Werk

Titel: Galoissche Kennzeichnung p-adisch abgeschlossener Körper.

Autor: Pop, Florian

Jahr: 1988

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0392|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

J. reine angew. Math. **392** (1988), 145—175

Journal für die reine und angewandte Mathematik
© Walter de Gruyter
Berlin · New York 1988

Galoissche Kennzeichnung *p*-adisch abgeschlossener Körper

Von *Florian Pop* in Heidelberg

Einführung und Hauptergebnisse

Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Q}_p$ die Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bezüglich der p-adischen Bewertung. Eine endliche Erweiterung $\boldsymbol{K}$ von $\mathbb{Q}_p$ nennen wir einen klassischen p-adischen Körper. Das folgende Theorem ist wohlbekannt (siehe z.B. [63], Ch. 1):

Theorem. *Für einen Körper K der Charakteristik Null sind äquivalent:*

1) *K ist klassischer p-adischer Körper für irgendeine Primzahl p.*

2) *K ist vollständig und hat endlichen Restklassenkörper bezüglich einer diskreten, einrangigen Bewertung v.*

3) *K ist lokal kompakt bezüglich einer nicht diskreten Topologie und nicht zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ isomorph.*

Dabei sind bei 1) *die Primzahl p, bei* 2) *die Bewertungsäquivalenzklasse von v und bei* 3) *die lokal kompakte Topologie eindeutig bestimmt.*

Mitte der sechziger Jahre haben Ax-Kochen und Ershov gezeigt, daß für jeden klassischen p-adischen Körper die elementare (algebraische) Theorie entscheidbar ist. Zu diesem Zweck haben sie *formal p-adische* und *p-adisch abgeschlossene* Körper eingeführt und gezeigt, daß die Klasse aller p-adisch abgeschlossenen Körper gute modelltheoretische Eigenschaften hat.

Ein Körper K der Charakteristik Null heißt *formal p-adisch*, falls K eine *p-adische Bewertung* zuläßt.

Eine Bewertung v eines Körpers K der Charakteristik Null heißt *p-adische Bewertung*, falls folgendes gilt:

i) p liegt im Bewertungsideal $\mathcal{M}$ von v.

ii) Bezeichnet $\mathcal{O}$ den Bewertungsring von v, so ist $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ endlich.

Aus i) und ii) schließt man:

Es existieren natürliche Zahlen e und f und ein Element t in $\mathcal{M}$ mit den Eigenschaften:

j) $\mathcal{M} = t\mathcal{O}$ und $t^e\mathcal{O} = p\mathcal{O}$.

jj) $\mathcal{O}/\mathcal{M}$ ist der endliche Körper mit p^f Elementen.

Man nennt e den Verzweigungsindex, f den Trägheitsgrad und schließlich $d = ef$ den p-adischen Rang von (K, v) oder einfach von K, wenn es klar ist, um welche p-adische Bewertung von K es sich handelt.

Sei nun v eine p-adische Bewertung von K und $\mathcal{O}, \mathcal{M}$ wie oben. Sei $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[1/p]$. Dann ist $\mathcal{O}'$ ein Bewertungsring von K, und das Bewertungsideal $\mathcal{M}'$ von $\mathcal{O}'$ ist in $\mathcal{M}$ enthalten. Also ist $\mathcal{O}^0 = \mathcal{O}/\mathcal{M}'$ ein Bewertungsring für $K^0 = \mathcal{O}'/\mathcal{M}'$, und es gilt: die von $\mathcal{O}^0$ definierte Bewertung v^0 auf K^0 ist einrangig und diskret, und $\mathcal{O}^0/p\mathcal{O}^0$ ist zu $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ isomorph, also endlich. Ferner hat K^0 Charakteristik Null, also ist die Komplettierung $\boldsymbol{K}$ von (K^0, v^0) ein klassischer p-adischer Körper, für den gilt:

$$e(\boldsymbol{K}|\mathbb{Q}_p) = e, \quad f(\boldsymbol{K}|\mathbb{Q}_p) = f, \quad [\boldsymbol{K}:\mathbb{Q}_p] = d$$

mit e, f, d wie oben und $e(\boldsymbol{K}|\mathbb{Q}_p)$, $f(\boldsymbol{K}|\mathbb{Q}_p)$ dem Verzweigungsindex bzw. Trägheitsgrad von $\boldsymbol{K}|\mathbb{Q}_p$.

Sei nun v eine p-adische Bewertung auf K. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas zeigt man, daß in dem algebraischen Abschluß $\tilde{K}$ von K maximale bewertete K-Teilkörper (K_1, v_1) existieren mit den Eigenschaften:

1) $(K_1, v_1)|(K, v)$ ist eine Erweiterung von bewerteten Körpern.

2) v_1 ist eine p-adische Bewertung und (K_1, v_1), (K, v) haben denselben p-adischen Rang.

Die K-Teilkörper von $\tilde{K}$ mit den Eigenschaften 1), 2) heißen *p-adische Abschlüsse* von (K, v). Ferner heißt (K, v) *p-adisch abgeschlossen*, wenn er gleich seinen p-adischen Abschlüssen ist.

Nach [46], § 3 lassen sich die p-adisch abgeschlossenen Körper wie folgt kennzeichnen:

(E. 1) Theorem. *Sei (K, v) formal p-adisch. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1) *(K, v) ist p-adisch abgeschlossen.*

2) *(K, v) ist Henselsch und vK ist eine $\mathbb{Z}$-Gruppe.*[1])

[1]) Eine $\mathbb{Z}$-Gruppe ist eine total geordnete Gruppe Γ, die ein kleinstes positives Element 1_Γ besitzt so, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\Gamma = n\Gamma + \mathbb{Z} \cdot 1_\Gamma$.

Ferner folgt aus [46], § 2—3:

(E.2) Theorem. *Sei (K, v) p-adisch abgeschlossen und K_0 in K enthalten, algebraisch abgeschlossen in K. Bezeichne v_0 die Einschränkung von v auf K_0. Dann ist (K_0, v_0) p-adisch abgeschlossen und hat denselben p-adischen Rang wie (K, v). Ferner ist jede endliche Erweiterung $L|K$ von K p-adisch abgeschlossen, und es gilt:*

$$\mathrm{Rang}(L, v) = [L : K] \cdot \mathrm{Rang}(K, v).$$

Die Klasse aller p-adisch abgeschlossenen Körper hat *gute modelltheoretische Eigenschaften* ([46], § 4—5):

(E.3) Theorem. *Jede Erweiterung $L|K$ von p-adisch abgeschlossenen Körpern desselben p-adischen Ranges ist elementar. Also ist die Theorie der p-adisch abgeschlossenen Körper gegebenen p-adischen Ranges modellvollständig.*

Für beliebige Körper $K, L, \ldots$ bezeichne $G_K, G_L, \ldots$ ihre absoluten Galoisgruppen, und $K^{\mathrm{abs}}, L^{\mathrm{abs}}, \ldots$ ihre absoluten Teilkörper, d.h. K^{abs} ist der algebraische Abschluß des Primkörpers von K in K.

Sei K ein p-adisch abgeschlossener Körper. Aus (E.2) folgt, daß K^{abs} p-adisch abgeschlossen ist und denselben p-adischen Rang wie K hat. Nach (E.3) ist $K|K^{\mathrm{abs}}$ sogar elementar. Sei nun $L|K$ endlich. Dann ist L^{abs} p-adisch abgeschlossen desselben p-adischen Ranges wie L, und aus (E.2) folgt $[L^{\mathrm{abs}} : K^{\mathrm{abs}}] = [L : K]$, also definiert die Korrespondenz $L \leftrightarrow L^{\mathrm{abs}}$ eine Bijektion zwischen der Menge aller endlichen Erweiterungen von K und der Menge aller endlichen Erweiterungen von K^{abs}. Daraus ergibt sich:

(E.4) *Für jeden p-adisch abgeschlossenen Körper K gilt:*

1) $\tilde{K} = K\widetilde{K^{\mathrm{abs}}}$ $(= K\tilde{\mathbb{Q}})$.

2) *Die natürliche Projektion* $\mathrm{pr}_K : G_K \to G_{K^{\mathrm{abs}}}$ *ist ein Isomorphismus.*

Ferner ist $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{abs}}$ der kleinste p-adisch abgeschlossene Körper überhaupt, und daher folgt:

(E.5) *Die Menge aller $\mathbb{Q}$-Isomorphieklassen von endlichen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{abs}}$ bildet ein vollständiges Repräsentantensystem für die Klasse aller p-adisch abgeschlossenen Körper bezüglich der elementaren Äquivalenz. Ferner ist jeder klassische p-adische Körper K durch K^{abs} eindeutig bestimmt, also bilden auch die Isomorphieklassen von klassischen p-adischen Körpern ein vollständiges Repräsentantensystem für die Klasse aller p-adisch abgeschlossenen Körper bezüglich der elementaren Äquivalenz. Ist K p-adisch abgeschlossen, so nennen wir die Isomorphieklasse der Komplettierung von K^{abs} den Typus von K.*

(E.6) Theorem. *Zwei p-adisch abgeschlossene Körper sind elementar äquivalent dann und nur dann, wenn sie denselben Typus haben.*

Nun wenden wir uns einem anderen Aspekt der Theorie der p-adisch abgeschlossenen Körper zu, nämlich ihrer Galoistheorie. Aus (E.4) folgt: die absolute Galoisgruppe G_K eines p-adisch abgeschlossenen Körpers K hängt nur von dem Typus von K ab, also gilt nach (E.5):

$$K \equiv L \quad \text{impliziert} \quad G_K \cong G_L.^{2})$$

---

[2]) Wir schreiben $K \equiv L$, wenn K und L elementar äquivalent sind. Gemeint ist dabei die elementare Äquivalenz in der Sprache der bewerteten Körper.

Eine natürliche Frage ist, ob die Umkehrung dieser Implikation gilt. Wie man sich mit Hilfe des Strukturtheorems von Jannsen und Wingberg [26] überlegen kann, ist die Antwort auf diese Frage negativ. Genauer haben Jarden und Ritter in [27], [49] gezeigt, daß für klassische p-adische Körper K und L gilt:

$$G_K \cong G_L \Leftrightarrow [K:\mathbb{Q}_p] = [L:\mathbb{Q}_p] \text{ und } K \cap \mathbb{Q}_p^{ab} = L \cap \mathbb{Q}_p^{ab},$$

wobei $\mathbb{Q}_p^{ab}$ die maximale Abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet. (Im Falle $p=2$ muß dabei vorausgesetzt werden, daß $\sqrt{-1} \in K$.)

Nun kommen wir zu dem Inhalt der vorliegenden Arbeit. Es geht um die Frage, ob die p-adische Abgeschlossenheit überhaupt Galoissch kennzeichenbar ist. Wir beginnen mit

Definition. Eine proendliche Gruppe G heißt p-adische Gruppe, falls sie isomorph (als proendliche Gruppe) zu der absoluten Galoisgruppe eines p-adisch abgeschlossenen Körpers ist.

(E.7) Vermutung. *Wenn die absolute Galoisgruppe G_K eines Körpers K eine p-adische Gruppe ist, dann ist K p-adisch abgeschlossen.*

Neukirch hat in [41] gezeigt, daß (E.7) für Körper K von algebraischen Zahlen richtig ist. Wir beschreiben hier kurz die Beweisidee von Neukirch: sei K ein Körper von algebraischen Zahlen mit G_K p-adisch. Nach einem Theorem von Tate ist die q-kohomologische Dimension $\mathrm{cd}_q G = 2$ für alle Primzahlen q und alle p-adischen Gruppen G. Nach [59], II, 3.3 existiert also für jedes q eine endliche Erweiterung $L|K$ mit ${}_q\mathrm{Br}\, L \neq 0$.[3]) Aus dem Lokal-Global-Prinzip von Brauer-Hasse-Noether für $\mathrm{Br}\, K$ folgt die Existenz einer Bewertung w auf L mit ${}_q\mathrm{Br}\, L_w \neq 0$, wobei L_w die Komplettierung von L bezüglich w ist. Ferner ist w keine Anordnung für $q \neq 2$, weil $\mathrm{Br}\, \mathbb{R} = \mathbb{Z}/2$ ist. Speziell ist die q-Sylowgruppe von G_{L_w} nichttrivial, somit auch die von G_{K_v}, v die Einschränkung von w auf K. Da G_K eine p-adische Gruppe ist, ist sie auflösbar. Nach dem Satz I. von Neukirch (siehe [40]) kann man also schließen: es existiert eine einrangige Henselsche Bewertung v auf K.

(E.8) Klassische Ergebnisse in der Bewertungstheorie, die auf Ostrowski [43] zurückgehen, besagen: (K, v) ist eine algebraische Erweiterung eines $\mathbb{Q}_l^{abs}$ für eine bestimmte Primzahl l. Da $\mathrm{cd}_q G_K = 2$ für alle Primzahlen q, so folgt aus [59], II, 5.6, daß der Exponent jeder Primzahl q in $[K:\mathbb{Q}_l^{abs}]$ endlich ist. Ferner folgt aus der Struktur der Sylowgruppen einer p-adischen Gruppe, daß $p=l$. Mit Hilfe eines Dualitätssatzes (siehe [41]) folgt schließlich: $[K:\mathbb{Q}_p^{abs}]$ ist endlich.

In dieser Arbeit stellen wir eine Methode dar, die zur positiven Lösung von (E.7) in weiteren Fällen führt. Unter anderem wird ein p-adisches Analogon des berühmten Satzes von Artin und Schreier über die Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper gegeben und bewiesen. Der Ursprung unserer Überlegungen ist in der Neukirchschen Arbeit zu finden, aber man kann leicht feststellen, daß die dort als Hilfsmittel benutzten Theoreme in allgemeineren Situationen nicht mehr gelten oder nicht verfügbar sind. In erster Linie meinen wir damit das Lokal-Global-Prinzip für die Brauersche Gruppe

[3]) ${}_q\mathrm{Br}\, L$ bezeichnet den q-Anteil der Brauergruppe $\mathrm{Br}\, L$ des Körpers L.

eines beliebigen Körpers, und ferner sogar die bei (E. 8) angegebenen Schlüsse: was kann man sagen über einen Henselschen Körper (K, v), falls G_K p-adisch ist und der Restklassenkörper Kv von K positive Charakteristik hat?

Hier nun die Struktur der Arbeit und die Hauptergebnisse:

In § 2 wird der „Henselsche Fall" von (E. 7) behandelt, und es wird gezeigt:

(E. 9) Theorem. *Sei (K, v) ein Henselscher Körper mit* $\operatorname{Char} Kv > 0$. *Ist G_K p-adisch, so ist K p-adisch abgeschlossen, und v ist die p-adische Bewertung.*

In § 3 zeigen wir, daß gewisse Aussagen über die Brauergruppe eines Funktionenkörpers einer Variablen elementar formulierbar sind. Daraus folgt, daß klassische Resultate von Witt [65], Tate [60], Roquette [53] und Lichtenbaum [38] über die Brauergruppe eines Funktionenkörpers einer Variablen elementare Beweise zulassen.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird in § 4 das folgende Lokal-Global-Prinzip für die Brauergruppe bewiesen:

Theorem. *Sei (K, v) p-adisch abgeschlossen und habe $L|K$ Transzendenzgrad* 1. *Dann ist die Abbildung*

$$\operatorname{Br} L \to \prod_{w} \operatorname{Br} L_w^h$$

injektiv, wobei w die Menge aller Fortsetzungen von v auf L durchläuft und L_w^h die Henselisierung von L bezüglich w ist.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse beweisen wir dann in § 5 folgendes:

(E. 10) Theorem. *Sei K' p'-adisch abgeschlossen (p' Primzahl) und habe $K|K'$ Transzendenzgrad* 1. *Wenn G_K p-adisch ist, dann ist K p-adisch abgeschlossen und $p = p'$.*

Ein p-adisches Analogon des Satzes von Artin und Schreier:

(E. 11) Theorem. *Sei K ein Körper, dessen algebraischer Abschluß durch absolut-algebraische Elemente erzeugt werden kann, also $\tilde{K} = K\widetilde{K^{\mathrm{abs}}}$. Wenn G_K p-adisch ist, dann ist K p-adisch abgeschlossen.*

Mit Hilfe von (E. 4) und (E. 11) erhält man folgende relativ Galoissche Kennzeichnung der formal p-adischen Körper:

(E. 12) Theorem. *Sei K ein Körper und $\mathrm{pr}_K : G_K \to G_{K^{\mathrm{abs}}}$ die natürliche Projektion der Galoisgruppen. Die p-adisch abgeschlossenen Oberkörper von K sind genau die Fixkörper der abgeschlossenen p-adischen Untergruppen G von G_K mit $G \cap \ker(\mathrm{pr}_K) = 1$.*

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater Professor Dr. Peter Roquette für alle seine Bemühungen und Anregungen, die er mir bei der Anfertigung dieser Arbeit gegeben hat, herzlich bedanken. Aus unseren Gesprächen haben sich schließlich die hier dargestellten Methoden und Ergebnisse kristallisieren lassen.

§ 1. Exkurs über Bewertungstheorie

Es sei K ein beliebiger Körper. Für eine Bewertung v von K bezeichne $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}_K$ den Bewertungsring und $\mathcal{M}$ oder $\mathcal{M}_K$ das Bewertungsideal von v. Ferner bezeichne vK und Kv die Wertgruppe bzw. den Restklassenkörper von v. Schließlich bezeichnen wir mit K_v^h die Henselisierung von K bezüglich v.

Sei nun (K, v) ein Henselscher Körper. Eine algebraische Erweiterung $L|K$ nennen wir *träge Erweiterung*, falls für alle endlichen Teilerweiterungen $M|K$ von L gilt: $Mv|Kv$ ist separabel und $[Mv : Kv] = [M : K]$. Eine Erweiterung $L|K$ heißt *zahme Erweiterung*, wenn für alle endlichen Teilerweiterungen $M|K$ von L gilt: $(vM : vK)$ ist nicht durch $p = \operatorname{Char} Kv$ teilbar, $Mv|Kv$ ist separabel und $[Mv : Kv] \cdot (vM : vK) = [M : K]$.

Es existiert eine einzige maximale, träge Erweiterung K^t und eine einzige maximale, zahme Erweiterung K^z von K, und sie sind Galoissche Erweiterungen von K.

(1. 1) Ihre Fixgruppen T_K — die Trägheitsgruppe, bzw. V_K — die Verzweigungsgruppe, können folgendermaßen definiert werden:

$$T_K = \{g \in G_K \mid x \in \mathcal{O}_{\tilde{K}} \Rightarrow v(x - x^g) > 0\},$$
$$V_K = \{g \in G_K \mid x \in \mathcal{O}_{\tilde{K}} \Rightarrow v(x - x^g) > v(x)\}.$$

Die natürliche Projektion $\mathcal{O}_{\tilde{K}} \to \tilde{K}v$ definiert eine kanonische Abbildung $G_K \to G_{Kv}$, und T_K ist genau der Kern dieser Abbildung. Es gilt: T_K und V_K sind auflösbar, T_K/V_K ist Abelsch von nicht durch $p = \operatorname{Char} Kv$ teilbarer Ordnung, und V_K ist eine pro-p-Gruppe, also ist V_K die einzige p-Sylowgruppe von T_K (siehe z. B. [17], § 19—20).

(1. 2) Für eine beliebige separable Erweiterung $L|K$ gilt:

$$T_L = T_K \cap G_L \quad \text{und} \quad V_L = V_K \cap G_L,$$
$$G_K = T_K \Leftrightarrow Kv \text{ ist separabel abgeschlossen,}$$
$$T_K = V_K \Leftrightarrow (q \neq \operatorname{Char} K \Rightarrow vK \text{ ist } q\text{-teilbar}).$$

Wir geben nun einige Sätze über die Struktur der p-adischen Gruppen.

(1. 3) Satz. *Sei G eine p-adische Gruppe und (K, v) ein klassischer p-adischer Körper mit $G_K = G$. Die Untergruppen $T = T_K$ und $V = V_K$ von G sind eindeutig bestimmt durch die folgenden Eigenschaften:*

1) *T, V sind Normalteiler von G mit $V \subseteq T$,*

2) *$G/T \cong \hat{\mathbb{Z}}$ und $T/V \cong \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}_p$,*

3) *V ist eine pro-p-Gruppe.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $V = V_K$ ist. Wegen der Struktur von G/V und G_K/V_K reicht es zu zeigen, daß V in V_K enthalten ist oder äquivalent: der Fixkörper L von V in $\tilde{K}$ läßt keine zahmen Erweiterungen mehr zu. Da V eine pro-p-Gruppe ist, folgt nach (1. 2): L läßt keine zahmen Erweiterungen mehr zu genau dann, wenn Lv separabel abgeschlossen ist. Wir beweisen also, daß Lv separabel abgeschlossen ist. Sei π eine Uniformisierende von K. Für jede nicht durch p teilbare natürliche Zahl m ist das

Polynom $X^m - \pi$ irreduzibel über K und hat Nullstellen in L, weil V eine pro-p-Gruppe ist. Da $L|K$ Galoissch ist, folgt: alle m-ten Einheitswurzeln, m wie oben, liegen in L. Somit ist Lv algebraisch abgeschlossen.

Es bleibt zu zeigen, daß $T = T_K$. Sei M der Fixkörper von T in $\tilde{K}$. Da $V = V_K$ in T enthalten ist, ist $M|K$ eine zahme Erweiterung. Ferner ist $M|K$ Abelsch und hat eine zu $\hat{\mathbb{Z}}$ isomorphe Galoisgruppe. Aus der lokalen Klassenkörpertheorie folgt: M ist die maximale träge Erweiterung von K. Somit ist $T = T_K$. □

(1. 4) Satz. *Sei G eine p-adische Gruppe, T, V ihre Trägheitsgruppe bzw. Verzweigungsgruppe. Dann gilt:*

1) *Ist G ein nichttrivialer Normalteiler von G, so ist $G \cap V$ nichttrivial.*

2) *Die nichttrivialen Normalteiler von V sind freie pro-p-Gruppen, die nicht endlich erzeugbar sind.*

Beweis. Zu 1): Sei (K, v) ein klassischer p-adischer Körper mit $G_K = G$. Sei $G \neq 1$, und bezeichne L den Fixkörper von G in $\tilde{K}$. Nach (1. 2) ist $G \cap V$ genau dann nichttrivial, wenn V_L nichttrivial ist. Wir zeigen nun, daß die p-Sylowgruppen von G_L nicht zyklisch sind. Da die p-Sylowgruppe von G_{Lv} zyklisch ist (eventuell trivial), folgern wir daraus, daß $V_L \neq 1$ ist. Also wird damit der Beweis von 1) beendet.

Sei $K'|K$ eine Galoissche Erweiterung, die nicht in L enthalten ist. Sei $K'(p)$ die maximale, p-elementar Abelsche Erweiterung von K'. Sei $K = K' \cap L$ und $L' = K'(p) \cap L$. Wir berechnen eine untere Schranke für den Grad der p-elementar Abelschen Erweiterung $K'(p)|L'K'$. Wir bemerken zuerst, daß durch Konstruktion L' und K' Galoissche linear disjunkte Erweiterungen von K sind. Daher ist $G(L'|K) \cong G(L'K'|K')$, und die letztere Gruppe ist ein Quotient der p-elementar Abelschen Gruppe $G(K'(p)|K')$. Somit ist $L'|K$ eine p-elementar Abelsche Erweiterung. Nach der lokalen Klassenkörpertheorie ist $[L' : K] \leqq p^{k+\varepsilon(K)}$ mit $k = [K : \mathbb{Q}_p]$, $\varepsilon(K) = 2$, falls K die p-Einheitswurzeln enthält und $\varepsilon(K) = 1$ sonst. Entsprechend ist $[K'(p) : K'] = p^{k'+\varepsilon(K')}$ ($k' = [K' : \mathbb{Q}_p]$, $\varepsilon(K')$ entsprechend definiert) für die Erweiterung $K'(p)|K'$. Da $\varepsilon(K') \geqq \varepsilon(K)$, erhalten wir die Abschätzung:

$$[K'(p) : L'K'] = [K'(p) : K']/[L' : K] \geqq p^{k'-k}.$$

Wir wählen nun K' so, daß $[K' : K] \geqq 3$ (was immer möglich ist, weil L nicht algebraisch abgeschlossen ist). Dann geht p^2 in $[K'(p) : L'K']$ auf, weil $k' - k \geqq 2$ ist. Da $K'(p)|L'K'$ p-elementar Abelsch ist, so ist $G(K'(p)|L'K')$ nicht zyklisch. Also sind auch die Sylowgruppen von $G(K'(p)|L')$ nicht zyklisch. Andererseits sind L und $K'(p)$ Galoissche linear disjunkte Erweiterungen von L'. Im Hinblick auf den Isomorphismus $G(LK'(p)|L) \cong G(K'(p)|L')$ folgt also: die p-Sylowgruppen von $G(LK'(p)|L)$ sind nicht zyklisch.

Zu 2): Es ist wohlbekannt, daß die Verzweigungsgruppe V jeder p-adischen Gruppe G eine freie nicht endlich erzeugte pro-p-Gruppe ist (siehe z. B. [41]). Nun folgt die Aussage 2) von (1. 4) aus der folgenden gruppentheoretischen Aussage:

Sei G eine freie nicht endlich erzeugte pro-p-Gruppe. Die nichttrivialen Normalteiler von G sind freie nicht endlich erzeugte pro-p-Gruppen. □

(1. 5) Korollar. *Es sei $\boldsymbol{G}$ eine p-adische Gruppe. Dann gilt:*

1) *Ist G ein nichttrivialer Normalteiler von $\boldsymbol{G}$, so enthält G eine pro-p-Gruppe, die frei und nicht endlich erzeugbar ist.*

2) *Keine Sylowgruppe von $\boldsymbol{G}$ ist Normalteiler von $\boldsymbol{G}$.*

Beweis. 1) folgt direkt aus (1. 4).

Zu 2): Aus 1) folgt, daß die q-Sylowgruppen keine Normalteiler sind für $q \neq p$. Wir zeigen, daß auch die p-Sylowgruppen von $G_{\boldsymbol{K}}$ keine Normalteiler sind. Sei π eine Uniformisierende von $\boldsymbol{K}$. Sei L der Fixkörper einer p-Sylowgruppe von $G_{\boldsymbol{K}}$. Alle Polynome der Form $X^m - \pi$ sind irreduzibel in $\boldsymbol{K}[X]$ und besitzen Nullstellen in L, m eine beliebige nicht durch p teilbare natürliche Zahl. Angenommen $L|\boldsymbol{K}$ Galoissch, so liegen alle Nullstellen von $X^m - \pi$ in L, und mithin liegen auch alle m-ten Einheitswurzeln in L, m wie oben. Daher ist Lv algebraisch abgeschlossen, Widerspruch! □

Für einen beliebigen Körper K bezeichne $V(K)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Bewertungen auf K. Die Menge $V(K)$ ist partiell geordnet durch

$$v' \leqq v \Leftrightarrow \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'.$$

Die minimalen nichttrivialen Elemente von $V(K)$ sind genau die einrangigen Bewertungen von K, und die maximalen Elemente von $V(K)$ sind genau die Bewertungen v von K mit $\operatorname{Char} Kv > 0$ und $Kv = (Kv)^{\text{abs}}$. Ferner hat jede aufsteigend (absteigend) filtrierte Familie $(v_i)_i$ ein Supremum v (Infimum) in $V(K)$, und dabei gilt: sind alle v_i Henselsch, so ist auch das Supremum v Henselsch. Wir sagen, daß v', v'' abhängig sind, falls sie eine nichttriviale gemeinsame Minorante haben (oder äquivalent, falls $\mathcal{O}'\mathcal{O}''$ ein echter Bewertungsring von K ist).

Ist $v' \leqq v$, so sagen wir, daß v' eine Vergröberung von v ist, bzw. daß v eine Verfeinerung von v' ist. Dann ist $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathcal{O}^0 = \mathcal{O}/\mathcal{M}'$ ist der Bewertungsring einer Bewertung v^0 auf $K^0 = Kv'$, die wir den Quotienten von v nach v' nennen. Umgekehrt: ist v' eine Bewertung auf K und v^0 eine Bewertung auf dem Restklassenkörper K^0 von v', so existiert eine einzige Bewertung v auf K mit: v^0 ist der Quotient von v durch v'. Es gilt:

(1. 6) $K^0 v^0 = Kv$ und es existiert eine natürliche, exakte Sequenz

$$0 \to v^0 K^0 \to vK \to v'K \to 0.$$

Dann und nur dann ist vK eine $\mathbb{Z}$-Gruppe, wenn v eine größte, nichttriviale Vergröberung v' hat, für die gilt: $v^0 K^0 \cong \mathbb{Z}$ und $v'K$ ist dividierbar.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt: v ist Henselsch dann und nur dann, wenn v' und v^0 Henselsch sind. (Siehe z. B. [47] für alle diese Aussagen.)

Wir wollen nun den sogenannten *Hauptteil* einer Bewertung definieren. Sei v eine beliebige Bewertung von K, und sei

$$V(v) = \{v\} \cup \{v' \mid v' \leqq v,\ Kv' \text{ separabel abgeschlossen}\}.$$

Die Bewertung

$$\underline{v} = \inf V(v)$$

nennen wir *den Hauptteil* von v, und der Grund dafür liegt darin, daß $\underline{v}$ die feinste Vergröberung von v ist, die in gewissem Sinne echte bewertungstheoretische Eigenschaften besitzt (vgl. z.B. (1.9), (1.14)). Man zeigt:

(1.7) Lemma. *Sei $v \in V(K)$ eine Bewertung von K, deren Henselisierung K_v^h nicht separabel abgeschlossen ist. Dann gilt:*

1) *$\underline{v}$ liegt in $V(v)$.*

2) *$K_v^h = K_{\underline{v}}^h$, also haben v und seine Fortsetzung auf K_v^h denselben Hauptteil. Daher ist $\underline{v}$ genau dann nichttrivial, wenn K_v^h nicht separabel abgeschlossen ist.*

3) *Sei v' eine Vergröberung von v und v^0 der Quotient von v nach v'. Dann gilt:*

   a) $\underline{v'} = \min(\underline{v}, v')$,

   b) *$\underline{v}^0$ ist genau der Quotient von $\max(v', \underline{v})$ nach v'.*

(1.8) Lemma. *Sei $v \in V(K)$ eine beliebige Bewertung von K, $L|K$ eine endliche Erweiterung von K, und w eine Fortsetzung von v auf E. Ist Kv nicht reell abgeschlossen, so gilt:*

$$\underline{w}|_K = \underline{v}.$$

(1.9) Satz. *Seien v, w Henselsche Bewertungen eines Körpers K, und $\underline{v}, \underline{w}$ ihre Hauptteile. Dann gilt:*

1) *$\underline{v}$ und $\underline{w}$ sind vergleichbar.*

2) *Ist $\underline{w}$ echt gröber als $\underline{v}$, so ist $\underline{w} = w$.*

Die Beweise von (1.7)—(1.9) ergeben sich als direkte Folge aus den Definitionen und brauchen daher hier nicht dargestellt zu werden.

(1.10) Korollar. *Sei (K, v) p-adisch abgeschlossen und $L|K$ eine algebraische Erweiterung von K, L nicht algebraisch abgeschlossen. Bezeichne w die eindeutige Fortsetzung von v auf L. Dann gilt:*

1) *$\underline{w} = w$, somit ist $\underline{w}$ maximal in $V(K)$.*

2) *Jede Henselsche Bewertung w' auf L ist eine Vergröberung von w, also ist $w' = \underline{w}'$.*

3) *Je zwei Henselsche Bewertungen auf L sind vergleichbar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $\underline{w} = w$. Da Kv endlich und $Lw|Kv$ algebraisch ist, ist w maximal in $V(L)$. Ferner definiert $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_L[1/p]$ die feinste echte Vergröberung w' von w, und nach (E.1) und (1.6) schließt man: $w'L$ ist dividierbar, und der Restklassenkörper L^0 von w' hat Charakteristik Null. Nach (1.2) ist $T_L(w')$ trivial, also sind G_L und $G_{Lw'}$ isomorph. Es folgt: L^0 ist nicht separabel abgeschlossen. Nach (1.7) 1) ist w' echt gröber als $\underline{w}$, also gilt $\underline{w} = w$, und somit ist $\underline{w}$ maximal. Die restlichen Aussagen von (1.10) folgen nun aus (1.9) und der Maximalität von $\underline{w}$ in $V(K)$. □

(1. 11) Korollar. *Sei (K, v) ein formal p-adischer Henselscher Körper und w eine Henselsche Bewertung auf K. Dann ist w eine Vergröberung von v. Speziell existiert auf jedem Körper höchstens eine Äquivalenzklasse von Henselschen p-adischen Bewertungen.*

Nun wollen wir einen Satz von Neukirch (siehe [40], Satz I.) auf den Fall von Bewertungen beliebigen Ranges verallgemeinern. Dafür benötigen wir noch einen Begriff, nämlich die lokalen Hauptteile einer Bewertung. Es sei q eine Primzahl. Für eine Bewertung v von K sei

$$V_q(v) = \{v\} \cup \{v' \mid v' \leqq v,\ Kv' \text{ ist } q\text{-abgeschlossen}^4)\}.$$

Die Bewertung

$$\underline{v}_q = \inf V_q(v)$$

nennen wir *den q-Hauptteil* von v.

(1. 12) Lemma. *Sei v eine beliebige Bewertung von K. Dann gilt:*

1) *Sei K_v^q der Fixkörper einer q-Sylowgruppe von $G_{K_v^h}$ in dem separablen Abschluß $\tilde{K}^s$ von K. Dann ist $\underline{v}_q$ genau der Hauptteil der Fortsetzung von v auf K_v^q, eingeschränkt auf K. Also ist $\underline{v}_q$ genau dann nichttrivial, wenn K_v^h nicht q-abgeschlossen ist.*

2) $\underline{v} = \sup_q \underline{v}_q$, *wobei q die Menge aller Primzahlen durchläuft.*

3) *Sei v' eine Vergröberung von v und v^0 der Quotient von v nach v'. Dann gilt:*

a) $\underline{v}'_q = \min(\underline{v}_q, v')$,

b) $\underline{v}_q^0$ *ist genau der Quotient von* $\max(v', \underline{v}_q)$ *nach* v'.

4) *Ist $L|K$ eine endliche Erweiterung von K und w eine Fortsetzung von v auf L, so ist $(\underline{w}_q)|_K = \underline{v}_q$ für alle Primzahlen $q \neq 2$. Für $q = 2$ gilt: Es sei K_v^2 der Fixkörper einer 2-Sylowgruppe von $G_{K_v^h}$. Ist der Restklassenkörper der Fortsetzung von v auf K_v^2 nicht reell abgeschlossen, so ist $(\underline{w}_2)|_K = \underline{v}_2$.*

Der Beweis folgt direkt aus den Definitionen und (1. 7). □

Wir kommen jetzt zu der Verallgemeinerung von Satz I. aus [40]:

(1. 13) Satz. *Sei K ein beliebiger Körper mit den Eigenschaften:*

i) G_K *ist auflösbar.*

ii) *Es existieren zwei verschiedene Primzahlen q', q'' nicht beide 2 und 3*[5]) *und Bewertungen w', w'' (eventuell $w' = w''$) so, daß $\underline{w}'_{q'}, \underline{w}''_{q''}$ nichttrivial sind.*

Dann gilt:

---

[4]) Wir nennen einen Körper R q-abgeschlossen, falls R keine separablen Erweiterungen von durch q-teilbarem Grad zuläßt.

[5]) Siehe auch Geyer [19].

1) *$\underline{w}'_{q'}$ und $\underline{w}''_{q''}$ sind vergleichbar.*

2) *K ist Henselsch bezüglich $w = \min(\underline{w}'_{q'}, \underline{w}''_{q''})$.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\underline{w}'_{q'} = w'$, $\underline{w}''_{q''} = w''$ ist.

Fall I. w', w'' sind unabhängig. Es sei K' der Fixkörper einer q'-Sylowgruppe von $G_{K^h_{w'}}$, und K'' sei entsprechend definiert. L bezeichne den Durchschnitt von K' und K''. Nach Heinemann [23], 1. ist $L^h_{w'} = K'$ und $L^h_{w''} = K''$, und L ist w'-dicht in K' und w''-dicht in K''. Weiter kann man genau wie im Fall der einrangigen Bewertungen verfahren (bei Neukirch [40], S. 77) und zeigen, daß G_L nicht auflösbar ist, Widerspruch!

Fall II. w' und w'' sind abhängig. Wir zeigen zuerst, daß w', w'' vergleichbar sind: sei w ihre maximale gemeinsame Vergröberung. Angenommen $w < w'$, $w < w''$, dann bezeichnen wir mit v' und v'' die Quotienten von w' und w'' nach w auf Lw. Nach (1. 12) 4) und (1. 7) 3) ist $\underline{v}'_{q'} = v'$, $\underline{v}''_{q''} = v''$ (also nichttrivial), und v' und v'' sind unabhängig (sonst wäre w nicht maximal). Ferner ist G_{Lw} ein Subquotient von G_L (nämlich der Quotient einer Zerlegungsgruppe von w durch die entsprechende Trägheitsgruppe von w in G_L), also auflösbar. Nach Fall I haben wir dadurch einen Widerspruch erreicht. Daher sind w' und w'' vergleichbar, und es sei $w' \leqq w''$.

Wir zeigen nun, daß L Henselsch bezüglich w' ist. Nach (1. 12) folgt aus $w' \leqq w''$ und $\underline{w}''_{q''} = w''$, daß $w'_{q''} = w'$ ist. Somit können wir unser Problem folgendermaßen stellen:

(1. 14) *Es sei (K, w) ein bewerteter Körper mit $\underline{w}_{q'} = \underline{w}_{q''} = w$, wobei q', q'' zwei verschiedene Primzahlen sind, nicht beide 2 und 3. Ist w nicht Henselsch, so ist G_K nicht auflösbar.*

Beweis. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Bemerkungen. Sei $\tilde{w}$ eine Fortsetzung von w auf den separablen Abschluß $\tilde{K}^s$ von K. G_K wirkt transitiv auf der Menge aller Fortsetzungen von w auf $\tilde{K}^s$. Also gilt: ist $\tilde{w}_1$ eine andere Fortsetzung von w auf $\tilde{K}^s$, so existiert $g \in G$ mit $\tilde{w}_1 = \tilde{w} \circ g$. Ferner gilt: $\tilde{w}$ und $\tilde{w} \circ g$ sind genau dann vergleichbar auf $\tilde{K}^s$, wenn $\tilde{w} = \tilde{w} \circ g$. Aus diesen Überlegungen folgt: die Einschränkungen von $\tilde{w}$ und $\tilde{w} \circ g$ auf eine algebraische Erweiterung L von K sind genau dann vergleichbar, wenn g' in G_L existiert mit $\tilde{w} = \tilde{w} \circ g'$. Speziell sind die Einschränkungen von $\tilde{w}$ und $\tilde{w} \circ g$ auf K^h_w genau dann vergleichbar, wenn $\tilde{w} = \tilde{w} \circ g$.

Wir kommen nun zum Beweis von (1. 14). Sei (K, w) nicht Henselsch. Dann gibt es $g \in G$ mit $\tilde{w} \neq \tilde{w} \circ g$. Nach der obigen Bemerkung sind die Einschränkungen von $\tilde{w}$ bzw. $\tilde{w} \circ g$ auf K^h_w nicht vergleichbar. Daher gibt es eine endliche Teilerweiterung $L|K$ von $K^h_w|K$ so, daß die Einschränkungen w', w'' von $\tilde{w}$ bzw. $\tilde{w} \circ g$ auf L nicht vergleichbar sind. Sei $q' < q''$. Nach Definition ist $\underline{w}'_{q'} = w'$, und nach (1. 12) 4) ist auch $\underline{w}''_{q''} = w''$ (weil $q'' > 2$). Sei nun w die maximale gemeinsame Vergröberung von w' und w'' auf L, und v', v'' bezeichne die Quotienten von w' bzw. w'' nach w auf Lw. Es ist klar, daß v', v'' unabhängig sind.

Ferner ist $\underline{v}'_{q'} = v'$ und $\underline{v}''_{q''} = v''$, also folgt nach Fall I: G_{Lw} ist nicht auflösbar. Da G_{Lw} ein Subquotient von G_L ist, folgt: G_L ist nicht auflösbar. Daher ist $G_K \supseteqq G_L$ nicht auflösbar. □

§ 2. Beweis von (E.9)

Die im Beweis benutzten Hilfsmittel sind:

a) Eine Verallgemeinerung klassischer Ergebnisse der Galoisschen Kohomologie von diskret bewerteten Körpern, die auf Witt zurückzuführen sind [64] (oder [58], Ch. XII, [57], u.a.).

b) Ein Lemma über die Erweiterungen Henselscher Körper durch Radikale.

c) Der Satz (1. 4) über die Struktur der Normalteiler von p-adischen Gruppen.

Zu a):

(2. 1) Sei (K, v) ein Henselscher Körper, $L|K$ eine endliche träge Erweiterung mit der Galoisgruppe G, und seien $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{M}_K$, $\mathfrak{M}_L$ die entsprechenden Bewertungsringe und Bewertungsideale und $1+\mathfrak{M}_K$, $1+\mathfrak{M}_L$ die Gruppen der Haupteinheiten von K bzw. L. Dann gilt:

(2. 2) Lemma. *Mit den Bezeichnungen von* (2. 1) *ist* $1+\mathfrak{M}_L$ *G-kohomologisch trivial.*

Beweis. Nach [11], Ch. 4, § 8 ist zu zeigen, daß für $m=0, 1$ die Tateschen Kohomologiegruppen $\hat{H}^m(G, 1+\mathfrak{M}_L)$ verschwinden.

Wir beginnen mit $\hat{H}^0(G, 1+\mathfrak{M}_L)=0$. Es bedeute N_K^L die Normfunktion der Erweiterung $L|K$ und Tr_K^L die Spurfunktion. Wir haben zu zeigen:

$$\mathrm{N}_K^L(1+\mathfrak{M}_L)=1+\mathfrak{M}_K=(1+\mathfrak{M}_L)^G.$$

Sei x in $\mathcal{O}_L$ so, daß die Konjugierten der Restklasse $\bar{x}$ von x eine Normalbasis von $Lv|Kv$ bilden. Die Konjugierten von x bilden dann eine Normalbasis von $L|K$ (und sogar von $\mathcal{O}_L|\mathcal{O}_K$); dabei kann man $\mathrm{Tr}_K^L x=1$ voraussetzen. Wir behaupten, daß für jedes y in $\mathfrak{M}_K$ die Gleichung

$$\mathrm{N}_K^L(1+xX)=1+y$$

in der Unbestimmten X eine Lösung in K hat. Sei also

$$\mathrm{P}(X)=\mathrm{N}_K^L(1+xX)-1-y=\mathrm{N}_K^L(x)X^n+\cdots+X-y$$

mit $n=[L:K]$. Es gilt:

$$\mathrm{P}(X)\in\mathcal{O}_K[X],\quad \mathrm{P}(y)\in\mathfrak{M}_K,\quad \mathrm{P}'(y)\in 1+\mathfrak{M}_K.$$

Daher folgt die Behauptung aus Hensels Lemma.

Nun zeigen wir $H^1(G, 1+\mathfrak{M}_L)=0$. Da $H^1(G, L^*)=0$, gibt es zu jedem 1-Kozyklus $a_g\in H^1(G, 1+\mathfrak{M}_L)$ ein b in L^* mit $a_g=b^{g-1}$ $(g\in G)$. Wir zeigen, daß b schon in $1+\mathfrak{M}_L$ gewählt werden kann: aus $vL=vK$ folgt: es gibt $b'\in K$ mit $vb=vb'$, und für $c=b/b'$ gilt: $vc=0$ und $a_g=c^{g-1}$. Da alle a_g in $1+\mathfrak{M}_L$ liegen, folgt: die Restklasse $\bar{c}$ von c ist $G(Lv|Kv)$-invariant, also liegt $\bar{c}$ in Kv. Daher existiert c' in K mit $\bar{c}=\bar{c}'$. Für $d=c/c'$ hat man: $a_g=d^{g-1}$ und d liegt in $1+\mathfrak{M}_L$. □

(2. 3) Korollar. *Mit den Bezeichnungen von* (2. 1) *sind die von der natürlichen Projection* $\mathcal{O}_L \to Lv$ *definierten Homomorphismen*

$$\hat{H}^n(G, \mathcal{O}_L^*) \to \hat{H}^n(G, (Lv)^*), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

alle Isomorphismen.

Wir behalten die Bezeichnungen von (2. 1) bei. Aus der exakten Sequenz von G-Moduln

$$1 \to \mathcal{O}_L^* \to L^* \xrightarrow{v} vL = vK \to 0$$

und (2. 3) erhält man die lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^n(G, (Lv)^*) \to H^n(G, L^*) \xrightarrow{v} H^n(G, vK) \xrightarrow{\delta} \cdots.$$

Wir zeigen, daß δ trivial für alle $n>0$ ist, oder äquivalent, daß v surjektiv für alle $n>0$ ist. Da G trivial auf vK wirkt, ist jede Untergruppe A von vK ein G-Untermodul von vK. Ist zusätzlich A endlich erzeugt, so ist A $\mathbb{Z}$-frei, weil vK keine Torsion hat. Also hat man: für jeden endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Untermodul A von vK existiert ein Schnitt $s: A \to B \subset K^* \subset L^*$ von v über A, und s ist sogar ein Homomorphismus von G-Moduln. Man hat also das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^n(G, L^*) & \xrightarrow{\quad v \quad} & H^n(G, vK) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^n(G, B) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & H^n(G, A) \end{array}$$

Durchläuft A alle endlich erzeugten Untergruppen von vK, so ist $H^n(G, vK)$ der induktive Limes der $H^n(G, A)$. Es folgt, daß v surjektiv ist. Also haben wir:

(2. 4) Theorem. *Sei* (K, v) *ein Henselscher Körper und* $L|K$ *eine träge Galoissche Erweiterung mit der Galoisgruppe* G. *Dann ist für alle* $n>0$ *die natürliche Sequenz exakt*:

$$0 \to H^n(G, (Lv)^*) \to H^n(G, L^*) \xrightarrow{v} H^n(G, vK) \to 0.$$

Speziell gilt für $n=2$:

$$0 \to \mathrm{Br}(Lv|Kv) \to \mathrm{Br}(L|K) \to H^2(G, vK) \to 0.$$

Mit Hilfe der exakten Sequenz $0 \to vK \to \mathbb{Q} \otimes vK \to \mathbb{Q} \otimes vK/vK \to 0$ erhält man aus (2. 4) das folgende

(2. 5) Korollar. *Sei* (K, v) *ein Henselscher Körper und* K^t *seine maximale träge Erweiterung. Dann ist die natürliche Sequenz exakt*:

$$0 \to \mathrm{Br}\, Kv \to \mathrm{Br}(K^t|K) \to \mathrm{Hom}(G_{Kv}, \mathbb{Q} \otimes vK/vK) \to 0.$$

Ist dazu v *diskret vom Rang* 1 *und* Kv *vollkommen, so ist* $\mathrm{Br}(K^t|K) = \mathrm{Br}\, K$.

Der Beweis der letzten Aussage ist z. B. in [58], Ch. XII zu finden.

Zu b):

Für eine Abelsche Gruppe A bezeichnen wir mit A/n die Faktorgruppe von A nach der Untergruppe A^n der n-ten Potenzen (bei multiplikativer Schreibweise von A) bzw. nach der Untergruppe nA der Vielfachen von n (bei additiver Schreibweise).

(2. 6) Lemma. *Sei (K, v) ein Henselscher Körper, $\mathcal{O}$ sein Bewertungsring und $\mathcal{M}$ das Bewertungsideal. Dann sind für alle natürlichen Zahlen $n>0$ die folgenden Sequenzen exakt:*

$$1 \to (1+\mathcal{M})/n \to \mathcal{O}^*/n \to (Kv)^*/n \to 1,$$

$$1 \to \mathcal{O}^*/n \to K^*/n \to vK/n \to 0.$$

Beweis. Wir zeigen, daß $(1+\mathcal{M})^n = (\mathcal{O}^*)^n \cap (1+\mathcal{M})$ für alle $n>0$ gilt. Sei $p = \operatorname{Char} Kv$, $n = p^e m$ mit $p \nmid m$ ($p^e = 1$, falls $\operatorname{Char} Kv = 0$). Für $1+x = a^n$, $x \in \mathcal{M}$, $a \in \mathcal{O}$ folgt: die Restklasse $\bar{a}$ von a ist eine n-te Einheitswurzel in Kv, also auch eine m-te Einheitswurzel. Aus Hensels Lemma ergibt sich eine m-te Einheitswurzel b in K mit $\bar{b} = \bar{a}^{p^e}$. Da p und m teilerfremd sind, existiert eine ganze Zahl r mit $1 \equiv rp^e \bmod m$, und es sei $c = b^r$. Da die p^e-Potenzierung injektiv auf Kv ist, erhält man:

$$\bar{c}^{p^e} = \bar{b} = \bar{a}^{p^e} \Rightarrow \bar{c} = \bar{a} \Rightarrow a/c \in 1+\mathcal{M}.$$

Da c eine m-te Einheitswurzel ist, folgt: $(a/c)^n = a^n = 1+x$, also liegt $1+x$ in $(1+\mathcal{M})^n$. Um den Beweis von (2. 6) zu beenden, wendet man folgendes an:

Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine exakte Sequenz von kommutativen Gruppen, und für eine natürliche Zahl n gilt $A \cap nB = nA$, so ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \to A/n \to B/n \to C/n \to 0. \quad \square$$

(2. 7) Korollar. *Sei (K, v) ein Henselscher Körper der Charakteristik Null, v einrangig. Ferner sei $p = \operatorname{Char} Kv > 0$. Die Galoisgruppe G_K habe nur endlich viele offene Untergruppen vom Index p. Dann gilt:*

1) *Kv ist vollkommen.*

2) *Ist v nicht diskret, so ist vK p-dividierbar.*

3) *Ist v diskret, so ist Kv endlich.*

Beweis. Aus der Theorie der Erweiterungen durch Radikale in Charakteristik Null folgt: für alle x, y in K definieren $x^{1/p}$ und $y^{1/p}$ genau dann isomorphe Erweiterungen von K, wenn x und y dieselbe Untergruppe von K^*/p erzeugen. Da G_K nur endlich viele offene Untergruppen vom Index p besitzt, oder äquivalent, K nur endlich viele Erweiterungen vom Grad p hat, folgt: K^*/p ist endlich.

Zu 1): Nach (2. 6) ist $\mathcal{O}^*/p$, und somit auch $(K\nu)^*/p$, endlich. Ist $K\nu$ endlich, so ist $K\nu$ vollkommen. Sei also $K\nu$ unendlich, und sei a in $K\nu$. Da die Menge $(K\nu)^p$ und daher auch $a-(K\nu)^p$ unendlich ist, und ferner $(K\nu)^*/p$ endlich ist, gilt:

$$\exists x, y, z \in K\nu \quad \text{mit} \quad a - x^p = (a-y^p)z^p,\ x^p \neq y^p.$$

Daraus folgt: $a \in (K\nu)^p$, also ist $K\nu$ vollkommen.

Zu 2): Nach (2. 6) folgt aus der Endlichkeit von K^*/p: $(1+\mathcal{M})/p$ ist endlich. Seien $1+a_j$, $j=1,\ldots,n$ Erzeugende von $(1+\mathcal{M})/p$. Da ν nicht diskret ist, so gibt es $a \in \mathcal{M}$ mit der Eigenschaft: $0<\nu a<\nu p$ und $0<\nu a<\nu a_j$ für alle j. Wir schreiben

$$1+a=(1+b)^p \prod_j (1+a_j)^{r_j},$$

mit $b \in \mathcal{M}$, $0 \leqq r_j < p$, $(1 \leqq j \leqq n)$. Es ergibt sich:

$$(*) \qquad \nu a \geqq \min_{s+s_1+\cdots+s_n>0} \nu\left(\binom{p}{s} b^s a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}\right).$$

Andererseits folgt aus der Wahl von a:

$$(**) \qquad \nu a < \nu\left(\binom{p}{s} b^s a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}\right),$$

falls wenigstens ein $s_j>0$, oder falls $s<p$. Aus (*), (**) folgt $\nu a = \nu b^p$, und daher ist νa p-teilbar. Um zu zeigen, daß νK p-dividierbar ist, reicht es nun zu bemerken, daß $p \cdot \nu K$ dicht in νK ist, weil νK nicht diskret vorausgesetzt wurde.

Zu 3): Sei $\pi \in \mathcal{O}$ eine Uniformisierende von ν. Dann ist νp ein Vielfaches von $\nu\pi$. Daher gilt:

$$1+\pi^2\mathcal{O} = 1+\mathcal{M}^2 \supseteq (1+\mathcal{M})^p,$$

somit ist $(1+\mathcal{M})/(1+\mathcal{M}^2) = (1+\pi\mathcal{O})/(1+\pi^2\mathcal{O}) \cong K\nu$ ein homomorphes Bild von $(1+\mathcal{M})/(1+\mathcal{M})^p$, also endlich. □

(2. 8) Korollar. *Unter den Voraussetzungen von* (2. 7) *sei ν nicht diskret. Dann ist die natürliche Abbildung ${}_p\mathrm{Br}\, L \to {}_p\mathrm{Br}\, L^t$ für jede algebraische Erweiterung $L|K$ injektiv, wobei L^t die maximale träge Erweiterung von L ist.*

Beweis. Nach (2. 7) ist $K\nu$, also auch $L\nu$ vollkommen, also ist ${}_p\mathrm{Br}\, L\nu$ trivial. Ferner, da ν nicht diskret ist, folgt aus (2. 7) 2), daß νK, somit auch νL p-dividierbar ist. Daher ist die p-Komponente von $\mathbb{Q} \otimes \nu L/\nu L$, und somit auch die p-Komponente von $\mathrm{Hom}(G_{L\nu}, \mathbb{Q} \otimes \nu L/\nu L)$ trivial. Aus (2. 5) erhalten wir also: ${}_p\mathrm{Br}(L^t|L)$ ist trivial, und jetzt folgt (2. 8) aus der exakten Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(L^t|L) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{Br}\, L \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Br}\, L^t. \qquad \square$$

Als ein wichtiges Korollar zeigen wir noch:

(2. 9) Theorem. *Sei* (K, v) *ein Henselscher Körper mit* $\mathrm{Char}\, Kv = q > 0$ *und* v *einrangig. Falls die absolute Galoisgruppe* G_K *von* K *die folgenden Bedingungen erfüllt:*

i) G_K *besitzt nur endlich viele offene Untergruppen vom Index* q,

ii) $\mathrm{cd}_q G_K \geqq 2$ *und* $\mathrm{cd}_q V_K \leqq 1$, *wobei* V_K *die Verzweigungsgruppe von* v *ist,*

dann ist (K, v) q*-adisch abgeschlossen.*

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß $\mathrm{Char}\, K = 0$: da $\mathrm{Char}\, Kv = q$, ist $\mathrm{Char}\, K$ gleich 0 oder q. Wäre die Charakteristik von K gleich q, so hätte G_K die q-kohomologische Dimension höchstens 1 (siehe z. B. [59], II, 2. 2), Widerspruch.

Ferner, da $\mathrm{Char}\, Kv = q$ positiv ist, liegt die Primzahl q in dem Bewertungsideal von v. Wir zeigen, daß vK nicht q-teilbar ist. Aus $\mathrm{cd}_q G_K \geqq 2$ folgt: es existiert eine endliche Erweiterung L von K mit ${}_q\mathrm{Br}\, L \neq 0$, [59], II, 3. 1. Angenommen vK ist q-teilbar, so folgt nach (2. 8): ${}_q\mathrm{Br}\, L^t \neq 0$. Daher ist $\mathrm{cd}_q G_{L^t} \geqq 2$. Mithin besitzt die q-Sylowgruppe von G_{L^t} cohomologische Dimension $\geqq 2$, und damit haben wir einen Widerspruch erreicht: die q-Sylowgruppe von G_{L^t} ist genau die Verzweigungsgruppe V_{L^t} von L^t, und diese ist in V_K enthalten (siehe (1. 1), (1. 2)). Daher ist $\mathrm{cd}_q V_{L^t} \leqq \mathrm{cd}_q V_K < 2$, Widerspruch.

Also ist vK nicht q-teilbar. Nach (2. 7) folgt: v ist diskret, und Kv ist endlich. Somit ist (K, v) nach (E. 1) ein q-adisch abgeschlossener Körper.

Nun kommen wir zum Beweis von (E. 9). Sei $q = \mathrm{Char}\, Kv$. Nach Tate (siehe [59], II, 5) ist die l-kohomologische Dimension der p-adischen Gruppen genau 2 für alle Primzahlen l. Wie im Beweis von (2. 9) folgt: $\mathrm{Char}\, K = 0$.

Fall I. Rang $v = 1$. Da die p-adischen Gruppen endlich erzeugt sind (siehe z. B. [26]), erfüllen sie die Bedingung i) von (2. 9). Wir zeigen, daß auch die Bedingung ii) von (2. 9) erfüllt ist: nach (1. 5) sind die Sylowgruppen der p-adischen Gruppen keine Normalteiler. Da V_K ein Normalteiler von G_K ist, folgt: V_K ist echt kleiner als die q-Sylowgruppe von G_K, somit ist der Exponent von q in $[K^t : K]$ positiv. Es folgt: Kv läßt separable Erweiterungen von durch q teilbarem Grad zu, und daraus schließt man: der Exponent von q in $(G_K : V_K)$ ist unendlich. Nach [59], II, 5. 6 ist daher $\mathrm{cd}_q V_K \leqq 1$. Nach (2. 9) ist (K, v) q-adisch abgeschlossen. Im Hinblick auf die Struktur der Sylowgruppen von p-adischen Gruppen folgern wir daraus $q = p$. Nach (1. 11) ist v genau die p-adische Bewertung.

Fall II. Rang v beliebig. Sei $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ das minimale bzw. das maximale Primideal des Bewertungsringes $\mathcal{O}_v$ von K mit den Eigenschaften: $q \in \mathfrak{P}$ und $q \notin \mathfrak{P}'$, und seien w, bzw. w' die von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ definierten Vergröberungen von v. Dann sind w und w' Henselsche Bewertungen von K, und aus ihrer Konstruktion folgt: w' ist die feinste Vergröberung von w, $\mathrm{Char}\, Kw = q$ und $\mathrm{Char}\, Kw' = 0$. Seien nun T', V' die Trägheitsgruppe bzw. Verzweigungsgruppe von w'. Da Kw' Charakteristik Null hat, ist V' trivial, also ist T' ein Abelscher Normalteiler von G_K (siehe z. B. [17], § 19—20). Nach (1. 5) ist $T' = 1$. Es folgt: die Wertgruppe $w'K$ ist dividierbar, (K, w') besitzt nur noch träge Erweiterungen,

und somit ist die natürliche Projektion $G_K \to G_{Kw'}$ ein Isomorphismus. Sei nun v^0 der Quotient von w durch w' auf dem Restklassenkörper K^0 von w'. Dann hat (K^0, v^0) die Eigenschaften:

— v^0 ist einrangig.

— (K^0, v^0) ist Henselsch, weil w es ist.

— $\mathrm{Char}\, K^0 v^0 = \mathrm{Char}\, Kv = q > 0$.

— $G_{K^0} \cong G_K$ ist eine p-adische Gruppe.

Nach Fall I ist (K^0, v^0) ein p-adisch abgeschlossener Körper und $p = q$. Also ist v^0 einrangig, diskret und hat endlichen Restklassenkörper. Also gilt für w: $Kw = K^0 v^0$ ist endlich, also läßt w keine Verfeinerungen mehr zu, und somit ist $v = w$. Wir zeigen, daß (K, v) p-adisch abgeschlossen ist. Da (K, v) nach Voraussetzung Henselsch ist, so ist zu zeigen:

1) $\mathcal{O}_v/p\mathcal{O}_v$ ist endlich,

2) vK ist eine $\mathbb{Z}$-Gruppe.

Die erste Aussage folgt aus

$$\mathcal{O}_v/p\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_v/(p\mathcal{O}_v + \mathcal{M}_{w'}) = \mathcal{O}_{v^0}/p\mathcal{O}_{v^0},$$

weil $\mathcal{M}_{w'}$ in $p\mathcal{O}_v$ enthalten ist.

Die zweite Aussage folgt aus der Dividierbarkeit von $w'K$ und (1.6). □

§ 3. Körper mit der Φ-Eigenschaft

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß bestimmte Aussagen über die Brauersche Gruppe eines regulären Funktionenkörpers einer Variablen elementar sind. Wir führen den Beweis nur für den Fall der Charakteristik Null, aber unter entsprechenden Voraussetzungen gelten die meisten Ergebnisse auch für positive Charakteristik.

Für einen Funktionenkörper einer Variablen F bezeichne K den genauen Konstantenkörper von F, $\mathrm{Div}(F)$ die Divisorengruppe von F, $\mathbb{P}(F)$ die Menge der Primdivisoren. Für einen Primdivisor P bezeichnen wir mit v_P die von P definierte normierte Bewertung auf F und mit $\mathrm{d}(P) = [FP : K]$ den Grad von P. Für einen Divisor $D = \sum n_P P$ bezeichne $\mathrm{d}(D) = \sum n_P\, \mathrm{d}(P)$ den Grad von D. Wir setzen $\mathrm{d}(F) = \min_{D>0} \mathrm{d}(D)$. Für eine nicht konstante Funktion f ist $\mathrm{d}((f)_0) = \mathrm{d}((f)_\infty) = [F : K(f)]$ der Grad von f, und wir bezeichnen ihn mit $\deg^F f$. Für konstante Funktionen f setzen wir $\deg^F f = 0$. Schließlich bezeichne g_F das Geschlecht von F.

Sei $\tilde{K}$ der algebraische Abschluß von K und G_K die absolute Galoisgruppe von K. G_K wirkt in einer natürlichen Weise auf $F\tilde{K}$, also auch auf der Divisorgruppe $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$ und auf der Divisorklassengruppe $\mathrm{Pic}(F\tilde{K})$.

Es gilt: für jeden Primdivisor P von F wirkt G_K transitiv auf der Menge aller Primdivisoren Q_k, $(k=1,\dots,m)$ von $F\tilde{K}$, die über P liegen. Bezeichnet $\langle P\rangle$ die von $\{Q_k\}_k$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$, so ist $\langle P\rangle$ ein G_K-Modul, und $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$ ist die direkte Summe $\bigoplus_P \langle P\rangle$.

Aus der exakten Sequenz

$$1 \to \tilde{K}^* \to (F\tilde{K})^* \to \mathrm{Div}(F\tilde{K})$$

ergibt sich die natürliche Abbildung

$$j: H^2(G_K, (F\tilde{K})^*) \to H^2(G_K, \mathrm{Div}(F\tilde{K})).$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Br}_0 F$ den Kern von j. (Ist $V|K$ das projektive glatte Modell von $F|K$, so ist $\mathrm{Br}_0 F$ nichts anderes als $\mathrm{Br}\, V$, siehe [38].)

Nach dem Theorem von Tsen hat $F\tilde{K}$ die kohomologische Dimension 1 ([59], II, 2. 3), also ist die natürliche Abbildung $\mathrm{Inf}: \mathrm{Br}(F\tilde{K}|F) \to \mathrm{Br}\, F$ ein Isomorphismus. Es gilt daher:

Jede Divisionsalgebra über F läßt sich als ein 2-Kozyklus $x_{g,h} \in H^2(G, (FL)^*)$ realisieren, mit einer geeigneten endlichen Galoisschen Erweiterung $L|K$ und $G = G(L|K) = G(FL|F)$.

Sei j_P die Komposition von j mit der Abbildung, die von der Projektion von $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$ auf $\langle P\rangle$ definiert wird. Dann ist $\mathrm{Br}_0 F = \bigcap_P \ker j_P$. Wir sagen, daß $\tilde{x} \in \mathrm{Br}\, F$ verzweigt an P ist, falls $j_P(\tilde{x})$ nichttrivial ist.

Für die nachstehende Konstruktion siehe [38].

Für einen Divisor $D = m_1 Q_1 + \cdots + m_n Q_n \in \mathrm{Div}(F\tilde{K})$ sei $U(D)$ die Teilmenge von $F\tilde{K}$ bestehend aus allen Funktionen $f \neq 0$, die keine Pol- und Nullstellen in D haben. $U(D)$ ist eine Untergruppe von $(F\tilde{K})^*$, und die Abbildung $f \mapsto f(Q)$ (Wert von f an der Stelle Q) definiert einen Gruppenhomomorphismus von $U(D)$ in $\tilde{K}^*$ durch $f \mapsto f(Q_1)^{m_1} \cdots f(Q_n)^{m_n}$. Bezeichnet $\langle D\rangle$ die von $Q_1, \dots, Q_n$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$, so hat man die folgende exakte Sequenz:

$$1 \to U(D) \to (F\tilde{K})^* \to \langle D\rangle \to 0.$$

Ist nun D ein G_K-invarianter Divisor von $F\tilde{K}$ ($\Leftrightarrow D$ liegt im Bild von $\mathrm{Div}(F) \to \mathrm{Div}(F\tilde{K})$), so ist die oben definierte exakte Sequenz eine Sequenz von G_K-Moduln. Wenn wir in Betracht ziehen, daß $H^1(G_K, \langle D\rangle) = 0$ (Shapiros Lemma), erhalten wir die exakte Sequenz:

$$0 \to H^2(G_K, U(D)) \to \mathrm{Br}\, F \to H^2(G_K, \langle D\rangle). \tag{3. 1}$$

Also ist $\mathrm{Br}_0 F$ eine Untergruppe von $H^2(G_K, U(D))$. Definiert nun $\tilde{x} = x_{g,h}$ ein Element von $\mathrm{Br}_0 F$, so definiert $\tilde{a} = a_{g,h} = x_{g,h}(D)$ ein Element von $\mathrm{Br}\, K$.

Die Abbildung $(\tilde{x}, D) \to \tilde{a}$ ist bilinear in $\tilde{x}$ und D und verschwindet, falls D ein Hauptdivisor ist (siehe [38], **3.** Theorem 1.), also definiert sie eine Paarung

$$\phi_F : \mathrm{Br}_0 F \times \mathrm{Pic}(F) \to \mathrm{Br}\, K.$$

Sei nun Φ_F die zu ϕ_F assoziierte Abbildung

$$\Phi_F : \mathrm{Br}_0 F \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(F), \mathrm{Br}\, K).$$

(3. 2) Lemma. 1) *Für jede separable Erweiterung $L|K$ ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}\, F \times \mathrm{Pic}(F) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\, FL \times \mathrm{Pic}(FL) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{FL}} \\ \mathrm{Br}\, K & \longrightarrow & \mathrm{Br}\, L. \end{array}$$

2) *Wenn $\Phi_F(\tilde{x}) \neq 0$, dann existiert ein Primdivisor P von F mit den Eigenschaften:*

$$\phi_F(\tilde{x}, P) \neq 0, \quad \mathrm{d}(P) \leqq \mathrm{d}(F) + g_F.$$

3) *Sei $L|K$ eine Galoissche Erweiterung und $G = G(FL|F)$. Sei $\tilde{x} \in \mathrm{Br}_0 F$ darstellbar als 2-Kozyklus von G mit Werten in $(FL)^*$. Sei D ein Divisor von FL. Dann gibt es eine Darstellung $x_{g,h} \in H^2(G, (FL)^*)$ von $\tilde{x}$ so, daß die Funktionen $x_{g,h}$ keine Pol- und Nullstellen in D besitzen.*

Beweis. 1) folgt direkt aus den Definitionen.

Zu 2): Aus dem Riemann-Rochschen Satz folgt, daß $\mathrm{Pic}(F)$ erzeugt wird von den Primdivisoren P mit $\mathrm{d}(P) \leqq \mathrm{d}(F) + g_F$.

Zu 3): Man verwendet die obige Konstruktion und (3. 1) mit L anstelle von $\tilde{K}$. □

(3. 3) Definition. *Wir sagen, daß ein Körper K die Φ-Eigenschaft besitzt, wenn für alle regulären Funktionenkörper einer Variablen $F|K$ die Abbildung Φ_F injektiv ist.*

(3. 4) Theorem. *Die Klasse $\mathscr{C}_\Phi$ aller Körper, die die Φ-Eigenschaft besitzen, ist eine elementare Klasse.*[6]) *Speziell gilt: sind K und K' elementar äquivalent, und besitzt K die Φ-Eigenschaft, so besitzt auch K' die Φ-Eigenschaft.*

Beweis. Wir wollen ein Theorem von [10], Ch. 4. anwenden. Dafür benötigen wir die Lemmas (3. 5) und (3. 6).

(3. 5) Lemma. *Sei $(K^i)_{i \in I}$ eine Familie von Körpern, die die Φ-Eigenschaft besitzen, und sei $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf der Indexmenge. Dann besitzt das zugehörige Ultraprodukt $K = \prod_i K^i/\mathscr{U}$ die Φ-Eigenschaft. Also ist $\mathscr{C}_\Phi$ abgeschlossen bezüglich Ultraprodukten.*

---

[6]) siehe [10], Ch. 4, 4. 1 für die Definitionen.

Beweis. Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in die Theorie der Ultraprodukte von Funktionenkörpern. Die hier dargestellten Fakten sind für den Leser, der mit den nonstandard Methoden in der Theorie der Funktionenkörper vertraut ist, nicht neu (vgl. [29] oder [51] und weiter [15]). Wir beschränken uns hier auf das für unseren Zweck notwendige Minimum.

Sei $(K^i)_{i\in I}$ eine Familie von Körpern. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf der Indexmenge I, aber kein Hauptultrafilter. Wir sagen, daß eine Aussage lokal gilt, falls die Menge der Indizes i, für die die betreffende Aussage gilt, in $\mathcal{U}$ liegt. Sei $(c^i)_i$ eine Familie von reellen Zahlen. Wir sagen, daß c^i lokal beschränkt ist, wenn eine positive reelle Schranke $c>0$ existiert so, daß lokal $|c^i|\leqq c$ ist.

Sei $K=\prod_i K^i/\mathcal{U}$. Sei $\Psi(X_1,\ldots,X_n)\in K[X_1,\ldots,X_n]$ ein Polynom in n Unbestimmten. Sei $\Psi=(\Psi^i)/\mathcal{U}$ mit $\Psi^i(X_1,\ldots,X_n)\in K^i[X_1,\ldots,X_n]$. Dann gilt:

(1) Ψ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ lokal ist Ψ^i irreduzibel.

(2) Ψ ist absolut irreduzibel $\Leftrightarrow$ lokal ist Ψ^i absolut irreduzibel.

(3) Ψ ist separabel in X_k $\Leftrightarrow$ lokal ist Ψ^i separabel in X_k.

(4) Lokal ist $\mathrm{Grad}_{X_k}\Psi^i=\mathrm{Grad}_{X_k}\Psi$.

Sei ferner $\mathcal{P}$ ein Ideal von $K[X_1,\ldots,X_n]$, und sei $\{\Psi_k\}_{1\leqq k\leqq s}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}$. Sei $\Psi_k=(\Psi_k^i)/\mathcal{U}$ wie oben, und sei $\mathcal{P}^i$ das von $\{\Psi_k^i\}_k$ erzeugte Ideal von $K^i[X_1,\ldots,X_n]$. Bezeichne $V|K$ die von $\mathcal{P}$ definierte Mannigfaltigkeit, und sei $V^i|K^i$ entsprechend definiert. Dann gilt:

(5) $V|K$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ lokal ist $V^i|K^i$ irreduzibel.

(6) $V|K$ ist absolut irreduzibel $\Leftrightarrow$ lokal ist $V^i|K^i$ absolut irreduzibel.

Sei weiter $\mathcal{Q}$ ein Ideal von $K[X_1,\ldots,X_m]$, und entsprechend seien $\mathcal{Q}^i$ definiert. Bezeichne $W|K$ die von $\mathcal{Q}$ definierte Mannigfaltigkeit, und entsprechend $W^i|K^i$. Dann gilt:

(7) $V|K$ und $W|K$ sind (birational) isomorph über K $\Rightarrow$ lokal sind $V^i|K^i$ und $W^i|K^i$ (birational) isomorph über K^i.

Aus diesen Bemerkungen folgt: Sei $F=K(x_1,\ldots,x_n)$ ein (regulärer) Funktionenkörper über K und $\{\Psi_k\}_k\subseteqq K[X_1,\ldots,X_n]$ ein endliches Erzeugendensystem des Relationenideals $\mathcal{P}$ von $(x_1,\ldots,x_n)$. Definiere $\{\Psi_k^i\}_k$ und $\mathcal{P}^i$ wie oben. Nach dem Obengesagten ist $F^i=K^i(x_1^i,\ldots,x_n^i)$ lokal ein (regulärer) Funktionenkörper. Wir nennen $F^i|K^i$ lokale Repräsentanten von $F|K$. Sei $\{x_1,\ldots,x_t\}$ eine Transzendenzbasis von $F|K$, und bezeichne $F_0=K(x_1,\ldots,x_t)$. Dann ist lokal $\{x_1^i,\ldots,x_t^i\}$ eine Transzendenzbasis von $F^i|K^i$ und $F_0^i=K^i(x_1^i,\ldots,x_t^i)$ ist der rationale Funktionenkörper in t Variablen über K^i. Es gilt:

(8) Lokal ist $[F:F_0]=[F^i:F_0^i]$.

Setze nun $^*F=\prod_i F^i/\mathcal{U}$. Nach (7) hängt $^*F$ nur von $F|K$ ab, und nicht von den lokalen Repräsentanten $F^i|K^i$. Durch $x_k\mapsto(x_k^i)/\mathcal{U}$ erhalten wir eine K-Einbettung $F\hookrightarrow{}^*F$. Dadurch identifizieren wir $F|K$ mit dem K-Teilkörper von $^*F$, der von $\{^*x_k=(x_k^i)/\mathcal{U}\}_k$ erzeugt wird.

(9) Es ist $^*F = F\,{}^*F_0$ und $[{}^*F : {}^*F_0] = [F : F_0]$. Daher gilt:

F ist algebraisch abgeschlossen in $^*F$ [7]).

Sei nun $F|K$ ein Funktionenkörper einer Variablen. Dann ist lokal $F^i|K^i$ ein Funktionenkörper einer Variablen. Das folgende Lemma liefert eine Beschreibung von F innerhalb $^*F$:

(10) Lemma. 1) *Genau dann liegt $(u^i)/\mathcal{U}$ in F, wenn $\deg^{F^i} u^i$ lokal beschränkt ist. Also identifiziert sich F mit dem Teilkörper F_{fin} aller „beschränkten Funktionen" von $^*F$* [8]).

2) *Liegt $x = (x^i)/\mathcal{U}$ in F, so ist lokal $\deg^{F^i} x^i = \deg^F x$.*

3) *Die Einbettung $F \hookrightarrow {}^*F$ hängt von den lokalen Repräsentanten F^i und der Erzeugung $(x_1, \ldots, x_n)$ von $F|K$ nicht ab.*

Beweis. Es ist klar, daß $F \subseteq F_{\text{fin}}$. Für die Umkehrung reicht es nach (9) zu zeigen, daß $F_{\text{fin}}|F$ algebraisch ist. Wir zeigen:

Seien $x = (x^i)/\mathcal{U}$, $y = (y^i)/\mathcal{U}$ beschränkte nicht konstante Funktionen. Dann sind x und y algebraisch abhängig über K.

Da die Grade $\deg^{F^i} x^i$, $\deg^{F^i} y^i$ lokal beschränkt sind, existieren lokal irreduzible Polynome $\Psi^i(X, Y) \in K^i[X, Y]$ mit $\operatorname{Grad}_X \Psi^i$, $\operatorname{Grad}_Y \Psi^i$ lokal beschränkt und $\Psi^i(x^i, y^i) = 0$. Sei $\Psi = (\Psi^i)/\mathcal{U}$. Dann ist $\Psi(X, Y)$ ein irreduzibles Polynom in $K[X, Y]$, und $\Psi(x, y) = 0$.

Für 2) wendet man (9) an. □

Wir zeigen nun, wie man, lokal von Primdivisoren $P^i \in \mathbb{P}(F^i)$ ausgehend, unter bestimmten Voraussetzungen einen Primdivisor $P \in \mathbb{P}(F)$ konstruieren kann. Sei v^i die von P^i definierte Bewertung auf F^i. Sei $^*v = (v^i)/\mathcal{U}$ die induzierte Bewertung auf $^*F$, und sei v die Einschränkung von $^*v$ auf F. Dann ist v trivial auf K. Falls v nichttrivial ist, dann definiert sie einen eindeutig bestimmten Primdivisor $P \in \mathbb{P}(F)$. Bezeichnung: $P = (P^i)/\mathcal{U}$. Man hat:

(11) Lemma. *v ist genau dann nichttrivial, wenn lokal $\mathrm{d}(P^i)$ beschränkt ist.*

Beweis. „⇐" Sei $x = (x^i)/\mathcal{U}$ eine nicht konstante Funktion von F. Dann ist x^i lokal nicht konstant und hat lokal beschränkten Grad. Sei Q^i die Einschränkung von P^i auf $F_0^i = K(x^i)$. Bezeichne t^i die normierte Ortsuniformisierende von Q^i (d.h. $t^i = 1/x^i$, falls P^i ein Pol von x^i ist, und $t^i = q^i(x^i)$ mit $q^i(X) \in K^i[X]$ normiertem irreduziblem Polynom, sonst). Da $\mathrm{d}(P^i)$ lokal beschränkt ist und $\deg^{F_0^i} t^i = \mathrm{d}(Q^i) \leqq \mathrm{d}(P^i)$, so folgt: $\deg^{F_0^i} t^i$ ist lokal beschränkt, also liegt $t = (t^i)/\mathcal{U}$ in $F_0 \subseteq F$. Ferner ist $^*v(t) > 0$, also ist v nichttrivial. (Es gilt sogar: Sei Q die Einschränkung auf F_0 des von v definierten Primdivisors P von F. Dann ist t die normierte Ortsuniformisierende von Q.)

„⇒" Sei v nichttrivial, und sei $x = (x^i)/\mathcal{U} \in F$ mit $v(x) > 0$. Dann ist lokal $v^i(x^i) > 0$. Also ist lokal P^i eine Nullstelle von x^i, somit lokal $\deg^{F^i} x^i \geqq \mathrm{d}(P^i)$. Andererseits ist $\deg^{F^i} x^i$ lokal beschränkt. Daher ist auch $\mathrm{d}(P^i)$ lokal beschränkt. □

Wir setzen nun voraus, daß $F|K$ ein separabel erzeugter Funktionenkörper einer Variablen ist. Sei $F = K(x, y)$ und $\Psi(X, Y) \in K[X, Y]$ irreduzibel mit $\Psi(x, y) = 0$. Man setze $d = \operatorname{Grad}_X \Psi + \operatorname{Grad}_Y \Psi - 1$. Dann ist $\mathrm{d}(F) \leqq d$ und $g_F \leqq d(d-1)/2$ (vgl. z.B. [F-J],

---

[7]) Es gilt genauer folgendes: *$^*F_0$ und $\tilde{F}_0$ sind linear disjunkt über F_0.*

[8]) Ein Element $(x^i)/\mathcal{U} \in {}^*F$ nennen wir *beschränkte Funktion*, falls $\deg^{F^i} x^i$ lokal beschränkt ist. Offensichtlich bildet die Menge aller beschränkten Funktionen einen Teilkörper von $^*F$.

Ch. 4). Für die lokalen Repräsentanten F^i gilt daher lokal dasselbe, nämlich $g_{F^i} \leqq d(d-1)/2$ und $\mathrm{d}(F^i) \leqq d$ [9]). Daher haben wir:

(12) Lemma. *Sei $F|K$ ein separabel erzeugter Funktionenkörper einer Variablen. Dann existiert eine positive Zahl $d>0$ mit den Eigenschaften:*

1) $\mathrm{d}(F) \leqq d$ *und* $g_F \leqq d(d-1)/2$.

2) *Lokal ist* $\mathrm{d}(F^i) \leqq d$ *und* $g_{F^i} \leqq d(d-1)/2$.

Wir wollen nun mehr Informationen über die kanonische Abbildung

$$\iota : \mathrm{Br}\, F \longrightarrow \mathrm{Br}\, {}^*F.$$

Sei $\tilde{x} \in \mathrm{Br}\, F$, und sei $E|F$ eine endliche Galoissche Erweiterung von F so, daß $\tilde{x}$ als 2-Kozyklus von $G = G(E|F)$ mit Werten in E^* realisierbar ist. Sei daher $\tilde{x} = x_{g,h} \in H^2(G, E^*)$. Lokal existiert eine endliche Galoissche Erweiterung $E^i|F^i$ mit $G(E^i|F^i) \cong G$, und existieren 2-Kozyklen $x^i_{g,h} \in H^2(G, E^{i*})$ mit den Eigenschaften:

i) $x_{g,h} = (x^i_{g,h})/\mathcal{U}$, $g, h \in G$.

ii) $\deg^E x_{g,h} = \deg^{E^i} x^i_{g,h}$, $g, h \in G$.

Ist dabei $E|F$ eine Galoissche Konstantenerweiterung, so ist lokal auch $E^i|F^i$ eine endliche Galoissche Konstantenerweiterung.

Sei $\tilde{x}^i \in \mathrm{Br}\, F^i$ die von $x^i_{g,h}$ definierte Divisionsalgebra. Dann ist $\prod \tilde{x}^i/\mathcal{U}$ eine Divisionsalgebra ${}^*\tilde{x}$ über ${}^*F$, die gerade das Bild von $\tilde{x}$ in $\mathrm{Br}\, {}^*F$ repräsentiert. ${}^*\tilde{x}$ wird als 2-Kozyklus von G mit Werten in der multiplikativen Gruppe von ${}^*E$ von ${}^*x_{g,h} = (x_{g,h})/\mathcal{U}$ dargestellt. Wir zeigen:

(13) Lemma. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

1) *Die kanonische Abbildung ι ist injektiv, also können wir $\tilde{x}$ mit ${}^*\tilde{x}$ identifizieren für alle $\tilde{x} \in \mathrm{Br}\, F$.*

2) *Wenn $\tilde{x} \in \mathrm{Br}_0 F$, dann ist lokal $\tilde{x}^i \in \mathrm{Br}_0 F^i$.*

Beweis. Wir beweisen 1) nur im Falle der Charakteristik Null (genauer zeigen wir, daß die Einschränkung von ι auf den p'-Anteil von $\mathrm{Br}\, F$ injektiv ist, wobei $p = \mathrm{Char}\, F$ ist). Siehe (14) für den allgemeinen Fall.

Es gibt eine Galoissche Erweiterung so, daß $\tilde{x}$ eine Darstellung der Form $\tilde{x} = x_{g,h}$ besitzt mit $x_{g,h}$ Einheitswurzeln [10]). Dann sind lokal auch $x^i_{g,h}$ Einheitswurzeln. Angenommen $\tilde{x}^i$ sind lokal trivial, so existieren lokal Funktionen $y^i_g \in E^i$ mit $x^i_{g,h} = y^i_g y^{ig}_h / y^i_{gh}$. Bezeichne B^i_g den Divisor von y^i_g. Dann ist $B^i_g + gB^i_h - B^i_{gh} = 0$, also definiert B^i_g ein Element von $H^1(G, \mathrm{Div}(E^i)) = 0$ (Shapiros Lemma). Daher existiert $B^i \in \mathrm{Div}(E^i)$ mit $B^i_g = (g-1)B^i$. Sei $A^i \geqq 0$ ein G-invarianter Divisor von E^i. Nach dem Riemannschen Satz gibt es $t^i \in E^i$, $m \in \mathbb{N}$ und positives $C^i \in \mathrm{Div}(E^i)$ mit

$$B^i = mA^i - (t^i) + C^i, \quad \mathrm{d}(C^i) \leqq \mathrm{d}(A^i) + g_{E^i}.$$

---

[9]) Lokal ist sogar $\mathrm{d}(F) = \mathrm{d}(F^i)$ und $g_{F^i} = g_F$, und dies gilt sogar ohne die Voraussetzung, daß $F|K$ separabel erzeugt ist.

[10]) Sei n die Ordnung von $\tilde{x}$ in $\mathrm{Br}\, F$, und bezeichne μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Sind $\mathrm{Char}\, F$ und n teilerfremd, so ist die folgende Sequenz von G_F-Moduln exakt

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \tilde{F}^s \xrightarrow{\cdot^n} \tilde{F}^s \longrightarrow 1.$$

Daraus folgt nun unsere Aussage, indem man die lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen betrachtet.

Setze $t_g^i = y_g^i t^{i^{g-1}}$. Dann ist $x_{g,h}^i = t_g^i t_h^{i^g}/t_{gh}^i$. Ferner gilt $(t_g^i) = (g-1)C^i$, also ist $\deg^{E^i} t_g^i \leqq \mathrm{d}(A^i) + \boldsymbol{g}_{E^i}$.

Sei nun $D^i \geqq 0$ in $\mathrm{Div}(E^i)$ mit $\mathrm{d}(E^i) = \mathrm{d}(D^i)$. Bezeichne $A^i = \sum_g gD^i$. Dann ist A^i G-invariant, und es ist $\mathrm{d}(A^i) \leqq [E^i : F^i] \cdot \mathrm{d}(E^i)$.

Nach (12) existiert eine natürliche Zahl d so, daß lokal $\mathrm{d}(E^i) \leqq d$ und $\boldsymbol{g}_{E^i} \leqq d(d-1)/2$ ist. Ferner ist lokal $[E^i : F^i] = [E : F]$. Also ist lokal $\deg^{E^i} t_g^i \leqq d[E : F] + d(d-1)/2$. Nach (10) liegen $t_g = (t_g^i)/\mathcal{U}$ in E, und offensichtlich ist $x_{g,h} = t_g t_h^g / t_{gh}$. Daher ist $\tilde{x} = 0$ in $\mathrm{Br}\, F$.

Zu 2): Wir nehmen nun an, daß $E|F$ eine Konstantenerweiterung ist. Lokal ist dann $E^i|F^i$ Konstantenerweiterung. Lokal sei $P^i \in \mathrm{Supp}\{x_{g,h}^i\}_{g,h}$. Da $\deg^{E^i} x_{g,h}^i$ lokal beschränkt ist, so ist $\mathrm{d}(P^i)$ lokal beschränkt. Nach (11) definiert $(P^i)_i$ einen eindeutig bestimmten Primdivisor $P = (P^i)/\mathcal{U} \in \mathbb{P}(E)$.

Da $\tilde{x} \in \mathrm{Br}_0 F$, so existiert nach (3. 2) 3) eine Darstellung $x'_{g,h} \in H^2(G, E^*)$ von $\tilde{x}$ so, daß die Funktionen $x'_{g,h}$ keine Pol- und Nullstellen an P besitzen. Daher gilt lokal: $x'^i_{g,h}$ besitzen keine Pol- und Nullstellen an P^i. Also ist $\tilde{x}^i$ lokal nicht verzweigt an P^i. Andererseits ist lokal die Kardinalität von $\mathrm{Supp}\{x_{g,h}^i\}_{g,h}$ beschränkt, und $\tilde{x}^i$ ist unverzweigt außerhalb $\mathrm{Supp}\{x_{g,h}^i\}_{g,h}$. Lokal liegt also $\tilde{x}^i$ in $\mathrm{Br}_0 F^i$. □

(14) Bemerkung. Um (13) 1) allgemein zu beweisen, kann man das folgende Lemma anwenden:

Lemma. *Sei $F|K$ ein regulärer Funktionenkörper einer Variablen. Sei $E|F$ eine endliche Galoissche Konstantenerweiterung mit der Galoisgruppe G. Dann existieren nur von $m = [E : F]$, $\mathrm{d}(F)$ und $\boldsymbol{g}_F$ abhängende positive Schranken c, c' derart, daß für jeden trivialen 2-Kozyklus $x_{g,h}$ in $H^2(G, E^*)$ Elemente $y_g \in E^*$ existieren mit:*

$$x_{g,h} = y_g y_h^g / y_{gh}, \quad \deg^E y_g < c + c' \max_{g',h'} \deg^E x_{g',h'}, \qquad g, h \in G.$$

Nun zum Beweis von (3. 5): Sei $F|K$ ein regulärer Funktionenkörper. Sei $\tilde{x} \neq 0$ in $\mathrm{Br}_0 F$. Wir zeigen, daß $\Phi_F(\tilde{x}) \neq 0$. Sei $L|K$ endlich Galoissch so, daß $\tilde{x}$ durch einen 2-Kozyklus $x_{g,h}$ von $G = G(L|K)$ mit Werten in $E^* = (FL)^*$ darstellbar ist. Seien lokal $L^i|K^i$, $E^i = F^i L^i$ und $\tilde{x}^i = x_{g,h}^i$ wie im Beweis von (13) und d wie bei (12). Lokal liegt $\tilde{x}^i$ in $\mathrm{Br}_0 F^i$ und ist nichttrivial. Nach (3. 2) 2) existieren lokal Primdivisoren P^i von F^i mit:

$$\phi_{F^i}(\tilde{x}^i, P^i) = \tilde{a}^i \neq 0, \quad \mathrm{d}(P^i) \leqq \mathrm{d}(F^i) + \boldsymbol{g}_{F^i} \leqq d + d(d-1)/2.$$

Nun ist $F^i L^i$ ein Zerlegungskörper von $\tilde{x}^i$, also folgt aus (3. 2) 1), daß L^i ein Zerlegungskörper von $\tilde{a}^i$ ist. Daraus schließt man: $\tilde{a} = \prod \tilde{a}^i/\mathcal{U}$ definiert ein nichttriviales Element von $\mathrm{Br}\, K$.

Sei $P = (P^i)/\mathcal{U}$ der von $(P^i)_i$ definierte Primdivisor von F (siehe (11)). Nach (3. 2) 3) gibt es eine Darstellung $\{x_{g,h}\}_{g,h}$ von $\tilde{x}$ so, daß alle Funktionen $x_{g,h}$ keine Pol- und Nullstellen in $\langle P \rangle$ haben. Für diese Darstellung gilt lokal: $x_{g,h}^i$ hat keine Pol- und Nullstellen in $\langle P^i \rangle$, $g, h \in G$.

Direkt aus der Definition von ϕ_F folgt, daß $\phi_F(\tilde{x}, P) = \tilde{a}$ ist. Daher ist $\Phi_F(\tilde{x}) \neq 0$. □

(3. 6) Lemma. *Sei $L = K^I/\mathcal{U}$ eine Ultrapotenz von K und habe L die Φ-Eigenschaft. Dann besitzt auch K die Φ-Eigenschaft.*

Beweis. Sei $F|K$ ein regulärer Funktionenkörper einer Variablen, und bezeichne $E = FL$. Dann ist $E|L$ ein regulärer Funktionenkörper einer Variablen, und es existiert eine natürliche Einbettung $E \to F^I/\mathcal{U}$, definiert wie folgt: sei f in F nicht konstant, und sei $\{a_k\}_{k=1,\ldots,n}$ eine Basis von $F|K(f)$. Nun definiere $f \mapsto f^I/\mathcal{U}$ und $a_k \mapsto a_k^I/\mathcal{U}$. Es ist leicht zu verifizieren, daß die natürliche Abbildung $\mathrm{Br}\, F \to \mathrm{Br}\, E$ injektiv ist; dabei wird $\mathrm{Br}_0 F$ in $\mathrm{Br}_0 E$ abgebildet. Sei nun $\tilde{x} \neq 0$ in $\mathrm{Br}_0 F$ und $\tilde{x}_L$ das Bild von $\tilde{x}$ in $\mathrm{Br}\, E$. Da $\tilde{x}_L$ nichttrivial ist, existiert $P = (P^i)/\mathcal{U}$ in $\mathrm{Div}(E)$ mit $\phi_E(\tilde{x}_L, P) \neq 0$ in $\mathrm{Br}\, L$. Man kann voraussetzen, daß $\mathrm{d}(P^i) = \mathrm{d}(P)$ für alle i ist. Da $\phi_E(\tilde{x}_L, P) = (\phi_F(\tilde{x}, P^i))/\mathcal{U}$ ist, so folgt: es existiert i mit $\phi_F(\tilde{x}, P^i) \neq 0$. Daher ist Φ_F injektiv, also besitzt K die Φ-Eigenschaft. □

Beweis von (3. 4). Es ist bekannt, daß K und K' genau dann elementar äquivalent sind, wenn sie isomorphe Ultrapotenzen $K^I/\mathcal{U}$, $K'^{I'}/\mathcal{U}'$ zulassen. Nach (3. 5) und (3. 6) folgt daher, daß $\mathscr{C}_\Phi$ abgeschlossen ist bezüglich der elementaren Äquivalenz. Nun folgt (3. 4) aus Theorem 4. 1. 12, S. 173 von [10]. □

Nun das Hauptergebnis dieses Paragraphen:

(3. 7) Theorem. *Die p-adisch abgeschlossenen und die reell abgeschlossenen Körper besitzen die Φ-Eigenschaft.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur im Falle der p-adisch abgeschlossenen Körper (der Beweis für die reell abgeschlossenen Körper läuft nach demselben Schema; man benutzt das entsprechende Ergebnis von Witt [65] über den Körper der reellen Zahlen. Siehe auch Geyer [20]). Sei also K ein p-adisch abgeschlossener Körper. Nach (E. 5) gibt es einen (eindeutig bestimmten) klassischen p-adischen Körper $\boldsymbol{K}$, der zu K elementar äquivalent ist. Nach Lichtenbaum [38], **4.** Theorem 4. besitzen die klassischen p-adischen Körper die Φ-Eigenschaft (siehe auch Tate [60] und Roquette [53]). Nun wendet man (3. 4) an. □

Bemerkung. In [53] hat Roquette den Index eines Funktionenkörpers einer Variablen und die sogenannte *Index-Eigenschaft* eingeführt. Es geht um Folgendes: sei $F|K$ ein regulärer Funktionenkörper einer Variablen, und sei der *Index* $I(F)$ *von* F definiert durch

$$I(F) = \mathrm{g.g.T.}(\mathrm{d}(D) \mid D \in \mathrm{Div}(F)).$$

Roquette hat gezeigt, daß folgendes gilt:

$$\mathrm{Br}(F|K) \subseteqq \bigcap_{P \in \mathbb{P}(F)} \mathrm{Br}(FP|K) \subseteqq {}_{I(F)}\mathrm{Br}\, K,$$

wobei für eine beliebige Körpererweiterung $S|R$ mit $\mathrm{Br}(S|R)$ der Kern der natürlichen Abbildung $\mathrm{Br}\, R \to \mathrm{Br}\, S$ bezeichnet sei.

(3. 8) Definition. *Wir sagen, daß K die Index-Eigenschaft besitzt, wenn für jeden regulären Funktionenkörper einer Variablen F|K gilt:* $\mathrm{Br}(F|K) = {}_{I(F)}\mathrm{Br}\, K$.

Mit derselben Methode wie im Beweis von (3. 4) zeigt man:

(3. 9) Theorem. *Die Klasse $\mathscr{C}_I$ aller Körper, die die Index-Eigenschaft besitzen, ist eine elementare Klasse. Speziell gilt: sind K und K' elementar äquivalent, und besitzt K die Index-Eigenschaft, so besitzt auch K' die Index-Eigenschaft.*

Ohne Beweis geben wir noch an:

(3. 10) Theorem. *Sei K ein Körper, der die Φ-Eigenschaft besitzt. Dann besitzt K auch die Index-Eigenschaft.*

Wir schließen diesen Paragraphen mit

(3. 11) Fragen. 1) *Unter welchen zusätzlichen Bedingungen besitzt ein Henselscher Körper die Φ-Eigenschaft?*

2) *Dieselbe Frage mit „Index-Eigenschaft" statt „Φ-Eigenschaft".*

3) *Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Φ-Eigenschaft und der Index-Eigenschaft? Oder konkreter, sind sie für bestimmte Henselsche (und dann für welche) Körper äquivalent?*

§ 4. Lokal-Global-Prinzipien für die Brauergruppe

(4. 1) Theorem. *Sei K ein Körper, der die Φ-Eigenschaft besitzt. Dann ist für jeden regulären Funktionenkörper F|K die folgende natürliche Abbildung injektiv:*

$$\mathrm{Br}\, F \to \prod_{P \in \mathbb{P}(F)} \mathrm{Br}\, F_P,$$

wobei F_P die Komplettierung von F bezüglich v_P bezeichnet.

Beweis. Sei $j: \mathrm{Br}\, F = \mathrm{Br}(F\tilde{K}) \to H^2(G_K, \mathrm{Div}(F\tilde{K}))$ und $\mathrm{Br}_0 F = \ker j$. Für jedes $P \in \mathbb{P}(F)$ sei $P = \sum_{m=1}^{n} Q_m$ seine Zerlegung in $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$. Bezeichne $\langle P \rangle = \sum_m \mathbb{Z} Q_m$. Offensichtlich ist $\langle P \rangle$ ein G_K-Untermodul von $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$, und $\mathrm{Div}(F\tilde{K})$ ist die direkte Summe aller seiner Untermoduln der Form $\langle P \rangle$. Ferner wirkt G_K transitiv auf $(Q_m)_m$, und für den Stabilisator G_m von Q_m und den Fixkörper K_m von G_m in $\tilde{K}$ gilt: $F_m = FK_m$ ist der Zerlegungskörper von $Q_m|P$ in $F\tilde{K}$, G_m ist die Zerlegungsgruppe von $Q_m|P$ in G_K, und die Komplettierung E_m von F_m bezüglich der Q_m-adischen Bewertung v_m ist zur Komplettierung F_P von F bezüglich v_P isomorph. Ist E_m^t die maximale träge Erweiterung von E_m, und versieht man $\prod_m E_m^t$ mit der von G_1 koinduzierten G_K-Modulstruktur, so

sind $F\tilde{K} \otimes_F F_P$ und $\prod_m E_m^t$ isomorph als G_K-Moduln. Man hat das folgende kommutative Diagramm von G_K-Moduln:

$$\begin{array}{ccccc} & & (F\tilde{K})^* & \longrightarrow & \mathrm{Div}(F\tilde{K}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (F\tilde{K} \otimes_F F_P)^* & \longrightarrow & \langle P \rangle \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 \longrightarrow & \prod_m \mathcal{O}_m^* & \longrightarrow & \prod_m E_m^{t*} & \longrightarrow \langle P \rangle \end{array}$$

wobei $\mathcal{O}_m$ der Bewertungsring von E_m^t ist.

Es ist klar, daß $E_m^t v_m$ und $\tilde{K}_m$ isomorph als G_m-Moduln sind, also erhält man aus dem obigen Diagramm mit Hilfe von Shapiros Lemma und von (1. 5) das folgende kommutative Diagramm von Kohomologiegruppen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H^2(G_K, (F\tilde{K})^*) & \xrightarrow{j} & H^2(G_K, \mathrm{Div}(F\tilde{K})) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr} \\ & & & & H^2(G_K, (F\tilde{K} \otimes_F F_P)^*) & \xrightarrow{j_P} & H^2(G_K, \langle P \rangle) \\ & & & & \downarrow \iota & & \downarrow \mathrm{id} \\ 0 \longrightarrow & H^2(G_K, \prod_m \tilde{K}_m^*) & \longrightarrow & H^2(G_K, \prod_m E_m^{t*}) & \longrightarrow & H^2(G_K, \langle P \rangle) \\ & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' \\ 0 \longrightarrow & H^2(G_1, \tilde{K}_1^*) & \longrightarrow & H^2(G_1, E_1^{t*}) & \longrightarrow & H^2(G_1, \mathbb{Z}Q_1). \end{array}$$

Hierbei sind $\varphi', \varphi, \varphi''$ die aus Shapiros Lemma stammenden Isomorphismen, $\varphi\iota$ identifiziert $H^2(G_K, (F\tilde{K} \otimes_F F_P)^*)$ mit $H^2(G_1, E_1^{t*})$, und die letztere Gruppe ist in einer natürlichen Weise zu $\mathrm{Br}\, E_1$ und somit zu $\mathrm{Br}\, F_P$ isomorph. Sei nun $\tilde{x} \neq 0$ in $\mathrm{Br}\, F$.

Fall I. $j(\tilde{x}) \neq 0$. Dann existiert $P \in \mathbb{P}(F)$ mit $\mathrm{pr}(j(\tilde{x})) \neq 0$, also ist $\varphi''(\mathrm{pr}(j(\tilde{x})))$ nichttrivial in $H^2(G_1, \mathbb{Z}Q_1)$. Es gilt daher $\tilde{x} \otimes_F F_P \neq 0$.

Fall II. $j(\tilde{x}) = 0$, d.h. $\tilde{x} \in \mathrm{Br}_0 F$. Es sei $P \in \mathbb{P}(F)$. Es existiert eine Darstellung von $\tilde{x}$ als 2-Kozyklus $\tilde{x} = x_{g,h} \in H^2(G_K, (F\tilde{K})^*)$ derart, daß alle $x_{g,h}$ weder Null- noch Polstellen in $\langle P \rangle$ haben. Da $\varphi\iota$ ein Isomorphismus ist, folgt:

$$\tilde{x} \otimes_F F_P = 0 \Leftrightarrow \varphi\iota(\tilde{x} \otimes_F F_P) = 0 \Leftrightarrow \iota(\tilde{x} \otimes_F F_P) = 0.$$

Sei $\tilde{x} \otimes_F F_P = 0$. Dann definiert $\underline{x}_{g,h} = (x_{g,h}(Q_m))_m$ das triviale Element in $H^2(G_K, \prod_m \tilde{K}_m^*)$. Also existieren $\underline{a}_g = (a_{m,g})_m$ in $\prod_m K_m^*$ mit $\underline{x}_{g,h} = \underline{a}_g \underline{a}_h^g / \underline{a}_{gh}$. Sei nun $a_g = a_{1,g} \cdots a_{n,g}$. Dann gilt:

$$x_{g,h}(P) = \prod_m x_{g,h}(Q_m) = a_g a_h^g / a_{gh},$$

somit ist $\phi_F(\tilde{x}, P) = 0$. Da nun K die Φ-Eigenschaft hat, so gibt es ein $P \in \mathbb{P}(F)$ mit $\phi_F(\tilde{x}, P) \neq 0$; für dieses P ist also $\tilde{x} \otimes_F F_P \neq 0$. □

Wir wollen nun das Lokal-Global-Prinzip (4. 1) auf den Fall einer beliebigen regulären Körpererweiterung $L|K$ vom Transzendenzgrad 1, nicht notwendig endlich erzeugt, verallgemeinern. Äquivalent muß man die Abbildung

$$\operatorname{Br} L \to \prod_w \operatorname{Br} F_w^h$$

untersuchen, wobei w eine Menge von nichttrivialen Bewertungen von L durchläuft und L_w^h die Henselisierung von L bezüglich w bezeichnet. Hier tauchen schon große Unterschiede zu dem Funktionenkörperfall auf: läßt man nur Bewertungen zu, die trivial auf K sind, so kann $\operatorname{Br} L$ nichttrivial sein, obwohl $L_w^h = \tilde{L}$ für alle zugelassenen Bewertungen w ist.

(4. 2) Beispiel. Sei L die Henselisierung von $\mathbb{Q}_p(X)$, X eine Unbestimmte, bezüglich der funktionalen Bewertung $v(a_0 + \cdots + a_n X^n) = \min v_p(a_m)$. Dann ist (L, v) Henselsch, und es gilt: $vL = \mathbb{Z}$, $Lv = \mathbb{F}_p(X)$, und $\operatorname{Br} L$ ist nichttrivial. Ist nun w eine nichttriviale Bewertung von L, die trivial auf $\mathbb{Q}_p$ ist, so folgt: w ist einrangig, weil der Transzendenzgrad von $L|\mathbb{Q}_p$ gleich 1 ist. Für L_w^h folgt daher: L_w^h ist Henselsch bezüglich zweier nicht äquivalenter einrangiger Bewertungen, nämlich v und w. Daher ist L_w^h separabel, somit algebraisch abgeschlossen.

(4. 3) Theorem. *Sei (K, v) ein Henselscher Körper, und sei $L|K$ eine Erweiterung von Transzendenzgrad 1. Wenn alle in L enthaltenen endlichen Erweiterungen von K die Φ-Eigenschaft besitzen, dann ist*

$$\operatorname{Br} L \to \prod_w \operatorname{Br} L_w^h$$

injektiv, wobei w die Menge aller Fortsetzungen von v auf L durchläuft.

Beweis. Das wesentliche Beweishilfsmittel ist das folgende

(4. 4) Lemma. *Es sei (K, v) ein bewerteter Körper und $(L_i)_i$ eine aufsteigend filtrierte Familie von Körpern, die einen Oberkörper L_0 von K enthalten. Sei ferner $\tilde{x}$ ein nichttriviales Element von $\operatorname{Br} L_0$, und es gebe für jedes i eine Fortsetzung w_i von v auf L_i mit der Eigenschaft: $\tilde{x} \otimes_{L_0} (L_i)_{w_i}^h$ ist nichttrivial. Dann existiert eine Fortsetzung w von v auf $L = \bigcup_i L_i$ mit der Eigenschaft: $\tilde{x} \otimes_{L_0} L_w^h$ ist nichttrivial.*

Beweis. Wir geben hier einen mit nonstandard Methoden geführten Beweis (siehe [51] und [50]). Sei $^*L$ ein Enlargement für L. Für die Paare bewerteter Teilkörper (M, w) von L definieren wir die Relation:

$$\mathrm{R}(L_i, M) \Leftrightarrow (L_i \subseteq M \wedge w|_K = v \wedge \tilde{x} \otimes_{L_0} M_w^h \neq 0).$$

Aus der Hypothese von (4. 4) folgt: R ist konkurrent. Dem Saturiertheitsprinzip zufolge gilt: es existiert (M', w') in $^*L$ derart, daß $R(^*L_i, M')$ für alle i gilt. Insbesondere ist $L_i \subset {}^*L_i \subset M'$ für alle i, und somit $L = \bigcup_i L_i \subset M'$.

Sei w die Einschränkung von w' auf L. Da w' eine Fortsetzung von $^*v$ ist und die Einschränkung von $^*v$ auf K mit v übereinstimmt, so folgt: w ist eine Fortsetzung von v auf L. Ferner ist L_w^h in der *-Henselisierung von M' enthalten (die ihrerseits auch $(M')_{w'}^h$ enthält), also ist $\tilde{x} \otimes_{L_0} L_w^h$ nichttrivial. □

Beweis von (4. 3). L ist die Vereinigung aller in ihm enthaltenen Funktionenkörper $F|K$. Der Konstantenkörper eines solchen Funktionenkörpers ist endlich über K, nach der Hypothese besitzt er also die Φ-Eigenschaft. Sei nun $\tilde{x}$ ein nichttriviales Element von $\mathrm{Br}\, L$. Es existiert ein regulärer Funktionenkörper L_0 über K so, daß $\tilde{x}$ schon über L_0 realisierbar ist, d.h. es existiert $\tilde{x}_0$ in $\mathrm{Br}\, L_0$ so, daß $\tilde{x} = \tilde{x}_0 \otimes_{L_0} L$ ist. Ist nun F irgendein Funktionenkörper, der L_0 enthält, so ist das Bild $\tilde{x}_F$ von $\tilde{x}_0$ in $\mathrm{Br}\, F$ nichttrivial, also existiert nach (4. 1) ein Primdivisor P von F mit $\tilde{x}_F \otimes_F F_P$ nichttrivial. Da $F_{v_P}^h$ in F_P enthalten ist, folgt: das Bild von $\tilde{x}_F$ ist in $\mathrm{Br}\, F_{v_P}^h$ nichttrivial. Ist w_P die eindeutige Fortsetzung von v auf $Fv_P = FP$, so ist Fv_P Henselsch bezüglich w_P. Sei w_F die Verfeinerung von v_P durch w_P. Dann ist $F_{v_P}^h$ Henselsch bezüglich w_F. Um den Beweis zu beenden, wendet man (4. 4) an. □

Als Korollar erhalten wir:

(4. 5) Theorem. *Sei (K, v) ein p-adisch abgeschlossener Körper und $L|K$ eine Körpererweiterung vom Transzendenzgrad* 1. *Dann erfüllt die Brauergruppe von L das folgende Lokal-Global-Prinzip*:

$$\mathrm{Br}\, L \to \prod_w \mathrm{Br}\, L_w^h$$

ist injektiv, wobei w die Menge aller Fortsetzungen von v auf L durchläuft.

(4. 6) Korollar. *Seien K und L wie bei* (4. 5) *und gelte*:

i) *G_L ist auflösbar.*

ii) *Es existieren zwei Primzahlen $q' \neq q''$ mit* $\mathrm{cd}_{q'} G_K$, $\mathrm{cd}_{q''} G_K > 1$.[11])

Dann existiert eine Henselsche Fortsetzung von v auf L.

Beweis. Wir beginnen mit den folgenden Bemerkungen:

a) Sei $E|F$ eine Körpererweiterung vom Transzendenzgrad 1. Ist $\mathrm{cd}_q G_E > 1$, so hat G_F nichttriviale q-Sylowgruppen.

Der Beweis folgt aus dem Satz von Šafarevič und dem Satz von Tsen [59], II, 3 und II, 4.

b) Sei $(E, w)|(F, v)$ eine reguläre Erweiterung von Henselschen Körpern. Dann ist Fv separabel abgeschlossen in Ew, und für die Hauptteile gilt: $\underline{w}|_F \geqq \underline{v}$.

Der Beweis wird dem Leser überlassen.

---

[11]) Die Bedingung „*nicht beide* 2 *und* 3" ist hier nicht notwendig, weil K p-adisch abgeschlossen ist, siehe [19].

Nun zum Beweis von (4. 6): nach [59], II, 3. 1 existiert $L'|L$ endlich mit ${}_{q'}\mathrm{Br}\, L'$ nichttrivial. Nach (4. 5) existiert eine Fortsetzung w' von v auf L' so, daß die q'-Komponente der Brauergruppe von $M' = L'^{h}_{w'}$ nichttrivial ist. Daher sind die q'-Sylowgruppen von $G_{M'}$ nichttrivial. Nach a) gilt sogar: ist K' der relative algebraische Abschluß von K in M', so sind die q'-Sylowgruppen von $G_{K'}$ nichttrivial. Also ist K' nicht separabel abgeschlossen. Nach (1. 10) 1) folgt: ist v' die (eindeutige) Fortsetzung von v auf K', so ist $\underline{v}' = v$. Da $G_{K'}$ eine pro-q'-Gruppe ist, so ist auch $\underline{v}'_{q'} = v'$. Nach obigem b) gilt also: $\underline{w}'|_{K'} \geqq v'$, somit $\underline{w}'|_{K'} = v'$, weil v und somit auch v' maximale Bewertungen sind.

Dasselbe erhält man auch für q''. Nach (1. 13) folgt: $\underline{w}'$ und $\underline{w}''$ sind vergleichbar, und L ist Henselsch bezüglich $w = \min(\underline{w}', \underline{w}'')$. Andererseits ist w nach dem Obengesagten eine Fortsetzung von v. □

§ 5. Beweis der Kennzeichnungstheoreme (E.10) und (E.11)

Beweis von (E.10). Da G_K p-adisch ist, ist G_K auflösbar. Ferner ist $\mathrm{cd}_q(G_K) > 1$ für alle Primzahlen q. Nach (4. 6) existiert eine Henselsche Bewertung w auf K, die v' fortsetzt. Daher ist $\mathrm{Char}\, Kw = \mathrm{Char}\, K'v' = p' > 0$, also ist (E.9) anwendbar: K ist p-adisch abgeschlossen und $p' = p$. □

Beweis von (E.11). Wir beginnen mit dem folgenden

(5. 1) Lemma. *Sei $E|F$ eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

1) *Für jede separable algebraische Erweiterung $E'|E$ gilt:*

$$[E' \cap \tilde{F}^s : F] = [E' : E].$$

2) *Die natürliche Projektion $\mathrm{pr}_{EF} : G_E \to G_F$ ist ein Isomorphismus.*

3) *F ist in E relativ separabel abgeschlossen und $\tilde{E}^s = E\tilde{F}^s$.*

Der Beweis wird dem Leser überlassen. □

Wir kommen nun zum Beweis von (E.11). Wie im Beweis von (E.9) folgt $\mathrm{Char}\, K = 0$. Aus (5. 1) erhält man: $\mathrm{pr}_K : G_K \to G_{K^{\mathrm{abs}}} \subset G_{\mathbb{Q}}$ ist ein Isomorphismus, also ist $G_{K^{\mathrm{abs}}}$ eine p-adische Gruppe. Nach dem Neukirchschen Satz II. aus [40] ist K^{abs} p-adisch abgeschlossen. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas läßt sich ohne Mühe zeigen, daß in K maximale p-adisch abgeschlossene Teilkörper (K', v') mit der Eigenschaft: $K'^{\mathrm{abs}} = K^{\mathrm{abs}}$ existieren. Als nächstes bemerken wir, daß ein solches K' stets algebraisch abgeschlossen in K ist: nach (E.2) ist jede algebraische Erweiterung L' von K' von der Form $K'L'^{\mathrm{abs}}$. Aus $L' \subseteqq K$ folgt andererseits $L'^{\mathrm{abs}} \subseteqq K^{\mathrm{abs}} = K'^{\mathrm{abs}}$. Somit ist $L'^{\mathrm{abs}} = K'^{\mathrm{abs}}$, und daher ist K' algebraisch abgeschlossen in K. Nun zeigen wir, daß $K' = K$ ist: angenommen $K' \neq K$; sei x in $K \setminus K'$. Dann ist x nicht algebraisch über K', und es sei K'' der relative algebraische Abschluß von $K'(x)$ in K. Offenbar hat $K''|K'$ Transzendenzgrad 1, und die natürlichen Projektionen $G_K \to G_{K''} \to G_{K^{\mathrm{abs}}}$ sind Isomorphismen. Speziell ist $G_{K''}$ eine p-adische Gruppe. Nach (E.10) ist K'' p-adisch abgeschlossen. Offensichtlich ist $K''^{\mathrm{abs}} = K^{\mathrm{abs}}$, also haben wir der Maximalität von K' widersprochen. Daher ist K p-adisch abgeschlossen. □

Literaturverzeichnis

[1] *E. Artin, O. Schreier*, Eine Kennzeichnung der reell-abgeschlossenen Körper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 225—231.

[2] *E. Artin, O. Schreier*, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 85—99.

[3] *E. Artin, J. Tate*, Class field theory, Harvard 1961.

[4] *J. Ax*, Solving diophantine problems modulo every prime, Ann. of Math. **85** (1967), 161—183.

[5] *J. Ax*, A metamathematical approach to some problems in number theory, Proc. Symp. Pure Math. **20**, AMS (1971), 161—190.

[6] *J. Ax, S. Kochen*, Diophantine problems over local fields I, II, Amer. Journ. Math. **87** (1965), 605—630.

[7] *J. Ax, S. Kochen*, Diophantine problems over local fields III, Ann. of Math. **83** (1966), 437—456.

[8] *J.-L. Bell, A.-B. Slomson*, Models and ultraproducts: an introduction, Amsterdam 1969.

[9] *N. Bourbaki*, Algèbre commutative, Paris 1964.

[10] *C. C. Chang, H. J. Keisler*, Model Theory, Amsterdam-London 1973.

[11] *J. W. S. Cassels, A. Fröhlich*, Algebraic number theory, London 1967.

[12] *C. Chevalley*, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, AMS, New York 1951.

[13] *P. Cohen*, Decision procedures for real and p-adic fields, Comm. on Pure and Appl. Math. **22** (1969), 131—151.

[14] *S. Demuskin*, Die Gruppe der maximalen p-Erweiterung eines lokalen Körpers, (russisch) Dokl. Akad. Nauka UdSSR **128** (1959), 657—660.

[15] *L. van den Dries, K. Schmidt*, Bounds in the theory of polynomial rings over fields. A nonstandard approach, Invent. math. **76** (1984), 77—91.

[16] *M. Deuring*, Algebren, Ergebn. der Math. und ihrer Grenzgeb. **IV/1**, Berlin-Heidelberg-New York 1935.

[17] *O. Endler*, Valuation theory, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[18] *Yu. L. Ershov*, On elementary theory of local fields, Alg. u. Logika Sem. **4** no. 2 (1965), 5—30.

[19] *W. D. Geyer*, Unendliche algebraische Zahlkörper, über denen jede Gleichung auflösbar von beschränkter Stufe ist, J. of Number Theory **1** (1969), 346—374.

[20] *W. D. Geyer*, Dualität bei abelschen Varietäten über reell abgeschlossenen Körpern, J. reine angew. Math. **293/294** (1977), 26—66.

[21] *A. Grothendieck*, Le groupe de Brauer I, Algèbre d'Azumaya et interpretation diverses. Le groupe de Brauer III, Examples et compléments, in: Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Amsterdam 1968.

[22] *H. Hasse*, Zahlentheorie, Berlin 1963.

[23] *B. Heinemann*, On finite intersections of "Henselian valued" fields, manuscripta math. **52** (1985), 37—61.

[24] *K. Hensel*, Neue Grundlagen der Arithmetik, J. reine angew. Math. **127** (1902), 51—84.

[25] *A. V. Jakovlev*, Die Galoisgruppe des algebraischen Abschlusses eines lokalen Körpers (russisch), Izv. Akad. Nauka UdSSR **32** (1968), 1283—1322.

[26] *U. Jannsen, K. Wingberg*, Die Struktur der Absolutgaloisgruppe p-adischer Zahlkörper, Invent. math. **70** (1982), 70—98.

[27] *M. Jarden, J. Ritter*, On the characterisation of the local fields by their absolute Galois groups, J. of Number Th. **11** (1979), 1—13.

[28] *M. Jarden, P. Roquette*, The Nullstellensatz over p-adically closed fields, J. Math. Soc. Japan **32** (1980), 425—460.

[29] *E. Kani*, Nonstandard diophantine geometry, Dissertation, Heidelberg 1978.

[30] *H. Koch*, Die Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, Math. Monogr. **10**, Berlin 1970.

[31] *W. Krull*, Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine angew. Math. **167** (1931), 160—196.

[32] *I. Kaplansky*, Maximal fields with valuations I, Duke Math. J. **9** (1942), 303—321.

[33] *I. Kaplansky*, Maximal fields with valuations II, Duke Math. J. **12** (1945), 243—248.

[34] *S. Kochen*, Integer valued rational functions over the p-adic numbers: a p-adic analogue of the theory of real fields, in: Proc. of Symp. in Pure Math. **12**, Number Theory, AMS (1969), 57—73.

[35] *S. Kochen*, The Model Theory of Local Fields, Lect. Notes in Math. **499** (1975), 384—425.

[36] *F.-V. Kuhlmann, M. Pank, P. Roquette*, Immediate and purely wild extensions of valued fields, Manuscripta math. **55** (1986), 39—67.

[37] *S. Lang*, Introduction to algebraic geometry, New York-London 1958.

[38] *S. Lichtenbaum*, Duality theorems for curves over p-adic fields, Invent. math. **7** (1969), 120—136.

[39] *A. Macintyre*, On definable subsets of p-adic numbers, J. Symb. Logic **41** (1976), 605—610.

[40] *J. Neukirch*, Über eine algebraische Kennzeichnung der Henselkörper, J. reine angew. Math. **231** (1968), 75—81.

[41] *J. Neukirch*, Kennzeichnung der p-adischen und endlichen algebraischen Zahlkörper, Invent. math. **6** (1969), 269—314.
[42] *A. Ostrowski*, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Zeitschrift **39** (1934), 269—404.
[43] *A. Ostrowski*, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\phi(x)\,\phi(y) = \phi(xy)$, Acta Math. **41** (1917), 271—284.
[44] *K. Potthoff*, Einführung in die Modelltheorie und ihre Anwendungen, Darmstadt 1981.
[45] *A. Prestel*, Lectures on formally real fields, Monografias de matemática **22**, IMPA Rio de Janeiro 1975; oder: Lect. Notes in Math. **1093**, Berlin-Heidelberg-New York 1985.
[46] *A. Prestel, P. Roquette*, Formally p-adic fields, Lect. Notes in Math. **1050**, Berlin-Heidelberg-New York 1984.
[47] *P. Ribenboim*, Théorie des valuations, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1964.
[48] *L. Ribes*, Introduction to profinite groups and Galois cohomology, Queen's papers in pure and appl. Math. **24**, Kingston 1970.
[49] *J. Ritter*, p-adic fields having the same type of algebraic extensions, Math. Ann. **238** (1978), 281—288.
[50] *A. Robinson*, Complete Theories, Amsterdam 1956.
[51] *A. Robinson, P. Roquette*, On the finiteness theorem of Siegel und Mahler concerning diophantine equations, J. Number Theory **7** (1975), 121—176.
[52] *E. P. Robinson*, Affine schemes and p-adic geometry, Ph. D. Thesis, Cambridge 1983.
[53] *P. Roquette*, Splitting of algebras by functions of one variable, Nagoya Math. J. **27** (1966), 625—642.
[54] *P. Roquette*, p-adische und saturierte Körper, Neue Variationen zu einem alten Thema von Hasse, Mitteilungen Math. Ges. Hamburg **11** (1982), 25—45.
[55] *P. Roquette*, Some tendencies in contemporary algebra, in: Perspectives in Mathematics, Anniversary of Oberwolfach 1984, Basel 1984, 393—422.
[56] *G. E. Sacks*, Saturated Model Theory, Reading 1972.
[57] *O. F. G. Schilling*, The Theory of Valuations, AMS, New York 1950.
[58] *J. P. Serre*, Corps locaux, Paris 1968.
[59] *J. P. Serre*, Cohomologie Galoisienne, Lect. Notes in Math. **5**, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
[60] *J. Tate*, WC-groups over p-adic fields, Séminaire Bourbaki **156**, Paris 1957.
[61] *J. Tate*, Cohomology of abelian varieties over p-adic fields, Notes by S. Lang, Princeton Univ., May 1959.
[62] *B. van der Waerden*, Moderne Algebra, Berlin-Heidelberg-New York 1960.
[63] *A. Weil*, Basic Number Theory, Berlin-Heidelberg-New York 1967.
[64] *E. Witt*, Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern, J. reine angew. Math. **176** (1936), 153—156.
[65] *E. Witt*, Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate, Schiefkörper über reellen Funktionenkörpern, J. reine angew. Math. **171** (1934), 4—11.
[66] *O. Zariski, P. Samuel*, Commutative Algebra. II, New York-Heidelberg-Berlin 1960.

Mathematisches Institut der Universität, Im Neuenheimer Feld 288, D-6900 Heidelberg

Eingegangen 15. August 1987, in revidierter Fassung 23. März 1988