stereographische und Zentralprojektion oder durch die auf Poincaré zurückgehende konforme Abbildung der sphärisch, pseudosphärisch oder euklidisch vermessenen Ebene auf die durch einen unendlich fernen Punkt abgeschlossene euklidische Ebene erhält Verf. einen anderen Satz des Ref. (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1929**) über besondere rhombische Kreisnetze, die von zwei in einem Kreisbündel enthaltenen Scharen von Kreisen gebildet werden, deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitt oder auf zwei Geraden liegen. *Volk* (Würzburg).

Mühlendyck, O.: Über die analytischen Zylinder. S.-B. Berlin. math. Ges. **30**, 14—17 (1932).

Die analytischen Zylinder werden in folgende Klassen eingeteilt: Unebene Zylinder mit euklidischen Geraden als Erzeugende, unebene Zylinder mit Minimalgeraden als Erzeugende, euklidische Ebenen und Minimalebenen. Für die erste Klasse findet man die natürliche Gleichung, indem man den Zylinder durch eine Ebene senkrecht zu den Erzeugenden schneidet und die natürliche Gleichung der so entstandenen Kurve angibt, bei den Zylindern der zweiten Klasse wird nach Einführung eines invarianten Parameters τ und eines invarianten Dreibeins (in Anlehnung an Untersuchungen des Verf. über windschiefe Regelflächen mit isotroper Richtebene) eine (infolge der Orientierung des Parameters eindeutige) Invariante A ermittelt; $A(\tau)$ ist dann die natürliche Gleichung des orientierten Zylinders dieser Klasse. *Heinrich Schatz* (Innsbruck).

Blumenthal, Leonard M.: Note on the multiple points of certain plane curves. (*Rice Inst., Houston, Texas, U. S. A.*) Tôhoku Math. J. **34**, 321—327 (1931).

Sind $\sigma = 0$, $\tau = 0$, $\varrho = 0$ drei ebene Kurven der Ordnungen $n, n, 2n$, und betrachtet man das von $\sigma^2 = 0, \sigma\tau = 0, \tau^2 = 0, \varrho = 0$ definierte ∞^3 Linearsystem, so besteht die C^{2n} des Systems, die einen gegebenen allgemeinen Punkt P als Doppelpunkt besitzt, aus derjenigen C^n des Büschels $\sigma + \lambda\tau = 0$, die durch P hindurchgeht, zweimal gezählt; soll die C^{2n} keine solche doppelte C^n sein, so muß P auf der Jacobischen Kurve von $\sigma = 0, \tau = 0, \varrho = 0$ liegen. Insbesondere betrachtet Verf. den Fall, wo $\sigma = 0, \tau = 0$ zwei C^4 mit 2 Doppelpunkten A, B sind, die durch 7 einfache Punkte C_i hindurchgehen, und wo $\varrho = 0$ eine C^8 mit A, B als vierfachen und C_i als Doppelpunkten ist; die Jacobische ist jetzt eine C^{13}, die die Gerade AB als Teil enthält. Dieses Beispiel wird durch direkte Rechnung studiert, könnte aber aus den bekannten Eigenschaften der C^6 mit 9 Doppelpunkten durch eine quadratische Transformation unmittelbar hergeleitet werden. Eine weitere Bemerkung des Verf. über die Anzahl der C^8 mit 2 vierfachen Punkten und 9 Doppelpunkten gibt für diese Anzahl nur eine obere Grenze. *E. G. Togliatti* (Genova).

Ciani, Edgardo: Una nuova forma canonica della ternaria cubica. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **1,** 215—228 (1932).

Tangentialdreieck einer ebenen Kurve 3. Ordnung heißt die Figur dreier Punkte der Kurve, die sich so anordnen lassen, daß jeder von ihnen der Tangentialpunkt des vorhergehenden wird. Wählt man ein solches zum Koordinatendreieck, so kann die Kurvengleichung auf die kanonische Gestalt $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + 2t \cdot x_1 x_2 x_3 = 0$ gebracht werden. Gibt es aber auf jeder C^3 Tangentialdreiecke? Diese Frage wird für die allgemeine (24), die harmonische (24), die äquianharmonische (36) und die Kurve mit Doppelpunkt (2) bejaht, für die Kurve mit Spitze verneint. (Eigenschaften der von den Tangentialdreiecken einer C^3 gebildeten Figur.) Die Beantwortung geschieht durchweg an Hand der Kurvengleichung. Im Falle der rationalen Kurven wird aber außerdem die Parameterdarstellung benutzt. *E. A. Weiss* (Bonn).

Kapferer, H.: Ein Beweis für die Unmöglichkeit einer nicht linearen Korrespondenz zwischen doppelpunktfreien Kurven gleicher Ordnung $n > 3$. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1931,** H. 3, 155—175 (1932).

Sind f, g, h Formen gleichen Grades m und A, B Formen gleichen Grades n in x, y, z, so bedeutet die Kongruenz

$$A(f, g, h) \equiv 0 \quad (\text{mod. } B)$$

das Stattfinden einer rationalen Abbildung der Kurve $B = 0$ auf die Kurve $A = 0$. Die Abbildung heißt äquivalent einer linearen, wenn es zwei zu B prima Formen t, t' und drei Linearformen f', g', h' in x, y, z gibt, welche die Kongruenzen

$$tf \equiv t'f', \quad tg \equiv t'g', \quad th \equiv t'h'$$

erfüllen. Nun wird bewiesen: Sobald $n > 3$ ist, ist jede Abbildung zwischen den Kurven n-ter Ordnung $A = 0$ und $B = 0$ äquivalent einer linearen.

van der Waerden (Leipzig).

Vagliasindi, Illuminata: Le trasformazioni cremoniane dell'S_3 ottenute mediante complessi di rette dell'S_4. Atti Accad. Gioenia Catania **18,** Mem. XXII, 1—39 (1931).

Si l'on considère dans S_4 un complexe ∞^3 de droites du 1er ordre, et deux espaces S_3, S_3' génériques, on a évidemment entre ceux-ci une transformation birationnelle, en associant un point de S_3 et un point de S_3' lorsqu'ils appartiennent à une droite du complexe. — En se basant sur la classification connue des complexes de droites du 1er ordre de S_4 [donnée par M. Marletta dans les Rend. Circ. mat. Palermo **28** (1909) et les Atti Accad. Gioenia Catania **3** (1909)], l'A. détermine les différents types de transformations birationnelles que l'on peut obtenir de la sorte.

Beniamino Segre (Bologna).

Villa, Mario: Sulle singolarità della forma Hessiana. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65,** 129—142 (1932).

Im Anschluß an die früheren Untersuchungen des Verf. über die Singularitäten der Jacobischen Form (Hyperfläche) von $r + 1$ Formen des S_r (vgl. dieses Zbl. **3,** 71) werden die dort bewiesenen Sätze auf den Sonderfall der Hesseschen Form H angewendet und notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß H in einem Punkt eine bestimmte Vielfachheit hat. *A. Duschek* (Wien).

Aprile, Giorgio: Sulle involuzioni di coppie di punti dello spazio ordinario. Atti Accad. Gioenia Catania **18,** Mem. XX, 1—43 (1931).

Ce travail — divisé en deux Parties — constitue une étude assez détaillée et générale des involutions I_2 de couples de points de l'espace ordinaire S_3, en relation aux complexes de droites relatifs, générés par les droites qui joignent les couples de points associés par rapport à I_2. — Dans la 1ère Partie l'A. introduit les courbes et surfaces (autoconjugués dans l'involution) lieux des couples de points associés qui déterminent une droite qui passe par un point générique de S_3, ou bien qui appartient à un plan donné, ou enfin qui s'appuie à une ou à deux droites fixes; et il considère les relations mutuelles entre ces éléments, les éléments doubles et fondamentaux de I_2 et le complexe relatif, en étudiant certains systèmes remarquables ($\infty^1, \infty^2, \infty^3$ et ∞^4) formés avec les courbes et surfaces susdites. Parmis les nombreux résultats auxquels il parvient ainsi, il faut remarquer (n. 9) les conditions nécessaires et suffisantes, afin que le complexe relatif à une I_2 soit linéaire ou quadratique, et (n. 8) la propriété (déja demontrée par M. Montesano pour $n=2$) que les complexes d'ordre $n \geqq 2$ relatifs à une I_2, sont nécessairement particuliers; en outre, au moyen de la projection stéréographique sur S_3 d'une hyperquadrique de S_4, il donne la représentation d'une I_2 sur un complexe de droites de S_4, en se rattachant de la sorte aux recherches de M. Marletta sur ce sujet. — Dans la 2ème Partie l'A. étudie les I_2 spéciales, c'est-à-dire celles qui ont un complex relatif spécial ou constitué par ∞^1 étoiles de droites. Le lieu des centres de ces étoiles est une courbe rationnelle, et toutes les I_2 spéciales sont rationnelles. Les ∞^1 surfaces générées par les couples de points associés qui appartiennent aux droites d'une même étoile (par simplicité l'A. suppose chacune de ces droites contenant un seul couple de I_2), constituent un faisceau et sont d'ordre $\mu \leqq 5$; il y a donc un nombre limité de cas possibles, que l'A. détermine rapidement, en donnant aussi les constructions relatives (en partie connues). *Beniamino Segre* (Bologna).

Terracini, Alessandro: Sulla riducibilità di alcune particolari corrispondenze algebriche. Rend. Circ. mat. Palermo **56,** 112—143 (1932).

Eine kurze Beschreibung des reichen Inhalts dieser Arbeit ist schon erschienen (s. dieses Zbl. **3**, 23). Es sei C eine algebraische Kurve n-ter Ordnung in einem Raume S_r, und es sei Γ die Korrespondenz, die jedem Punkte P von C die $n-r$ Punkte P' von C entsprechen läßt, wo C von der in P oskulierenden Hyperebene geschnitten wird. Verf. studiert zunächst die Korrespondenz Γ in der Nähe eines Doppelpunktes O; führt man eine analytische Darstellung eines Kurvenzweiges aus O ein:

$$x_i = x_i(t) = a_{i l_i} t^{l_i} + \cdots \qquad (\text{wo } i = 0, 1, 2, \ldots, r \text{ und } l_0 = 0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_r);$$

und bezeichnet man mit t, t' die Parameterwerte zweier entsprechender Punkte des Zweiges in der Nähe des Doppelpunktes $t = 0$, so findet man eine Reihenentwicklung $t' = pt + \cdots$, wo die nicht geschriebenen Glieder in t einen Exponent größer als 1 haben, und wo p eine von 1 verschiedene Wurzel folgender algebraischer Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_1^2 & \ldots & l_1^{r-1} & p^{l_1}-1 \\ l_2 & l_2^2 & \ldots & l_2^{r-1} & p^{l_2}-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_r & l_r^2 & \ldots & l_r^{r-1} & p^{l_r}-1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Jetzt setze man voraus, daß Γ eine reduzible Korrespondenz sei. Es ist immer dieses der Fall, wenn C eine algebraische W-Kurve ist; in diesem Falle zerfällt Γ in $n-r$ eineindeutige Korrespondenzen, die in Homographien des ganzen Raumes enthalten sind. Ein anderes Beispiel einer reduziblen Γ wird von folgender Nikomedesschen Konchoide gegeben:

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - 2a^2x^2 = 0;$$

hier zerfällt Γ in zwei (2, 1)-Korrespondenzen. Diese Konchoide und die W-Kurve $y = x^4$ sind die einzigen ebenen rationalen C^4, die eine reduzible Γ liefern; diese interessante Eigenschaft wird durch direkte Untersuchung gefunden. — Dann wendet sich Verf. zur Untersuchung des Falles, wo ein Faktor der Korrespondenz Γ in einer Homographie des ganzen Raumes enthalten ist (die W-Kurven ausgeschlossen); in diesem Fall muß der betrachtete Faktor von Γ zyklisch sein, und also p eine Einheitswurzel sein: $p^\pi = 1$. Wann kann Gleichung (1) eine Einheitswurzel als Wurzel haben? Eine ziemlich lange und mühsame Diskussion führt zu folgenden, für $r = 2, 3, 4$, allgemeinen Lösungen (mit der vorläufigen Voraussetzung, daß die Zahlen l_i teilerfremd seien):

$r = 2$) keine Lösung;

$r = 3$) $\quad \pi = 2, \quad l_3 = l_1 + l_2, \quad l_3 \equiv 0$ und $l_1 \equiv l_2 \not\equiv 0 \pmod{2}$;

$r = 4$) entweder: $\pi = 3, \quad l_1(l_2 + l_3 + l_4 - l_1) = l_2 l_3 + l_3 l_4 + l_4 l_2,$
$\quad l_1 \equiv 0$ und $l_2 \equiv l_3 \equiv l_4 \not\equiv 0 \pmod{3}$;

oder: $\pi = 3, \quad (l_1 + l_2)(l_3 + l_4) = l_3^2 + l_3 l_4 + l_4^2 + l_1 l_2,$
$\quad l_1 \equiv l_2 \equiv 0$ und $l_3 \equiv l_4 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Die Einschränkung teilerfremder l_i wird leicht beseitigt. Rückkehr zur geometrischen Frage gibt jetzt ohne Schwierigkeiten folgende Ergebnisse (die W-Kurven immer ausgeschlossen): $r = 2$) keine Lösung; $r = 3$) die Kurve C ist eine irreduzible (notwendig algebraische) asymptotische Linie einer Regelfläche, deren Erzeugenden zwei feste windschiefe Geraden schneiden; $r = 4$) die Kurve C ist eine algebraische irreduzible quasi-asymptotische Linie einer Regelfläche, deren Erzeugenden eine feste Gerade und eine feste Ebene allgemeiner Lage schneiden. — Es werden auch die besonderen Fälle studiert, wo C rational ist; darüber wollen wir nur referieren, daß die rationalen W-Kurven und die Egansche Kurve C^5:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 2t^2 - 1 : t^5 - 2t^3 : t : t^4$$

die einzigen rationalen Raumkurven sind, für welche Γ in $n - 3$ Faktoren zerfällt, die alle in Homographien des ganzen Raumes enthalten sind. Am Ende zwei Beispiele: einer rationalen Kurve in einem 5-dimensionalen Raume, deren oskulierenden S_3 die Kurve anderswo noch schneiden; und einer (transzendenten) Raumkurve, deren Tangenten die Kurve anderswo noch schneiden. *E. G. Togliatti* (Genova).

Kähler, Erich: Sui periodi degli integrali multipli sopra una varietà algebrica. Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 69—74 (1932).

Zwischen den Perioden von zwei beliebigen n-fachen Integralen 1. Gattung auf einer n-dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit M, die man erhält, wenn man diese Integrale über die Zyklen α_ν^n einer Homologiebasis für die Dimension n erstreckt, besteht eine bilineare Relation

$$\sum A_{\nu\mu}\,\omega_\nu \omega'_\mu = 0\,, \tag{1}$$

die durch eine Ungleichung

$$\pm i^n \sum A_{\nu\mu}\,\omega_\nu \overline{\omega}_\mu > 0 \tag{2}$$

ergänzt werden kann. Der Beweis, den Hodge [J. London Math. Soc. **5**, 283—290 (1930)] für diesen Satz gegeben hat, wird hier in vereinfachter und sehr klarer Form neu auseinandergesetzt. Der Beweis beruht auf der Betrachtung des folgenden $2n$-fachen Integrals in der Produktmannigfaltigkeit von M mit sich selber:

$$\int \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, \psi(y_0, y_1, \ldots, y_n)\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n,$$

welches, über den Zyklus $x = y$ erstreckt, Null ergibt. Drückt man diesen Zyklus durch die Homologiebasis der Produktmannigfaltigkeit aus, so folgt die Relation (1). Ebenso ergibt sich (2) aus der Betrachtung des Integrals

$$\int \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, \overline{\varphi}(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)\, dx_1 \ldots dx_n\, d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_n\,.$$

van der Waerden (Leipzig).

Severi, Francesco: Osservazioni a proposito della nota di Erich Kähler: „Sui periodi degl'integrali multipli sopra una varietà algebrica." Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 75—81 (1932).

Aus der in der vorangehenden Arbeit von Kähler wiedergefundenen Nichtexistenz der mehrfachen Integrale 1. Gattung mit verschwindenden Perioden folgen eine Reihe bemerkenswerter Sätze über algebraische Flächen, deren gegenseitige Abhängigkeit Severi schon 1928 festgestellt hat, ohne sie damals beweisen zu können. Die wichtigsten sind: 1. Es gibt keine „halbexakten" Integrale 1. Gattung, außer den einfachen Integralen 1. Gattung (von Picard). 2. Wenn ein Abelsches Integral bezüglich einer irreduziblen Kurve C, welche rational von einem Parameter abhängt, nie für spezielle Werte dieses Parameters von 3. Gattung wird, so sind die Perioden dieses Integrals konstant. 3. Ist $|C|$ ein Büschel irreduzibler Kurven auf einer Fläche F, so ist die Anzahl der linear-unabhängigen Kurven $C + C'$ (C' adjungiert zu C), welche die Jacobische Gruppe des Büschels enthalten, gleich der Irregularität von F. — Dabei werden unter halbexakten Integralen 1. Gattung auf einer Fläche m-ter Ordnung $f = 0$ in S_3 Integrale der Form

$$\int \frac{A\,dy - B\,dx}{f'_z}, \quad \int \frac{B\,dz - C\,dy}{f'_x}, \quad \int \frac{C\,dx - A\,dz}{f'_y} \tag{1}$$

verstanden, wo A, B, C adjungierte Formen der Ordnung $m - 2$ sind, die der Beziehung

$$Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = Nf$$

genügen. Ist dabei $N = A'_x + B'_y + C'_z$, so stellen die drei Ausdrücke (1) ein und dasselbe Integral 1. Gattung (von Picard) dar. — Aus der bilinearen Ungleichung von Kähler ergibt sich weiter, daß es keine Doppelintegrale 1. Gattung mit reellen Perioden auf F gibt. Ist ϱ_0 die Anzahl der zweidimensionalen Zyklen, die in bezug auf Homologie untereinander und von den algebraischen Zyklen unabhängig sind, so folgt daraus leicht $2p_g \leqq \varrho_0$. Diese Ungleichung wird noch verschiedentlich umgeformt.

van der Waerden (Leipzig).

Vasseur, Marcel: Sur les équations de Laplace relatives aux coordonnées ponctuelles et tangentielles d'une surface rapportée à un réseau conjugué: parallélisme de Peterson. Roczn. polsk. towarz. mat. **9**, 109—134 (1931).

On considère dans l'espace ordinaire les suites de Laplace terminées dans un sens et dans les deux sens, en ayant égard en même temps aux équations de Laplace relatives aux coordonnées ponctuelles et tangentielles des réseaux envisagés. On a ainsi deux suites d'équations de Laplace qui, en général, ne peuvent se terminer ensemble, quoique — si l'une se termine d'un côté — l'autre se termine aussi du même côté (avec un décalage de deux rangs au plus). — L'A. étudie à ce point de vue les différents cas possibles, en donnant des exemples nombreux et en indiquant une simple application métrique au parallélisme de Peterson. *Beniamino Segre* (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces isothermo-asymptotiques dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liége **1**, 88—90 (1932).

Boggio, T.: Alcune formule vettoriali negli spazi curvi a tre dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 189—194 (1932).

This paper gives in the symbolism expounded in the Geometria differenziale of Burgatti, Boggio and Burali-Forti theorems on Riemannian spaces of three dimensions which are fairly familiar in the notation of tensor analysis. For instance formula (10) of the paper restates the evident fact that if $\lambda_{rs} \equiv \lambda_{r,s} - \lambda_{s,r}$ then $\lambda_{rs,t} + \lambda_{st,r} + \lambda_{tr,s} = 0$. The main theorem of the paper concerns the second covariant derivative of a mixed tensor of rank two and is valid for a Riemannian space of any number of dimensions. *Murnaghan* (Baltimore).

Oseen, C. W.: Beiträge zur geometrischen Optik. I, II. Ark. Mat. Astron. Fys. **23** A, Nr 1, 1—51 (1932).

I. Zur Theorie des astigmatischen Strahlenbündels. Verf. geht aus von Gullstrands [Bidrag till astigmatismens teori. Nord. med. Arkiv. 22 (1890)]

Theorie des astigmatischen Strahlenbündels, in welcher die Glieder III. Ordnung konsequent berücksichtigt werden. Im Zentrum der Theorie stehen die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \zeta\left\{\frac{x}{\varrho_1} - \frac{x^2}{2\varrho_1^2}\frac{d\varrho_1}{ds_1} - \frac{xy}{\varrho_1^2}\frac{d\varrho_1}{ds_2} - \frac{y^2}{2\varrho_2^2}\frac{d\varrho_2}{ds_1}\right\}, \\ \eta &= y - \zeta\left\{\frac{y}{\varrho_2} - \frac{x^2}{2\varrho_1^2}\frac{d\varrho_1}{ds_2} - \frac{xy}{\varrho_2^2}\frac{d\varrho_2}{ds_1} - \frac{y^2}{2\varrho_2^2}\frac{d\varrho_2}{ds_2}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

x, y sind hier die Koordinaten eines Punktes der Wellenfläche. ϱ_1; ϱ_2 sind die Hauptkrümmungsradien dieser Fläche im Punkt $x = 0$; $y = 0$. ds_1; ds_2 sind die Bogenelemente der Krümmungslinien durch den Anfangspunkt. ξ, η, ζ sind laufende Koordinaten für einen Punkt auf dem durch den Flächenpunkt x, y gehenden Strahl. — Zur Untersuchung der Struktur des Strahlensystems (1) betrachtet man die Fläche F, welche von den, durch den Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ gehenden Strahlen erzeugt wird, und deren Schnittkurven mit den Ebenen $\zeta =$ konst. Während Gullstrand nur durch numerische Berechnung mehrere Punkte der Schnittkurven in den Ebenen $\zeta = \varrho_1$ und $\zeta = \varrho_2$ berechnet hatte, unternimmt der Verf. die allgemeine Untersuchung der Fläche F und ihrer Schnittkurven mit $\zeta =$ konst. F ist eine Fläche 6. Ordnung; die Schnittkurven sind rationale Kurven 4. Ordnung. Variiert man R und betrachtet die zugehörige Schar der Flächen F und insbesondere die entsprechende Schar der Schnittkurven mit einer festen Ebene $\zeta =$ konst., so ist auch die Einhüllende dieser Kurvenschar eine rationale Kurve 4. Ordnung. Sie ist der Schnitt der Brennfläche des Systems (1) mit der Ebene $\zeta =$ konst. Schließlich werden spezielle Fälle untersucht, in denen das System (1) eine Symmetrieebene besitzt, und hierfür die singulären Punkte der Schnittkurven und der Enveloppe bestimmt. — II. Über die Beziehungen einer Fläche und ihrer Evolute. Im ersten Teile seiner Abhandlung „Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie" (Nova Acta Soc. Sci. Uppsala, Ser. III **1900**) gab Gullstrand eine Darstellung der Beziehungen zwischen einer Fläche und ihrer Evolute, soweit diese sich mit Hilfe der Diff.-Invarianten der ersten 4 Ordnungen der Flächen ausführen läßt. Im Anschluß an diese Untersuchungen studierte er die Singularitäten der Evolute, die auftreten, wenn eine der Diff.-Invarianten in einem Punkt oder längs einer Kurve verschwindet. Ferner bestimmte er die Flächen, für die eine oder mehrere der Diff.-Invarianten überall verschwinden. — Der Verf. gibt eine mit anderen Hilfsmitteln durchgeführte und erweiterte Darstellung dieser Beziehungen zwischen einer Fläche und ihrer Evolute. Es werden unter Zugrundelegung der quadratischen Diff.-Form des Bogenelementes die Grundformeln der Flächentheorie in kovarianten Ableitungen entwickelt und für ein spezielles Koordinaten- und Parametersystem die ersten 4 kovarianten Ableitungen nebst den zugehörigen Invarianten einer Fläche F bestimmt. Hierdurch gewinnt man die ersten Glieder einer Reihenentwicklung für einen der Evolutenmäntel. Den beiden Scharen der Krümmungslinien von F entspricht auf dem Evolutenmantel ein konjugiertes Kurvennetz, dessen Kurven eingehend untersucht werden. Die aufgestellten Formeln dienen zum Studium der Singularitäten eines Evolutenmantels und besonderer Flächenklassen. *W. Haack* (Danzig).

Andreoli, G.: Coppie reciproche di V_2: leggi di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi. I. Problemi variazionali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 272—275 (1932).

Im Anschluß an Arbeiten von G. Barba (vgl. dies. Zbl. **4**, 20) wird eine weitgehende Verallgemeinerung des ebenen projektiven Dualitätsprinzips auf Flächen mit Riemannscher Metrik gegeben. Eine der verschiedenen möglichen Begründungen des Ansatzes liefert die Variationsrechnung. Auf einer Fläche V sei eine von 2 Parametern u, v stetig abhängige Schar geodätischer Linien gegeben. Dann ist das Quadrat des infinitesimalen Winkels benachbarter geodätischer Linien eine quadratische Differentialform in du, dv. Es liegt daher nahe, diese Form als Quadrat des Bogenelements einer zweiten Fläche W zu deuten, auf der u, v Parameter eines variablen Punktes sind. Diese Differentialform ist aber nur positiv definit an den Stellen, wo V positive Gaußsche Krümmung hat; indefinit für negative Gaußsche Krümmung von V (dann existieren ja benachbarte geodätische Linien ohne Schnittpunkt, also ohne reellen Winkel) und semidefinit für verschwindende Krümmung von V. Man erhält erst dann für V die gleiche Mannigfaltigkeit von Flächen wie für W, wenn man auch für V semi- oder indefinites Bogenelement zuläßt (Flächen in Lorentz-Räumen). — Zum Schluß wird die hier skizzierte Koppelung zweier Variationsprobleme in naheliegender Weise formal verallgemeinert. *Cohn-Vossen* (Köln).

Andreoli, G.: Coppie reciproche di V_2: legge di dualità delle metriche lineari e tangenziali, dei parallelismi e metrismi. II. Formazione e proprietà della coppia di varietà reciproche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 340—344 (1932).

In I (vgl. vorstehendes Referat) war eine Flächenabbildung $V \rightarrow W$ eingeführt, so daß jeder geodätischen Linie von V (im Kleinen) ein Punkt von W entspricht, und so daß das Winkelelement in V Linienelement in W wird. Nun entsprechen aber nicht nur den geodätischen Linien von V die Punkte von W, sondern auch umgekehrt! Stellt man nämlich die geodätischen Linien von W auf und betrachtet die Schar geodätischer Linien von V, die den Punkten eines geodätischen Bogens von W entsprechen, so stellt sich heraus, daß jene Schar geodätischer Linien in V durch einen Punkt geht. Man kann das fast ohne Rechnung einsehen. Das Problem der geodätischen Linie in W entspricht nämlich in V dem Problem, eine geodätische Linie a stetig in eine (hinreichend benachbarte) geodätische Linie b zu überführen, so daß das Integral des Winkeldifferentials bei der Überführung extrem wird. Eine elementare Betrachtung der Winkelsumme geodätischer Dreiecke in der elliptischen, hyperbolischen und euklidischen Ebene zeigt, daß die Drehung der geodätischen Linie um einen Punkt im elliptischen Fall das Minimum, im hyperbolischen Fall das Maximum des Integrals liefert, während es im euklidischen Fall natürlich von der Art des Übergangs unabhängig ist. — Gleichen geodätischen Bögen auf V entsprechen gleiche Winkel auf W und umgekehrt. Ordnet man wie in der projektiven Ebene den von einem Punkt durchlaufenen Kurven der einen Fläche als Bild die Hülle der entsprechenden geodätischen Linien der anderen Fläche zu, so ist klar, daß in entsprechenden Punkten beider Kurven die geodätischen Krümmungen reziprok sind. Jeder Einführung des Parallelismus der einen Fläche entspricht eine dazu duale Vorschrift auf der anderen. Weitere Arbeiten hierüber werden angekündigt. *Cohn-Vossen* (Köln).

Topologie:

Miller, Edwin W.: On subsets of a continuous curve which lie on an arc of the continuous curve. Amer. J. Math. **54**, 397—416 (1932).

This paper deals with the following problem: If S is a continuous curve (= locally connected continuum) in euclidean n-space, E_n, and M is a closed and bounded subset of S, what conditions are necessary and sufficient in order that M be a subset of an arc of S? In case S is the plane E_2, it has been shown by Moore and Kline [Ann. of Math. **20**, 218—223 (1919)] that the following two conditions are necessary and sufficient: (1) that every component of M be an arc or a point, and (2) that no interior point of an arc-component, t, of M be a limit point of $M - t$. In the first part of the paper the author studies these conditions of Moore-Kline in more general spaces S and proves that they constitute a solution to his problem in case S is the euclidean n-space or, indeed, is any connected domain in E_n. For these cases also conditions are given which are necessary and sufficient in order that the end points of the arc may be chosen as given points p_1 and p_2 of M; and it is shown that a closed set M in E_n is a subset of a ray if and only if 1° either (a) the components of M are all arcs and points, or (b) the components of M are a single ray and a bounded collection of arcs and points, and 2° no interior point of an arc- or ray-component, t, is a limit point of $M - t$. Continuing with the Moore-Kline conditions, the author proves that if S is any plane closed set such that each of its closed subsets which satisfies the Moore-Kline conditions is a subset of an arc in S, then S is either the whole plane or a simple continuous curve (= an arc, a simple closed curve, a ray, or an open curve), and similarly if S is a closed subset of E_n of the same type and which in addition is of dimension 1 in at least one of its points, then S is a simple continuous curve. The principal proposition (Theorem 7) in the second part of the paper gives a solution to the problem for continuous curves S in general, granted that the solution were known for the cyclic elements [See Whyburn, G. T., Amer. J. Math. **50**, 167—194 (1928)] of S; in other words, the general problem is reduced by this theorem to the same problem concerning cyclicly connected continuous curves. The author applies this result to obtain complete solutions to his problem in case S is either (I) the boundary of a plane domain (or if each maximal cyclic curve of S is a simple closed curve), (II) an acyclic continuous curve in E_n, or (III) a plane continuous curve which does not separate the plane (or whose every maximal cyclic curve is a simple closed curve plus its interior).

G. T. Whyburn (Baltimore).

Nielsen, Jakob: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. III. Acta math. (Uppsala) **58**, 87—167 (1932).

Die Arbeit führt die Untersuchungen der beiden ersten Abhandlungen des gleichen Titels (Acta math. **50**, 189—358 und **53**, 1—76) weiter. Die universelle Überlagerungsfläche Φ einer geschlossenen zweiseitigen Fläche φ vom Geschlecht $p > 1$ werde als hyperbolische Ebene (Einheitskreis mit Poincaréscher Maßbestimmung) dargestellt. Die Fundamentalgruppe F von φ erscheint dann als Gruppe linearer Substitutionen einer komplexen Variablen, die den Einheitskreis auf sich abbilden. Ist τ eine topologische Abbildung von φ auf sich, t eine τ überlagernde Abbildung von Φ, so ist, wenn f ein Element von F ist, tft^{-1} eine Abbildung von Φ auf sich, die die Identität überlagert. tft^{-1} ist also ein Element f' von F. Die Zuordnung $f \to f'$ ist ein Automorphismus I von F. Die Abbildung t läßt sich zu einer topologischen Abbildung des abgeschlossenen Einheitskreises ergänzen. Die zugehörige Abbildung des Randes E des Einheitskreises ist allein durch den Automorphismus I bestimmt. Eine andere dasselbe τ überlagernde Abbildung von Φ erzeugt einen zu I „verwandten" Automorphismus I', d. h. I und I' gehören in der Gruppe aller Automorphismen von F derselben Nebengruppe des Normalteilers der inneren Automorphismen an (Automorphismenfamilie). Zwei Abbildungen von φ auf sich gehören zur selben Abbildungsklasse, wenn sie verwandte Automorphismen erzeugen. Die Gesamtheit der zu einer Abbildung τ gehörigen Randabbildungen des Einheitskreises hängt also nur von der Abbildungsklasse von τ ab. Die Fixpunkte einer Abbildung τ lassen sich in folgender Weise in Klassen einteilen. t sei eine τ überlagernde Abbildung von Φ, die Fixpunkte besitzt. Diejenigen Fixpunkte von τ über denen Fixpunkte von t liegen, werden in eine Fixpunktklasse zusammengefaßt. Abbildungen t, die durch Elemente von F in einander transformierbar sind, und nur solche bestimmen dieselbe Fixpunktklasse. Dementsprechend gehört zu jeder Fixpunktklasse eine bis auf Transformationen mit Elementen von F bestimmte Randabbildung $t(E)$ des Einheitskreises E. Jeder Fixpunktklasse läßt sich ein Index $j(t)$ zuordnen, der allein durch die Fixpunktmenge der Randabbildung $t(E)$ bestimmt ist und der Ungleichung $3 - 4p \leqq j(t) \leqq 1$ genügt. Dem Index 1 und nur diesem entsprechen fixpunktfreie Randabbildungen $t(E)$. Die vorliegende dritte Abhandlung knüpft an die schon in der zweiten aufgeworfene Frage nach dem Verhalten des Index einer Fixpunktklasse bei Iteration der Abbildung τ an. Aus den früheren Untersuchungen ergab sich schon, daß eine Fixpunktklasse mit nicht positivem Index bei beliebiger Iteration der Abbildung τ den gleichen Index behält. Hier wird nun gezeigt, daß dies bei positivem Index nicht zutrifft. Und zwar gibt es einen durch eine Funktion des Geschlechts p beschränkten Exponenten n, so daß eine Fixpunktklasse von τ mit $j = 1$ bei τ^n nicht positiven Index erhält. Der Beweis wird indirekt geführt mit Hilfe eines Satzes von H. Kneser über topologische Abbildungen der Kreislinie auf sich, die mit allen Potenzen fixpunktfrei sind. Der weitere (Haupt-) Teil der Arbeit ist dem Studium der Abbildungsklassen endlicher Ordnung gewidmet. Eine Abbildungsklasse heißt von endlicher Ordnung, wenn die n-ten Potenzen ihrer Abbildungen zur Klasse der Identität gehören. Einer Abbildungsklasse wird zunächst die Gruppe T der zu den Abbildungen ft^n gehörigen Randabbildungen zugeordnet, wo f die Elemente von F und t^n die sämtlichen positiven und negativen Potenzen einer ein τ der Klasse überlagernden Abbildung t durchläuft. F ist Normalteiler von T und die Faktorgruppe T/F ist bei Abbildungsklassen endlicher Ordnung und nur bei diesen endlich. Ferner gehört zu jeder Abbildungsklasse endlicher Ordnung n eine ganzzahlige $2p$-reihige Matrix Γ (Exponentensummenmatrix bei der Transformation der Erzeugenden von F durch einen der Klasse zugeordneten Automorphismus). Es ist Γ^n gleich der Einheitsmatrix. Bei gegebenem p gibt es nur endlich viele Werte von n, zu denen derartige Matrizen Γ existieren.