Werk

Titel: Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie (s. a, Differentialgleichungen, Vari...

Ort: Berlin

Jahr: 1932

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0002|log107

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

lauter Bisekanten von S_{12}^3, und 55 Kegelschnitte; jeder Kegelschnitt C^2 von Ψ^5 trifft (je 1 mal) 2 Geraden der Fläche (seine Stützgeraden). Wenn man von den 11 Geraden der Fläche Ψ^5 3 auswählt und die 3 Kegelschnitte von Ψ^5 konstruiert, die je 2 von diesen Geraden zu Stützgeraden haben, schneiden sich die Ebenen der 3 Kegelschnitte in einem Punkt, der zum Mittelpunkt des Bündels (W) gewählt werden kann. Ebene Schnitte von Ψ^5, sowie auf Ψ^5 liegende rationale Raumkurven werden eingehend betrachtet. *Čech* (Brno).

Todd, J. A.: On the determination of plane curves by means of assigned singularities. Proc. Cambridge philos. Soc. **27**, 291—305 (1931).

Dans ce travail, l'auteur se propose essentiellement de donner une condition suffisante pour qu'une courbe algébrique plane Γ, de degré N, de genre Π et passant par des points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_\varrho$ avec des multiplicités données $I_2, I_2, \ldots, I_\varrho$ (les tangentes en ces points étant distinctes et quelconques) soit irréductible. Π étant positif, faisons les hypothèses suivantes: a) les points O_σ, pris avec les multiplicités I_σ, présentent des conditions indépendantes pour les courbes de degré N, et le degré de liberté virtuel E de ces courbes n'est pas négatif; b) les points O_σ, présentent des conditions indépendantes pour les courbes Σ de degré $N-3$ passant $I_\sigma - 1$ fois par chaque point O_σ (adjointes); c) il n'existe pas de courbes d'ordre $N-3-\nu$ passant $I-1-i_\sigma$ fois par O_σ, de degré de liberté effectif nul, pour lesquelles l'excès δ' des ces points (nombre de relations entre les conditions imposées par ces points aux courbes) est égal à $\nu(N-3-\nu) - \Sigma i_\sigma (I_\sigma - 1 - i_\sigma)$ ($\nu \leqq N-3$, $i_\sigma \leqq I_\sigma - 1$) sans que $\delta' = 0$. Moyennant ces hypothèses, l'auteur démontre que: la courbe générique du système des courbes Γ est irréductible, ou bien l'on a $E=0$, et Γ est une courbe elliptique multiple. Si les courbes Γ considérées sont de genre zéro, l'énoncé se trouve modifié: la condition c) est remplacée par une autre assez analogue, et la courbe générique du système est toujours irréductible. La démonstration dans le cas général ($\Pi > 0$) repose sur un critère d'irréductibilité pour une courbe algébrique déterminée par le système de ses adjointes. Bien entendu, les résultats énoncés sont seulement valables moyennant certaines restrictions sur la disposition des points donnés: par exemple, trois points tels que la somme des multiplicités correspondantes soit supérieure à N, ne doivent pas se trouver en ligne droite, etc. *Dubreil* (Göttingen).

Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Tensoranalysis:

Mukhopadhyaya, S.: Circles incident on an oval of undefined curvature. Tôhoku math. J. **34**, 115—129 (1931).

Es werden Krümmungseigenschaften der geschlossenen ebenen konvexen Kurven untersucht. Hierbei wird von den Kurven angenommen, daß sie mit stetiger Tangente versehen sind. Existenz der Krümmung wird jedoch nicht vorausgesetzt. Unter dem oberen (unteren) Krümmungskreis der Kurve V im Punkt P wird derjenige V in P berührende Kreis verstanden, dessen Radius gleich der unteren (oberen) Grenze der Radien der in P von außen (innen) berührenden Kreise ist. Die obere bzw. untere Grenze der oberen bzw. unteren Krümmungsradien für alle Punkte von V sei $\bar{r}$ bzw. $\underline{r}$. Unter einem eigentlichen Oskulationskreis in P wird ein Kreis verstanden, der V in P berührt und gleichzeitig durchsetzt. Geht er von außen nach innen, wenn er im Sinne der orientiert angenommenen Kurve durchlaufen wird, so heißt er positiv, sonst negativ. Von den Ergebnissen der Arbeit seien genannt: 1. Ein Kreis, dessen Radius $\leqq \underline{r}$ ist, kann ungehindert in V rollen. V kann ungehindert in einem Kreis mit Radius $\geqq \bar{r}$ rollen. (Verallgemeinerung eines für Kurven mit stetiger Krümmung bekannten Satzes.) 2. Auf V gibt es mindestens 2 Punkte mit positivem und mindestens 2 Punkte mit negativem eigentlichen Oskulationskreis, dessen Flächeninhalt (Umfang) gleich dem des Ovals ist. 3. Wenn ein Kreis vom Radius r die Kurve V $2n$-mal durchsetzt, so gibt es wenigstens $n-1$ Punkte mit positiven und wenigstens $n-1$ Punkte mit negativen eigentlichen Oskulationskreisen vom Radius r. — Eng verwandte Untersuchun-

gen mit teilweise weitergehenden Ergebnissen finden sich schon bei H. Bohr und B. Jessen [Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvid. og math. Afd., 8. R. **12**, 325—406 (1929)] und B. Jessen (Matematisk Tidsskrift, B **1929**, 50—62).

W. Fenchel (Kopenhagen).

Delens, Paul: Congruences orthoptiques et congruences isotropes. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1623—1625 (1931).

Continuando i suoi studi sulle congruenze di curve e sfruttando le formule vettoriali stabilite nelle precedenti comunicazioni, l'A. studia: a) le congruenze ortoptiche, cioè ottenute come intersezioni di due famiglie di superficie ortogonali dipendenti da un parametro e di cui assegna due invarianti, generalizzando così alcuni classici risultati di Lamé; b) le congruenze isotrope, non necessari amente rettilinee come quelle di Ribaucour, o di cerchi studiate da A. Bloch; esse sono caratterizzate dall'annullarsi di uno dei due invarianti assegnati in a). L.'A. assegna anche sotto nuova ed elegante formula vettoriale le condizioni di isotropia e dimostra che tutte le congruenze isotrope resultano dalla intersezione di sviluppabili isotrope, appartenenti a due famiglie dipendenti da un parametro complesso. *R. Marcolongo* (Napoli).

Hlavatý, V.: Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve. Math. Z. **34**, 58—73 (1931).

Es wird ein n-dimensionaler, mit einer nur bis auf bahntreue Transformationen vorgegebenen symmetrischen Übertragung Γ^k_{ij} versehener Raum $\mathfrak{A}_n$ zugrunde gelegt. Jeder „Dichte" $\mathfrak{d}$ vom Gewicht -1 kann man eindeutig eine von diesen Übertragungen Γ^k_{ij} entsprechen lassen. Ist nun im $\mathfrak{A}_n$ eine allgemeine Kurvenkongruenz gegeben, so kann man ihr eine ganz bestimmte Dichte in $\mathfrak{A}_n$ zuordnen, und man gelangt so leicht zu einem System von Frenetschen Ableitungsformeln. Wesentlich schwieriger ist der Fall, wo nur eine einzige (allgemeine) Kurve vorgegeben ist. Hier gelingt es dem Verf., nach Einführung einer überzähligen Koordinate x^0 die projektivkovariante Derivation längs der Kurve zu definieren, was dann zur Einführung eines ausgezeichneten Kurvenparameters („projektiven Kurvenbogens") führt und die Aufstellung der Ableitungsformeln ermöglicht. *Čech* (Brno).

Süss, Wilhelm: Über wechselseitig affinparallele Flächen. Math. Z. **34**, 158—160 (1931).

L'auteur donne une démonstration nouvelle et plus simple de l'équation de la détermination des surfaces introduites il y a 4 ans par lui même [Math. Ann. **98**, 313—320 (1927)] et par M. W. van der Woude [Math. Z. **26**, 186—195 (1927)] et nommées au titre de la Note. C'est le couple de surfaces dont la distance affine au sens de M. Blaschke (Differentialgeometrie II Berlin 1923) entre deux points correspondants est constante, calculons la au point de vue de la première surface ou à celui de la seconde. La démonstration repose sur les propriétés de la géométrie relative de la surface, les deux surfaces étant rapportées aux lignes de courbure relatives de l'une surface par rapport à l'autre qui se confondent d'ailleurs avec les lignes du réseau conjugué commun des deux surfaces. En termes de la géométrie relative le théorème démontré obtient l'élégant énoncé: deux surfaces possèdent la propriété en question si la courbure relative de l'une surface par rapport à l'autre est constante et vice versa. *Finikoff.*

Calapso, R.: Studi sintetici di geometria proiettiva differenziale. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 350—353 (1931).

The starting point of the author is the following remark. Take a surface S and the two asymptotic lines through a point P on S. Let R be the developpable tangent surface to one of the asymptotic lines l, and g the tangent to l at P. Then there exists one linear complex which has in g 5 coincident lines in common with R, and a linear family of such complexes which have 4 lines in common. The same holds for the other asymptotic line through P. Now there exists one and only one linear complex in each family in such a way that the linear congruence in common has a given arbitrary straight line T through P as directrix. Each of these selected linear complexes defines

a null system, and let π be the projectivity defined by these two null systems. Then the author studies the properties of π in the general case and also in the cases in which T is the first directrix of Wilczynski or the edge of Green. *Struik* (Cambridge).

Whitehead, J. H. C.: The representation of projective spaces. Ann. of Math., II. s. **32**, 327—360 (1931).

Ein affiner Raum von $n+1$ Dimensionen, A_{n+1}, kann zur „Darstellung" eines projektiven n-dimensionalen Raumes P_n benutzt werden, wenn es möglich ist, einen seiner Vektoren ξ^α den Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &(a)\ \xi^\alpha{}_{;\beta} = \delta^\alpha_\beta, \\ &(b)\ R^\alpha_{\beta\gamma\lambda}\xi^\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\lambda = 0,1,2,\ldots,n) \quad (1,5)$$

zu unterwerfen. Dabei ist unter $R^\alpha_{\beta\gamma\lambda}$ der aus den projektiven Zusammenhangskomponenten $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ gebildete projektive Krümmungstensor und unter (;) die kovariante Ableitung relativ $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ zu verstehen. Es besteht dann die Möglichkeit in A_{n+1} Koordinaten $x^0, x^1, \ldots, x^n$ zu verwenden, bezüglich welcher die Zusammenhangskomponenten $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ gewissen gegenüber der Transformationsgruppe der Veblenschen projektiven Differentialgeometrie invarianten Bedingungen genügen. Anschließend an diese ersten Ergebnisse seiner Arbeit stellt sich Verf. die Aufgabe, besondere sog. „Normaldarstellungen" anzugeben. Bezieht man die Differentialgleichungen der Bahnkurven der Übertragung auf derartige projektive Normalkoordinaten $z^0, z^1, z^2, \ldots, z^n$, so erhalten ihre Lösungen die einfache Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} e^{z^0} z^i &= p^i t, \\ e^{z^0} &= p^0 t + 1 \end{aligned}\right\} \quad (3,3) \qquad \text{bzw.} \qquad z^i = \frac{p^i t}{p^0 t + 1} = p^i \sigma; \quad \sigma = \frac{t}{p^0 t + 1}, \quad (3,4)$$

wodurch in einfacher Weise „affine" (σ) bzw. „projektive" (t) Bahnkurvenparameter gewonnen werden. Nach einer Reihe weiterer Entwicklungen von Eigenschaften und Verwendungsmöglichkeiten homogener und nichthomogener Normalkoordinaten (Transformationseigenschaften, Potenzreihenentwicklungen der x^α als Funktionen der z^α usw.) behandelt Verf. Äquivalenzfragen. 2 projektive Zusammenhänge $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ und $\overline{\Pi}^\alpha_{\beta\gamma}$ (derselben Darstellung in möglicherweise verschiedenen Punkten) heißen affinäquivalent, wenn Π in $\overline{\Pi}$ vermöge einer analytischen Punkttransformation der $n+1$ Variablen $x^0, x^1, \ldots, x^n$ übergeführt werden kann, und heißen projektiväquivalent, wenn es möglich ist, diese Überführung durch Gleichungen, welche die Gestalt Veblenscher Transformationen haben, zu leisten. Verf. beweist den Satz: Wenn 2 projektive Zusammenhänge affinäquivalent sind, dann sind sie auch projektiväquivalent. Nach einer Untersuchung nichtholonomer Darstellungen behandeln die letzten Abschnitte der Arbeit sog. „normierte" projektive Zusammenhänge. Ein normierter projektiver Zusammenhang im Raum von n Dimensionen läßt sich durch einen affinen Zusammenhang (innerhalb $n+1$ Dimensionen) charakterisieren, für welchen — abgesehen von den Bedingungen (1, 5) — der verjüngte projektive Krümmungstensor $R_{\beta\gamma} = R^\alpha_{\beta\alpha\gamma}$ verschwindet. Eine Darstellung, in welcher für die Zusammenhangskomponenten:

$$\Pi^a_{aj} = 0 \qquad (a,j = 1,2,\ldots,n) \quad (10,5)$$

gilt, nennt Verf. eine „ausgezeichnete" Darstellung. Innerhalb dieser Begriffsbildungen bestehen noch die Sätze: Jede Normaldarstellung eines normierten projektiven Zusammenhangs ist eine ausgezeichnete Darstellung; 2 affinäquivalente normierte projektive Zusammenhänge, bezogen auf eine ausgezeichnete Darstellung, sind äquivalent gegenüber gewissen speziellen Veblenschen Transformationen. Sofern ein Punkt im projektiven P_n durch seine Koordinatenwerte $x^1, x^2, \ldots, x^n$ und irgendeinen Wert des „Faktors" x^0 bestimmt ist, kann man diesen Punkten in „Darstellungsräumen" R_n Kurven mit dem Parameter x^0 zuordnen; sie werden „Strahlen" genannt und geben Anlaß zu einer Reihe weiterer terminologischer und sonstiger Ergänzungen, auf welche hier aus Raummangel nicht näher eingegangen werden kann. *M. Pinl* (Berlin).

Schouten, J. A., und E. R. van Kampen: Über die Krümmung einer V_m in V_n; eine Revision der Krümmungstheorie. Math. Annalen **105**, 144—159 (1931).

Die Arbeit behandelt das Formenproblem der m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_n konstanter Krümmung, d. h. das Problem der Bestimmung einer V_m (bis auf Kongruenz und Spiegelung) durch ein System von Differentialformen (Tensoren). Es handelt sich also um die denkbar weitestgehende Verallgemeinerung des Bonnetschen Satzes der elementaren Differentialgeometrie. Das Problem wurde von C. Burstin (Minsk), dessen Name von dem Verf. anscheinend übersehen wurde, und W. Mayer gelöst („Das Formenproblem der l-dimensionalen Hyperflächen in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung", Mh. f. Math. u. Physik **34**, 1927; vgl. auch Duschek-

Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie 2, 201ff.). Die vorliegende Arbeit bringt im wesentlichen eine Übertragung des Burstin-Mayerschen Beweises in Schoutens Methoden und Schreibweise. Nach einigen vorbereitenden Ausführungen werden Krümmungsaffinoren H definiert, in deren Einführung der hauptsächlichste Unterschied gegenüber Burstin und Mayer besteht, und die Ableitungsgleichungen aufgestellt. Es folgen die Integrabilitätsbedingungen und schließlich die als Krümmungstheorie bezeichnete Berechnung von Größen L', die die V_m bestimmen. Eine in der Schlußbemerkung behandelte Frage hat W. Mayer bereits vor einigen Jahren beantwortet („Über das vollständige Formensystem der F_l im R_n", Mh. f. Math. u. Physik 35, 1928).

Mit den in der Einleitung gegebenen Einwänden gegen die Burstin-Mayersche Methode kann sich Ref. nicht einverstanden erklären. Diese Einwände richten sich vor allem gegen das von den Verff. (S. 153) als merkwürdig bezeichnete System der ${}_{(\alpha\beta)}C_p$, die aber, wie aus der Bezeichnung hervorgeht, kovariante Vektoren sind, deren Komponenten als Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen

$$\frac{\mathfrak{d}_{(\alpha)}\lambda_i}{\mathfrak{d}\,y_p} = {}_{(\alpha\beta)}C_p\,{}_{(\beta)}\lambda_i$$

auftreten (vgl. insbesondere S. 207 und 226 des oben erwähnten Buches). *A. Duschek* (Wien).

Sen, R. N.: On curvatures of a hypersurface. Bull. Calcutta math. Soc. **23**, 1—10 (1931).

Der Riemannsche Raum V_n mit dem Maßtensor (g_{ik}) sei in den V_{n+1} eingebettet. Die „zweite Fundamentalform" von V_n bezüglich V_{n+1} sei (b_{ik}). Als Hauptkrümmungen von V_n seien wie üblich die stationären Werte $\frac{1}{r_p}$ des Ausdrucks $\frac{1}{r} = \frac{b_{ik}\xi^i\xi^k}{g_{ik}\xi^i\xi^k}$ bezeichnet, wenn (ξ^i) alle Vektoren von V_n in einem Punkt durchläuft. Die elementar-symmetrischen Funktionen der Krümmungen seien $K_1 = \sum\frac{1}{r_p}$, $K_2 = \sum\frac{1}{r_p r_q}, \ldots, K_n = \sum\frac{1}{r_1 r_2, \ldots, r_n}$. Dann werden zunächst in naheliegender Weise die K_i durch Unterdeterminanten der g_{ik} und b_{ik} ausgedrückt. Falls zwischen den K_i eine identische Relation besteht (Verallgemeinerung der Weingartenschen Flächen), so ist das äquivalent mit dem Verschwinden einer Determinante, deren Elemente rational von den g_{ik}, den b_{ik} und den in V_n gebildeten kovarianten Ableitungen der b_{ik} abhängen. Die Herleitung der nun folgenden Formeln S. 3, u. und S. 4, o. ist Ref. nicht verständlich (vielleicht infolge von Druckfehlern). Verf. setzt $b_{ik}b_{lk}g^{il} = a_{hk}$ und definiert Größen $c^{(s)}_{hk}$ durch die Rekursion $c^{(1)}_{hk} = b_{hk}$, $c^{(2)}_{hk} = g_{hk}$, $c^{(s)}_{hk} = g_{ih}g_{lk}c^{(s-2)}_{mn}b^{lm}b^{in}$. Dann wird behauptet: $a_{hk} = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}c^{(s)}_{hk}k_s$. Der Riemannsche Raum V'_n mit dem Maßtensor a_{ik} wird als zu V_n assoziiert bezeichnet; in der Tat reduziert sich V'_n auf das sphärische (bzw. hypersphärische) Bild, falls V_{n+1} euklidisch ist. Ist ζ^i ein beliebiger Einheitsvektor in V_n, der mit den Krümmungsrichtungen von V_n die Winkel Θ_p bildet, so wird als verallgemeinerte Eulersche Formel die Relation aufgestellt: $c^{(s)}_{hk}\zeta^h\zeta^k = \sum_{p=1}^{n} r_p^{s-2}\cos^2\Theta_p$ $(s = 1, \ldots, n)$. Ist die Beziehung zwischen V_n und V'_n winkeltreu, so sind 2 Fälle möglich: Entweder $r_1 = \cdots = r_n$, oder falls n grade ist und keine der Krümmungen $1/r_p$ verschwindet: $K_1 = K_3 = \cdots = K_{n-1} = 0$ (verallgem. Minimalflächen). Wenn V_{n+1} konstante Krümmung hat, lassen sich die Differenzen der Krümmungstensoren von V_n und V'_n durch die kovarianten Ableitungen der b_{ik} ausdrücken. K_n erweist sich als das Volumvergrößerungsverhältnis zwischen V'_n und V_n. Weitere Formeln werden für den Fall aufgestellt, daß V_{n+1} euklidisch ist.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

Michal, A. D.: An operation that generates absolute scalar differential invariants from tensors. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Tôhoku math. J. **34**, 71—77 (1931).

1. ${}^{\nu}_{a}e(x)$ sind n linear unabhängige Vektoren, welche auch von der Wahl des Koordinatensystem nicht abhängen, und ${}^{a}_{\lambda}e$ die zugehörigen kov. Vektoren, so daß ${}^{\nu}_{a}e\,{}^{a}_{\lambda}e = \delta^{\nu}_{\lambda}$. Jedem System (x) läßt sich ein System (y) von „Normalkoordinaten" zuordnen:

$$x^{\nu} = {}^{\nu}_{0}x + \left({}^{\nu}_{a}e\right)_0 y^a - \frac{1}{2!}\left(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,{}^{\lambda}_{a}e\,{}^{\mu}_{b}e\right)_0 y^a y^b \varkappa. \qquad (\varkappa = 0 \text{ oder } 1) \quad (1)$$

Somit gilt für die Komponenten eines kovarianten Vektors im Punkte $P\left(x = {}^{x}_{0}\right)$

$$^{*}v_a(y) = {}^{\lambda}_{a}e\,v_\lambda(x) \qquad (2a)$$

für $\varkappa = 0$ oder $= 1$. Wenn aber $\varkappa = 1$, so ist auch (immer in P)

$$*v_{a/b} = \frac{\partial *v_a}{\partial y^b} = \varrho_a^\lambda \varrho^\mu \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu v_\nu\right). \tag{2b}$$

In dieser Weise fortfahrend kann man dem System (x) ein solches System (y) von „Normalkoordinaten" zuordnen [Veblen, O., u. T. Y. Thomas: The geometry of paths. Trans. amer. math. Soc. **25**, 551—608 (1923)], daß in P

$$*v_{a/b_1 \ldots b_p} = \frac{\partial^p *v_a}{\partial y^{b_p} \ldots \partial y^{b_1}} = \varrho_a^\lambda \varrho_{b_1}^{\mu_1} \ldots \varrho_{b_p}^{\mu_p} v_{\lambda/\mu_1 \ldots \mu_p}, \tag{2c}$$

wo $v_{\lambda/\mu_1 \ldots \mu_p}$ die bekannte p-te affine Extension von v_λ ist. 2. Ist $(\bar{x})$ ein anderes System von allgemeinen Koordinaten und $(\bar{y})$ das ihm zugeordnete System von Normalkoordinaten, so folgt ohne Rechnung aus (2) in P

$$*\bar{v}_a(\bar{y}) = *v_a(y), \ldots, \quad *\bar{v}_{a/b_1 \ldots b_p} = *v_{a/b_1 \ldots b_p}$$

und allgemeiner für einen beliebigen Affinor in P

$$*\overline{V}_{a \ldots b}^{c \ldots d} = V_{a \ldots b}^{c \ldots d}, \ldots, \quad *\overline{V}_{a \ldots b/e_1 \ldots e_p}^{c \ldots d} = *V_{a \ldots b/e_1 \ldots e_p}^{c \ldots d}. \tag{3}$$

Der Autor beweist diese Formel, indem er den Zusammenhang $\bar{y} \to y$ herstellt:

$$\bar{y}^a = y^a + h^a; \qquad (h^a)_0 = \left(\frac{\partial h^a}{\partial y^b}\right)_0 = \cdots = \left(\frac{\partial^{p+1} h^a}{\partial y^{b_1} \ldots \partial y^{b_{p+1}}}\right)_0 = 0.$$

Die Funktionen $t_{a \ldots b c \ldots d e_1 \ldots e_p}(x)$, für welche in P

$$t_{a \ldots b c \ldots d e_1 \ldots e_p} = V_{a \ldots b/e_1 \ldots e_p}^{c \ldots d},$$

sind laut (3) Skalare und heißen „die p-ten Skalaren der Extension von V". — Aus diesen Resultaten läßt sich ein Reduktionstheorem für affinorielle Differentialinvarianten aufstellen. Der Zusammenhang zwischen den „Normalkoordinaten" Y von Veblen-Thomas (siehe oben) und den hier angegebenen „Normalkoordinaten" y wird am besten durch (2c) angegeben: Während $v_{\lambda/\mu_1 \ldots \mu_p}$ die — mittels $\partial^p / \partial Y^{a_p} \ldots \partial Y^{a_1}$ von Veblen-Thomas konstruierte — affine Extension ist, wird $*v_{a/b_1 \ldots b_p}$ mittels $\partial^p / \partial y^{a_p} \ldots \partial y^{a_1}$ konstruiert. *Hlavatý* (Prag).

Synge, J. L.: A characteristic function in Riemannian space and its application to the solution of geodesic triangles. Proc. Lond. math. Soc., II. s. **32**, 241—258 (1931).

1. Sei s die geodätische Entfernung zweier Punkte $P(x)$ und $'P('x)$ in einem Riemannschen Raume V_n, der auf $g_{\lambda\mu}$ bezogen ist. Setzt man

$$F('x, x) = \tfrac{1}{2} s^2 \tag{1}$$

und $i^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$, so folgt aus $dF = s i_\lambda dx^\lambda$

$$\frac{\partial F}{\partial x^\lambda} = F_\lambda = s i_\lambda, \quad F^\nu = g^{\nu\lambda} F_\lambda = s i^\nu, \tag{2}$$

so daß

$$i^\mu \nabla_\mu F^\nu = i^\mu \nabla_\mu s i^\nu = \frac{ds}{ds} i^\nu + s i^\mu \nabla_\mu i^\nu = i^\nu$$

oder

$$F^\mu \nabla_\mu F^\nu = F^\nu \quad \text{bzw.} \quad (\nabla_\mu F^\nu - \delta_\mu^\nu) i^\mu = 0. \tag{3}$$

Schreibt man $F_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \nabla_{\lambda_p} \ldots \nabla_{\lambda_1} F_\mu$, so folgt aus (3)

$$\left.\begin{aligned} F_{\mu_1\mu_2} &= F_{\mu_1\lambda\mu_2} F^\lambda + F_{\mu_1\lambda} F^\lambda_{\cdot\mu_2} \\ F_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= F_{\mu_1\lambda\mu_2\mu_3} F^\lambda + F_{\mu_1\lambda\mu_2} F^\lambda_{\cdot\mu_3} + F_{\mu_1\lambda\mu_3} F^\lambda_{\cdot\mu_2} + F_{\mu_1\lambda} F^\lambda_{\cdot\mu_2\mu_3}. \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Aus der Definition von $F_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ folgt auch die bekannte Formel

$$F_{\lambda\mu\omega} - F_{\lambda\omega\mu} = K_{\omega\mu\lambda\nu} F^\nu. \tag{5}$$

2. Ist $X('x, x)$ eine beliebige Funktion von $'x$ und x, so soll mit $'X$ die folgende Funktion von $'x$ bedeuten: $'X = \lim_{P \to 'P} X('x, x)$. Es folgt dann aus (1)—(5) $'F = 0$, $'F_\lambda = 0$, $'F^\nu_{\cdot\lambda} = \delta^\nu_\lambda$, $'F_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 0$, während die Affinoren $'F_{\mu_1 \ldots \mu_4} \ldots, F_{\mu_1 \ldots \mu_s}$ nur mittels $'K_{\omega\mu\lambda\nu}$ (und kov. Ableitungen) ausdrückbar sind, wie man sich durch direkte Ausrechnung überzeugen kann.

3. Diesen Tatbestand benützt der Autor zur Berechnung des geodätischen Dreieckes ABC in V_n. Z. B. läßt sich die A gegenüberliegende Seite a durch

$$a^2 = b^2 - 2bc\cos\hat{A} + c^2 + R + Q$$

ausdrücken. Dabei ist R eine, vom Autor ausgerechnete Funktion von b, c, $\hat{A}$ und $K_{\omega\mu\lambda\nu}$, während Q eine Funktion 7. Grades in b, c ist. *Hlavatý* (Prag).

Hayden, H. A.: Deformations of a curve, in a Riemannian n-space, which displace certain vectors parallelly at each point. Proc. Lond. math. Soc., II. s. **32**, 321—336 (1931).

Es werden solche infinitesimale Verrückungen V einer Kurve C eines Riemannschen Raums R_n untersucht, bei der die Tangenten t von C durchweg Parallelverschiebungen erleiden. Sind $t, n_1, \ldots, n_{n-1}$ die Einheitsvektoren, die das Frenetsche n-Bein von C in einem laufenden Punkt aufspannen, so wird der Verrückungsvektor in Komponenten $c, c_1, \ldots, c_{n-1}$ nach den Beinvektoren zerlegt, und es ergibt sich: Diese Komponenten sind $n-1$ linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung unterworfen, also ist eine Komponente willkürlich. Nur $c_{n-1} = 0$ darf i. A. nicht vorgegeben werden, weil dann alle c verschwinden. Beschränkt man sich auf „allgemeine" Kurven, d. h. solche, bei denen keine der $n-1$ Krümmungen k_1 bis k_{n-1} verschwindet, und bestimmt man diejenigen Kurven, bei denen man die c konstant annehmen kann, so erhält man die „allgemeinen Schrauben" (unter denen die Schraubenlinien des euklidischen R_3 enthalten sind):

$$\frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} = \text{const}, \quad \frac{k_{n-3}}{k_{n-4}} = \text{const}, \ldots$$

Für grades n heißt die letzte Gleichung dieses Systems $k_3/k_2 = \text{const}$; für ungerades n: $k_2/k_1 = \text{const}$. Der Verschiebungsvektor liegt in dem Unterraum, der von den Vektoren $n_{n-1}, n_{n-3}, n_{n-5} \ldots$ im laufenden Kurvenpunkt aufgespannt wird, und die Variation der Bogenlänge verschwindet oder nicht, je nachdem n ungrade oder grade ist. — Ferner werden unter den Transformationen V die bestimmt, die die Bogenlänge ungeändert lassen. Die Verschiebungsvektoren v müssen dann gleichlang sein und ein längs C paralleles Vektorfeld bilden (Verallgemeinerung der euklidischen infinitesimalen Translation). Ist dagegen die Länge von v konstant und liegt keine verallgemeinerte Translation vor, so muß v stets auf t senkrecht stehen. Ist der R_n euklidisch, so erleiden durch V außer t auch die übrigen Vektoren des Frenetschen n-Beins Parallelverschiebungen. Verf. beweist auch die interessante Umkehrung: Wenn bei jeder Kurve eines Riemannschen Raums jede infinitesimale Verrückung, die die Tangenten parallel verschiebt, auch die anderen Beinvektoren parallel verschiebt, so ist der Raum euklidisch. Die Combescuretransformationen sind also in dieser Theorie als sehr spezieller Fall enthalten. Schließlich werden im euklidischen Fall neben den Kurven mit parallelen Tangenten (man braucht sich jetzt nicht auf infinitesimal benachbarte Kurven zu beschränken) auch Kurvenpaare betrachtet, bei denen irgendwelche anderen Vektoren der n-Beine parallel vorausgesetzt sind, oder allgemeiner bei denen Unterräume parallel sind, die von gewissen Teilsystemen der Beinvektoren aufgespannt werden. Man kann solche Teilsysteme angeben, daß dann die Parallelität für alle Beinvektoren folgt, z. B. wenn man den Raum ins Auge faßt, der von den p ersten Beinvektoren aufgespannt wird ($p < n$). Für beliebige Teilsysteme gilt der Satz nicht; im R_3 ergeben z. B. parallele Hauptnormalen Paare von Bertrandkurven, also Paare mit nichtparallelen Tangenten. *Stefan Cohn-Vossen* (Köln).

Hayden, H. A.: On a generalized helix in a Riemannian n-space. Proc. Lond. math. Soc., II. s. **32**, 337—345 (1931).

Die Böschungslinien lassen sich dadurch definieren, daß die erste und zweite Krümmung festes Verhältnis haben, ferner dadurch, daß ihre Tangenten mit einer festen Richtung einen festen Winkel bilden. In vorliegender Arbeit werden für beide Definitionen Verallgemeinerungen für den Riemannschen R_n gegeben, und es wird

geprüft, wieweit sie sich auch hier decken. Die 1. Definition führt auf die „allgemeinen Schrauben“ (vgl. d. vorangehende Referat). Um die 2. Definition übertragen zu können, muß man statt von einer festen Richtung von einem längs der betrachteten Kurve C parallelen Vektorfeld r ausgehen. Fordert man, daß die Tangenten von C einen festen Winkel mit den Vektoren r bilden, so erhält man nur eine einzige Gleichung; sie führt im R_3 auf die Böschungslinien (vom Verf. wohl versehentlich mit helix bezeichnet), für $n > 3$ braucht man weitere Bedingungen, um auf die allgemeinen Schrauben zu kommen. Es wird deshalb gefordert, daß noch weitere Vektoren des Frenetschen n-Beins von C feste Winkel mit den Vektoren r bilden. Das Ergebnis ist verschieden, je nachdem n a) ungrade b) grade ist. a) Wenn $n_{n-1}, n_{n-3}, \ldots, n_2$ feste Winkel mit r bilden, so auch t, die übrigen Beinvektoren n_{n-2} bis n_1 bilden ebenfalls feste Winkel mit r und zwar rechte, C ist eine allgemeine Schraube. Setzt man die Winkeleigenschaft statt dessen von $t, n_2, n_4, \ldots, n_{n-3}$ voraus, so ist C ebenfalls eine allgemeine Schraube, und die übrigen Beinvektoren stehen zu r in derselben Winkelbeziehung wie bei der ersten Voraussetzung. Ist umgekehrt C eine allgemeine Schraube, so gibt es ein Feld längs C paralleler Vektoren r, zu dem das Frenetsche n-Bein von C in der angegebenen Winkelbeziehung steht. b) Es gibt keine Kurve C, deren Beinvektoren $t, n_2, n_4, \ldots, n_{n-2}$ feste Winkel mit einem längs C parallelen Vektorfeld bilden, wenn man sich auf „allgemeine Kurven“ beschränkt. Erfüllbar wird die Bedingung, wenn man „ausgeartete“ Kurven zuläßt, deren letzte Krümmung k_{n-1} identisch verschwindet. Ebenso ist die Winkelbedingung für $n_1, n_3, \ldots, n_{n-1}$ nur durch ausgeartete Kurven realisierbar. Bezeichnen wir als Schraube 2. Art eine Kurve, für die gilt: $k_1/k_2 = \text{const}$, $k_3/k_4 = \text{const}, \ldots, k_{n-1} = 0$, so gilt der Satz: C ist dann und nur dann Schraube 2. Art, wenn es ein längs C paralleles Vektorfeld r gibt, mit dem $t, n_2, \ldots, n_{n-2}$ feste Winkel bilden. Die übrigen Beinvektoren außer n_{n-1} stehen dann auf r senkrecht und n_{n-1} bleibt sich selbst parallel. Ein analoger Satz gilt, sowohl für grades als auch für ungrades n, für die Kurven $k_1/k_2 = \text{const}$, $k_3/k_4 = \text{const}$, $k_{2p-1} = k_{2p} = \cdots = k_{n-1} = 0$.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

Boggio, T.: Relazione fra le omografie di Riemann relative a due spazi in rappresentazione conforme. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 333—337 (1931).

Ist $g_{\lambda\mu}$ der Fundamentaltensor einer Riemannschen Konnexion und ${}'g_{\lambda\mu} = \sigma g_{\lambda\mu}$ der Fundamentaltensor einer anderen Riemannschen Konnexion, und setzt man $s_\mu = \nabla_\mu \log\sigma$, so sind die Riemann-Christoffelschen Affinoren der beiden Konnexionen durch

$$\sigma^{-1}{}'K_{\omega\mu\lambda\nu} = K_{\omega\mu\lambda\nu} - g[_{\omega[\lambda}s_{\mu]}{}^{\tau}{}_{\nu]}^{\tau}]^{*} \tag{1}$$

gebunden, wo

$$s_{\mu\lambda} = 2\nabla_\mu s_\lambda - s_\mu s_\lambda + \tfrac{1}{2} s_\alpha s_\beta g_{\mu\lambda} g^{\alpha\beta}.$$

Der Autor beweist diese Formel mittels der Symbolik, welche in „Burgatti, Boggio, Burali-Forti: Geometria Differenziale“ (Zanichelli, Bologna 1930) und auch in „Boggio, Burali-Forti: Espaces courbes ...“ (Soc. Tip. Ed. Naz. Torino 1924) benützt wird. *Hlavatý* (Prag).

Andruetto, Giacinta: Relazione tra i simboli di Riemann relativi a due varietà, una immersa nell'altra. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 338—341 (1931).

In einem Riemannschen Raume V_n sei ein anderer Riemannscher Raum $V_m (m < n)$ gegeben. Die Krümmungen der V_m und V_n sind durch den bekannten Gausssschen Satz (Theorema egregium)

$$B^{\beta\alpha\nu\delta}_{\omega\mu\gamma\lambda} K_{\beta\alpha\delta}{}^{\ldots\gamma} = K'_{\omega\mu\lambda}{}^{\ldots\nu} + 2H_{\lambda[\mu}{}^{\ldots\alpha} H_{\omega]\cdot\alpha}{}^{\cdot\nu} \; **$$

gebunden. In diesem Artikel wird diese Formel bewiesen, und zwar auf Grund der Symbolik, welche in „Burgatti, Boggio, Burali-Forti: Geometria differenziale“ (Zanichelli, Bologna 1930) benützt wird. Es soll ausdrücklich bemerkt werden, daß man bei dieser Symbolik voraussetzen muß, V_n sei in einem Euklidischen Raume eingebettet, was in dem gewöhnlichen Ricci-Kalkül nicht der Fall ist. *Hlavatý* (Prag).

* Schouten: Der Ricci-Kalkül. S. 168. Berlin: Julius Springer 1924.
** Schouten: Der Ricci-Kalkül. S. 198. Berlin: Julius Springer 1924.

Bortolotti, Enea: Directions concourantes et connexions dans les espaces courbes. Bull. Soc. math. France **59**, 70—74 (1931).

Im euklidischen R_n liege eine V_m. Längs einer Kurve k in V_m werde eine Schar von Tangenten an V_m gelegt, die einerseits ein Richtungsfeld f in V_m längs k, andererseits eine Regelfläche g in R_n bestimmen. Es werden nun die intrinseken Eigenschaften von f in der Metrik von V_m in Beziehung gebracht zu den Eigenschaften von g in der Metrik des R_n. Zu diesem Zweck wird eine zweite auf g verlaufende Kurve k' (courbe adjointe von k) folgendermaßen konstruiert: g_0 und g_1 seien benachbarte Geraden von g, g_0 möge k in P schneiden, R_m sei Tangentialraum an V_m in P. Dann sei h_1 die Orthogonalprojektion von g_1 auf R_m, Q_0 sei der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes von g_0 und h_1, bzw. der Schnittpunkt beider Geraden. Q sei die Grenzlage von Q_0, wenn g_1 gegen g_0 geht. k' ist dann die Bahn von Q, wenn P die Kurve k durchläuft. Ist k' Orthogonaltrajektorie der Tangentialräume R_m, so werden die Richtungen von f als directions concourantes bezeichnet. Nach der Cartanschen Auffassung der euklidisch zusammenhängenden Räume wird nun durch die Metrik von V_m zwischen den benachbarten tangentialen R_m eine Abbildung vermittelt, die man als Grenzfall einer Orthogonalprojektion auffassen kann. Daher steht der Begriff der directions concourantes in enger Beziehung zur Riemannschen Metrik. *Cohn-Vossen* (Köln).

Nalli, Pia: Trasporti rigidi di vettori negli spazi di Riemann. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 669—675 (1931).

Sei $g_{\lambda\mu}$ der metrische Tensor der Riemannschen Konnexion mit den Christoffelschen Symbolen $\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$. Dann ist auch

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} + T^{\nu}_{\cdot\lambda\mu} \quad (T = \text{ein beliebiger Affinor}) \tag{1a}$$

eine Konnexion, welche nur dann metrisch (mit dem Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}$) ist, wenn

$$T_{\nu\lambda\mu} + T_{\lambda\nu\mu} = 0. \tag{1b}$$

Das folgt aus

$$\nabla_\omega g_{\lambda\nu} = \overset{0}{\nabla}_\omega g_{\lambda\nu} - T^{\alpha}_{\cdot\lambda\omega} g_{\alpha\nu} - T^{\alpha}_{\cdot\nu\omega} g_{\lambda\alpha} = -(T_{\nu\lambda\omega} + T_{\lambda\nu\omega}).$$

Die Riemann-Christoffelschen Affinoren der beiden Konnexionen sind mittels

$$K^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\omega\mu\lambda\nu} = \overset{0}{K}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\omega\mu\lambda\nu} - \overset{0}{\nabla}_\omega T^{\nu}_{\cdot\lambda\mu} + \overset{0}{\nabla}_\mu T^{\nu}_{\cdot\lambda\omega} + T^{\alpha}_{\cdot\lambda\omega} T^{\nu}_{\cdot\alpha\mu} - T^{\alpha}_{\cdot\lambda\mu} T^{\nu}_{\cdot\alpha\omega}$$*

gebunden. Somit ist die Konnexion (1) eine metrische mit Fernparallelismus, wenn

$$\overset{0}{K}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\omega\mu\lambda\nu} = \overset{0}{\nabla}_\omega T^{\nu}_{\cdot\lambda\mu} - \overset{0}{\nabla}_\mu T^{\nu}_{\cdot\lambda\omega} - T^{\alpha}_{\cdot\lambda\omega} T^{\nu}_{\cdot\alpha\mu} + T^{\alpha}_{\cdot\lambda\mu} T^{\nu}_{\cdot\alpha\omega}.$$

Es wird auch die Konstruktion eines solchen Affinors T, der der letzten Gleichung Genüge leistet, angegeben. *Hlavatý* (Prag).

Nalli, Pia: Trasporti rigidi di vettori sulle superficie. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 734—739 (1931).

Ist g die Determinante des metrischen Fundamentaltensors $g_{\lambda\mu}$ und

$$A_{11} = A_{22} = 0, \quad A_{12} = -A_{21} = \sqrt{g}$$

ein antisymmetrischer Affinor, so kann man für $n = 2$ den Affinor T* auch so wählen

$$\overset{1}{T}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = A_{\nu\lambda} \overset{1}{R}_\mu,$$

wenn $\overset{1}{R}_\mu$ ein beliebiger kovarianter Vektor ist. Somit hat man (außer $\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$) eine andere metrische Konnexion

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} + g^{\alpha\nu} A_{\alpha\lambda} \overset{1}{R}_\mu \tag{1}$$

und für $n = 2$

$$\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\omega\mu\lambda\nu} = \overset{0}{K}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\omega\mu\lambda\nu} - \overset{0}{\nabla}_\omega \overset{1}{T}{}^{\nu}_{\cdot\lambda\mu} + \overset{0}{\nabla}_\mu \overset{1}{T}{}^{\nu}_{\cdot\lambda\omega} + \overset{1}{T}{}^{\alpha}_{\cdot\lambda\omega} \overset{1}{T}{}^{\nu}_{\cdot\alpha\mu} - \overset{1}{T}{}^{\alpha}_{\cdot\lambda\mu} \overset{1}{T}{}^{\nu}_{\cdot\alpha\omega}$$
$$= \overset{0}{K}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\omega\mu\lambda\nu} - \overset{0}{\nabla}_\omega \overset{1}{T}{}^{\nu}_{\cdot\lambda\mu} + \overset{0}{\nabla}_\mu \overset{1}{T}{}^{\nu}_{\cdot\lambda\omega}.$$

* Schouten: Der Ricci-Kalkül. S. 86. Berlin: Julius Springer 1924.

Aus dieser Gleichung folgt (immer für $n = 2$), daß (1) eine metrische Konnexion mit Fernparallelismus ist, wenn

$$\frac{\partial R_1}{\partial x^2} - \frac{\partial R_2}{\partial x^1} = K\sqrt{g}, \qquad (K = \text{Gausssche Krümmung}). \tag{2}$$

Denkt man sich außer (1) noch eine andere Konnexion mit $\overset{2}{T}_{\nu\lambda\mu} = A_{\nu\lambda}\overset{2}{R}_\mu$ und verschiebt man einen Einheitsvektor längs einer Kurve L parallel im Sinne der beiden Konnexionen, so bekommt man in jedem Punkte P von L zwei Einheitsvektoren, deren Winkel α durch

$$\alpha = \int_{P_0}^{P} \left(\overset{1}{R}_\mu - \overset{2}{R}_\mu\right) dx^\mu \tag{3}$$

gegeben ist. (Es ist nämlich

$$d\overset{1}{i}^\nu = -\overset{1}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}\,\overset{1}{i}^\lambda\,dx^\mu, \quad d\overset{2}{i}_\lambda = \overset{2}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}\,\overset{2}{i}_\nu\,dx^\mu,$$

so daß

$$d\overset{1}{i}^\alpha\,\overset{2}{i}_\alpha = \left(\overset{2}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu} - \overset{1}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}\right)\overset{1}{i}^\lambda\,\overset{2}{i}_\nu\,dx^\mu = \left(\overset{2}{R}_\mu - \overset{1}{R}_\mu\right)A_{\nu\lambda}\,\overset{2}{i}^\nu\,\overset{1}{i}^\lambda\,dx^\mu\Big).$$

Aus (3) lassen sich (zusammen mit dem bekannten Gauss-Bonnetschen Satze) noch andere geometrisch interessante Resultate leicht ablesen. Es wird auch eine Konstruktion vom R_μ, der der Gleichung (2) Genüge leistet, angegeben. *Hlavaty* (Prag).

Kawaguchi, Akitsugu: Theory of connections in the generalized Finsler manifold. (*Math. Inst., Univ., Sapporo.*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) **7**, 211—214 (1931).

1. Mit $\overset{(i)}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$, $'\overset{(i)}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$ sollen die Koeffizienten einer linearen Konnexion $\overset{(i)}{U}$ bezeichnet werden. Sie hängen von x, $\overset{1}{p} = dx$, $\overset{2}{p}, \ldots, \overset{i}{p}$ ab, wo

$$\overset{(k+1)}{p}{}^\nu = d\overset{(k)}{p}{}^\nu + \overset{(k)}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}\,dx^\mu\,\overset{(k)}{p}{}^\lambda. \qquad (k = 1, 2, \ldots i).$$

Die Konnexionen $\overset{(1)}{U}, \ldots, \overset{(r)}{U}$ sollen zur Konstruktion einer verallgemeinerten Finslerschen Konnexion U mit den Koeffizienten $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, $'\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ dienen.

2. Aus $\quad \delta v^\nu = dv^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,dx^\mu v^\lambda, \qquad \delta w_\lambda = dw_\lambda - {}'\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,w_\nu\,dx^\mu,$

$$dv^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}\,dx^\mu + \sum_1^r{}_i \frac{\partial v^\nu}{\partial \overset{(i)}{p}{}^\mu}\,d\overset{(i)}{p}{}^\mu, \qquad dw_\lambda = \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu}\,dx^\mu + \sum_1^r{}_i \frac{\partial w_\lambda}{\partial \overset{i}{p}{}^\mu}\,d\overset{(i)}{p}{}^\mu$$

(laut Voraussetzung kommen nur solche Größen in Betracht, welche nur von x, $\overset{(1)}{p}, \ldots, \overset{(r)}{p}$ abhängen) folgt

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\mu v^\nu &= \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}v^\lambda + \sum_1^r{}_i \frac{\partial v^\nu}{\partial \overset{(i)}{p}{}^\omega}\left(\overset{(i)}{\nabla}_\mu \overset{(i)}{p}{}^\omega - \overset{(i)}{\Gamma}{}^\omega_{\lambda\mu}\,\overset{i}{p}{}^\lambda\right), \\ \nabla_\mu w_\lambda &= \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} - {}'\Gamma^\nu_{\lambda\mu}w_\nu + \sum_1^r{}_i \frac{\partial w_\lambda}{\partial \overset{(i)}{p}{}^\omega}\left(\overset{(i)}{\nabla}_\mu \overset{(i)}{p}{}^\omega - \overset{(i)}{\Gamma}{}^\omega_{\nu\mu}\,\overset{(i)}{p}{}^\nu\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Gleichungen dienen zur Konstruktion von U aus den gegebenen Daten

$$\left.\begin{aligned} &Q'_{\lambda\mu\nu}\,(= \nabla_\nu g_{\lambda\mu}), \qquad Q^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\cdot\nu}\,(= \nabla_\nu g^{\lambda\mu}), \\ &C^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}\,(= \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma'^\nu_{\lambda\mu}), \qquad S^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}\,(= \Gamma^\nu_{[\lambda\mu]}), \qquad S'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}\,(= {}'\Gamma^\nu_{[\lambda\mu]}), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

welche der Autor nach dem Schoutenschen Verfahren (Schouten: Der Ricci-Kalkül, Berlin, Springer 1924, 73) durchführt. Zum Schluß wird auch die Krümmungsgröße von U berechnet.

Bemerkung des Referenten: Hält man an der üblichen Definition von kovarianten Größen fest, so muß $C^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = 0$. Berücksichtigt man aber die „Änderung des kovarianten Maßes", so treten bei der Behandlung von kovarianten Ableitungen Schwierigkeiten auf, welche näher in „Schouten-Hlavatý: Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung" [M. Z. **30**, 414 bis 432 (1929)] besprochen wurden. *Hlavatý* (Prag).