ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK
4. Band, Heft 6 UND IHRE GRENZGEBIETE S. 241–288

Algebra und Zahlentheorie.

Kulik, S.: Parabolische Formel der Iteration für die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung. J. Cycle math. 1, 83–88 u. dtsch. Zusammenfassung 88 (1931) [Ukrainisch].

Beaver, R. A.: Vanishing aggregates of determinants and their relationships. Amer. Math. Monthly **39**, 266–276 (1932).

Verf. zeigt, daß die meisten bekannten Sätze über solche Summen von gewissen Unterdeterminanten einer Determinante, die verschwinden, Folgerungen aus dem bekannten Sylvesterschen Theorem sind. *Wegner* (Darmstadt).

Williamson, J.: The product of a circulant matrix and a special diagonal matrix. Amer. Math. Monthly **39**, 280–285 (1932).

A sei die zyklische Matrix

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Omega = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{n-1} \end{vmatrix},$$

wobei ω eine primitive n-te Einheitswurzel bezeichnet. Verf. beweist mittels gewisser Determinantenrelationen, daß $(\Omega \cdot A)^n - \mathrm{Det}\,(A) \cdot E = 0$ ist. Der Beweis läßt sich sehr vereinfachen. *Wegner* (Darmstadt).

Ceccioni, Francesco: Sull'equazione fra matrici $AX = \varepsilon XA$. Ann. Univ. Toscane, N. s. **14**, fasc. 2, 1–49 (1931).

Ce travail donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $AX=\varepsilon XA$, où X désigne une matrice inconnue, A une matrice donnée, ε un nombre également donné, admette des solutions pour lesquelles le produit AX ne soit pas pseudonul. Ce problème, qui correspond à l'étude des homographies permutables effectuée par Rosati dans un Mémoire intitulé „Sulle Corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, ...“ (Ann. di Mat. pura ed appl., sous presse), est traité ici d'une manière algébrique. — L'auteur montre (n° 19) que la condition nécessaire et suffisante en question est que ε soit racine de l'unité et qu'il existe de plus une racine, $\omega_1 (\neq 0)$, de l'équation caractéristique $|A - E\omega| = 0$ possédant les deux propriétés suivantes: 1) δ désignant le plus petit exposant tel que $\varepsilon^\delta = 1$, l'équation $|A - E\omega| = 0$ admet le cycle de racines $\omega_1, \varepsilon\omega_1, \dots, \varepsilon^{\delta-1}\omega_1$; 2) $A - E\omega$ admet au moins un groupe de diviseurs élémentaires $(\omega - \omega_1)^\alpha$, $(\omega - \varepsilon\omega_1)^\alpha$, ..., $(\omega - \varepsilon^{\delta-1}\omega_1)^\alpha$, relatifs respectivement aux racines $\omega_1, \varepsilon\omega_1, \dots, \varepsilon^{\delta-1}\omega_1$ et admettant le même exposant. Cette condition (C) étant satisfaite, celle pour que l'équation $AX = \varepsilon XA$ admette des solutions non nulles (établie au n° 6), l'est aussi. — L'auteur étudie d'abord le problème dans certains cas particuliers (A normale, A telle que les seuls diviseurs distincts de $|A - E\omega|$ soient $\omega - \omega_1, \omega - \varepsilon\omega_1, \dots, \omega - \varepsilon^{\delta-1}\omega_1$); de là, il passe facilement au cas général. Les résultats obtenus peuvent s'exprimer dans un domaine de rationalité quelconque (non algébriquement fermé). *P. Dubreil* (Lille).

Séguier, de: Normalisants des substitutions d'ordre 2 des groupes linéaire, quadratique, hermitien et gauche dans un champ de Galois d'ordre impair. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 1716–1718 (1932).

Es handelt sich um eine Ausdehnung der in dies. Zbl. 4, 197 referierten Untersuchungen. Es werden (ohne Beweis) die Normalisatoren der Substitutionen der Ordnung 2 aus den im Titel genannten Gruppen aufgezählt. *St. Pietrkowski.*

Shoda, Kenjiro: Über die irreduziblen Substitutionsgruppen, deren Grade Primzahl sind. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 2, 179—201 (1931).

Eine endliche irreduzible Gruppe von unimodularen linearen Substitutionen vom Primzahlgrad p ist entweder monomial (d. h. ihre Matrices haben in jeder Zeile nur ein von Null verschiedenes Element) oder primitiv (d. h. es gibt keine bei der Gruppe invariante Zerlegung des Vektorraumes in lineare Teilräume). Sieht man von dem Fall einer zweifach transitiven Permutationsgruppe ab, so zeigt sich: die monomialen Gruppen besitzen einen maximalen Abelschen Normalteiler $\mathfrak{N}$, der nicht im Zentrum enthalten ist, während bei den primitiven Gruppen das Zentrum $\mathfrak{Z}$ ein maximaler Abelscher Normalteiler ist. Im Fall einer monomialen Gruppe $\mathfrak{A}$ wird die Struktur von $\mathfrak{N}$ vollständig bestimmt; die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ ist eine transitive Permutationsgruppe p-ten Grades. Im Fall einer primitiven Gruppe $\mathfrak{A}$ besitzt $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$ einen einzigen minimalen Normalteiler $\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}$. Ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}$ Abelsch und $p > 2$, so ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ einer irreduziblen Untergruppe der Automorphismengruppe der Abelschen Gruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}$ vom Typus (p, p) isomorph, und zu jeder solchen Untergruppe gehört genau eine Gruppe $\mathfrak{A}$ von angebbaren Matrices. Ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}$ nicht Abelsch, so ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{Z}$ eine einfache Gruppe und $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$ isomorph einer Untergruppe der Automorphismengruppe dieser einfachen Gruppe. Auf Grund dieser Sätze lassen sich die auflösbaren Gruppen $\mathfrak{A}$ vollständig aufzählen.

van der Waerden (Leipzig).

Shoda, Kenjiro: Bemerkungen über vollständig reduzible Gruppen. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 2, 203—209 (1931).

Die Arbeit enthält eine Reihe von ganz einfachen Sätzen über Gruppen mit Operatoren, welche direkte Produkte von einfachen Gruppen sind. Es wird u. a. bemerkt, daß die nichtkommutativen Faktoren dieser Produkte eindeutig bestimmt und nicht zueinander zentralisomorph sind und daß man durch Zusammenfassung von isomorphen Faktoren eine eindeutige „ideale Zerlegung" erhält. Sodann bringt der Verf. eine Berichtigung zu Satz 20 seiner früheren Arbeit „Über direkt zerlegbare Gruppen", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 2, 51—72 (1930). Er gibt eine neue, von Y. Akizuki stammende notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß eine endliche Gruppe $\mathfrak{A}$ eine isomorphe irreduzible Darstellung besitzt. *van der Waerden* (Leipzig).

Turri, Tullio: Composizione ed ordine del gruppo delle omografie che trasformano in sè una correlazione non degenere. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 177—199 (1932).

Sei γ die Korrelation, H die Gruppe der mit γ vertauschbaren, G die Gruppe der mit γ^2 vertauschbaren Homographien. Nach bekannten Sätzen hat die charakteristische Determinante Δ von γ lauter Paare reziproken Wurzeln ϱ, $1/\varrho, \ldots$ und unter Umständen noch die Wurzeln 1 und -1. Es seien $S^{(\varrho)}$, $S^{(1/\varrho)}$, ... die charakteristischen Räume von γ^2. Dann ist H das direkte Produkt der Gruppen der mit γ vertauschbaren Homographien in den einzelnen Räumen $S^{(\varrho)} + S^{(1/\varrho)}, \ldots$ Verf. beschränkt sich dann auf die Untersuchung solcher Räume. — Die Gruppe der mit γ vertauschbaren Homographien in $S^{(\varrho)}$ hängt von denselben Parametern ab wie die entsprechende Gruppe in $S^{(1/\varrho)}$ und ist isomorph mit der Gruppe der mit γ^2 vertauschbaren Homographien in $S^{(\varrho)}$; die Homographien von $S^{(\varrho)} + S^{(1/\varrho)}$, die $S^{(\varrho)}$ und $S^{(1/\varrho)}$ fest lassen, bilden eine einparametrige Gruppe und gehören zu H. Wir können uns also auf den Fall beschränken, daß Δ lauter gleiche Wurzeln hat. — Wir betrachten nun die kleinsten Haupträume von γ^2 und fassen je alle Haupträume der gleichen Dimension zu Räumen $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... zusammen. Die Gruppen der Homographien in den Räumen $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... sind Faktorgruppen von H, die zugehörigen Normalteiler lassen sich bestimmen. Wir können uns also auf die Betrachtung eines solchen Raumes $S^{(\nu)}$ beschränken, in dem Δ lauter gleiche Wurzeln und gleiche Elementarteiler hat. — Hier unterscheidet Verf. 4 Fälle, je nachdem aus welchen von 6 von Kronecker angegebenen Grundtypen von bilinearen Formen sich die Form zusammensetzen läßt, die, gleich 0 gesetzt, die Korrelation γ darstellt. In jedem dieser Fälle wird Ordnung und Komposition bestimmt. — In allen Fällen wird angegeben, ob H kontinuierlich oder gemischt ist. — Bei den Beweisen werden die Gruppen G und H stets gleichzeitig betrachtet. G ist viel leichter zu übersehen und gestattet dann Schlüsse auf H. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

Weitzenböck, R.: Über die Invarianten von linearen Gruppen. Acta math. 58, 231—293 (1932).

Das Hauptergebnis der Arbeit ist der sog. erste Fundamentalsatz der Invariantentheorie für eine beliebige kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Transformationen von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $F(x)$ heißt eine $\mathfrak{G}$-Invariante, wenn für jede infinitesimale Transformation A aus $\mathfrak{G}$: $dx_i = \sum\limits_k a_i^k x_k$, identisch in allen x_i eine Gleichung $A(F) = \sum\limits_{i,k} \frac{\partial F}{\partial x_i} a_i^k x_k = \alpha \cdot F$ besteht. Alle ganzen rationalen $\mathfrak{G}$-Invarianten $F(x)$ bilden einen endlichen Integritätsbereich, d. h. jedes F ist ganz und rational durch endlich viele Basisinvarianten $F_1, F_2, \ldots, F_s$ darstellbar. Als Korollar dazu besteht der Satz: Die ganzen rationalen Invarianten von m-ären Grundformen bezüglich irgendeiner Untergruppe $\mathfrak{G}_r$ der allgemeinen projektiven Gruppe von m Veränderlichen besitzen eine endliche Integritätsbasis. Als Ergänzung ist dem Hauptsatz hinzuzufügen: Auch die absoluten $\mathfrak{G}$-Invarianten ($\alpha = 0$) bilden einen endlichen Integritätsbereich. — Die Gruppe wird durch ihre infinitesimalen Operationen und deren Liesche Komposition bestimmt: es herrscht der differentielle und nicht der integrale Standpunkt. Infolgedessen ist auch die Methode rein algebraisch. Die Arbeit faßt in vereinfachter und ausgeführter Form verschiedene Noten zusammen, die der Verf. in den Proc. Akad. van Wetensch. Amsterdam **33** (1930) veröffentlichte. Auf die gleiche Weise hat schon früher L. Maurer das allgemeine Problem angegriffen: Sitzungsber. Bayr. Akad. d. Wissensch. **29** (1899) und Math. Ann. **57** (1903). — Der erste Schritt ist die Behandlung der von einer einzigen infinitesimalen Transformation A erzeugten eingliedrigen Gruppe. Indem man A auf die von der Elementarteilertheorie her bekannte Normalform bringt, erkennt man, daß die A-Invarianten nichts anderes sind als die Semi-Invarianten gewisser willkürlicher binärer Formen, und für diese gilt, wie bekannt, der zu beweisende Endlichkeitssatz (Kap. I). Von da aus bewältigt man durch sukzessiven Aufstieg zunächst die auflösbaren Gruppen. Man kann ihre erzeugenden infinitesimalen Operationen $X_1, X_2, \ldots, X_r$ so wählen, daß die ersten i Operationen eine infinitesimale Gruppe $\mathfrak{G}^{(i)}$ aufspannen, die invariante Untergruppe innerhalb der daraus durch Adjunktion X_{i+1} entstehenden Gruppe $\mathfrak{G}^{(i+1)}$ ist. Das wesentliche Hilfsmittel ist der Satz, daß, wenn F eine $\mathfrak{G}^{(i)}$-Invariante ist, das Gleiche für $X_{i+1}(F)$ gilt. In ähnlicher konstruktiver Weise werden, unter Benutzung der durch Killing und E. Cartan aufgedeckten Struktur dieser Gruppen, die einfachen und halb-einfachen Gruppen gemeistert. Die Zurückführung der allgemeinsten Gruppe auf diese beiden entgegengesetzten Fälle: auflösbar und halb-einfach, geschieht schließlich vermöge des Umstandes, daß in jeder Gruppe eine maximale invariante auflösbare Untergruppe enthalten ist, deren Faktorgruppe halbeinfach ist. (Kap. II.) — Die Beweisführung enthält vorläufig noch eine Lücke. Denn in Kap. II benötigt man den Endlichkeitssatz der Semi-Invarianten binärer Grundformen nicht für „freie“, sondern für „gebundene“ Semi-Invarianten, d. i. für den Fall, daß die Koeffizienten der Grundformen an gewisse invariante Relationen gebunden sind. Der Endlichkeitssatz für gebundene Invarianten ist aber bisher (von Deruyts) nur für die volle projektive Gruppe bewiesen, und nicht für diejenige, welche den binären Semi-Invarianten zugrunde liegt. — Kap. III führt erstens in bekannter Weise mit Hilfe der Capellischen Identität die Bestimmung der Grundinvariantentypen für eine beliebige Anzahl willkürlicher Argumentvektoren zurück auf die Grundinvarianten von $n - 1$ Argumentvektoren. Zweitens wird der Adjunktionssatz besprochen, der davon handelt, daß die Untergruppe $\mathfrak{G}_r$ der vollen projektiven Gruppe, für welche die Invarianten aufgestellt werden sollen, dadurch definiert ist, daß sie gewisse Formen G invariant läßt. Hier kommt man aber nur zu dem ziemlich auf der Oberfläche liegenden Resultat, daß die ganzen rationalen $\mathfrak{G}_r$-Invarianten projektive algebraische Invarianten relativ zu G sind. *H. Weyl* (Göttingen).

Spampinato, Nicolò: Sulla classificazione delle matrici di Riemann di dato genere. Atti Accad. Gioenia Catania 18, Mem. XVI, 1—9 (1931).

Zwei Riemann-Matrizen desselben Geschlechtes p werden zur gleichen Familie gerechnet, wenn sie denselben Reduzibilitätsindex n haben. Die Charakteristiken einer solchen Matrix, d. h. Singularitätsindex, Multiplikabilitätsindex und Rang hängen nach einer früheren Arbeit des Verf. ab von einem $2n$-Tupel von Zahlen, das als die Signatur der Matrix bezeichnet wird; zwei Matrizen gleichen Geschlechtes mit gleicher Signatur und folglich gleichen Charakteristiken werden zu einer Klasse gerechnet. Schließlich werden diese Klassen in Typen aufgeteilt, indem Matrizen mit derselben Konfiguration von reinen Achsen zu einem Typ zusammengefaßt werden. Nach diesen Gesichtspunkten nun wird für $p = 1, 2, 3$ diese Einteilung explizit aufgestellt.

Grell (Jena).

Herbrand †, Jacques: Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. I. Extensions algébriques finies de corps infinis. Math. Ann. **106**, 473—501 (1932).

Die endlichen algebraischen Erweiterungen K eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers k werden auf das Verhalten der k-Primideale in ihnen untersucht. k wird als Kompositum einer aufsteigenden Folge $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ von endlichen Körpern dargestellt, die beim rationalen Körper k_0 beginnt. Ein k-Primideal p geht in einem k_i-Primideal p_i auf; p heißt endlich oder unendlich, je nach dem der Exponent ϱ_i, mit dem p_i in p_0 aufgeht, mit i ins Unendliche wächst oder nicht. Der limes von ϱ_i im Sinne der Steinitzschen g-Zahlen heißt der absolute Exponent von p, entsprechend wird der absolute Grad von p als der Grad seines Restklassenkörpers im Steinitzschen Sinne definiert. Zuerst wird die Zerlegung von p in einer Galoisschen Erweiterung K studiert, p spaltet sich in endlich viele konjugierte Primärkomponenten. Nur im Falle eines endlichen p erhält man eine Produktzerlegung von p wie bei endlichen Körpern. Den Relativgrad eines K-Primideals kann man wie üblich definieren. Um aber einen brauchbaren Relativexponenten zu haben, muß man die Dedekind-Hilbertschen Gruppen (Zerlegungs-, Verzweigungs- und Trägheitsgruppen) einführen; der Relativexponent von P ist die Ordnung seiner Trägheitsgruppe. Der Fall eines beliebigen K läßt sich leicht auf Galoissches K zurückführen. — Für die Definition der Differente von K/k ergeben sich zwei Möglichkeiten: entweder als g. g. T. aller Zahldifferenten oder als Inverse des Ideals aller Zahlen, für welche die Spur ihres Produktes mit einer beliebigen ganzen Zahl ganz ist. Die erste Definition ist die einzig brauchbare, weil sie genau diejenigen Primideale von K enthält, welche einen Relativexponenten größer als eins haben. Die unendlichen Primideale mit dieser Eigenschaft gehen in der auf die zweite Weise definierten Differente nicht ein, wohl aber die endlichen. *Max Deuring* (Leipzig).

Western, A. E.: On Lucas's and Pepin's tests for the primeness of Mersenne's numbers. J. London Math. Soc. **7**, 130—137 (1932).

Let $r_1, r_2, r_3, \ldots$ be a sequence of positive numbers such $r_{n+1} = r_n^2 - 2$. Let $N = 2^a - 1$ where a is an odd prime. The paper contains a simple proof of each of the following three tests for the primeness of N: (1) if a is a prime congruent to 3 modulo 4 and if $r_1 = 3$, or (2) if a is any odd prime and $r_1 = 4$, or (3) if a is any odd prime and r_1 is given by $lr_1 \equiv 2(b^2 - c^2) \bmod N$ where $l = b^2 + c^2$ is a rational prime of the form $4n + 1$, then N is prime or composite according as r_{a-1} is or is not congruent to zero modulo N. These three tests in order are Lucas's first test, Lucas's second test, and Pepin's test. Lucas stated his tests without proof; a proof of the second has been given by D. H. Lehmer: both of these tests have often been used in testing Mersenne primes. Pepin stated his test without proof; a proof has been supplied by R. D. Carmichael. It is stated (p. 137) on the authority of D. H. Lehmer that the only prime values of $a \leqq 257$ for which it is still unknown whether $2^a - 1$ is prime or composite are $a = 157, 167, 193, 199, 227, 241$; but there is no reference to the case $a = 229$ which was still in doubt in 1919 when Dickson published his History of the Theory of Numbers, Vol. I (see page IV). *R. D. Carmichael* (Urbana).

Corput, J. G. van der: Tafel der primitiven gleichschenkligen Dreiecke mit rationalen Winkelhalbierenden und mit Schenkeln kleiner als 160000. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 51—54 (1932).

This table gives the sides of all primitive isosceles triangles whose equal sides are less than 160000 and whose angle-bisectors are rational. There are 63 such triangles. Besides the sides, a, b, c, $(a = b)$, the table gives $\tan\frac{1}{4}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, and $\sin\frac{1}{2}A$, from which it is easy to find the bisectors of the interior and exterior angles of the triangle. The altitude of the triangle is also given, in terms of its decomposition into primes. The table was constructed by means of two parameters (m, n) as explained in a previous paper (cf. Zbl. 4, 202). By combining pairs of entries in this table, by the method previously explained, it is possible to obtain scalene triangles with rational angle-bisectors. Six such triangles are given by way of illustration. *Lehmer* (Berkeley).

Wilton, J. R.: Voronoï's summation formula. Quart. J. Math., Oxford Ser. **3**, 26—32 (1932).

Verf. beweist den Satz: Es sei $0 < a < b$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, $X > A_1$, $\varepsilon > 0$, $r(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei Quadrate, $f(t)$ von beschränkter Variation im Intervall $(a \ldots b)$, und $f(t) = 0$ außerhalb dieses Intervalls, V_α^β bezeichne die Variation von $f(t)$ im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$. Dann ist

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{a \leqq n \leqq b} (f(n-0) + f(n+0)) r(n) - \sum_{n=0}^{X}{}' r(n) \int_a^b J_0\left(2\pi\sqrt{nx}\right) f(x)\, dx \right|$$
$$< \left(\frac{B_1 b^{\frac{1}{4}+\varepsilon}}{\theta X^{\frac{1}{4}}} + \frac{A_2}{(aX)^{\frac{1}{4}}}\right)\left(|f(b)| + V_a^b + B_2 b \sum_{a \leqq n \leqq b} (V_{n-\theta}^{n-0} + V_{n+0}^{n+\theta})\right),$$

wo A_1, A_2 positive absolute Konstanten sind und B_1, B_2 positiv sind und nur von ε abhängen. Ein ähnlicher Satz wird für $0 = a < b < \frac{1}{2}$ gezeigt. Ferner werden die entsprechenden Sätze für Dirichlets Teilerproblem bewiesen. Der Beweis beruht auf Anwendung eines Satzes des Verf. (siehe dieses Zbl. **3**, 103). *Hans Heilbronn.*

Page, A.: A statement by Ramanujan. J. London Math. Soc. **7**, 105—112 (1932).

Verf. beweist: Ist $d(q)$ die Teilerzahl von q, $v > 0$ ganz, c ganz, C die Eulersche Konstante, so ist

$$\sum_{m=1}^{n} d(mv + c) = a_c(v) \cdot n(\log n + 2C - 1) + b_c(v) \cdot n + O(n^{1/3} \log n)$$

für $n \to \infty$, wo $a_c(v) > 0$ ist. Derselbe Satz war mit der Restabschätzung $O(n^{1/2})$ bereits von Estermann bewiesen. Die Verbesserung des Restgliedes beruht auf der Anwendung eines allgemeinen van der Corputschen Satzes über Gitterpunkte. Wie Ramanujan bereits angegeben hatte, lassen sich die Zahlen $a_c(v)$ und $b_c(v)$ als Koeffizienten bestimmter Dirichletscher Reihen angeben, die sich von der Riemannschen Zetafunktion ableiten. *Hans Heilbronn* (Göttingen).

Perron, Oskar: Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1931**, H. 3, 129—154 (1932).

Verf. beweist: „Liegt die komplexe Zahl ϱ nicht im Körper $\mathfrak{K}$ der dritten Einheitswurzeln, so hat die Ungleichung $\left|\varrho - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{13}\,|q|^2}$ unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p, q aus $\mathfrak{K}$. Dagegen hat für jedes $c > \sqrt[4]{13}$ und gewisse Zahlen ϱ (z. B. $\varrho = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$ mit $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$) die Ungleichung $\left|\varrho - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c\,|q|^2}$ nur endlichviele Lösungen." Der zweite Teil dieses Satzes ist leicht zu beweisen. Zum Beweise des ersten Teiles zeigt man zuerst folgenden Hilfssatz über Cassinische Kurven: „Ist a irgendeine komplexe Zahl, so gibt es zu jeder komplexen Zahl z_1 eine homologe Zahl z, so daß $|z^2 - a|^2 < \frac{1}{3} + |a|^2$ ist. Falls $\frac{3}{4} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{13}}{4}$ ist, gibt es sogar eine homologe Zahl z mit $|z^2 - a|^2 \leqq \frac{4|a|}{\sqrt{13}}$; das Gleichheitszeichen gilt dabei nur in gewissen sechs Ausnahmefällen." (Zwei Zahlen heißen homolog: $z \equiv z_1$, wenn $z - z_1$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}$ ist.) Vgl. dies. Zbl. **2**, 13. — Liege jetzt die komplexe Zahl ϱ nicht in $\mathfrak{K}$. Dann gibt es nach dem Dirichletschen Schubfach-Verfahren unendlichviele Paare teilerfremder ganzer Zahlen p, q aus $\mathfrak{K}$ mit $\left|\varrho - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{\sqrt{21}}{2|q|^2}$. Zu jedem solchen Paar p, q existieren unendlich viele Paare p_1, q_2 mit $pq_1 - p_1 q = 1$; dabei kommen unter den Brüchen q_1/q mit jedem einzelnen auch alle homologen vor. Setzt man zur Abkürzung $\delta = q^2\left(\varrho - \frac{p}{q}\right)$ und $\delta_1 = q_1^2\left(\varrho - \frac{p_1}{q_1}\right)$, so besteht die Gleichung $\delta_1 = \delta\left\{\left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta}\right)^2 - \frac{1}{4\delta^2}\right\}$. Indem man erlaubterweise q_1/q durch einen geeigneten homologen Bruch ersetzt, kann man nach dem Hilfssatz erreichen, daß

$$(1)\quad |\delta_1|^2 < \frac{|\delta|^2}{3} + \frac{1}{16|\delta|^2}, \quad \text{für } \frac{1}{\sqrt{13}} \leqq |\delta|^2 \leqq \frac{1}{3} \quad \text{sogar} \quad (2)\quad |\delta_1|^2 < \frac{1}{\sqrt{13}}$$

ist. Weil nun unendlichviele teilerfremde Paare q, p mit $|\delta|^2 \leqq \frac{21}{4}$ existieren, so ist auch entweder unendlichoft $|\delta| < 2$ oder es läßt sich nach der Ungleichung (1) erreichen, daß unendlichoft $|\delta_1| < 2$ ist. Durch Wiederholung dieses Schlußverfahrens folgt aus (1) der Reihe nach, daß es unendlichviele p, q mit $|\delta|^2 < 2$, $|\delta|^2 < \frac{3}{4}$ und schließlich $|\delta|^2 < \frac{1}{3}$ gibt; aus (2) ergibt sich jetzt, daß sogar unendlichoft $|\delta|^2 < \frac{1}{\sqrt{13}}$ sein muß, w. z. b. w. — In einem letzten Abschnitt wird ein ähnlicher Beweis für folgenden bekannten Satz von Hurwitz geführt: „Ist ϱ eine reelle Irrationalzahl, so gibt es unendlichviele rationale Brüche $\frac{p}{q}$ mit $\left|\varrho - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$." *K. Mahler.*

Perron, Oskar: Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen. Math. Z. **35**, 563—578 (1932).

Der Verf. beweist folgende drei Sätze, von denen nur der erste bekannt war: 1. Sind a, b, c reell mit $b^2 - 4ac = 1$, so gibt es unendlichviele Paare teilerfremder ganzer rationaler Zahlen x, y mit $|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Das Kleinerzeichen steht nie bei den zu $\frac{x^2 + xy - y^2}{\sqrt{5}}$ äquivalenten Formen, sonst unendlichoft. 2. Sind a, b, c komplexe Zahlen mit $b^2 - 4ac = 1$, so gibt es unendlichviele Paare teilerfremder ganzer Zahlen x, y aus $\Re(i)$ mit $|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Das Kleinerzeichen steht nie bei den zu $\frac{x^2 + xy + y^2}{\sqrt{-3}}$ äquivalenten Formen, sonst unendlichoft. 3. Sind a, b, c komplexe Zahlen mit $b^2 - 4ac = 1$, so gibt es unendlichviele Paare teilerfremder ganzer Zahlen x, y aus $\Re(\varepsilon)$ $\left(\varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$ mit $|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{13}}$. Das Kleinerzeichen kommt nie vor bei den zu $\frac{x^2 + \varepsilon^2 xy - y^2}{\sqrt{4 + \varepsilon}}$ und $\frac{x^2 + \varepsilon xy - y^2}{\sqrt{4 + \varepsilon^2}}$ äquivalenten Formen, sonst unendlichoft. — Der Beweis verläuft so: Sind zwei Paare teilerfremder ganzer Zahlen x, y; x_1, y_1 aus den obigen drei Körpern durch die Gleichung $x_1 y - x y_1 = 1$ verbunden und ist $\delta = ax^2 + bxy + cy^2$, $\delta_1 = ax_1^2 + bx_1 y_1 + cy_1^2$, so besteht die Gleichung $\delta_1 = \delta\left\{\left(\frac{y_1}{y} + \frac{2ax + by}{2\delta y}\right)^2 - \frac{1}{4\delta^2}\right\}$. Hier läßt sich jetzt ähnlich schließen wie in früheren Arbeiten des Verf. (siehe das vorige Referat). Mittels des Dirichletschen Schubladenverfahrens und dreier zueinander analoger Sätze über Cassinische Kurven zeigt man bei Satz 1, daß unendlichoft $|\delta^2| < \frac{81}{80}$ und also unendlichoft $\min(|\delta^2|, |\delta_1^2|) \leqq \frac{1}{5}$ ist, beim zweiten Satz, daß unendlichoft $|\delta|^2 < \frac{9}{2}$ und also unendlichoft der Reihe nach $\min(|\delta|^2, |\delta_1|^2) \leqq 2$, $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}$ ist, bei Satz 3, daß unendlichoft $|\delta|^2 < \frac{11}{2}$ und also unendlichoft der Reihe nach $\min(|\delta|^2, |\delta_1|^2) \leqq 2, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, 1/\sqrt{13}$ ist. Die Fälle, wo nie das Kleinerzeichen steht, lassen sich durch eine besondere Diskussion bestimmen. *Mahler* (Göttingen).