Werk

Titel: Vorläufige Mitteilungen.

Jahr: 1931

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0001|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Vorläufige Mitteilungen.

Die Redaktion hält sich für den Inhalt der ***Vorläufigen Mitteilungen*** *nicht verantwortlich. Sie behält es sich vor, die Veröffentlichung von der bereits erfolgten Annahme der ausführlichen Darstellung durch eine Fachzeitschrift abhängig zu machen. Die Vorläufigen Mitteilungen sollen nicht mehr als zwei Druckseiten beanspruchen.*

Ein Approximationssatz für die Fuchsschen Gruppen.

Von

P. J. Myrberg, Helsinki.

In einer Arbeit, welche demnächst in „Acta Mathematica" erscheinen wird, haben wir folgenden allgemeinen Satz bewiesen:

Für jede Fuchssche Gruppe Γ, deren Hauptkreis $H: |Z| = 1$ zugleich Grenzkreis ist, gibt es auf H eine Punktmenge M vom Maß 2π mit der folgenden Eigenschaft: Wenn K ein beliebiger regulärer Kurvenbogen innerhalb H ist, welcher H in irgendeinem zu M gehörigen Punkt unter einem nichtverschwindenden Winkel φ schneidet, so approximieren die Transformierten von K vermittels der Substitutionen von Γ jeden innerhalb H liegenden und H unter dem Winkel φ schneidenden Kreisbogen mit jeder Genauigkeit.

Dieser Satz, welchen wir für die Modulgruppe schon früher mit Hilfe von Kettenbrüchen bewiesen haben[1], gestattet mehrere Anwendungen, von denen wir hier nur die folgenden erwähnen:

1. Die automorphen Funktionen von Γ approximieren auf jedem regulären Bogen, welcher H in irgendeinem zu M gehörigen Punkt unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet, jeden komplexen Wert[2].

2. Fast alle geodätischen Linien einer geschlossenen Fläche konstanter negativer Krümmung sind quasiergodisch, d. h. sie haben die Eigenschaft, unbegrenzt auf der Fläche fortgesetzt jeden geodätischen Bogen mit jeder Genauigkeit zu approximieren.

Der erste der obigen Sätze ergibt sich unmittelbar aus unserem Hauptsatz, indem man die dort genannten Kreisbogen durch Punkte ersetzt.

Zum zweiten der obigen Sätze gelangt man, wenn man im Hauptsatz zu Kurven K die orthogonalen Halbkreise von H wählt, welche die geodätischen Linien der durch die Gruppe definierten geschlossenen Fläche konstanter negativer Krümmung repräsentieren. Dieser Satz steht in bezug auf die Fuchsschen Gruppen in analogem Verhältnis wie der bekannte Kroneckersche Approximationssatz in bezug auf die doppeltperiodischen Gruppen.

Über Grenzflächenreibung bei Gezeitenwellen[3].

Von

H. Ertel, Berlin.

Die Schwierigkeit einer exakten Berücksichtigung der Reibung bei den Gezeitenwellen liegt in der damit verbundenen Einführung des virtuellen Reibungskoeffizienten $\mu(z, t)$, der eine unbekannte Funktion der Tiefe (z) und (bei strengerer Behandlung) der Zeit (t) ist. Um die Integration der hydrodynamischen Gleichungen dann durchführen zu können, muß man wenigstens plausible Annahmen über den Mittelwert oder über den Verlauf von μ in der Verti-

[1] Einige Anwendungen der Kettenbrüche in der Theorie der binären quadratischen Formen und der elliptischen Modulfunktionen [Annales Academiae scientiarum Fennicae. **XXIII**, A (1923)].

[2] In etwas spezialisierter Form findet man diesen Satz auch in unserer Arbeit „Ein Satz über die Fuchsschen Gruppen und seine Anwendung in der Funktionentheorie" [ibidem **XXXI**, A (1930)].

[3] Die ausführliche Arbeit erscheint in Gerlands Beitr. Geophys.

kalen machen, worüber diesbezügliche Rechnungen z. B. von H. U. Sverdrup[1] und J. E. Fjeldstad[2] vorliegen. Die Variabilität des virtuellen Reibungskoeffizienten mit der Zeit ist m. W. bei Gezeitenwellen noch nicht berücksichtigt worden, doch dürfte dieser Effekt nicht unwesentlich sein. Hat sich doch auch bei dem ähnlichen meteorologischen Problem des täglichen Windganges die Berücksichtigung der zeitlichen Änderung von μ durchaus als fruchtbar erwiesen[3]. Nun ist es jedoch nicht einfach, sich a priori über die Funktion $\mu(z, t)$ zutreffende Vorstellungen zu machen, und es dürfte daher zweckmäßig sein, in der Differentialgleichung, welche die Bewegung der Gezeitenwellen beschreibt, die innere Reibung durch die Grenzflächenreibung auszudrücken, die nicht mehr von der vertikalen Koordinate abhängt und daher nur Annahmen über die zeitliche (periodische) Änderung der Tangentialdrucke (des Windes an der Oberfläche, des Wassers am Meeresboden) erfordert. Eine derartige Differentialgleichung läßt sich leicht folgendermaßen ableiten: Der Nullpunkt eines Rechtskoordinatensystems liege am Meeresboden ($z = 0$), $z = s = H + \zeta$ sei die Oberfläche, worin ζ die Erhebung der Oberfläche über die Gleichgewichtsflut bezeichnet. Die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten seien u, v, die Dichte sei ϱ ($= 1$), der virtuelle Zähigkeitskoeffizient η ($= \mu/\varrho$), die geographische Breite φ, die Schwere g und die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ω. Aus den hydrodynamischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega \sin\varphi \cdot v &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega \sin\varphi \cdot u &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta \frac{\partial v}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

erhält man durch Bildung der Vertikalkomponente der Rotation, Integration über die Höhe und Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \int_0^{H+\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz \tag{2}$$

den Ausdruck:

$$\int_0^{H+\zeta} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dz - 2\omega \sin\varphi \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathrm{rot}_z(\mathfrak{T}_s - \mathfrak{T}_0), \tag{3}$$

wobei für die Geschwindigkeitskomponenten die Existenz stetiger gemischter Ableitungen zweiter Ordnung nach den Raumkoordinaten und der Zeit vorausgesetzt wurde. $\mathfrak{T}_s$, $\mathfrak{T}_0$ sind die Tangentialdrucke des Windes an der Oberfläche bzw. des Wassers am Meeresboden. Die analoge Rechnung für die horizontale Divergenz der Gleichung (1) ergibt $\left(\dot{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)$:

$$\frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial t^2} + 2\omega \sin\varphi \int_0^{H+\zeta} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dz = gH\left(\frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}_h(\mathfrak{T}_s - \mathfrak{T}_0), \tag{4}$$

und somit folgt aus (3) und (4) die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial t^2} + (2\omega \sin\varphi)^2 \dot{\zeta} = gH\left(\frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}_h(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{T}_s) + 2\omega \sin\varphi\, \mathrm{rot}_z(\mathfrak{T}_0 - \mathfrak{T}_s). \tag{5}$$

Interessant daran ist, daß die Reibungseinflüsse durch zwei Glieder ausgedrückt werden, von denen eins von der geographischen Breite abhängig ist. Im Falle reibungsloser Bewegung ergibt (5) für die Phasengeschwindigkeit (c) der Gezeitenwelle bei Vernachlässigung der Erdrotation sofort die bekannte Formel $c = \sqrt{gH}$ und bei Berücksichtigung der Erdrotation den Sverdrupschen Ausdruck (a. a. O., S. 21):

$$c = \frac{\sqrt{gH}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\omega \sin\varphi}{p}\right)^2}}, \qquad \text{worin } p = \frac{2\pi}{T} \ (T = \text{Gezeitenperiode}).$$

Sind in (6) die Tangentialdrucke als Funktion der Raumkoordinaten und der Zeit gegeben, so ist $\dot{\zeta}$ und damit die Gezeit ζ bestimmbar. Wir wollen hier jedoch darauf nicht weiter eingehen, sondern zeigen, wie man umgekehrt durch sehr allgemeine Aussagen über die Gezeit für die

[1] Sverdrup, H. U.: Dynamic of Tides on the North Siberian Shelf. Results from the Maud Expedition. Geofysiske Publikasjoner **4**, Nr 5.

[2] Fjeldstad, J. E.: Contribution to the Dynamics of free progressive Tidal Waves. (The Norwegian North Polar Expedition with the „Maud" 1918—1925). Scient. Results **4**, Nr 3 (1929)].

[3] Iswekow, B.: Zur Frage des täglichen Windganges. Meteor. Z. **46**, 1 (1929).

Phasenverschiebung des Tangentialdruckes ein Intervall von $\lambda/4$ (λ = Wellenlänge) festlegen kann. Gefordert wird für die Gezeitenwelle nur, daß infolge der Energiedissipation durch Reibung Amplitude und Phasengeschwindigkeit der Welle verringert werden (H. U. Sverdrup, a. a. O.). Wir denken uns zweidimensionale Wellen in Richtung der positiven x-Achse fortschreitend. Der Tangentialdruck des Windes sei Null, und da bei zweidimensionaler Betrachtungsweise die Berücksichtigung der Erdrotation keinen Sinn hat, vereinfacht sich Gleichung (5) in:

$$\frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{xo}}{\partial t \partial x}. \tag{6}$$

Die Gezeitenwelle sei von der Form:

$$\zeta = \varphi(x) e^{ipt}.$$

Der Tangentialdruck am (ebenen) Meeresboden setze sich zusammen aus einem räumlich-zeitlich konstanten Anteil $\bar{T}_{xo}$ und einem mit der Gezeitenwelle periodisch veränderlichen Anteil, den wir in erster Annäherung der Gezeitenhöhe proportional setzen. Der sicher vorhandenen Phasendifferenz zwischen Gezeit und Tangentialdruck tragen wir durch Einführung einer komplexen Amplitude $\alpha = \varkappa e^{i\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda}}$ Rechnung. Es wird also

$$T_{xo} = \bar{T}_{xo} + \alpha\zeta,$$

so daß (6) eine spezielle Form der Telegraphengleichung annimmt:

$$\frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \dot{\zeta}}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x}. \tag{7}$$

Die Gezeit wird dann (unter Fortlassung der Amplitude):

$$\zeta = e^{-\frac{(\beta_0 + a_0)}{2gH} \cdot x} \cdot \cos\left(pt - \frac{\beta + a}{2gH} \cdot x\right), \tag{8}$$

wenn folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$$\beta_0 = \varkappa \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon\right), \qquad \beta = \varkappa \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon\right),$$

$$a_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4\beta_0^2\beta^2 + [4gHp^2 - (\beta_0^2 - \beta^2)]^2} - [4gHp^2 - (\beta_0^2 - \beta^2)]\right)},$$

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4\beta_0^2\beta^2 + [4gHp^2 - (\beta_0^2 - \beta^2)]^2} + [4gHp^2 - (\beta_0^2 - \beta^2)]\right)}.$$

Die Wurzeln sind positiv zu nehmen. Die Phasengeschwindigkeit der Gezeitenwellen wird

$$c = \frac{\sqrt{gH}}{\frac{(\beta + a)}{2p\sqrt{gH}}} = \frac{\sqrt{gH}}{\psi + \frac{\beta}{2p\sqrt{gH}}}$$

mit

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\beta_0^2 - \beta^2)}{4p^2gH} + \frac{1}{4p^2gH}\sqrt{4\beta_0^2\beta^2 + [4gHp^2 - (\beta_0^2 - \beta^2)]^2}\right)},$$

und geht für verschwindende Reibung $\varkappa = \beta = \beta_0 \to 0$ wieder in $c = \sqrt{gH}$ über.

Soll nun infolge der Reibung die Amplitude gedämpft werden und die Phasengeschwindigkeit $< \sqrt{gH}$ sein, so müssen folgende Ungleichungen bestehen:

$$\beta_0 + a_0 > 0, \tag{9}$$

$$\beta + a > 2p\sqrt{gH}. \tag{10}$$

Da nun

$$a a_0 = \beta\beta_0, \tag{11}$$

ergibt die Multiplikation von (9) und (10):

$$\beta_0 > 0, \quad \text{d. h.} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon\right) > 0, \tag{12}$$

und daraus folgt wegen (11):

$$\beta > 0, \quad \text{d. h.} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon\right) > 0, \tag{13}$$

also für die Phasendifferenz ε:

$$0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{4}. \tag{14}$$

Approximiert man also den Tangentialdruck am Meeresboden durch eine lineare Funktion der Gezeitenhöhe, so gilt für die Phasenverschiebung des Tangentialdruckes die Bedingung (14), das heißt das Maximum des Tangentialdruckes fällt in die erste Hälfte des „frontalen Abganges" der Gezeitenwelle, ein Ergebnis, das unabhängig ist von allen speziellen Annahmen über $\mu(z, t)$.