Laplaceschen Differentialgleichung, dessen Erledigung dadurch gelingt, daß man den Halbraum auf den ganzen Raum erweitert und in den 2. Halbraum eine in bezug auf die Trennungsebene zur gegebenen Kugel symmetrische Kugel einbettet. Die Lösung des neuen Problems erweist sich der des Ausgangsproblems äquivalent. Die Lösung wird in bekannter Weise in einer nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihe angesetzt. Die Berücksichtigung der Randbedingungen führt auf ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Veränderlichen, dessen Lösbarkeit untersucht wird. Es zeigt sich, daß dieses System einer näherungsweisen numerischen Behandlung zugänglich ist. Ein Zahlenbeispiel sowie eine Untersuchung von Sonderfällen beschließt die Arbeit. *F. Knoll* (Wien).

Relton, F. E.: On the steady rotation of an anchor ring in a viscous liquid. Philosophic. Mag., VII. s. **11**, 129—139 (1931).

Wenn ein Ankerring gleichmäßig um seine Achse rotiert und der Weg eines Flüssigkeitsteilchens ein Kreis parallel zur Äquatorebene ist, dann kann man die Lösung des obigen Problems durch Transformation der Laplaceschen Differentialgleichung entweder durch Einführung von Zylinderkoordinaten oder von Ringkoordinaten durchführen. Die Verwendung der ersteren führt auf Besselsche Funktionen. Zieht man Ringkoordinaten in der von Relton angegebenen Art heran, so gelangt man im allgemeinsten Fall zu Fourierschen Reihen, deren Koeffizienten sich durch Beta- und Riemannsche P-Funktionen ausdrücken lassen. Zwei Sonderfälle werden untersucht: der eine betrifft den Fall eines zähflüssigen Kernes im Inneren des Ringes: die Lösung, welche durch eine Kosinusreihe, deren Koeffizienten Vielfache von partikulären Lösungen einer Schar von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung vom Fuchsschen Typus sind, besagt physikalisch, daß sich der Kern wie ein fester Körper verhält. Der zweite Sonderfall, dessen Lösung sich auf den Außenraum des Ringes bezieht, setzt das Ruhen der Flüssigkeit im Unendlichen voraus. Die Lösung führt gleichfalls auf eine Kosinusreihe, deren Koeffizienten ebenfalls Vielfache von partikulären Lösungen der obenerwähnten Fuchsschen Differentialgleichungen sind. Die partikulären Lösungen werden in jedem Falle Riemannsche P-Funktionen. Im Anschlusse daran gelingt es, eine Reihe von Aussagen über die Dyade $\frac{1}{2}\{_{\mathrm{v}}\nabla + \nabla_{\mathrm{v}}\}$ zu machen. *F. Knoll* (Wien).

Mouskhelichvili, N.: Nouvelle méthode de réduction du problème biharmonique fondamental à une équation de Fredholm. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 77—79 (1931).

Verf. zeigt, wie die Lösung $U(x, y)$ der Gleichung $\Delta\Delta U = 0$ in einem endlichen oder unendlichen Bereich S aus der Lösung einer einfachen Fredholmschen Integralgleichung gewonnen werden kann. S ist ein Bereich, der durch eine hinreichend reguläre geschlossene Kurve C begrenzt ist. $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ genügen den üblichen Stetigkeitsvoraussetzungen und nehmen auf C die Randwerte u, v an, so daß $\frac{\partial U}{\partial x} = u$, $\frac{\partial U}{\partial y} = v$ ist. Wesentlich wird der Satz von Goursat benutzt, der die Darstellung der Funktion U in der Form:

$$2U = \bar{z}\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1(\bar{z}) + \psi_2(z) + \bar{\psi}_2(\bar{z})$$

beweist, wobei $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ reguläre analytische Funktionen in S sind, für die offenbar

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \bar{\psi}_1(\bar{z}) + z\bar{\varphi}_1'(\bar{z}) + \varphi_1(z) \quad \text{mit} \quad \psi_1(z) = \frac{d\psi_2(z)}{dz}$$

ist, und über die man noch am Rande von S (sowie in einem Punkte) in bestimmter Weise verfügen kann. Durch die konforme Abbildung des Bereiches auf den Einheitskreis $|\xi| \leqq 1$ durch $z = \omega(\xi)$ und Aufstellung der Grenzbedingungen auf $|\xi| = 1$ erhält man eine Gleichung, die mit $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ multipliziert und über $|\xi| = 1$ integriert unter Benutzung des Cauchyschen Integralsatzes eine Integralgleichung für $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$ liefert, wobei ζ ein Punkt im Innern des Einheitskreises ist. Geht man in der Gleichung für die Grenzbedingungen zu den konjugierten Werten über, so erhält man nach dem obigen Prozeß eine zweite Integralgleichung für $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$. Beide gewonnenen Integralgleichungen sind nach einem Theorem von Harnack äquivalent der Grenzbedingungsgleichung. Indem man unsere Integralgleichung

differenziert und ζ durch einen möglichen Grenzübergang zu einem Randpunkt des Einheitskreises werden läßt, entsteht die Fredholmsche Integralgleichung, die die Lösung liefert.
Udo Wegner (Göttingen).

Robert, Jean-Pierre: Médiation et fonctions métaharmoniques. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 326—328 (1931).

Es werden Mittelwertsätze für „n-metaharmonische Funktionen" abgeleitet, d. h. für Funktionen, die einer partiellen Differentialgleichung

$$\Delta^{(n)} u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)} u + \cdots + \lambda_{n-1} \Delta u \lambda_n + \lambda_n u = 0$$

genügen; $\Delta^{(\nu)} u$ ist der ν-fach iterierte Laplacesche Operator, $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ sind Konstante. Die Sätze verallgemeinern die Resultate einer früheren Note [C. r. Acad. Sci. Paris **191**, 193 (1930)], die sich auf den Spezialfall $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ bezieht. Wie in dieser wird zunächst eine nur von der Entfernung r abhängige Grundlösung $G_n(r)$ konstruiert; sodann ergibt die Anwendung der Greenschen Umformungen auf $G_n(r)$ und eine Funktion u mit stetigem $\Delta^{(n)} u$ gewisse Integralformeln, die in die fraglichen Mittelwertsätze übergehen, wenn u der obigen Differentialgleichung genügt. *Lüneburg* (Göttingen).

Integralgleichungen:

Rothe, Rudolf: Zur Abelschen Integralgleichung. Math. Z. **33**, 375—387 (1931).

Die Lösung der Abelschen Integralgleichung

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^\alpha} = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1$$

läßt sich unter den unmittelbar ablesbaren Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ in der Form

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \frac{f'(+0)}{\alpha} x^\alpha + \cdots \frac{f^{(\mu)}(+0)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\mu-1)} x^{\alpha+\mu-1}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\mu-1)} \int_0^x (x-z)^{\alpha+\mu-1} f^{(\mu+1)}(z)\,dz\right)$$

angeben. Ist $\beta > -1$, $\beta \neq 0$, dann ist $\varphi(s) = -\frac{\sin\beta\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{s^{\beta+1}}$ die einzig mögliche für $0 < s \leqq X$ stetige Lösung der Integralgleichung

$$\int_0^x (x-s)^\beta \varphi(s)\,ds = 1.$$

Ist $\lim\limits_{s\to+0} s\,\varphi(s) = G$ vorausgesetzt, so genügt jede Lösung von

$$\int_0^x (x-s)^\beta \varphi(s)\,ds = f(x), \quad \beta > -1, \quad \beta \neq 0,$$

auch einer Abelschen Integralgleichung, die sich durch genügend oftmaliges Differenzieren aus der gegebenen Integralgleichung gewinnen läßt, sofern die nötigen Ableitungen von $f(x)$ existieren. Ist $f(+0) = 0$ und $0 < \beta < 1$, so ist die Lösung der Integralgleichung

$$\int_0^x (x-s)^\beta \varphi(s)\,ds = f(x): \tag{I}$$

$$\varphi(s) = \frac{\sin(1-\beta)\pi}{\beta\pi}\left(\frac{f'(+0)}{s^\beta} + \int_0^s \frac{f''(z)\,dz}{(s-z)^\beta}\right),$$

und es ist $\lim\limits_{s\to+0} s\,\varphi(s) = 0$. Auf einem anderen Wege ergibt sich als Lösung der Integralgleichung (I) $\beta > -1$, $\beta \neq 0$,

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Pi(\beta)\,\Pi(\mu)} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} \int_0^s (s-x)^\mu f(x)\,dx,$$

worin $\mu > -1$ und $\mu + \beta + 1 = n$ eine ganze nicht negative Zahl bedeutet. Im besonderen kann man diese Formel auf $f(x) = x^\lambda$ und $f(x) = \sum_\lambda C_\lambda x^\lambda$, $\lambda > -1$ übertragen. Die Ergebnisse werden auf eine im Wasserbau auftretende Fragestellung angewendet und liefern ein bemerkenswertes Ergebnis. *F. Knoll* (Wien).

Koizumi, S.: On Heaviside's operational solution of a Volterra's integral equation when its nucleus is a function of $(x - \xi)$. (*Physico-Techn. Laborat., Waseda Univ., Tokyo.*) Philosophic. Mag., VII. s. **11**, 432—441 (1931).

Si applica il calcolo funzionale di Heaviside alla risoluzione delle equazioni integrali di Volterra

$$f(x) = C\psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) K(x - \xi)\, d\xi \tag{1}$$

con nucleo funzione della differenza $x - \xi$ (del „ciclo chiuso" secondo le denominazioni di Volterra, N. d. R.). Si considerano perciò le funzioni $\Phi(p)$, $F(p)$, $N(p)$, corrispondenti a $\psi(x)$, $f(x)$, $K(x)$ rispettivamente, nella trasformazione

$$H(p) = p\int_0^\infty e^{-px} h(x)\, dx \tag{2}$$

e si trova che

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{C + \frac{N(p)}{p}}. \tag{3}$$

Quindi la soluzione $\psi(x)$ della (1) corrisponde alla funzione (3) nella trasformazione inversa della (2), data da

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{px} \frac{H(p)}{p}\, dp \tag{4}$$

ove il cammino d'integrazione è una retta parallela all'asse immaginario, alle distanza l, che lascia alla sinistra tutte le singolarità della funzione integranda. Così pure il nucleo reciproco $L(x - \xi)$ del nucleo $K(x - \xi)$ viene individuato dalla funzione $L(x)$, corrispondente nella trasformazione (4), alla funzione $\frac{-N(p)}{1 - \frac{\lambda N(p)}{p}}$.

Questi metodi di calcolo sono applicati ad alcuni casi particolari (equazione di Abel, nucleo reciproco di sen $(x - \xi)$, ecc.) e vengono estesi anche alle equazioni differenziali, integro-differenziali; e ai sistemi di queste (lineari e con coefficienti costanti). L'essenza del metodo consiste nel passare dalle funzioni note $f(x)$, $K(x)$, ecc. alle loro corrispondenti $F(p)$, $N(p)$, ecc. nella trasformazione (2), dalle quali si ricavano con procedimenti razionali le funzioni $\Phi(p)$, ecc. corrispondenti alle funzioni incognite $\psi(x)$, ecc.; queste in definitiva si ottengono applicando la trasformazione (4) alle funzioni $\Phi(p)$, ecc. Le questioni di convergenza degli integrali impropri (2) e (4) non sono trattate nel lavoro. *Fantappiè* (Palermo).

Thielman, Henry P.: The application of functional operations to a class of integral equations occurring in physics. Philosophic. Mag., VII. s. **11**, 523—535 (1931).

Der Verf. erhält die explizite Auflösung von einigen speziellen Volterraschen Integralgleichungen erster Art — wobei der Kern $K(s, t)$, für $s = t$, eine Singularität besitzt — durch eine Anwendung der Davisschen Definition von Ableitungen reeller (auch nicht ganzer) Ordnung. *Gianfranco Cimmino* (München).

Differenzengleichungen:

Milne-Thomson, L. M.: On the operational solution of linear finite difference equations. Proc. Cambridge philos. Soc. **27**, 26—36 (1931).

Unter Bezugnahme auf den Operationskalkül von Heaviside für Differentialgleichungen wird eine analoge Methode zur symbolischen Lösung linearer Differenzengleichungen an-gegeben, wobei in die Lösung sogleich die Anfangswerte einbezogen werden. Es sei u_x eine beliebige Funktion der Variabeln x, wobei x die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft. Dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich der Fall mit beliebig äquidistanten Werten der unabhängigen Variabeln auf den betrachteten zurückführen läßt. Zunächst werden eine Anzahl Sätze über das Rechnen mit den Operatoren Δ und P^{-1} bereitgestellt, mit den Definitionen

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x \quad \text{und} \quad P^{-1} u_x = u_{x-1} + u_{x-2} + \cdots + u_1 + u_0,$$

so daß $P^{-1} u_x$ im wesentlichen die zur „Differenz“ Δu_x inverse „Summe“ ist. Rationale Ausdrücke in P werden auf die Grundformel (I) zurückgeführt:

$$(P - a)^{-r} X = (1 + a)^x P^{-r} [(1 + a)^{-x-r} X], \tag{I}$$

wenn X eine gegebene Funktion von x ist. Durch Anwendung auf die Einheit ergibt sich ferner:

$$\frac{P}{(P - a)^r} 1 = \frac{x^{(r-1)}}{(r-1)!} (1 + a)^{x-r+1}, \tag{II}$$

wo $x^{(m)}$ die Faktorielle $x(x-1)\ldots(x-m+1)$ bedeutet. Gebrochen rationale Ausdrücke in P, angewandt auf die gegebene Funktion X, lassen sich durch Teilbruchzerlegung auf (I) oder auf Operationen an der Einheit und weiterhin auf (II) zurückführen. Die Differenzengleichung n-ter Ordnung sei in der Form gegeben:

$$a_n \Delta^n u_x + a_{n-1} \Delta^{n-1} u_x + \cdots + a_r \Delta^r u_x \ldots + a_0 u_x = X,$$

wo die a_r konstant seien und X nur von x abhänge. Das Verfahren besteht nun in der fortgesetzten Anwendung des Operators P^{-1} auf diese Gleichung. Mit jedem Schritt wird einer der Anfangswerte

$$\Delta^r u_0 = u_{r,0} \; (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

eingeführt und die Ordnung um eine Einheit erniedrigt. Die Schlußgleichung, die die Operation Δ nicht mehr enthält, wird nach u_x aufgelöst. Die Ausführung der Operationen P liefert u_x, ausgedrückt durch die Anfangswerte. Die allgemeine Anwendung des Verfahrens wird an den Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung und bei einfachen simultanen Gleichungen gezeigt. Als Beispiele werden behandelt Differenzengleichungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Geometrie (Abbildung nach reziproken Radien) und Dynamik (1. Stoßproblem, 2. Energieaustausch, 3. linearer Oszillator mit gequantelter Zeit, unter Ersetzung der Hamiltonschen Gl. durch Differenzengleichungen). Über die symbolische Lösung von Differenzengleichungen vgl. auch Späth, Acta Math. **51**, 133—199 (1927). *S. Gradstein* (Darmstadt).

Bochner, S.: Allgemeine lineare Differenzengleichungen mit asymptotisch konstanten Koeffizienten. Math. Z. **33**, 426—450 (1931).

In der vorliegenden Arbeit findet man eine Anwendung der Theorie der fast periodischen Funktionen auf die Untersuchung der Differenzengleichungen folgender Art:

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho u(x + \delta_\varrho) = \varphi(x) \qquad (x \text{ reell}; \; 0 \leqq \delta_0 < \delta_1 < \cdots < \delta_r). \tag{1}$$

Es sei $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene Menge der Realteile aller Nullstellen der charakteristischen Funktion

$$E(\tau) = \sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho e^{\delta_\varrho \tau}, \qquad \tau = \tau' + i\tau'',$$

und $[\underline{b}_\sigma, \bar{b}_\sigma]$ ein Intervall aus der Komplementärmenge $\overline{\mathfrak{M}}$. Indem der Verf. die fast periodische Funktion $1/E(\tau)$ in dem Streifen $\underline{b}_\sigma < \tau' < \bar{b}_\sigma$ in eine absolute konvergente Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\lambda_n}^{\sigma} e^{\lambda_n \tau}$$

($\lambda_0 = 0$; $\lambda_n = m_0 \delta_0 + m_1 \delta_1 + \cdots + m_r \delta_r$, m_ϱ ganzzahlig und nicht alle verschwindend; $n \geqq 1$) entwickelt, erhält er die Beziehungen

$$\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho \gamma_{\lambda_n - \delta_\varrho}^{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0, \end{cases}$$

welche ermöglichen, die formalen Lösungen von (1)

$$\Gamma^\sigma \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\lambda_n}^{\sigma} \varphi(x + \lambda_n)$$

zu konstruieren. Es folgen Konvergenzbetrachtungen und einige Sätze, die die