Werk

Titel: Über den Homotopietyp zweidimensionaler CW-Komplexe und Elementartransformationen...

Autor: Metzler, Wolfgang

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0285|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über den Homotopietyp zweidimensionaler CW-Komplexe und Elementartransformationen bei Darstellungen von Gruppen durch Erzeugende und definierende Relationen

Von *Wolfgang Metzler* in Frankfurt am Main

I. Fragestellungen und Resultate

Ist eine Gruppe π in der Form

$$\pi = \{a_1, \ldots, a_g; R_1(a_i), \ldots, R_h(a_i)\}\,, \tag{1}$$

d.h. durch die Erzeugenden a_i und die definierenden Relationen R_j gegeben, so kann man dieser Darstellung bekanntlich einen zusammenhängenden, zweidimensionalen CW-Komplex K mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(K) \approx \pi$ zuordnen, indem man an eine Nullzelle für jede Erzeugende a_i eine 1-Zelle anhängt und jeder definierenden Relation R_j eine 2-Zelle entsprechen läßt, die gemäß dem durch R_j gegebenen Wort semilinear in das 1-Gerüst eingeklebt wird. (In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Darstellungen mit endlichvielen a_i und R_j und — entsprechend — endliche, zusammenhängende Komplexe.)

(2) Ist umgekehrt ein endlicher, zusammenhängender, zweidimensionaler CW-Komplex K gegeben, so können wir in seinem 1-Gerüst einen maximalen Baum zusammenziehen und anschließend die Klebeabbildungen der 2-Zellen innerhalb ihrer Homotopieklassen so normalisieren, daß der modifizierte Komplex K', der zu K homotop-äquivalent ist ($K' \simeq K$) in der oben geschilderten Weise aus einer Darstellung seiner Fundamentalgruppe hervorgeht.

Die R_j erzeugen in der von den a_i erzeugten freien Gruppe denselben Normalteiler wie diejenigen Relationen, die aus ihnen durch eine endliche Folge der Elementaroperationen

(A) $R_j \to w \cdot R_j \cdot w^{-1}$ für ein j und ein Wort w in den a_i *(Konjugation)*,

(B) $R_j \to R_j^{-1}$ für ein j *(Inversion)*,

(C) $R_j \to R_j \cdot R_k$ für $k \neq j$ *(Anmultiplizieren von rechts)* (Die von R_j verschiedenen Relationen bleiben jeweils ungeändert.)

hervorgehen. In Anlehnung an Rapaport [7] möge eine solche endliche Folge eine *Q-Transformation*[1]) der Beschreibung (1) heißen. Von einer *Q*-Transformation* wollen wir sprechen, wenn als Elementaroperationen noch zusätzlich *freie (= Nielson-) Transformationen der Erzeugenden* zugelassen sind, d. h. in den Relationen die Erzeugende a_i durch (D) a_i^{-1} bzw. (E) $a_i a_j$ für $i \neq j$ ersetzt werden darf[2]). (Die von a_i verschiedenen Erzeugenden bleiben jeweils ungeändert.) Für *Q**-Transformationen* lassen wir ferner zu, daß (F) eine neue Erzeugende a und eine neue Relation $R = a$ eingeführt werden dürfen *(Verlängern)* und, falls möglich, der dazu inverse Prozeß vorgenommen werden darf.

Es war bis jetzt ungeklärt, ob zwei Beschreibungen des Typs (1) einer Gruppe π (bzw. isomorpher Gruppen π und π') mit gleichem g, h immer durch eine Q^*- oder bei übereinstimmender Differenz $h-g$ immer durch eine Q^{**}-Transformation ineinander übergeführt werden können, bzw., ob dies bei zwei Systemen $R_j(a_i)$ und $R'_j(a_i)$, $j = 1, \ldots, h$, die in der von $a_1, \ldots, a_g$ erzeugten freien Gruppe denselben Normalteiler erzeugen, bereits durch eine Q-Transformation möglich ist (s. Magnus [5], S. 164, Rapaport [7] und Wall [10], S. 352). Diese Fragen werden u. a. in der vorliegenden Arbeit negativ beantwortet.

(3) Entscheidend ist dabei die Beobachtung, daß die den Elementaroperationen (A) ... (F) entsprechenden Abänderungen der zugeordneten zweidimensionalen Komplexe sich durch eine endliche Folge elementarer Erweiterungen und Kontraktionen (der Dimension $\leqq 3$) im Sinne der Whiteheadschen Theorie des einfachen Homotopietyps gewinnen lassen (vgl. Wall [10]), daß also $Q^{(*)(*)}$-äquivalenten Gruppenbeschreibungen Komplexe desselben Homotopietyps entsprechen (s. u. (29)).

Wir untersuchen daher, wann zwei zusammenhängende, endliche, zweidimensionale CW-Komplexe K, K' mit $\pi_1(K) \approx \pi_1(K')$ und gleicher Eulerscher Charakteristik $\chi(K) = \chi(K')$ denselben Homotopietyp haben.

Dies ist z. B. der Fall, wenn K und K' keine 2-Zellen enthalten. Auf Grund einer Folgerung aus dem Freiheitssatz (Magnus [5]) gilt auch im Falle $\pi_1(K) = \{a_1, \ldots, a_g; R(a_i)\}$, $\pi_1(K') = \{a_1, \ldots, a_g; R'(a_i)\}$, wenn also K und K' je genau eine 2-Zelle besitzen und wenn ferner der π_1-Isomorphismus durch die Identität in den a_i gegeben ist, daß $R' = w \cdot R^{\pm 1} \cdot w^{-1}$, also insbesondere $K \simeq K'$ erfüllt ist.

Die Hauptresultate dieser Arbeit lauten:

Satz 1. *Haben zwei zusammenhängende, endliche, zweidimensionale CW-Komplexe K, K' isomorphe zyklische Fundamentalgruppen $\pi_1(K) \approx \pi_1(K') \approx \left\{\begin{matrix} Z_m \text{ oder} \\ Z \end{matrix}\right\}$ und dieselbe Eulersche Charakteristik $\chi(K) = \chi(K')$, so gibt es zu jedem vorgegebenen Isomorphismus $\pi_1(K) \to \pi_1(K')$ eine Homotopieäquivalenz $K \to K'$, die diesen Isomorphismus induziert*[3]).

Ob sich dieses Ergebnis zu Sätzen über $Q^{(*)(*)}$-Äquivalenz von $Z_{(m)}$-Gruppenbeschreibungen verschärfen läßt, bleibt offen. Bei komplizierteren endlichen abelschen Gruppen treten bei gleicher Eulerscher Charakteristik jedoch bereits verschiedene Homotopietypen auf. Es gilt nämlich

---

[1]) Sie enthalten insbesondere das *Einsetzen* einer Relation in eine andere vermöge $(R_j, R_k = S \cdot T) \xrightarrow{(A)} (R_j, T \cdot S) \xrightarrow{(C)} (R_j, T \cdot S \cdot R_j) \xrightarrow{(A)} (R_j, S \cdot R_j \cdot T)$ und die *Vertauschung* zweier Relationen vermöge $(R_j, R_k) \xrightarrow{(C)} (R_j \cdot R_k, R_k) \xrightarrow{(B)} (R_k^{-1} \cdot R_j^{-1}, R_k) \xrightarrow{(C)} (R_k^{-1} \cdot R_j^{-1}, R_j^{-1}) \xrightarrow{(B)} (R_k^{-1} \cdot R_j^{-1}, R_j) \xrightarrow{(C)} (R_k^{-1}, R_j) \xrightarrow{(B)} (R_k, R_j)$.

[2]) Vermöge $(a_i, a_j) \xrightarrow{(D)(D)} (a_i^{-1}, a_j^{-1}) \xrightarrow{(E)} ((a_i a_j)^{-1}, a_j^{-1}) \xrightarrow{(D)(D)} (a_j a_i, a_j)$ läßt sich das *Anmultiplizieren von links* und vermöge $(a_i, a_j) \xrightarrow{(D)} (a_i^{-1}, a_j) \xrightarrow{(E)} (a_j^{-1} \cdot a_i^{-1}, a_j) \xrightarrow{(D)} (a_j a_i^{-1}, a_j^{-1}) \xrightarrow{(E)} (a_j, a_i^{-1} \cdot a_j^{-1}) \xrightarrow{(D)} (a_j, a_i a_j^{-1}) \xrightarrow{(E)} (a_j, a_i)$ auch die *Vertauschung* zweier Erzeugender gewinnen.

[3]) Dyer und Sieradski haben in [2] kürzlich bezüglich Z_m dasselbe Resultat unabhängig von der vorliegenden Untersuchung erhalten.

Satz 2. *Die zu der Gruppe* $Z_{e_1} \times \ldots \times Z_{e_g}$ *mit einer Teilerkette* $1 \neq e_1 | \ldots | e_g$, $g \geqq 2$ *gehörigen Gruppenbeschreibungen*

$$\{a_1, \ldots, a_g; a_1^{e_1}, \ldots, a_g^{e_g}, a_i^{x_{ij}^{(\prime)}} \cdot a_j^{y_{ij}^{(\prime)}} \cdot a_i^{-x_{ij}^{(\prime)}} \cdot a_j^{-y_{ij}^{(\prime)}} = [a_i^{x_{ij}^{(\prime)}}, a_j^{y_{ij}^{(\prime)}}],\ i<j\}$$

mit $h = g + \binom{g}{2}$ *definierenden Relationen, wobei die* $x_{ij}^{(\prime)}$ *zur Ordnung* e_i *von* a_i *und die* $y_{ij}^{(\prime)}$ *zur Ordnung* e_j *von* a_j *relativ prim sind*[4]*), bestimmen höchstens dann Komplexe* K, K' *desselben Homotopietyps, wenn*

$$\prod x'_{ij} y'_{ij} \equiv \pm k^{g-1} \cdot \prod x_{ij} y_{ij} \bmod e_1 \tag{4}$$

für ein geeignetes k *gilt.*

Insbesondere sind die Gruppenbeschreibungen höchstens dann Q^{**}*-äquivalent.*

Wie also die Fälle zeigen, bei denen alle $x_{ij}^{(\prime)}$, $y_{ij}^{(\prime)}$ außer evtl. $y_{12}^{(\prime)}$ den Wert 1 annehmen, gibt es mindestens soviele paarweise verschiedene Homotopietypen, wie die aus den Elementen $\pm k^{g-1}$ in der multiplikativen primen Restklassengruppe mod e_1 bestehende Untergruppe Restklassen besitzt. Beispielsweise entstehen aus den Beschreibungen

$$\begin{aligned} &\{a, b, c; a^5, b^5, c^5, [a, b], [a, c], [b, c]\} \quad \text{und} \\ &\{a, b, c; a^5, b^5, c^5, [a, b^2], [a, c], [b, c]\} \end{aligned} \tag{5}$$

von $Z_5 \times Z_5 \times Z_5$ Komplexe von verschiedenem Homotopietyp, denn es gibt kein k mit $2 \equiv \pm k^2 \cdot 1 \bmod 5$. Insbesondere gehören solche Gruppenbeschreibungen zu verschiedenen Q^{**}-Äquivalenzklassen.

Satz 3. *Für* Q*- und* Q^**-Äquivalenz ist unter den Bedingungen von Satz 2 statt* (4) *sogar schärfer*

$$\prod x'_{ij} y'_{ij} \equiv \pm \prod x_{ij} y_{ij} \bmod e_1 \tag{6}$$

notwendig.

Die Fälle, bei denen nur $y_{12}^{(\prime)}$ einen von 1 verschiedenen Wert annehmen darf, zeigen dann, daß es mindestens soviele paarweise verschiedene $Q^{(*)}$-Äquivalenzklassen wie bezüglich Multiplikation mit ± 1 nichtzusammenfallende prime Restklassen mod e_1 gibt, also ab $e_1 \geqq 3$: $\varphi(e_1)/2$. Beispielsweise sind die Beschreibungen

$$\{a, b; a^5, b^5, [a, b]\} \quad \text{und} \quad \{a, b; a^5, b^5, [a, b^2]\} \tag{7}$$

von $Z_5 \times Z_5$ nicht $Q^{(*)}$-äquivalent. Sie sind jedoch Q^{**}-äquivalent — die zugeordneten Komplexe also insbesondere von gleichem Homotopietyp —, wie die folgenden Transformationen zeigen. In der ersten Beschreibung führen wir durch Verlängern und anschließende freie Transformation die Erzeugende c mit der Relation $c \cdot b^2$ ein. Bei den definierenden Relationen erhalten wir dann durch Q-Transformationen:

$$a^5, \overbrace{b^5, [a, b]}, \overbrace{cb^2} \to a^5, \overbrace{b^5, [a, c^2]}, cb^2 \to a^5, \overbrace{bc^{-2}, [a, c^2]}, cb^2 \to a^5, bc^{-2}, [a, c^2], c^5\,;$$

hier lassen sich b und die zweite Relation eliminieren[5]). Die Beispiele (7) zeigen also, daß $Q^{(*)}$- und Q^{**}-Äquivalenz i. allg. nicht zusammenfallen.

---

[4]) Beide Relationensysteme erzeugen genau dann in der von den a_i erzeugten freien Gruppe denselben, zu $\prod Z_{e_i}$ gehörigen Normalverteiler.

[5]) Wer will, möge nachprüfen, daß sich der Buchstabe c mittels Q^{**}-Transformationen dann wieder durch b ersetzen läßt.

Bei Satz 2 und Satz 3 ist nicht nur die Anzahl der Erzeugenden minimal, sondern gemäß der Überlegung von Reidemeister [8] auch die Anzahl $h = g + \binom{g}{2}$ der definierenden Relationen sowie die Eulersche Charakteristik.

Wenn man bei Gruppenbeschreibungen außer Q^{**}-Transformationen erlaubt, die definierenden Relationen um Folgerelationen zu vermehren und — wenn möglich — zu vermindern, sind nach dem Satz von Tietze bekanntlich alle Beschreibungen einer Gruppe äquivalent. Die zwei von ihnen zugeordneten Komplexe werden also homotopieäquivalent, wenn bei beiden an den Basispunkt eine geeignete Anzahl zusätzlicher 2-Zellen angeklebt wird. Aus Satz 2 ergeben sich daher Beispiele für zweidimensionale CW-Komplexe mit

$$K \vee S^2 \simeq K' \vee S^2, \text{ aber } K \not\simeq K' ; \tag{8}$$

z. B. können für K und K' die zu den Beschreibungen (5) gehörigen Komplexe genommen werden.

Die im folgenden Abschnitt angegebenen Beweise der Sätze 1 bis 3 benutzen als Haupthilfsmittel Reidemeisters Homotopiekettenring eines CW-Komplexes, wobei sich die Beweisideen von Satz 2 und Satz 3 selbstverständlich auch zur analogen Untersuchung anderer Gruppen als endlicher abelscher verwenden lassen. Diese sind nur besonders einfache Beispiele, bei denen die betreffenden Phänomene auftreten.

Für die Resultate der Sätze 2 und 3 über $Q^{(*)(*)}$-Äquivalenz von Gruppenbeschreibungen erscheint es wünschenswert, auch rein algebraische Beweise ohne den Zwischenschritt über Homotopiebetrachtungen zu erhalten. In Teil c) des folgenden Abschnitts wird deshalb angegeben, wie dies mit Hilfe der von Fox in [3] angegebenen Algebraisierung des Homotopiekettenrings durch den „Free Differential Calculus" möglich ist.

Im dritten Abschnitt gebe ich ein Problem aus der Theorie zweidimensionaler CW-Komplexe resp. Gruppenbeschreibungen an, das m. E. einen wichtigen Schritt algebraisiert, der bei der Behandlung der Frage auftritt, welche Elemente von $\mathrm{Wh}(\pi)$ durch 4-dimensionale h-Cobordismen realisiert werden können.

II. Beweise und Anmerkungen

a) Zum *Beweis von Satz 1* werden wir eine Abbildung $f: K \to K'$ konstruieren, die in π_1 den vorgeschriebenen Isomorphismus induziert und einen Isomorphismus $H_2(\tilde{K}) \to H_2(\tilde{K}')$ in der Homologie der universellen Überlagerungen. Da K und K' zweidimensionale CW-Komplexe sind, ist f dann nämlich eine Homotopieäquivalenz.

K und K' mögen innerhalb ihres Homotopietyps (s. (3)) durch folgende Schritte modifiziert werden:

(i) Normalisieren gemäß (2), so daß wir zwei Darstellungen

$$\{a_1, \ldots, a_g;\ R_1(a_1, \ldots, a_g), \ldots, R_h(a_1, \ldots, a_g)\}\ ,$$

$$\{a_1, \ldots, a_{g'};\ R'_1(a_1, \ldots, a_{g'}), \ldots, R'_{h'}(a_1, \ldots, a_{g'})\}$$

von Z_m resp. Z erhalten.

(ii) Durch Verlängern und freie Transformationen der Erzeugenden können wir erreichen, daß $g = g'$ gilt und der vorgeschriebene π_1-Isomorphismus durch die identische Zuordnung $a_i \to a_i$ der Erzeugenden entsteht. Aus der vorausgesetzten Gleichheit von

$\chi(K)=1-g+h$ und $\chi(K')=1-g+h'$ folgt dann auch $h=h'$. Im Falle Z_m gilt $h\geqq g$, im Falle Z: $h+1\geqq g$.

(iii) Durch weitere freie Transformationen der Erzeugenden erreichen wir, daß a_1 die Gruppe π_1 erzeugt und die übrigen a_i in π_1 den Wert 1 annehmen.

Gesucht ist dann eine Abbildung f von K mit $\{a_i, R_j(a_i)\}$ nach K' mit $\{a_i, R'_j(a_i)\}$, $i=1,\ldots,g, j=1,\ldots,h$, welche die identische Abbildung zwischen den 1-Gerüsten fortsetzt und in H_2 der universellen Überlagerungen einen Isomorphismus induziert.

$\tilde{a}_i$, $\tilde{R}_j^{(')}$ seien Fundamentalsysteme ein- bzw. zweidimensionaler Zellen von $\tilde{K}^{(')}$; die Homotopieränder $\partial\tilde{R}_j^{(')}=\alpha_{j1}^{(')}\tilde{a}_1+\cdots+\alpha_{jg}^{(')}\tilde{a}_g$ ergeben die Berandungsmatrizen

$$A^{(')}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{(')},\ldots,\alpha_{1g}^{(')}\\ \vdots\qquad\quad\vdots\\ \alpha_{h1}^{(')},\ldots,\alpha_{hg}^{(')}\end{pmatrix}$$

mit Elementen aus dem Gruppenring $Z(\pi_1)$. Zu jeder zulässigen Abbildung f: $K\to K'$ (d.h. einer solchen, die das 1-Gerüst punktweise festhält,) gehört eine $Z(\pi_1)$-Matrix

$$F=\begin{pmatrix}\varphi_{11},\ldots,\varphi_{1h}\\ \vdots\qquad\quad\vdots\\ \varphi_{h1},\ldots,\varphi_{hh}\end{pmatrix}\quad\text{mit}$$

$$A=F\cdot A', \tag{9}$$

welche die Kettenabbildung $C_2(\tilde{K})\xrightarrow{\tilde{f}_\cdot} C_2(\tilde{K}')$ beschreibt. Zulässige Abbildungen gibt es, da die R_j Folgerelationen der R'_j sind, der Randweg von R_j also in K' zusammenziehbar ist. Da auch die R'_j Folgerelationen der R_j sind, gilt analog zu (9) mit einer $Z(\pi_1)$-Matrix F':

$$A'=F'\cdot A \tag{10}$$

(9) und (10) besagen, daß

(11) A und A' *wechselseitig linksteilbar* sind.

Ist umgekehrt eine $Z(\pi_1)$-Matrix F gegeben, die (9) erfüllt, so gibt es ein zulässiges f, dessen Kettenabbildung $C_2(\tilde{K})\xrightarrow{\tilde{f}_\cdot} C_2(\tilde{K}')$ die Matrix F beschreibt: ist nämlich f^* irgendeine zulässige Abbildung, so unterscheiden sich $\tilde{f}^*(\tilde{R}_j)$ und das durch F in $C_2(\tilde{K}')$ bestimmte Bild von $\tilde{R}_j$ um einen Zyklus. Dieser ist wegen $\pi_1(\tilde{K}')=0$ sphärisch, weshalb $\tilde{f}^*$ im Inneren von $\tilde{R}_j$ so abgeändert werden kann, daß eine stetige Abbildung von $\tilde{R}_j$ nach $\tilde{K}'$ entsteht, die in $C_2(\tilde{K}')$ das durch F vorgeschriebene Bild hat. Erklärt man für die nicht zum Fundamentalbereich von $\tilde{K}$ gehörenden 2-Zellen die Abbildung äquivariant, entsteht das gewünschte zulässige $\tilde{f}^{(*)}$.

Ist F bei (9) invertierbar (in unserem Fall abelscher Fundamentalgruppen also *unimodular*, d.h. Det F eine Einheit von $Z(\pi_1)$), so induziert ein dazugehöriges zulässiges f einen Isomorphismus $H_2(\tilde{K})\to H_2(\tilde{K}')$, ist also eine Homotopieäquivalenz. Es reicht daher zu zeigen, daß aus der Voraussetzung (11) in unserem Fall die Existenz einer solchen invertierbaren Matrix F folgt, daß also A und A' *linksäquivalent* sind.

Weiter können wir uns wegen (i)...(iii) darauf beschränken, daß die Relationen von K' die Normalgestalt

$$R'_1=a_1^m,\ R'_2=a_2,\ldots,\ R'_g=a_g,\ R'_j=1\ \text{für}\ j>g \tag{12}$$

im Falle $\pi_1 \approx Z_m$ haben und im Falle $\pi_1 \approx Z$ die Form

$$R_1' = a_2, \ldots, R_{g-1}' = a_g, R_j' = 1 \text{ für } j \geqq g,$$

denn der allgemeine Fall ergibt sich daraus durch Komposition zweier Homotopieäquivalenzen. Wir haben also die rein algebraische Aufgabe erhalten,

(13) aus der wechselseitigen Linksteilbarkeit der $Z(\pi_1)$-Matrix A und der zu (12) gehörigen 2. Homotopieberandungsmatrix mit h Zeilen und g Spalten

$A' = \begin{pmatrix} \sum & 0 \\ 0 & E_{g-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\sum = 1 + a_1 + \cdots + a_1^{m-1} \in Z(\pi_1)$, wobei 0 stets eine passende Nullmatrix, Nullspalte, Nullzeile bedeutet und E_{g-1} die $(g-1)$-reihige Einheitsmatrix ist, im Falle $\pi_1 \approx Z_m$, bzw.

$A' = \begin{pmatrix} 0 & E_{g-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ im Falle $\pi_1 \approx Z$, die Linksäquivalenz von A und A' zu folgern.

In den folgenden zwei Hilfssätzen werden hierfür Hilfsmittel über die Linksäquivalenz gewisser $Z(\pi_1)$-Matrizen zusammengestellt:

Hilfssatz 1. *Sei π eine endliche abelsche Gruppe oder isomorph zu Z, $\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{h1} \end{pmatrix}$ mit $h \geqq 2$ eine unimodulare Spalte mit Elementen aus $Z(\pi)$, d.h. $1 = u_1\beta_{11} + \cdots + u_h\beta_{h1}$ für gewisse $u_j \in Z(\pi)$. Dann läßt sich die Spalte zu einer unimodularen $Z(\pi)$-Matrix $\begin{pmatrix} \beta_{11}, \ldots, \beta_{1h} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \beta_{h1}, \ldots, \beta_{hh} \end{pmatrix}$ ergänzen.*

Beweis. Wir werden eine Ergänzung mit Det $= 1$ angeben; durch Multiplikation einer der hinzugefügten Spalten kann dann jede andere $Z(\pi)$-Einheit als Determinante erreicht werden.

1. Fall. π ist endlich abelsch. Der Gruppenring $Q(\pi)$ mit rationalen Koeffizienten ist zu einem endlichen direkten Produkt $\prod_{i=1}^{l} K_{m_i}$ von Kreiskörpern isomorph, wobei

(14) $Z(\pi) \subset Q(\pi)$ bei jeder Projektion $\prod K_{m_i} \to K_{m_i}$ auf die ganzen Zahlen $\mathcal{O}_{m_i}$ von K_{m_i} abgebildet wird,

da die m_i-ten Einheitswurzeln eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_{m_i}$ bilden.

Für jeden der algebraischen Zahlkörper K_{m_i} gilt mit $\mathcal{O}_{m_i}$ statt $Z(\pi)$ die zu diesem Hilfssatz analoge Behauptung (s. z.B. Steinitz [9] oder Franz [4]); daraus folgern wir sie für $Z(\pi)$ induktiv durch Kongruenzbetrachtungen:

Eine Ergänzung bezüglich $\mathcal{O}_{m_i}$ kann wegen (14) durch eine $Z(\pi)$-Matrix repräsentiert werden. Sei daher

$$V = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{h1} & \cdots & \beta_{hh} \end{pmatrix}$$

eine $Z(\pi)$-Ergänzung, die bereits in $K_{m_1}, \ldots, K_{m_i}$, $i < l$ die Determinante 1 hat.

$$W=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1h}\\ \vdots & & & \vdots\\ \beta_{h1} & \gamma_{h2} & \cdots & \gamma_{hh}\end{pmatrix}$$

sei eine Ergänzung in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$ mit Determinante 1, so daß

(15) $W^{-1}\cdot V$ in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$ die Gestalt $\begin{pmatrix}1 & \delta\\ 0 & X\end{pmatrix}$ hat, mit $\delta = (\delta_{12}\ \ldots\ \delta_{1h})$.

Nun betrachten wir in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$ die Bilder der Elemente von $Z(\pi)$, die bei den Projektionen nach $K_{m_1},\ldots,K_{m_i}$ jedesmal in die Null übergehen. Sie bilden wegen (14)

(16) ein Ideal $\mathcal{J}$ in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$, und dieses ist vom Nullideal verschieden,

da ein geeignetes Element aus $Q(\pi)$ in $K_{m_1},\ldots,K_{m_i}$ nach Null, in $K_{m_{i+1}}$ auf 1 abgebildet wird, $\mathcal{J}$ also den ganzrationalen Hauptnenner der Koeffizienten dieses Elementes enthält.

In $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$ liegt (Det V) -1 nach Induktionsannahme in $\mathcal{J}$, also hat Det V in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}|\mathcal{J}$ den Wert 1. Ebenso hat Det W in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}|\mathcal{J}$ den Wert 1, vermöge (15) daher auch Det X.

Wegen (16) ist $\mathcal{O}_{m_{i+1}}|\mathcal{J}$ endlich. X ist daher[6]) in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$ mod $\mathcal{J}$ kongruent zu einer $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$-Matrix X', die in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$ die Determinante 1 hat.

Dann kann $W\cdot\begin{pmatrix}1 & \delta\\ 0 & X'\end{pmatrix}$ durch eine $Z(\pi)$-Matrix $V^*=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}+\varepsilon_{12} & \ldots & \beta_{1h}+\varepsilon_{1h}\\ \vdots & & & \vdots\\ \beta_{h1} & \beta_{h2}+\varepsilon_{h2} & \ldots & \beta_{hh}+\varepsilon_{hh}\end{pmatrix}$

repräsentiert werden, wobei die ε_{ji} im Urbild von $\mathcal{J}$ liegen. V^* hat also mit V bezüglich $K_{m_1},\ldots,K_{m_i}$ die Determinante 1, aber auch bezüglich $K_{m_{i+1}}$, da W und X' in $K_{m_{i+1}}$ die Determinante 1 haben.

2. Fall. π ist isomorph zu Z. In diesem Fall bestimmen die bei $1=u_1\beta_{11}+\cdots+u_h\beta_{h1}$ vorkommenden u_j vermöge $(x_1,\ldots,x_h)\to u_1x_1+\cdots+u_hx_h$ einen Modulhomomorphismus p: $(Z(\pi))^h\to Z(\pi)$ des freien $Z(\pi)$-Moduls $(Z(\pi))^h$ in den Operatorbereich. Die unimodulare Spalte

$$\begin{pmatrix}\beta_{11}\\ \vdots\\ \beta_{h1}\end{pmatrix}$$ erzeugt in $(Z(\pi))^h$ einen freien Teilmodul P vom Rang 1

und ergibt eine Zerlegung $(Z(\pi))^h=P\oplus\ker(p)$. Diese Zerlegung erweist $\ker(p)$ als projektiv, und nach dem Satz von Seshadri (s. z. B. Bass [1], S. 212) ist $\ker(p)$ dann ebenfalls frei. Jede Basis von $\ker(p)$ besteht aus $h-1$ Gliedern. Wenn wir irgendeine als Spalten bezüglich der natürlichen Basis von $(Z(\pi))^h$ ausdrücken und gegebenenfalls eine Spalte mit $\pm a_1^i$ multiplizieren, erhalten wir die gesuchte Ergänzung, q. e. d.

---

[6]) $\mathcal{O}_{m_{i+1}}|\mathcal{J}$ hat nur endlich viele maximale Ideale, also ist X in $\mathcal{O}_{m_{i+1}}|\mathcal{J}$ Produkt von Elementarmatrizen. X' ist das Produkt von $\mathcal{O}_{m_{i+1}}$-Repräsentanten derselben.

Hieraus folgt nun:

Hilfssatz 2. *Sei π eine endliche abelsche Gruppe oder isomorph zu Z und* $B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ \beta_{h1} & \cdots & \beta_{hk}\end{pmatrix}$ *mit $k \leqq h$ eine $Z(\pi)$-Matrix. B ist genau dann linksäquivalent zu der Matrix* $B'=\begin{pmatrix}E_k\\ 0\end{pmatrix}$ *mit h Zeilen und k Spalten, wenn das von den k-reihigen Unterdeterminanten von B erzeugte Ideal ganz $Z(\pi)$ ist.*

Beweis. Ist B' ein Linksvielfaches von B, so auch die aus den lexikographisch geordneten k-reihigen Unterdeterminanten gebildete Spalte $B'^{(k)}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ durch die analog gebildete Spalte $B^{(k)}$. Also ist die 1 als Linearkombination der Elemente von $B^{(k)}$ darstellbar.

Sei jetzt umgekehrt $B^{(k)}$ unimodular. Da jede k-reihige Unterdeterminante von B Linearkombination der Elemente von $\begin{pmatrix}\beta_{11}\\ \vdots\\ \beta_{h1}\end{pmatrix}$ ist, ist diese Spalte dann auch unimodular, läßt sich im Falle $h \geqq 2$ (und nur in diesem ist die Behauptung nichttrivial) nach Hilfssatz 1 also zu einer quadratischen Matrix C mit $\operatorname{Det} C = 1$ ergänzen. B ist dann linksäquivalent zu $C^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & \delta\\ 0 & D\end{pmatrix}$ mit $\delta=(\delta_{12} \ \ldots \ \delta_{1k})$, wobei $(C^{-1}B)^{(k)}$ wiederum eine unimodulare Spalte ist, also im Falle $k-1 \geqq 1$ bei der hervorgehobenen Untermatrix D die $k-1$-reihigen Unterdeterminanten $Z(\pi)$ erzeugen. Es folgt also induktiv, daß B linksäquivalent zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix}\Delta\\ 0\end{pmatrix} \text{ mit } \Delta=(\delta_{ij}) \text{ und } \delta_{ij}=\begin{cases}1 \text{ für } i=j\\ 0 \text{ für } i>j\end{cases}$$

ist und durch weitere Zeilenoperationen (also Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen) dann auch zu B' transformiert werden kann, q.e.d.

Bemerkungen. 1) Ist, bei Hilfssatz 2, $B=F^* \cdot B'$ mit unimodularem F^*, so ist F^* im Falle $h>k$ eine Ergänzung von B durch $h-k$ weitere Spalten zu einer unimodularen Matrix. Durch geeignete Multiplikation einer der hinzugefügten Spalten kann jede Einheit von $Z(\pi)$ als Det erreicht werden.

2) Hilfssatz 2 zeigt insbesondere die Linksäquivalenz aller Matrizen, die der genannten Bedingung genügen, da alle zur Normalform B' linksäquivalent sind.

3) Insbesondere folgt die Linksäquivalenz von B und B' aus der wechselseitigen Linksteilbarkeit, wie der erste Teil des Beweises von Hilfssatz 2 zeigt.

Nun können wir mit dem Beweis von (13) den von Satz 1 beenden: B resp. B' gehe aus A resp. A' durch Weglassen der 1. Spalte hervor. Aus der vorausgesetzten wechselseitigen Linksteilbarkeit von A und A' folgt die von B und B', also nach Hilfssatz 2 und den anschließenden Bem. 2) und 3) die Linksäquivalenz von B und B'. Ist F im Falle $\pi_1 \approx Z$ eine unimodulare $Z(\pi_1)$-Matrix mit $B=F \cdot B'$, so folgt auch $A=F \cdot A'$, denn da A ein Linksvielfaches von A' ist, besteht die erste Spalte von A ebenso wie die von A' aus lauter Nullen.

Im Falle $\pi_1 \approx Z_m$ sei F^* eine unimodulare $Z(\pi_1)$-Matrix mit $B = F^* \cdot B'$. Da A Linksvielfaches von A' ist, sind die Elemente der ersten Spalte von A Vielfache von Σ; jedes Vielfache von Σ kann als $v \cdot \Sigma$ mit $v \in Z\,(\subseteqq Z(\pi_1))$ geschrieben werden. $(F^*)^{-1} \cdot A$ hat dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot \Sigma & 0 \\ V_1 & E_{g-1} \\ V_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } V_1 = \begin{pmatrix} v_2 \cdot \Sigma \\ \vdots \\ v_g \cdot \Sigma \end{pmatrix} \text{ und } V_2 = \begin{pmatrix} v_{g+1} \cdot \Sigma \\ \vdots \\ v_h \cdot \Sigma \end{pmatrix}$$

und mit $v_j \in Z$, wobei das aus v_1 und den v_j mit $j > g$ bestehende Teilsystem relativ prim ist, weil A' ein Linksvielfaches dieser Matrix ist.

Durch weitere Zeilenoperationen kann $(F^*)^{-1} \cdot A$ daher auf die Form A' gebracht werden, genauer: es existiert eine $Z(\subseteqq Z(\pi_1))$-Matrix G mit $\operatorname{Det} G = \pm 1$ und $G \cdot (F^*)^{-1} \cdot A = A'$. $F^* \cdot G^{-1}$ ist die gesuchte Matrix F, q.e.d.

Anmerkungen. 1) Im vorangegangenen Beweis hat sich überdies ergeben (s. (12)), daß ein Komplex K, der die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, im Falle $\pi_1 \approx Z_m$ homotop äquivalent zu der Normalfom $K' = P_m \vee S^2 \vee \ldots \vee S^2$ ist, wobei P_m die pseudoprojektive Ebene der Ordnung m ist, und im Fall $\pi_1 \approx Z$ homotop äquivalent zu der Normalform $K' = S^1 \vee S^2 \vee \ldots \vee S^2$. Die Anzahl der 2-Sphären beträgt im ersten Fall $\chi(K) - 1$, im zweiten $\chi(K)$.

2) Im allg. sind wechselseitig linksteilbare Matrizen über Gruppenringen nicht linksäquivalent. Die den Sätzen 2 und 3 zugrundeliegende algebraische Idee war, zu untersuchen, ob dies Phänomen auch bei den 2. Homotopieberandungsmatrizen der durch kompliziertere endliche abelsche Gruppen bestimmten Komplexe auftritt.

b) *Beweis der Sätze 2 und 3.* $f\colon K \to K'$ sei eine zelluläre Homotopieäquivalenz zwischen gemäß (2) normalisierten K, K'. Die Fundamentalgruppen $\pi_1(K^{(\prime)})$ fassen wir als Deckbewegungsgruppen der universellen Überlagerungen $\tilde{K}^{(\prime)}$ auf. Mit f_* bezeichnen wir nicht nur den von f induzierten Isomorphismus $\pi_1(K) \to \pi_1(K')$, sondern auch die daraus zwischen den zugehörigen ganzzahligen Gruppenringen sowie Matrizen über diesen entstehenden Abbildungen.

Erklärt man die Fundamentalbereiche für $\hat{K}^{(\prime)}$ analog wie im Beweis von Satz 1, so folgt daher aus der Kommutativität des Diagramms von Kettenabbildungen

$$\begin{array}{ccc} C_2(\hat{K}) & \xrightarrow{\hat{f}_.} & C_2(\hat{K}') \\ \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ C_1(\hat{K}) & \xrightarrow{\hat{f}_.} & C_1(\hat{K}') \end{array}$$

der Beziehung (9) entsprechend die $Z(\pi_1(K'))$-Matrizengleichung

$$f_*(A) \cdot G = F \cdot A' \,, \tag{17}$$

wobei die Homotopieberandungsmatrizen A, A' sowie die Matrix F analog zum Beweis von Satz 1 erklärt sind und die $Z(\pi_1(K'))$-Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1g'} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \gamma_{g1}, \ldots, \gamma_{gg'} \end{pmatrix}$$

die eindimensionale Kettenabbildung beschreibt.

Der Exponent Null bezeichne das Bild bei dem Homomorphismus $Z(\pi) \to Z$, bei welchem alle Gruppenelemente den Wert 1 annehmen; das Bild der daraus für $Z(\pi)$-Matrizen entstehenden Abbildungen werde ebenfalls damit bezeichnet.

(18) G° und F° beschreiben daher die ein- bzw. zweidimensionalen Kettenabbildungen in den Grundkomplexen $C(K)$, $C(K')$.

Da dort alle 1-Ketten Zyklen sind, folgt im Falle abelscher Fundamentalgruppen, daß $f_*: \pi_1(K) \to \pi_1(K')$ mit dem durch f induzierten Homomorphismus $H_1(K) \to H_1(K')$ durch G° gegeben ist, also

(19) $$f_*(a_i) = a_1^{\gamma_{i1}^\circ} \cdots a_g^{\gamma_{ig}^\circ} \quad \text{gilt.}$$

Zum Beweis von Satz 3 vermerken wir, daß bei einer Q^*-Transformation, in welchem Falle $g = g'$, $h = h'$ gilt, die elementaren Deformationen gemäß (3), die K in K' überführen, so gewählt werden können, daß das Bild der zu a_i gehörigen 1-Zelle von K einen durch das Wort $w_i(a_1, \ldots, a_g)$ in K' gegebenen Weg durchläuft, wobei die Abbildung der freien Gruppen vermöge $a_i \to w_i$ die Komposition der verwendeten elementaren Operationen an den Erzeugenden vom Typ (D) und (E), also eine freie Transformation ist (s.u. (29)). In diesem Fall ist $f_*: C_1(K) \to C_1(K')$ ein Isomorphismus, d.h. es gilt

(20) $$\mathrm{Det}(G^\circ) = \pm 1 .$$

Schließlich werden wir ausnutzen, daß eine Homotopieäquivalenz f

(21) einen Isomorphismus $H_2(K) \to H_2(K')$ in der Homologie der Grundkomplexe induziert.

Für Satz 2 sind (17), (18), (19), (21) und bei Satz 3 zusätzlich (20) erfüllt. Die definierenden Relationen der dort vorkommenden Komplexe indizieren und ordnen wir in der Reihenfolge:

$$R_1^{(\prime)} = a_1^{e_1}, \ldots, R_g^{(\prime)} = a_g^{e_g}, \; R_{ij}^{(\prime)} = [a_i^{x_{ij}^{(\prime)}}, a_j^{y_{ij}^{(\prime)}}] \quad i<j$$

lexikographisch geordnet. Dann hat $A^{(\prime)}$ die Gestalt

(22)
$$ij\text{-te Zeile} \begin{pmatrix} & & i\text{-te Spalte} & & j\text{-te Spalte} & \\ \Sigma_1 & & \vdots & & \vdots & \\ & & \vdots & & \vdots & \Sigma_g \\ & \cdots \dfrac{1-a_i^{x_{ij}^{(\prime)}}}{1-a_i} & (1-a_j^{y_{ij}^{(\prime)}}) \cdots & \dfrac{1-a_j^{y_{ij}^{(\prime)}}}{1-a_j} & (a_i^{x_{ij}^{(\prime)}} - 1) \cdots & \cdot \\ & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix},$$

wobei die übrigen Glieder der Matrix den Wert 0 haben und

$$\Sigma_i = 1 + a_i + \cdots + a_i^{e_i - 1}$$

gesetzt ist; die Brüche bezeichnen die zugehörigen geometrischen Reihen aus $Z(\pi_1(K^{(\prime)}))$. Die Glieder von F mögen entsprechend $A^{(\prime)}$ in der Form

$$F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,g} & \varphi_{1,11} & \cdots & \varphi_{1,g-1\,g} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{g,1} & \cdots & \varphi_{g,g} & \varphi_{g,11} & \cdots & \varphi_{g,g-1\,g} \\ \hline \varphi_{11,1} & \cdots & \varphi_{11,g} & \varphi_{11,11} & \cdots & \varphi_{11,g-1\,g} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{g-1\,g,1} & \cdots & \varphi_{g-1\,g,g} & \varphi_{g-1\,g,11} & \cdots & \varphi_{g-1\,g,g-1\,g} \end{array}\right) \text{ indiziert werden.}$$

Auf beiden Seiten der Matrizengleichung (17) bilden wir jetzt das Produkt der $i_1 j_1$-ten Zeile des linken Faktors mit der i_2-ten Spalte des rechten Faktors und erhalten wegen (22)

$$f_*\left(\frac{1-a_{i_1}^{x_{i_1 j_1}}}{1-a_{i_1}}(1-a_{j_1}^{y_{i_1 j_1}})\right)\cdot\gamma_{i_1 i_2}-f_*\left(\frac{1-a_{j_1}^{y_{i_1 j_1}}}{1-a_{j_1}}(1-a_{i_1}^{x_{i_1 j_1}})\right)\cdot\gamma_{j_1 i_2}$$

(23)
$$=\varphi_{i_1 j_1, i_2}\cdot\Sigma_{i_2}+\sum_{i_2<l}\varphi_{i_1 j_1, i_2 l}\cdot\frac{1-a_{i_2}^{x'_{i_2} l}}{1-a_{i_2}}(1-a_l^{y'_{i_2} l})$$
$$-\sum_{l<i_2}\varphi_{i_1 j_1, l i_2}\cdot\frac{1-a_{i_2}^{y'_{l i_2}}}{1-a_{i_2}}(1-a_l^{x'_{l i_2}})\,.$$

Nun projizieren wir $\pi_1(K')$ auf $Z_{e_{j_2}}$ mit $i_2<j_2$ und erhalten daraus eine Abbildung $p: Z(\pi_1(K'))\to Z(Z_{e_{j_2}})$, bei der alle a_i außer a_{j_2} nach 1 übergehen und a_{j_2} unverändert bleibt. Dann folgt aus (23) unter Berücksichtigung von (19):

$$\left[pf_*\left(\frac{1-a_{i_1}^{x_{i_1 j_1}}}{1-a_{i_1}}\right)\right]\cdot(1-a_{j_2}^{\gamma^\circ_{j_1 j_2}\cdot y_{i_1 j_1}})\cdot p(\gamma_{i_1 i_2})$$

(24)
$$-\left[pf_*\left(\frac{1-a_{j_1}^{y_{i_1 j_1}}}{1-a_{j_1}}\right)\right]\cdot(1-a_{j_2}^{\gamma^\circ_{i_1 j_2}\cdot x_{i_1 j_1}})\cdot p(\gamma_{j_1 i_2})$$
$$=p(\varphi_{i_1 j_1, i_2})\cdot e_{i_2}+p(\varphi_{i_1 j_1, i_2 j_2})\cdot x'_{i_2 j_2}\cdot(1-a_{j_2}^{y'_{i_2 j_2}})\,.$$

Bei dieser Beziehung ist $p(\varphi_{i_1 j_1, i_2})$ mit den übrigen Summanden ebenfalls durch $1-a_{j_2}$ teilbar. Da aus $(1-a_{j_2})\cdot\omega=0$ in $Z(Z_{e_{j_2}})$: $\omega\equiv 0 \bmod \sum_{j_2}$ folgt, können wir (24) durch $1-a_{j_2}$ dividieren und erhalten eine Kongruenz mod $\sum_{j_2}$. Anschließend gehen wir zur Koeffizientensumme über; da e_1 sowohl e_{i_2} als auch e_{j_2} teilt, ergibt sich

$$x_{i_1 j_1}\cdot y_{i_1 j_1}\cdot(\gamma^\circ_{i_1 i_2}\cdot\gamma^\circ_{j_1 j_2}-\gamma^\circ_{i_1 j_2}\cdot\gamma^\circ_{j_1 i_2})\equiv\varphi^\circ_{i_1 j_1, i_2 j_2}\cdot x'_{i_2 j_2}y'_{i_2 j_2} \bmod e_1\,.$$

In Matrizenschreibweise lautet dies Ergebnis

(25)
$$(M\cdot E)\cdot G^{\circ(2)}\equiv\begin{pmatrix}\varphi^\circ_{11,11} & \cdots & \varphi^\circ_{11,g-1\,g}\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi^\circ_{g-1\,g,11} & \cdots & \varphi^\circ_{g-1\,g,g-1\,g}\end{pmatrix}\cdot(M'\cdot E) \bmod e_1\,,$$

mit $M=(x_{12}\cdot y_{12},\ldots,x_{g-1\,g}\cdot y_{g-1\,g})$ und $M'=(x'_{12}\cdot y'_{12},\ldots,x'_{g-1\,g}\cdot y'_{g-1\,g})$,

wobei $G^{\circ(2)}$ die aus den lexikographisch geordneten 2-reihigen Unterdeterminanten von G° gebildete Matrix, also die 2. abgeleitete Matrix von G° ist. Allgemein gilt für die r-te Ableitung $X^{(r)}$ einer $n\times n$-Matrix X: $\operatorname{Det} X^{(r)}=(\operatorname{Det} X)^{\binom{n-1}{r-1}}$, in unserem Fall also mit $\operatorname{Det} G^\circ=k$: $\operatorname{Det} G^{\circ(2)}=k^{g-1}$.

Die Matrix der $\varphi^\circ_{i_1 j_1, i_2 j_2}$ beschreibt wegen (18) und der aus (22) folgenden Gestalt der 2. Berandungsmatrizen der Grundkomplexe den Homomorphismus $H_2(K)\to H_2(K')$. Da dieser (s. (21)) ein Isomorphismus ist, hat ihre Determinante den Wert ± 1. (4) folgt also, wenn wir bei (25) zu den Determinanten übergehen, und (6) ergibt sich, wenn wir für Q^*-Transformationen überdies (20) ausnutzen, q.e.d.

Anmerkung. Obwohl bei (25) nur die Abbildungen zwischen den Kettengruppen der Grundräume K und K' verwendet werden, könnte diese Beziehung nicht aus (17) direkt durch Übergang zur Koeffizientensumme gewonnen werden, da $A^\circ=A'^\circ$ gilt und für G°

und F° Einheitsmatrizen die Gleichung $A^\circ \cdot G^\circ = F^\circ \cdot A'^\circ$ erfüllen würden. Die Benutzung der Homotopiekettenringe dagegen ermöglicht nach (24) den entscheidenden Schritt der Division durch $1 - a_{j_2}$, bevor zur Koeffizientensumme übergegangen wird.

c) *Algebraisierung der Beweise für die in den Sätzen 2 und 3 enthaltenen Resultate über $Q^{(*)(*)}$-Äquivalenz von Gruppenbeschreibungen mit Hilfe des Fox-Kalküls.* Ist K der einer Gruppenbeschreibung $\pi = \{a_1, \ldots, a_g; R_1(a_i), \ldots, R_h(a_i)\}$ zugeordnete Komplex, so lassen sich seine Homotopieberandungsmatrizen folgendermaßen algebraisch beschreiben: $\tilde{a}_i$ hat den Homotopierand $\partial \tilde{a}_i = (a_i - 1) \cdot \tilde{e}_0$ für eine über der Nullzelle e_0 von K liegende Zelle $\tilde{e}_0$.

Zur Angabe der $\partial \tilde{R}_j$ benötigen wir die Foxschen Ableitungen. Sie sind für die von den a_i erzeugte freie Gruppe mit Werten in deren ganzzahligem Gruppenring durch

$$\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{ij} \quad \text{(Kroneckersymbol)} \tag{26}$$

und die Produktregel

$$\frac{\partial (v \cdot w)}{\partial a_i} = \frac{\partial v}{\partial a_i} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial a_i} \tag{27}$$

eindeutig und widerspruchsfrei erklärt. Wir bezeichnen im folgenden mit $\dfrac{\partial w}{\partial a_i}$ das Bild der freien Ableitung unter der Gruppenringabbildung nach $Z(\pi)$, die von der Quotientenabbildung der freien Gruppe nach π induziert wird. Dann gilt $\partial \tilde{R}_j = \dfrac{\partial R_j}{\partial a_1} \tilde{a}_1 + \cdots + \dfrac{\partial R_j}{\partial a_g} \tilde{a}_g$; d. h. die 2. Homotopieberandungsmatrix ist ebenfalls algebraisch bestimmt. Der Homotopiekettenkomplex $C(\tilde{K})$ läßt sich daher rein algebraisch definieren und durch Übergang zu den Koeffizientensummen auch der Grundkomplex $C(K)$. Dessen 1-Zellen sind also Zyklen, und die Inzidenzzahl der R_j und a_i zugeordneten Zellen ist die Exponentensumme von a_i in R_j.

Sind gegebene Gruppenbeschreibungen zu π und π' Q^{**}-äquivalent, so werden wir aus den verwendeten elementaren Operationen (D), (E) und (F) an den Erzeugenden durch Abbildungen der von $a_1, \ldots, a_g$ resp. $a_1, \ldots, a_{g'}$ erzeugten freien Gruppen vermöge

$$a_i \longrightarrow w_i(a_1, \ldots, a_{g'}),\ i = 1, \ldots, g$$

einen Isomorphismus $f_* : \pi \longrightarrow \pi'$ und eine $Z(\pi')$-Matrix F angeben derart, daß mit

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w_1}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial w_1}{\partial a_{g'}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial w_g}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial w_g}{\partial a_{g'}} \end{pmatrix}, \text{ also } \gamma_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial a_j}$$

für die zugeordneten Homotopiekettenkomplexe (17) gilt. Zusammen mit $\tilde{e}_0 \longrightarrow \tilde{e}_0$ erhalten wir daher eine bezüglich f_* äquivariante Abbildung $C(\tilde{K}) \xrightarrow{\tilde{f}.} C(\tilde{K}')$ und vermöge Übergang zur Koeffizientensumme — d. h. (18) gilt per definitionem — eine zugehörige Abbildung $C(K) \xrightarrow{f.} C(K')$. Die Konstruktion der w_i und von $\tilde{f}.$ wird so erfolgen, daß $f.$ (21) erfüllt[7]).

[7]) (17) allein ist nämlich bereits deshalb erfüllbar, weil die $R_j(w_i)$ Folgerelationen der $R'_1, \ldots, R'_{g'}$ sind.

Zuerst führen wir sie für die Elementaroperationen (A) ... (F) aus: Aus (26), (27) und der anschließenden Vereinbarung, die Bilder der freien Ableitungen in $Z(\pi)$ zu betrachten, folgt

$$\frac{\partial w R_j w^{-1}}{\partial a_i} = w \cdot \frac{\partial R_j}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial R_j^{-1}}{\partial a_i} = -\frac{\partial R_j}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial R_j R_k}{\partial a_i} = \frac{\partial R_j}{\partial a_i} + \frac{\partial R_k}{\partial a_i},$$

d.h. im Falle (A) und (B) geht A' aus A durch Multiplikation der j-ten Zeile mit einer Einheit aus $Z(\pi)$ hervor und im Falle (C) durch Addition der k-ten Zeile zur j-ten ($k \neq j$). In den Fällen (A), (B) und (C) sind daher A und A' linksäquivalent vermöge einer invertierbaren $Z(\pi)$-Matrix F mit $A = F \cdot A'$. Mit $w_i = a_i$, also der Einheitsmatrix G, ist folglich (17) erfüllt und (21) folgt, weil auch in den Grundkomplexen alle Kettenabbildungen Isomorphismen sind.

In den Fällen (D) und (E) folgt mit den dadurch gegebenen freien Transformationen $a_i \to w_i$ und den von ihnen induzierten Isomorphismen f_* nach der Kettenregel für freie Ableitungen (s. Fox [3]): $f_*(A) \cdot G = A'$. Also ist (17) mit der Einheitsmatrix für F erfüllt. Da

(28) G bei freien Transformationen nach der Kettenregel invertierbar ist[8]),

sind auch in den Fällen (D) und (E) die Kettenabbildungen in den Grundkomplexen Isomorphismen; also ist (21) erfüllt.

Für (F) resp. den inversen Prozeß werden für die Wortabbildungen und $\hat{f}$. (daher auch für f.) Inklusionen resp. Projektionen genommen. Die Abbildung für die 2-Zyklen der Grundkomplexe ist dann in beiden Fällen die Identität, also gilt (21). Für (F) gilt:

$$A' = \begin{pmatrix} f_*(A) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = (E \quad 0) \quad \text{und} \quad G = (E \quad 0)$$

für den inversen Prozeß:

$$f_*(A) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix};$$

in beiden Fällen gilt (17).

(29) Übrigens ergibt sich (3), indem man die für (A) ... (F) angegebenen algebraischen Abbildungen durch Elementardeformationen geometrisch realisiert.

Für eine beliebige Q^{**}-Transformation mögen nun die Abbildungen $a_i \to w_i$ der freien Gruppen und $\hat{f}$. gebildet werden, indem man die entsprechenden Abbildungen der Elementaroperationen hintereinander ausführt. Die induzierte Abbildung $\pi \to \pi'$ und die der Grundkomplexe entstehen dann ebenfalls durch Komposition der entsprechenden bei den Elementaroperationen. Daher ist (21) erfüllt und (17), da G nach der Kettenregel für freie Ableitungen aus den Funktionalmatrizen für die Wortabbildungen der Elementaroperationen entsteht.

Bei einer Q^*-Transformation ist $a_i \to w_i$ dieselbe freie Transformation wie die in Teil b) vor (20) angegebene, d.h. die Komposition der verwendeten elementaren Operationen vom Typ (D) und (E). Mit derselben Argumentation wie dort (oder auf Grund der Überlegung (28)) gilt in diesem Fall (20).

---

[8]) Im Fall (D) entsteht G aus der Einheitsmatrix, indem das i-te Diagonalelement durch $-a_i^{-1}$ ersetzt, und im Fall (E), indem in der i-ten Zeile a_i als Element der j-ten Spalte ($i \neq j$) eingefügt wird. Für die erzeugenden freien Transformationen ist die Invertierbarkeit von G aus dieser Berechnung auch direkt zu ersehen.

Sind π und π' abelsch, so gilt — wiederum mit derselben Begründung wie in Teil b) — (19) für $f_*: \pi \to \pi'$.

Der Beweis kann dann wie in Teil b) nach (21) zu Ende geführt werden, q.e.d.

Anmerkung. Bei (22) sind A und A' nach dem Argument vor (11) wechselseitig linksteilbar (dies ließe sich auch mit Hilfe des Fox-Kalküls zeigen). Für Linksäquivalenz ist (6) nach den Beweisen der Teile b) und c) jedoch eine notwendige Bedingung, da dann eine Homotopieäquivalenz $f: K \to K'$ mit der Einheitsmatrix G existiert, also (17) ... (21) gelten. Die nach Satz 3 genannten mindestens $\varphi(e_1)/2$ paarweise verschiedenen $Q^{(*)}$-Äquivalenzklassen ergeben also insbesondere mindestens ebensoviele paarweise wechselseitig linksteilbare, aber nicht linksäquivalente Matrizen, womit die am Ende von Teil a) in Anmerkung 2) gestellte Frage geklärt ist.

III. Ein Problem des einfachen Homotopietyps bei zweidimensionalen CW-Komplexen

(30) L sei Teilkomplex eines endlichen, zusammenhängenden CW-Komplexes K derart, daß die Inklusion $L \subsetneqq K$ eine Homotopieäquivalenz ist und $K - L$ nur aus höchstens zweidimensionalen Zellen besteht. Gesucht sind alle Elemente der Whiteheadgruppe $\mathrm{Wh}(\pi)$ ($\pi = \pi_1(L)$), die sich auf diese Weise als Torsionswerte $\tau(K, L)$ realisieren lassen.

Hierfür sind mir bis jetzt weder Beispiele mit $\tau \neq 1$ bekannt[9]), noch kann ich beweisen, daß stets $\tau = 1$ gilt. Wir können uns bei der Untersuchung des Problems darauf beschränken, daß L ebenfalls höchstens zweidimensional ist, denn ansonsten wäre die Inklusion des 2-Gerüstes L^2 nach K eine Homotopieäquivalenz mit derselben Torsion. Ferner können wir L und anschließend den „Rest" von K gemäß (2) normalisieren, ohne τ zu ändern.

Mit den zugehörigen Darstellungen der Fundamentalgruppen

(31) $\pi_1(L) = \{a_1, \ldots, a_g; R_1(a_i), \ldots, R_h(a_i)\}$ und

(32) $\pi_1(K) = \{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_n; R_1(a_i), \ldots, R_h(a_i), S_1(a_i, b_k), \ldots, S_n(a_i, b_k)\}$

folgt dann, da die Inklusion $L \subseteq K$ eine Homotopieäquivalenz ist:
(α) Bei (32) lassen sich die b_k eliminieren, d.h. $b_k \cdot v_k^{-1}(a_i)$ für gewisse $v_k(a_i)$ sind Folgerelationen der R_j, S_l.

Hieraus ergibt sich mit Hilfe des Fox-Kalküls, daß die Matrix $T = \left(\frac{\partial S_l}{\partial b_k}\right)$ ein Linksinverses besitzt, die Randabbildung $C_2(\tilde{K}, \tilde{L}) \xrightarrow{\delta} C_1(\tilde{K}, \tilde{L})$ also epimorph ist.

Da die Abbildung $i_*: \pi_1(L) \to \pi_1(K)$ monomorph ist, folgt weiter:
(β) Alle Folgerelationen der R_j, S_l bei (32), die nur die a_i enthalten, folgen bereits aus den R_j allein. (Es reicht zu wissen, daß die $S_l(a_i, v_k(a_i))$ Konsequenzen der R_j sind.)

Daß $H_2(\tilde{K}, \tilde{L})$ verschwindet, ist gleichbedeutend damit, daß über die aus (α) gezogene Folgerung hinaus sogar gilt:

(γ) Die Randabbildung $C_2(\tilde{K}, \tilde{L}) \xrightarrow{\partial} C_1(\tilde{K}, \tilde{L})$ ist monomorph, d.h. T ist invertierbar.
Das von T in $Wh(\pi)$ bestimmte Element ist $\tau(K, L)$.

---

[9]) Wenn die Dimensionsbeschränkung fallengelassen wird oder andere Abbildungen als Inklusionen zulässig sind, sind bekanntlich nichttriviale Torsionswerte erhältlich.

Ist umgekehrt eine Gruppenbeschreibung der Form (32) mit den Eigenschaften (α), (β), (γ) gegeben[10]), so bildet der zu (32) gehörige CW-Komplex K mit dem Teilkomplex L gemäß (31) ein Beispiel für (30), denn (α), (β), (γ) bedeuten, daß die Inklusion einen Isomorphismus in den Fundamentalgruppen und der Homologie der universellen Überlagerungen induziert. Wir haben also ein algebraisches Äquivalent für die geometrische Formulierung des Problems gefunden.

Ist $L \subseteqq K$ zu Gruppenbeschreibungen (31), (32) mit (α), (β), (γ) gegeben und L' ein weiterer zu der Beschreibung

$$\{a'_1, \ldots, a'_{g'};\ R'_1(a'_1, \ldots, a'_{g'}), \ldots, R'_{h'}(a'_1, \ldots, a'_{g'})\}$$

der gegebenen Gruppe π gehörender Komplex, so kann ein Erweiterungskomplex K' von L' mit entsprechenden Eigenschaften und $\tau(K', L') = \tau(K, L)$ konstruiert werden, indem man die a_i durch Wörter $w_i(a'_1, \ldots, a'_{g'})$ ausdrückt, als zusätzliche Erzeugende die b_k und als zusätzliche Relationen die $S_l(w_i, b_k)$ nimmt.

(33) Die Menge $Wh^*(\pi) \subseteqq Wh(\pi)$ der gemäß (30) realisierbaren Torsionswerte ist daher multiplikativ abgeschlossen[11]),

denn nach der vorangegangenen Konstruktion können wir bei $\tau_1 = \tau(K_1, L_1)$ und $\tau_2 = \tau(K_2, L_2)$: $L_1 = L_2 (= L)$ annehmen und (trivialerweise), daß $K_1 - L$ und $K_2 - L$ fremd zueinander sind, so daß $\tau(K_1 \cup K_2, L) = \tau_1 \cdot \tau_2$ gilt[12]). Ich weiß jedoch nicht, ob $Wh^*(\pi)$ i. allg. eine Gruppe ist, denn die übliche Konstruktion zur Realisierung von τ^{-1} mit Hilfe des Abbildungszylinders würde i. allg. nicht $\dim(K - L) \leqq 2$ ergeben.

Wie man auf Grund von (3) oder mit Hilfe des Fox-Kalküls erkennt, bleibt bei einer Gruppenbeschreibung (32) mit (α), (β), (γ) die Torsion ungeändert, wenn man die folgenden Q^{**}-Transformationen zuläßt.

(A) Konjugieren eines R_j mit einem Wort in den a_i,
Konjugieren eines S_l mit einem beliebigen Wort,

(B) Invertieren eines R_j oder S_l,

(C) Anmultiplizieren von rechts eines R_k an ein R_j mit $k \neq j$, eines R_j an ein S_l oder eines S_k an S_l mit $k \neq l$. (Es darf allerdings kein S_l an ein R_j anmultipliziert werden.)

Analog sind die elementaren freien Transformationen (D), (E) für die a_i, b_k mit Ausnahme des Übergangs von a_i nach $a_i b_k$ zulässig; ferner darf durch (F) eine neue Erzeugende a und eine neue Relation $R = a$ oder eine neue Erzeugende b und eine neue Relation $S = b$ eingeführt, oder, falls möglich, ein dazu inverser Prozeß vorgenommen werden[13]).

Eine endliche Folge solcher Transformationen möge eine *relative Q^{**}-Transformation* heißen. *Relative Q- und Q^*-Transformationen* sind definiert, indem man die Elementaroperationen zusätzlich auf Q- resp. Q^*-Transformationen beschränkt. Es liegt nahe, $Wh^*(\pi) = 1$ zu beweisen zu versuchen, indem man zeigt, daß durch relative Q^{**}-Transformationen die b_k schließlich alle beseitigt werden können.

---

[10]) In manchen Fällen folgen aus (α) die weiteren Eigenschaften ganz oder teilweise, z. B. (β) und (γ) für abelsche, (γ) für endliche Gruppen und (s. Magnus [6]) (β) im Falle, daß keine R_j vorhanden sind.

[11]) Für beliebige Gruppen π kann $Wh^*(\pi)$ definiert werden, indem man unendlich viele a_i, R_j (aber weiterhin nur endlich viele b_k, S_l) zuläßt.

[12]) Ebenso leicht ergibt sich, daß ein Automorphismus von π einen solchen von $Wh(\pi)$ induziert, der $Wh^*(\pi)$ in sich überführt.

[13]) Es gelten dann wieder die den Fußnoten [1]), [2]) entsprechenden Bermerkungen mit der Einschränkung, daß die a_i resp. R_j nicht durch die b_k resp. S_l verändert werden dürfen.

(34) Daß es mit rel. Q^*-Transformationen i.allg. jedenfalls nicht möglich ist, die S_l auf die Form $S_l = b_l$ zu bringen, möge das Beispiel

$$\pi = \{a, b;\ R = a^2,\ S = bab^2a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}\}$$

$$(= b \cdot aba^{-1} \cdot aba^{-1} \cdot b^{-1} \cdot ab^{-1}a^{-1})$$

zeigen.

Hier ist b eine Folgerelation, also $\pi \approx Z_2$, denn in π ist $S \cdot aSa^{-1}$ ein Konjugat von $aba^{-1} \cdot b$; und wenn man dies am Anfang und am Ende von S berücksichtigt, folgt $b = 1$.

Sieht man a als Erzeugende von Z_2, b als Erzeugende von Z und S als ein Wort in $Z_2 * Z$ an, so kann daraus durch die relative Q^*-Transformation $b \to b \cdot a$ das Wort $S' = b^2abab^{-2}a$ erzeugt werden, durch alle relativen Q^*-Transformationen jedoch nur Wörter, die aus S oder S' durch Konjugation, Inversion, den Übergang $b \to b^{-1}$ und eine Komposition dieser Operationen hervorgehen. Da die von $S^{\pm 1}$ und $S'^{\pm 1}$ bestimmten zyklisch gekürzten Wörter in $Z_2 * Z$ aber von $b^{\pm 1}$ verschieden sind, ist der Nachweis für (34) erbracht, q.e.d.

Sei jetzt $(W;\ M_1, M_2)$ ein stückweise linearer h-Cobordismus mit $\dim W = 4$. Dann existiert bekanntlich eine Zellzerlegung, bei der W genau eine 4-Zelle sowie M_1 und M_2 je genau eine 3-Zelle besitzen, die freie Seiten der 4-Zelle sind. Falls sich überdies erreichen läßt, daß

(35) jede der im Inneren von W liegenden (offenen) 3-Zellen eine 2-Zelle von M_2 als freie Seite hat,

kann $\tau(W, M_1)$ berechnet werden, indem durch elementare Kontraktionen von M_2 aus die 4-Zelle und die 3-Zellen von $W - M_1$ beseitigt werden. Es entsteht dann ein Komplex K mit Teilkomplex $L = M_1$, so daß die Situation von (30) vorliegt, d.h.

$$(36) \qquad \tau(W, M_1) \in Wh^*(\pi) \quad (\pi = \pi_1(M_1)) \quad \text{gilt.}$$

$Wh^*(\pi)$ ist also eine „obere Schranke" für die so realisierbaren Torsionswerte. (35) ist gleichbedeutend damit, daß in der dualen Zellzerlegung von W

(37) im Inneren von W nur eine, die Nullzellen von M_1 und M_2 verbindende 1-Zelle liegt.

Dies zu erreichen ist ein — ebenfalls die Fundamentalgruppe betreffendes — Problem, das sich evtl. algebraisieren läßt.

Um die m.W. noch offene Frage, ob bei 4-dimensionalen stückweise linearen h-Cobordismen von 1 verschiedene Torsionswerte auftreten, für einzelne Gruppen oder allgemein negativ zu entscheiden, liegt es daher nahe, (37) und $Wh^*(\pi) = 1$ zu zeigen zu versuchen. Umgekehrt liefert vielleicht eine Konstruktion für nichttriviale Elemente von $Wh^*(\pi)$ zugleich Hinweise, diese auch bei 4-dimensionalen semilinearen h-Cobordismen zu realisieren.

Nachtrag

Nach Beendigung der Niederschrift des Manuskriptes machte mich H. Zieschang auf die Arbeit von J. Mac Cool und A. Pietrowski „Note on a conjecture of W. Magnus" in Proc. Conference on Decision Problems in Group Theory, Irvine, Calif. aufmerksam. Dort werden Beispiele für Q^{**}- aber nicht Q^*-äquivalente Gruppenbeschreibungen zu π, π' mit je einer definierenden Relation angegeben. Im Gegensatz zu (7) kann bei ihnen allerdings kein Isomorphismus $\pi \to \pi'$ durch eine freie Transformation $a_i \to w_i$ bewirkt werden, denn auf

Grund der in Abschnitt I erwähnten Folgerung aus dem Freiheitssatz wären dann $R(w_i)$ und $R'^{\pm 1}$ konjugiert zueinander, die beiden Darstellungen also doch Q^*-äquivalent. Insbesondere ist bei ihnen die Frage nach Q-Äquivalenz sinnlos, da hierfür $w_i = a_i$ sein müßte.

Zusatz bei der Korrektur. Die im dritten Abschnitt behandelte Frage hat auch M. M. Cohen aufgegriffen. In Kontakt mit ihm hat O. S. Rothaus das wichtige Resultat erzielt, daß es Gruppen mit $Wh^*(\pi) \neq Wh(\pi)$ gibt (On the Non-Triviality of some Group Extensions Given by Generators and Relations, erscheint im Bull. A.M.S.). Eine Arbeit von M. M. Cohen, die topologische Konsequenzen dieses Ergebnisses behandelt (Whitehead Torsion, Group Extensions, and Zeeman's Conjecture in high Dimensions), ist als Manuskript fertiggestellt.

Literaturverzeichnis

[1] *H. Bass*, Algebraic K-Theorie, New York 1968.

[2] *M. N. Dyer* and *A. J. Sieradski*, A Homotopy Classification of 2-Complexes with finite cyclic Fundamental Group, Bull. Am. Math. Soc. **79** (1973), 75—77.

[3] *R. H. Fox*, Free Differential Calculus I, Ann. of Math. **57** (1953), 547—560.

[4] *W. Franz*, Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern, J. reine angew. Math. **171** (1934), 149—161.

[5] *W. Magnus*, Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), J. reine angew. Math. **163** (1930), 141—165.

[6] *W. Magnus*, Über freie Faktorgruppen und freie Untergruppen gegebener Gruppen, Mh. Math. Phys. **47** (1939), 307—313.

[7] *E. S. Rapaport*, Groups of Order 1, some Properties of Representations, Acta Math. **121** (1968), 127—150.

[8] *K. Reidemeister*, Kommutative Fundamentalgruppen, Mh. Math. Phys. **43** (1936), 20—28.

[9] *E. Steinitz*, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, I. u. II. Math. Ann. **71** (1912), 328—367 und Math. Ann. **72** (1912), 297—345.

[10] *C. T. C. Wall*, Formal Deformations, Proc. London Math. Soc. (3) **16** (1966), 342—352.

Mathematisches Seminar der Johann Wolfgang Goethe Universität,
Robert-Mayer-Str. 6—10, 6000 Frankfurt am Main

Eingegangen 4. Januar 1974