

Werk

Titel: Kurt Hensel zum Gedächtnis.

Autor: Hasse, Helmut

Jahr: 1950

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0187|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Kurt Hensel zum Gedächtnis.

Von *Helmut Hasse* in Berlin.

I. Der äußere Lebensgang¹⁾.

Am 1. Juni 1941 schloß der Geheime Regierungsrat Professor Dr. Kurt Hensel in Marburg a. d. Lahn, wo er seit 1901 als ordentlicher Professor der Mathematik gewirkt und seit 1930 im Ruhestand gelebt hatte, für immer die Augen.

Kurt Hensel wurde am 29. Dezember 1861 in Königsberg als der jüngere Sohn und viertes Kind des ostpreußischen Gutsbesitzers Sebastian Hensel geboren. Sein älterer Bruder Paul Hensel hat sich als Professor der Philosophie, zuletzt in Erlangen, einen Namen gemacht. Sein Vater war der Sohn des Berliner Malers Wilhelm Hensel und seiner Frau Fanny geb. Mendelssohn, der älteren Schwester des Komponisten Felix Mendelssohn-Bartholdy, die selbst Pianistin war und auch komponierte. Von dieser seiner Großmutter hatte Kurt Hensel eine tiefgehende musikalische Veranlagung geerbt; er spielte gut Violine und sang mit schöner Baritonstimme. Trat man in den Salon des Henselschen Hauses auf dem Marburger Schloßberg, mit seinem herrlichen Blick auf die alte Stadt und auf das von waldigen Höhen umrahmte Lahntal, so fiel der erste Blick auf die stilvollen Ölbilder von Felix und Cécile Mendelssohn über dem großen Konzertflügel, und man wurde sofort von dem Geist des historischen Berliner Salons am Leipziger Platz umweht, den Sebastian Hensel in seiner „Familie Mendelssohn“ so lebendig geschildert hat, und der hier in Marburg im Henselschen Hause fortlebte. Felix Mendelssohns jüngere Schwester war übrigens mit Dirichlet verheiratet, der so Kurt Hensels angeheirateter Großonkel war.

Der Vater, Sebastian Hensel, hatte die Landwirtschaft gründlich studiert und dann ein größeres Gut Großbarthen in der Pregelnieferung nahe dem Städtchen Löwenhagen erworben, das er erfolgreich bewirtschaftete. Die Mutter Julie war die Tochter des erst seit kürzerer Zeit in Königsberg lebenden russischen Staatsrats von Adelson, dessen Familie durch Eisenbahnunternehmungen zu Wohlstand und Ansehen gekommen war, und dessen Frau zusammen mit ihm und den vielen Töchtern ein großes Haus machte, in dem viele Künstler und Gelehrte, darunter auch Jacobi, verkehrten.

Kurt Hensel wuchs bis zu seinem neunten Lebensjahre zusammen mit seinen Geschwistern auf Großbarthen heran; die Eltern unterrichteten die sehr begabten Kinder selbst, wobei sie ein befreundeter erfahrener Schulmann, Karl Witt, beriet. Dann siedelte zunächst die Mutter mit den Kindern nach Berlin über, etwas später nach Ver-

¹⁾ Diese Schilderung stützt sich neben einigen eigenen Erinnerungen des Verf. hauptsächlich auf Aufzeichnungen von Frau Gertrud Hensel, die von ihr dem Verf. freundlichst zur Verfügung gestellt wurden.

kauf des Gutes auch der Vater, der dort eine Stellung als Direktor der Deutschen Bau-gesellschaft antrat. In dieser Eigenschaft wirkte er u. a. bei der Erbauung des Hotels „Kaiserhof“ mit. Der Brand dieses großen Gebäudes, des ersten eigentlichen Berliner Hotels, genau acht Tage nach der feierlichen Eröffnung, machte nachhaltigen Eindruck auf den jungen Kurt.

Hensel besuchte in Berlin zunächst die damals als sehr gut bekannte Döbbelin-sche Privatschule, später dann das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium. Dort übte auf ihn besonders der alte Schellbach durch seinen ausgezeichneten und hochanregenden Unter-richt in Mathematik und Physik großen Einfluß aus. Durch ihn wurde er für das Studium der Mathematik begeistert; noch bis in sein Alter hinein lobte und rühmte er oft diesen begnadeten Mathematikpädagogen. Sein erstes und drittes Studiensemester absol-vierte er in Bonn, wo er vor allem bei Lipschitz hörte und für eine Seminararbeit einen Preis erhielt. Er wurde bald Mitglied des sogenannten Bonner Kreises, dem viele später angesehene Gelehrte, hauptsächlich Historiker und Philologen angehörten, und wo auch der Sinn für Humor, den Hensel wie seine Angehörigen in hohem Grade besaß, auf seine Rechnung kam. Das dazwischenliegende Wintersemester und die späteren Semester stu-dierte er in Berlin und hörte hier u. a. bei Weierstraß, Kronecker, Borchardt, Kirchhoff und Helmholtz; mit des letzteren frühverstorbenem Sohn war er eng be-freundet. In dieser Zeit hatte er außer in seiner eigenen, ihm sehr lieben Familie viel angenehmen Verkehr in befreundeten Häusern, aus dem er mannigfache Anregungen zog, so bei Kronecker, du Bois Reymond, Helmholtz, dem Maler Graef und dem aus der Industrie kommenden Physiker Hansemann. Auch nahm er seine Mahlzeiten ziem-lich regelmäßig an der Potsdamer Brücke in einem Kreise von jungen Mathe-matikern ein, dem u. a. Carl Runge, Sonja Kawalewska und Seliwanoff angehörten. Von letzterem erzählte er den netten Ausspruch über Kroneckers Vorlesungen: „*Und wenn die Vorlesung aus ist, wirr rufen alle ‚wunderrvoll‘ und haben nicht verstanden*“. In der Tat sollen die Kroneckerschen Vorlesungen sehr schwer gewesen sein, so daß nur wenige vollständig folgen konnten, unter ihnen vielleicht als der am meisten Begeisterte Hensel, der ganz in Kroneckers Fußstapfen trat und von Kronecker mit großem Wohlwollen gefördert wurde. So promovierte er dann 1884 bei Kronecker mit seiner bekannten Arbeit über die außerwesentlichen Diskriminantenteiler, nicht ohne sich über-arbeitet zu haben und einige Zeit aussetzen zu müssen; Reitstunden und die von Kron-ecker empfohlene Lektüre u. a. der damals gerade erscheinenden Karl-May-Romane stellten seine Arbeitskraft wieder her.

Nach vollzogener Promotion diente er als Einjährig-Freiwilliger in Freiburg; der Dienst ließ ihm in diesem Jahr wenig Zeit zur Fortsetzung seiner mathematischen Stu-dien. Sein Plan, sich nach Abschluß der Dienstzeit in Göttingen zu habilitieren, zer-schlug sich. So wandte er sich nach Berlin zurück, wo Kronecker ihm 1886 die Habili-tation ermöglichte. Seine Antrittsvorlesung handelte von unendlich dünnen Strahlen-bündeln.

Schon gleich nach der Promotion hatte er sich heimlich mit der Tochter einer seiner eigenen befreundeten Familie, Gertrud Hahn, verlobt. Nach der Habilitation wurde die Verlobung veröffentlicht, und ein halbes Jahr darauf fand die Hochzeit statt. Frau Gertrud ist Kurt Hensel eine bis an sein Ende mit zartfühlender Liebe verehrte Lebensgefährtin gewesen. Sie hat ihm einen Sohn und vier Töchter geschenkt. Ob-schon sie von zartester Gesundheit war, hat sie sein Haus, der Familientradition ent-sprechend, allezeit zu einem Treffpunkt von Gelehrten, Künstlern, Schriftstellern und interessanten Menschen aller Art gemacht, aus dem jeder, dem der Eintritt vergönnt war, immer wieder angeregt und innerlich bereichert schied.

Es folgten arbeitsreiche Jahre in Berlin, in denen die menschlichen und wissenschaftlichen Beziehungen zu Kronecker immer enger wurden, bis dieser, nachdem er seine Frau und mit ihr auch die Lust weiterzuleben verloren hatte, dahinschied und so das enge Band zwischen Lehrer und Schüler zerrissen wurde. Ihrer geistigen Gemeinschaft setzte Hensel ein Denkmal, indem er in jahrelanger eigener Arbeit die Werke und einen Teil der Vorlesungen Kroneckers herausgab. Bald wurde er in Berlin zum Extraordinarius ernannt. Einen Ruf nach Ithaka in den Vereinigten Staaten lehnte er ab. Monate intensiver wissenschaftlicher Arbeit, die den Grund zu seiner späteren großen Schöpfung legten, wechselten mit militärischen Übungen, Musik und Erholungsreisen ab. Auf diesen begleitete ihn öfters Fuchs, der seit einigen Jahren aus Heidelberg an die Universität Berlin berufen war, und mit dem ihn eine herzliche Freundschaft verband. Viel Anregung aller Art brachten auch die jahrelang in den Sommerferien regelmäßig stattfindenden Mittagsmahlzeiten im Restaurant „Kurfürst“, bei denen sich jüngere Gelehrte, wie der Historiker Lenz, der Physiker Planck, der Musikwissenschaftler Friedländer trafen. Allwöchentlich stattete er, wie jeder jüngere Berliner Dozent der Mathematik, dem damals bereits hochbetagten Weierstraß einen Besuch ab. Ihm verdankte er neben Kronecker wohl die hauptsächliche Anregung für die Konzeption des Grundgedankens seiner zahlentheoretischen Neuschöpfung. Mit Landsberg, der in Heidelberg lehrte, aber viel im Hause Hensel zu Besuch weilte, arbeitete er eng zusammen. Daraus entsprang das gemeinsame umfangreiche Werk „Theorie der algebraischen Funktionen“, in dem Hensel die neuartigen arithmetischen Methoden entwickelte, während Landsberg die algebraisch-geometrischen Anwendungen bearbeitete. Von Mathematikern der kommenden Generation verkehrte und musizierte der damals junge Steinitz viel im Hause Hensel. Seine für die moderne Algebra grundlegende große Arbeit über die algebraische Theorie der Körper geht auf diese Berührung mit dem Kronecker-Henselschen Ideenkreis zurück, nämlich auf das Bestreben, den in dieser Zeit im Entstehen begriffenen Henselschen Methoden das solide algebraische Fundament zu geben. Wie die meisten Berliner Mathematiker, so war auch Hensel Mitglied des damals auf großer Höhe stehenden Berliner Mathematischen Vereins, für den damals u. a. Bernstein humorvolle Stücke dichtete.

Im Jahre 1901 wurde Hensel aus dem Sommeraufenthalt in Misdroy durch ein Telegramm des ihm befreundeten Berliner Ordinarius Frobenius nach Berlin gerufen. Schottky hatte eine Berufung nach Berlin als Nachfolger von Fuchs angenommen, und Hensel sollte seine Nachfolge als Ordinarius in Marburg übernehmen. Es folgten schwierige Verhandlungen mit dem allgewaltigen und gefürchteten Althoff im Preußischen Kultusministerium über die Frage, ob er dieser Berufung folgen oder in Berlin bleiben und später eine Professur an der Preußischen Akademie der Wissenschaften erhalten sollte. Die Entscheidung fiel schließlich für Marburg. So trat er im Herbst des Jahres die dortige Professur an; seine Familie folgte ihm ein halbes Jahr später. Hier schloß Hensel, durch die Musik zusammengeführt, bald Freundschaft mit dem Philosophen Natorp, dem Juristen Leonhard, dem Germanisten Elster und dem Mediziner v. Behring. Die Familie Hensel wohnte zunächst in Elsters Nachbarhaus in der Universitätsstraße. Dieses erwies sich jedoch nach ein paar Jahren als zu klein und unbequem, und auch als für die wissenschaftliche Arbeit zu unruhig. So wurde mit Hilfe eines Frankfurter Architekten das prächtige, in einem wundervollen Garten gelegene Haus auf dem Schloßberg errichtet, das durch seine schöne Lage und Einrichtung, vor allem aber durch den in ihm gepflegten Geist, bei jedem, der Hensel in seiner zweiten Lebenshälfte besuchte, bleibenden Eindruck hinterließ. Groß ist die Anzahl dieser Besucher gewesen. Die meisten Mathematiker Deutschlands aus dem ersten Drittel unseres

Jahrhunderts, aber auch zahlreiche Fachgenossen aus anderen Ländern haben es kennengelernt, und alle sind dort von dem Hausherrn und seiner Gattin mit der in der Familientradition wurzelnden Herzlichkeit, Gastlichkeit und Anteilnahme an ihrem Lebensgeschick empfangen worden. Nach dem Weltkriege, als die Wohnungsnot sehr groß war, nahm Hensel den damaligen Extraordinarius A. Fraenkel mit seiner Familie im zweiten Stock dieses Hauses auf, und heute wohnt dort Reidemeister, der gegenwärtig den Henselschen Lehrstuhl innehat. In dem von prächtigen Bäumen aller Arten beschatteten, etwas hügeligen Garten befand sich noch ein älteres kleines Häuschen, wie geschaffen, um sich zu völlig ungestörter Arbeit zurückziehen zu können. Seinen Besuchern machte er den Zweck dieses Häuschens mit dem Schüttelreim klar:

In diesem kleinen Gartenhaus
Bezwing' ich selbst den harten Gauß,

wie er überhaupt in anregender Gesellschaft oft humorvolle Schüttelreime aus dem Stegreif produzierte.

Kaum war das Marburger Haus bezogen — es sollte gerade die erste Mittagsgesellschaft stattfinden —, da kam eine Berufung nach Leipzig. Nun hatte Hensel sich in fünfjähriger Tätigkeit bereits einen schönen Wirkungskreis in Marburg geschaffen, die Zahl der Studenten, vor allem auch der Mathematik war in stetem Anwachsen begriffen, und anregender Umgang mit jüngeren Mathematikern fehlte nicht. Auch das Haus fesselte an Marburg. So lehnte er den Leipziger Ruf ab, nachdem das Berliner Ministerium ihm ein ehrenvolles Entgegenkommen gezeigt hatte, ebenso später auch einen auf inoffiziellen Wege gemachten zweiten Versuch, ihn nach Leipzig zu ziehen.

Diese ersten Jahre seines Marburger Wirkens bis zum Weltkrieg waren die fruchtbarsten in Hensels Leben. In ihnen reifte seine Theorie der p -adischen Zahlen nebst ihrer Anwendung auf die algebraischen Zahlkörper heran und wurde in einer Reihe von Arbeiten veröffentlicht. In ihnen entstanden auch seine beiden weiteren Hauptwerke, die „Theorie der algebraischen Zahlen“ und die „Zahlentheorie“, in denen er seine geniale Neuschöpfung im einzelnen ausgearbeitet und als reife Frucht der wissenschaftlichen Welt vorgelegt hat.

Viel Arbeit aber auch Freude bereitete Hensel seine Tätigkeit als Herausgeber des Crelleschen Journals, dieser ältesten deutschen mathematischen Fachzeitschrift, in der so viele der großen Entdeckungen des vergangenen Jahrhunderts veröffentlicht waren, an der Spitze die Arbeiten von Abel. Hensel übernahm die Herausgabe 1901 von Fuchs als der sechste der mit Crelle, Borchardt, Kronecker-Weierstraß beginnenden Reihe der Herausgeber. Schon kurz nach der Übernahme dieser Aufgabe, mitten zwischen den Verhandlungen wegen des Marburger Rufes, folgte er als der Herausgeber des Journals einer Einladung aus Kristiania zur Feier des 100. Geburtstages von Abel. Hensel hat das Journal bis zum Jahre 1936 herausgegeben, ab 1922 durch mich unterstützt, ab 1930 gemeinsam mit Schlesinger und mir, und ab 1934 mit mir allein; er hat es stets als ein ihm besonders ans Herz gewachsenes Kind angesehen.

In den Jahren 1908 und 1912 nahm Hensel an den Internationalen Mathematikerkongressen in Rom und Cambridge teil.

Im Weltkrieg stellte sich Hensel als Hauptmann der Landwehr zur Verfügung und wurde Bahnhofskommandant, zunächst in dem kleinen Städtchen Gerstungen bei Eisenach, später in Marburg, wo er nebenher in beschränktem Umfange seine Vorlesungstätigkeit fortsetzen konnte. Sein sich allmählich verschlimmerndes Gichtleiden zwang ihn, sich noch während des Krieges aus dem Militärdienst verabschieden zu lassen.

Nach dem Weltkrieg füllten sich die Hörsäle erneut mit einer gereiften, von ungewöhnlichem Arbeitseifer beseelten und größtenteils hochbefähigten akademischen Jugend.

Hensel nahm als ihr akademischer Lehrer lebhaften Anteil an diesem Aufschwung und freute sich über die schönen Leistungen, die in seinen Übungen und Seminaren erzielt wurden. Er hatte ein warmes Herz für diese Jugend und half, wo er konnte, die Härten der Nachkriegszeit zu mildern und ihrem Leben durch Begeisterung für die wissenschaftliche Arbeit einen neuen Inhalt zu geben. Als es wieder möglich war, reiste er zur Erholung nach dem ihm von früher her so lieben Italien und auch nach Paris, ohne allerdings Berührung mit den dortigen Mathematikern zu suchen. Erst eine weitere Reise nach Italien und Sizilien brachte ihn in sehr angenehmen persönlichen Verkehr mit den italienischen Mathematikern, die ihn mit großer Liebenswürdigkeit empfingen. Ein längerer wissenschaftlicher Briefwechsel entspann sich mit dem Grazer Mathematiker Rella, der sich für die Henselschen zahlentheoretischen Arbeiten lebhaft interessierte. Später besuchte er Rella auch persönlich in dessen ständigem Ferienaufenthalt in Küb am Semmering. Auf kürzere Zeit kamen u. a. Fueter, Hellinger und Ostrowski nach Marburg, um die Theorie der p -adischen Zahlen bei ihrem Schöpfer kennen zu lernen.

Einen Höhepunkt in Hensels wissenschaftlichem Leben bildete ein Aufenthalt in Berlin, wo er auf Einladung der dortigen Mathematiker vor einem lebhaft interessierten Zuhörerkreis Vorträge über seine arithmetischen Forschungsergebnisse hielt. An weiteren Ehrungen und Anerkennungen hat es ihm nicht gefehlt. Die Universität Oslo ernannte ihn zu ihrem Ehrendoktor; die Absicht, aus diesem Anlaß noch einmal dorthin zu reisen, mußte er wegen zunehmender Altersbeschwerden aufgeben. Zu seinem 70. Geburtstag fand ein großer Empfang im Salon des Marburger Hauses statt. Nach einer Reihe ehrender Ansprachen von offizieller Seite überreichte ich ihm damals den zu seiner Überraschung heimlich fertiggestellten Festband des Crelleschen Journals, in dem zahlreiche Mathematiker aus aller Welt ihm wertvolle Arbeiten gewidmet hatten. Dies war der letzte größere Festtag, den Hensel in ungetrübter Freude begehen konnte. Noch waren um ihn alle seine Kinder und zahlreiche Enkel versammelt, in deren Reihen das Schicksal und die Zeitereignisse bald Lücken reißen und schweres Leid bringen sollten. Noch lebte vor allem sein einziger Sohn Albert Hensel, ein hochbegabter Jurist, Professor in Königsberg, den im Oktober 1933 auf einer Studienreise in Pavia ein Herzschlag dahinraffte.

Im Jahre 1930 trat Hensel nach Erreichung der Altersgrenze in den Ruhestand. Nachdem er noch eine Zeit lang mit seiner eigenen Vertretung beauftragt war, wurde mir seine Nachfolge übertragen. Er hat dann noch eine Reihe von Jahren am Unterrichtsbetrieb der Marburger Universität mit seiner vollen Arbeitskraft teilgenommen. Diese schönen Jahre, in denen ich das Glück hatte, mit meinem verehrten Lehrer an gleicher Stätte zu wirken und seine Gedanken in engster Berührung mit ihm durch eigene Forschungsarbeit weiterzuführen, wurden nur allzubald durch meine Wegberufung nach Göttingen abgeschnitten.

Seine letzten Lebensjahre, als der zweite Weltkrieg bereits seine düsteren Schatten vorauswarf und dann ausbrach, verbrachte Hensel zurückgezogen und recht einsam im engsten Familienkreis und mit einigen wenigen nahen Freunden, unter ihnen vor allem dem Alttestamentler Budde. Seine wissenschaftliche Arbeit hat er unermüdlich bis zum letzten Lebenstage fortgesetzt, ohne ganz den erstrebten Abschluß zu erreichen. Die Entwürfe zu Arbeiten aus dieser letzten Zeit, in denen er eine Reihe von gedanklichen Vereinfachungen seiner Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen brachte, sind leider nach dem Kriege in einem Bergwerksstollen, zusammen mit vielem anderen wertvollen wissenschaftlichen Material der Universität Göttingen verbrannt.

Ein Herzschlag bereitete diesem langen, reichen, fruchtbaren Leben kurz vor Vollendung des achtzigsten Lebensjahres ein sanftes Ende.

II. Die wissenschaftlichen Arbeiten.

1. Hensel gehört zu denjenigen großen Mathematikern, die gleich durch ihre Erstlingsarbeit, die Dissertation, Aufsehen erregt und sich einen Namen verschafft haben. Die heute ganz geläufige und durchsichtige Tatsache, daß in den Diskriminanten der ganzen Zahlen eines algebraischen Körpers — oder, wie man damals noch sagte, einer Gattung — außerwesentliche Teiler auftreten, und daß es sogar allen Zahldiskriminanten gemeinsame außerwesentliche Diskriminantenteiler geben kann, erschien der damaligen Generation von Zahlentheoretikern als ein höchst seltsames, ganz unerwartetes Phänomen, das der näheren Aufklärung bedurfte. In seiner Dissertation gelang es Hensel, diesen Sachverhalt von Grund aus zu klären, indem er zeigte, daß es sich dabei keineswegs um eine seltsame Ausnahmeerscheinung handelte, sondern daß das Auftreten der gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler von einem allgemeinen Gesetz beherrscht wird, das er dann später in zwei weiteren Arbeiten noch ausgebaut hat. Danach ist der tiefere Grund für das Auftreten dieser Teiler ein rein kombinatorischer, und es lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür in ganz einfacher arithmetischer Gestalt angeben.

Die Methoden, mit denen Hensel dieses Problem bewältigte, entstammen ganz dem Ideenkreis seines Lehrers Kronecker. Dieser hatte in seiner großen, bahnbrechenden Arbeit „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“ vom Jahre 1882, in Fortführung und Verallgemeinerung von Kummers Theorie der idealen Zahlen eine allgemeine Methodik zur Grundlegung der Arithmetik in algebraischen Körpern entwickelt, bei der statt des Kummerschen Begriffs der idealen Zahl der Divisorbegriff trat, der auf die Betrachtung von Formen in Unbestimmten gegründet war. Dieser Methodik bediente sich Hensel nicht nur zur Lösung des genannten Problems, sondern auch zur Behandlung weiterer Fragestellungen aus der Theorie der algebraischen Körper. So beschäftigt er sich in einer größeren Reihe anschließender Arbeiten mit der Theorie der Diskriminante und ihrer Primdivisoren überhaupt, mit der Darstellung der ganzen Größen durch ein Fundamentalsystem (Basis), der Verzweigungstheorie der Divisoren, sowie auch mit der Komposition von Körpern, also kurz gesagt mit den Grundlagen der heute abgeschlossen vorliegenden Arithmetik in algebraischen Körpern. Charakteristisch für diese Kronecker-Henselsche Methodik, die dann neben der ihr entgegenstehenden Dedekindschen auch in Hilberts Zahlbericht Eingang fand, ist die Tatsache, daß sie die Grundlegung der Arithmetik für die algebraischen Zahlkörper und Funktionenkörper in geordnetem Aufbau ergibt, ein Gesichtspunkt, der nach zeitweiligem Zurücktreten auch heute wieder weitgehende Beachtung findet. So beschäftigen sich denn unter den Henselschen Arbeiten in dieser ersten Periode seines Schaffens eine Anzahl auch mit Problemen aus der Theorie der algebraischen Funktionen von einer oder zwei Variablen und der Theorie der Riemannschen Flächen und ihrer Abelschen Integrale, und legen so den Grund für die 1902 in dem ersten großen Hauptwerk gemeinsam mit Landsberg systematisch dargestellte Theorie dieser Funktionen von einer Variablen, sowie auch zu der später von Hensels Schüler Jung entsprechend entwickelten arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. Eine gelungene Zusammenfassung jenes ersten Hauptwerks gab Hensel in seinem 1921 erschienenen Enzyklopädieartikel.

Daneben hat Hensel in jener ersten Schaffensperiode, angeregt durch Kroneckers Art, die Determinantentheorie zu entwickeln, eine Reihe von Arbeiten zur linearen Algebra geschrieben, in denen es sich um die arithmetische Theorie der Elementarteiler von Matrizen — oder, wie er oft sagt, Systemen —, den Produktsatz für

die Determinanten aus rechteckigen Matrizen, die Realität der Wurzeln der Säkulargleichung, die Klassifikation der gemischt quadratisch-linearen Formen und gar eine Anwendung der Methoden der linearen Algebra auf ein optisches Problem (Strahlenbündel) handelt. Auf einige dieser Themen ist er auch später noch in einigen Arbeiten zur Theorie der Matrizen in abstrakten Körpern zurückgekommen.

2. Die schon bei Kronecker vorliegende gemeinsame Behandlung der algebraischen Zahl- und Funktionenkörper und die von Weierstraß übernommene systematische Verwendung der Potenzreihenentwicklungen bei den letzteren, an Stelle der auf das Kontinuum und geometrische Vorstellungen gestützten Riemannschen Begründungsart, haben dann Hensel zwangsläufig auf die Konzeption des Grundgedankens seiner großen zahlentheoretischen Neuschöpfung, der Theorie der p -adischen Zahlen geführt. Dieser Grundgedanke bestand darin, für die bei den Funktionenkörpern bewährte Potenzreihenmethode ein Analogon bei den Zahlkörpern zu schaffen. Mit dieser Idee trat er erstmalig 1899 in seiner „Neuen Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen“ hervor, der dann bald eine mehr systematische Ausgestaltung in mehreren Arbeiten folgte.

Der Boden für die Henselsche Neuschöpfung war durch die Weierstraßsche Behandlung der hyperelliptischen Funktionen und der Abelschen Integrale weitgehend vorbereitet. In den Weierstraßschen Vorlesungen über diese Gegenstände, die Hensel neben denen seines Hauptlehrers Kronecker mit regstem Interesse gehört hatte, finden sich in der Tat neben der grundlegenden Potenzreihenmethode bereits die wesentlichen arithmetischen Begriffsbildungen vorgezeichnet, wie etwa die des Primelements und der Ordnungszahl. Um die Henselsche Leistung recht zu würdigen, muß man sich aber vergegenwärtigen, welche großen begrifflichen Schwierigkeiten der Durchführung des Grundgedankens entgegenstanden. Während wir heute durchaus gewohnt sind, die Potenzreihenentwicklungen der algebraischen Funktionen als formal aufzufassen, also dabei von der tatsächlich bestehenden Konvergenz in einer Umgebung der Entwicklungsstelle zu abstrahieren, lag damals die algebraische Grundlage für eine solche Abstraktion, der allgemeine Körperbegriff, noch nicht vor. Dennoch setzte Hensel kühn die formalen p -adischen Entwicklungen der algebraischen Zahlen an, indem er einfach lehrte, wie man mit diesen neuartigen Gebilden aus einem bisher unbekannten Reservoir mathematischer Objekte rechnen und vergleichen sollte. Es handelt sich demnach hier um eine echte, von Intuition und Phantasie eingegebene Neuschöpfung, die zunächst, wie jede revolutionisierende Idee, lapidar und unbehauen hingeworfen wurde, und die ähnlich wie der Leibnizsche Differentialkalkül zunächst des soliden logischen Fundaments entbehrte. Diese erforderliche Fundamentierung wurde dann später auf Grund der Steinitzschen abstrakten Körpertheorie durch die Bewertungstheorie von Kürschák und Ostrowski gegeben, und man kann sagen, daß diese für die Entwicklung der modernen Algebra und Arithmetik grundlegenden Arbeiten den Anlaß zu ihrer Entstehung gerade der Henselschen Theorie der p -adischen Zahlen verdanken. Ähnlich wie Leibniz hat auch Hensel seine neugeschaffenen Zahlen ungeachtet der mangelnden Fundamentierung mit sicherem Instinkt gehandhabt und mit ihrer Hilfe eine völlig neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie gegeben, die er dann 1908 in seinem zweiten Hauptwerk niederlegte; zu dem ursprünglich geplanten zweiten Bande dieses Werkes ist es nicht gekommen.

Nur einmal hat ihn sein Instinkt betrogen, nämlich bei dem Versuch, auf die p -adischen Entwicklungen einen neuen Beweis der Transzendenz der Zahl e zu gründen. Wir können heute klar sehen, weswegen sein Ansatz, nämlich e als Nullstelle der p -adischen

Gleichung $x^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$ aufzufassen, nicht das gewünschte Ergebnis liefert, und dabei

gleichzeitig erkennen, in welcher Richtung die noch erforderliche Fundamentierung der Henselschen Konstruktion zu suchen war. Die durch jene Gleichung definierte Zahl e_p , von der sich leicht zeigt, daß sie zwar über dem Körper der rational- p -adischen Zahlen algebraisch, aber über dem Körper der rationalen Zahlen transzendent ist, hat mit der gewöhnlich unter e verstandenen reellen Zahl nichts zu tun; denn e und e_p sind Zahlen aus den perfekten Hüllen des rationalen Zahlkörpers nach zwei nicht-äquivalenten Bewertungen, und es gibt nachweislich keinen beiden Hüllen gemeinsamen bewerteten Erweiterungskörper, in dem man die formale Übereinstimmung der Entwicklungen als eine Gleichheit der Zahlen deuten könnte.

Wie oft in der geschichtlichen Entwicklung hat auch dieser mißglückte Henselsche Ansatz eine unerwartete Frucht getragen. Die Beschäftigung mit der Exponentialreihe brachte Hensel auf den Gedanken, ganz allgemein Exponentialfunktion, Logarithmus und Potenzfunktion in seinen p -adischen Zahlkörpern nachzubilden. Es zeigte sich dann, daß mit Hilfe dieser Bildungen ein Problem lösbar wurde, das noch im Hilbertschen Zahlbericht als ungelöst aufgeführt wird, nämlich die Bestimmung der Struktur der Restklassengruppen nach Primdivisorpotenzen. Diese in mehreren Arbeiten durchgeführte Untersuchung läuft in der Henselschen Auffassung, daß die Kongruenzwerte nach Primdivisorpotenzen Annäherungen an die zu betrachtende algebraische Zahl darstellen, darauf hinaus, die Struktur der Multiplikationsgruppe der p -adischen Erweiterungskörper eines algebraischen Zahlkörpers zu bestimmen, und so wird das Problem von Hensel auch wirklich angefaßt. Es war dies der erste Erfolg der Henselschen Theorie, der über die Dedekindsche idealtheoretische Begründung der algebraischen Zahlentheorie hinausführte.

Systematisch verarbeitet hat Hensel die durch Hinzunahme der elementar-analytischen Funktionen bereicherte p -adische Zahlentheorie 1912 in seinem dritten Hauptwerk, das allerdings seinem lehrbuchartigen Charakter entsprechend auf die dem rationalen Zahlkörper zugeordneten p -adischen Zahlkörper beschränkt ist, dafür aber in seinem Schlußkapitel über quadratische Formen ein neues fruchtbares Anwendungsgebiet für die p -adische Methode erschließt, das dann der Ausgangspunkt für den späteren Siegeszug dieser Methode in der gesamten modernen Arithmetik werden sollte. Erwähnt seien hier auch noch einige kleinere elementar-zahlentheoretische Ergebnisse Hensels, die in diese mittlere Schaffensperiode fallen, wie Verallgemeinerungen des Fermatschen und Wilsonschen Satzes, Bestimmung der höchsten Potenz einer Primzahl p in den Fakultätenzahlen $n!$ durch die p -adische Quersumme von n sowie des Kongruenzwertes mod. p nach Wegdivision dieser Potenz, später auch noch für die Polynomkoeffizienten durchgeführt, und Bestimmung des quadratischen Restcharakters der Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers nach einer Primzahl.

3. In der nach dem Weltkrieg einsetzenden abschließenden Periode seines Schaffens hat Hensel einen erheblichen Teil seiner Arbeitskraft darauf verwandt, seine neue Begründungsweise immer wieder zu revidieren und auszufeilen. So zieht er für die Aufspaltung eines Primdivisors in Potenzen verschiedener Primdivisoren bei algebraischer Erweiterung die Zerlegung des p -adisch zum Ring erweiterten Grundkörpers in eine direkte Summe von Körpern heran, wendet sich später nochmals der Begründung der Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen zu und arbeitete bis zuletzt an dem Mechanismus des Newtonschen Polygons als einer Methode, aus der Grundgleichung einer algebraischen Erweiterung die Primdivisorzerlegung zu konstruieren. Hensel hat wie sein Lehrer Kronecker ganz entschieden auf dem Standpunkt gestanden, daß die beim Aufbau einer Theorie benutzten Begriffsbildungen in endlich vielen Schritten konstruiert sein müssen, ehe man mit ihnen

arbeitet, und er hat sich in allen seinen Veröffentlichungen viele liebevolle Mühe gegeben, diese Konstruktionen möglichst elegant und einfach durchzuführen.

An weiteren Anwendungen seiner Begründungsart auf die höhere algebraische Zahlentheorie brachte er zunächst die Theorie der Primdivisorzerlegung in relativ-zyklischen, insbesondere in Kummerschen Körpern von Primzahlgrad und daran anschließend dann eine p -adische Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in diesen Körpern, teilweise in Zusammenarbeit mit mir. Ähnlich wie schon bei der Strukturbestimmung der Restklassengruppen nach Primdivisorpotenzen zeigte sich auch hier ganz klar der Vorteil der p -adischen Auffassung; an Stelle der Normenkongruenzen nach beliebig hohen Potenzen des Primdivisors bei Hilbert, tritt bei Hensel die einfache Normengleichung im zugehörigen p -adischen Körper. Erst diese Deutung des Hilbertschen Symbols ermöglichte die dann später von mir durchgeführte, auf p -adischer Grundlage beruhende arithmetische Invariantentheorie der Algebren nebst ihrer Anwendung auf Klassenkörpertheorie und Reziprozitätsgesetz. Geführt wurde ich auf diese Zusammenhänge durch eine Synthese meiner Ausgestaltung der Henselschen Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols einerseits und der Henselschen Theorie der binären quadratischen Formen andererseits. So wurzelt also die heute durch das Hinzukommen der Arbeiten von Chevalley u. a. wesentlich abgeschlossen dastehende moderne Form der Theorie der Algebren, Klassenkörper und Reziprozitätsgesetze nicht nur der beherrschenden Methodik nach auf Hensels Neuschöpfung, sondern stützt sich auch sachlich auf zwei zunächst heterogen erscheinende Henselsche Ansätze.

4. Es sei mir gestattet, dieser Würdigung des wissenschaftlichen Lebenswerks meines Lehrers Kurt Hensel noch die folgenden Ausführungen mehr persönlicher Art hinzuzufügen.

Als ich mich im Jahre 1921 nach fünf abgekürzten Nachkriegssemestern in Göttingen entschloß, mein Studium als Schüler von Hensel in Marburg abzuschließen, hatten meine Göttinger Lehrer Courant, Hecke, Landau und auch mein Konsementer Reidemeister nicht viel mehr als ein mitleidiges Lächeln dafür, daß man als junger Mathematiker Göttingen mit seiner altherwürdigen Tradition den Rücken kehren könne, um sich einer so ausgefallenen Sache wie der Henselschen p -adik im kleinen Marburg zu widmen. Ich kannte damals Hensel noch nicht, sondern hatte lediglich seine „Zahlentheorie“ in einem Antiquariat auf der Weender Straße gesehen und, da sie sehr billig war, erworben. Bei der Lektüre bekam ich sofort den Eindruck von etwas sehr Schönerem und Eigenartigem, das gerade dadurch einen besonderen Reiz auf mich ausübte, daß ich es wegen der mangelnden Fundamentierung nicht von Grund aus verstand. Als dann hinzukam, daß Hecke, der mir unter meinen Göttinger Lehrern am meisten gegeben hatte, einem Rufe nach Hamburg folgte, stand mein Entschluß fest, und auch Courants Zureden und Ausmalen der Vorteile und Aussichten in Göttingen konnten ihn nicht mehr umstoßen. Ich habe diesen Entschluß nicht zu bereuen gehabt, auch ganz abgesehen davon, daß mir Hensel sehr bald neben dem verehrten Lehrer ein väterlicher Freund wurde. Denn nachdem ich bei ihm die Grundlagen der p -adik erlernt und von Grund aus verstanden hatte, lag mir klar vor Augen, welch mächtiges Instrument diese bisher eben nur in ihren Grundlagen entwickelte Methodik werden konnte, wenn man sie auf die höheren Probleme der algebraischen Zahlentheorie, insbesondere auf die Reziprozitätsgesetze anwendete. Da ich zunächst nur die Theorie der rational- p -adischen Zahlen erlernt und wirklich verstanden hatte und in der damals beginnenden Inflationszeit schnell zum Abschluß meines Studiums kommen mußte, wählte ich unter den zwei Themen, die mir Hensel nannte, das elementarere, über die p -adische Theorie der rationalzahligen quadratischen Formen, und auch diese Wahl habe ich nicht zu bereuen gehabt. Denn gerade bei der Beschäftigung mit

diesem Thema fiel mir schon frühzeitig das allgemeine Prinzip über den Zusammenhang zwischen dem Verhalten im Kleinen und im Großen in die Hand, durch das die p -adik zur arithmetischen Invariantentheorie wird.

Daß die Henselsche p -adische Methode damals, von einem ganz kleinen Kreis begeisterter Schüler und Anhänger abgesehen, so wenig Beachtung fand und ein so geringes Ansehen genoß, ist wohl verständlich, zumal in Göttingen, wo unter dem nachwirkenden Einfluß von Riemann die Weierstraßschen Gedankengänge sich noch nicht vollen Boden erobert hatten. Schien doch die Dedekindsche idealtheoretische Methode schneller und begrifflich leichter faßlich zum Aufbau der Arithmetik in algebraischen Zahlkörpern zu führen, und waren doch die mit dieser Methode vor allem unter den Händen von Hilbert und seinen Schülern erzielten Ergebnisse, nämlich die allgemeine Klassenkörpertheorie und das allgemeine Reziprozitätsgesetz, von ganz anderer Größenordnung als die paar Fortschritte, die Hensel bisher mit seiner Methode hatte erzielen können. Auch war zwar die Steinitzsche Arbeit schon Allgemeingut geworden, aber die auf ihrem Boden mögliche Fundamentierung der p -adik durch die Kürschák-Ostrowskische Bewertungstheorie erst im Entstehen begriffen. Selbst als die Erfolge der p -adik bei den quadratischen Formen durch meine Erstlingsarbeiten bekannt wurden und ich weitere Erfolge bei der Behandlung der expliziten Reziprozitätsformeln in algebraischen Zahlkörpern erzielen konnte, genügte das immer noch nicht, um der Henselschen Begründungsart einen zum mindesten gleichberechtigten Platz neben der Dedekindschen zu sichern. Ich entsinne mich an zahlreiche Gespräche, die ich in den Jahren 1922—1925 mit Artin über den Wert der p -adik führte. Artin war Feuer und Flamme für die Dedekindsche Idealtheorie, in der ihn die größere Eleganz und Einfachheit bestach, und hatte für die p -adik dasselbe mitleidige Lächeln wie seinerzeit meine Göttinger Lehrer. Neben dem Hinweis auf die bisher erzielten Erfolge führte ich vor allem auch den folgenden Gesichtspunkt für die p -adik ins Feld. Da man es in der höheren Zahlentheorie fast durchweg mit den Primdivisoren und ihren Potenzen als multiplikativen Bausteinen der Körperzahlen und als Kongruenzmoduln zu tun hat, dagegen nur selten noch mit den ihnen zugeordneten Vielfachenmengen, den Idealen, erschien es mir vernünftig und didaktisch besser, auch bei der Begründung zunächst diese Bausteine, die Primdivisoren, zu konstruieren, anstatt diese erst ganz am Schluß der Grundlegung aus den an die Spitze gestellten Idealen herauszupräparieren; denn bei diesem letzteren Gang hat man es während der ganzen Einführung mit einem nicht explizit konstruierten, sondern durch formale Eigenschaften definierten Begriff zu tun, und der Lernende vermag sich zunächst gar keine Vorstellung über den Umfang dieses Idealbegriffs zu machen. Aber auch für diesen Gesichtspunkt zeigte Artin damals wenig Sinn. Erst die späteren großen Erfolge der p -adik in der Theorie der Algebren und Klassenkörper vermochten es, ihn für die Henselsche Methode zu gewinnen, ihn zur vollen Anerkennung ihres Wertes zu bringen und gar eigene Arbeiten von ihm zur Begründung der p -adik (Bewertungen algebraischer Zahlkörper) herbeizuführen.

Ich habe es immer als ein großes Glück empfunden, daß ich durch eigene und von mir angeregte Arbeiten dazu beitragen durfte, dem Lebenswerk meines verehrten Lehrers Hensel die ihm gebührende Anerkennung zu verschaffen. Er selbst hat wohl gefühlt, wie wenig Geltung seine große Neuschöpfung, auf die er mit Recht stolz war, sich noch in den zwanziger Jahren erworben hatte, obwohl er sich nie darüber geäußert hat. Später hat er dann mit größter Freude und regster Anteilnahme an dem Aufstieg teilgenommen. Wenn er auch als Siebziger und Fünfundsiebziger das Neue nicht mehr in allen Einzelheiten verfolgen und gar selbst daran mitarbeiten konnte, so hat er doch die beherrschenden Gedanken, die auf seine eigenen aufbauten, voll erfaßt und gewürdigt, ganz anders als der etwa gleichaltrige Hilbert.

Als ich mit diesem Anfang der dreißiger Jahre ein Gespräch über die moderne Entwicklung der Klassenkörpertheorie herbeiführte, bewies er, daß er es sehr ernst genommen hatte mit seiner oft gepriesenen „Kunst des Vergessens“ — um den Geist frei für Neues zu machen. Er ließ sich von mir über die von ihm selbst entwickelten Hauptsätze der Klassenkörpertheorie orientieren, hörte dabei interessiert und mit vielen verständigen Zwischenfragen zu, und sagte schließlich: „Ja, das ist ja alles wirklich ganz wunderschön, wer hat denn das äjentlich jemacht?“ So vollständig hatte er eine seiner eigenen Großtaten vergessen. Zu einer anschließenden Schilderung alles dessen, was inzwischen dazu gekommen war, ließ er es dann nicht mehr kommen. Zweifellos ist diese so konsequent durchgeführte Kunst des Vergessens eine der wesentlichen Voraussetzungen für Hilberts Großtaten auf allen mathematischen Gebieten gewesen. Hensel selbst wäre der letzte gewesen, der nicht neidlos dem überragenden Genius Hilberts aufrichtige Bewunderung und Verehrung gezollt hätte.

Auch was die ganze Persönlichkeit und Lebenshaltung betrifft, gibt es wohl keinen größeren Unterschied als zwischen diesen beiden Gelehrten, deren Leben sich fast über den gleichen Zeitraum erstreckt hat. Es gibt zahlreiche Anekdoten über Hilbert, aus denen dessen ganze Eigenart vielleicht beredter spricht als aus einer ernsteren Persönlichkeitsschilderung. Über Hensel gibt es keine solchen, wohl aber steckte er selbst voll von reizenden Geschichtchen über die meisten Gelehrten und Menschen von Format, mit denen er in Berührung gekommen war. Er erzählte sie oft und gerne, aber immer mit der größten Liebeshwürdigkeit. Niemals habe ich ihn ein boshafte Wort über andere aussprechen hören. Das Höchste, zu dem er sich einmal verstieg, war die Äußerung: „Ja, der Kollege N. ist ein etwas schwieriger Mensch“, oder: „Ich kenne ihn noch nicht so genau“.

Jeder, der den* Gelehrten Hensel aus seinen Schriften gekannt hat, vor allem aber jeder, der das Glück hatte, mit seiner liebenswerten Persönlichkeit bekannt zu werden, wird diesem großen Manne, der die zahlentheoretische Wissenschaft so reich beschenkt hat, aus vollem Herzen allezeit ein ehrendes Andenken bewahren.

Schriftenverzeichnis.

A. Bücher, Beiträge zu Sammelwerken.

1. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Gemeinsam mit G. Landsberg. Leipzig, B. G. Teubner, 1902.
2. Theorie der algebraischen Zahlen, Band I. Leipzig, B. G. Teubner, 1908.
3. Zahlentheorie. Berlin/Leipzig, G. J. Göschen, 1913.
4. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen. Encykl. d. math. Wiss. II. C. 5 (1921) 533—650.

B. Herausgaben.

1. L. Kronecker, Werke, Band I—V. Leipzig, B. G. Teubner, 1895, 1897, 1899, 1929, 1930.
2. L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie, Band I. Leipzig, B. G. Teubner, 1901.
3. L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Band 1. Leipzig, B. G. Teubner, 1903.

C. Abhandlungen.

1. Arithmetische Untersuchungen über Diskriminanten und ihre außerwesentlichen Teiler. Diss. Berlin, 1884.
2. Über die Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen. J. f. Math. **105** (1889) 329—344.
3. Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei anderen componirt ist. Acta math. **14** (1891) 317—319.
4. Zur Theorie der linearen Formen. J. f. Math. **107** (1891) 241—245.
5. Anwendung der Theorie der Modulsysteme auf ein Problem der Optik. J. f. Math. **108** (1891) 140—143.
6. Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale, I. J. f. Math. **109** (1891) 140—143.

7. Über die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt. *J. f. Math.* **110** (1892) 180—183.
8. Über den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen. *Jahresber. Deutsche Math.-Ver.* **1** (1892) 56—59.
9. Über die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variablen durch ein Fundamentalsystem. *J. f. Math.* **111** (1894) 139—155.
10. Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Teiler ihrer Discriminante. *J. f. Math.* **113** (1894) 61—83.
11. Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen außerwesentlichen Discriminantenteiler einer Gattung. *J. f. Math.* **113** (1894) 128—160.
12. Über die Klassification der nichthomogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung. *J. f. Math.* **113** (1894) 303—317.
13. Bemerkung zu der Abhandlung „On the theory of Riemann's integrals“ by H. F. Baker, Bd. 45 der *Mathematischen Annalen*. *Math. Ann.* **45** (1894) 598—599.
14. Über die Ordnung der Verzweigungspunkte einer Riemannschen Fläche. *Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin* 1895, 933—943.
15. Über die Verzweigung der drei- und vierblättrigen Riemannschen Flächen. *Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin* 1895, 1103—1114.
16. Über einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen. *J. f. Math.* **115** (1895) 254—294.
17. Über den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen, welche durch eine Funktion von n Veränderlichen darstellbar sind. *J. f. Math.* **116** (1896) 350—356.
18. Über die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem. *J. f. Math.* **117** (1896) 29—41.
19. Über die Reduction algebraischer Systeme auf die canonische Form. *J. f. Math.* **117** (1896) 129—139.
20. Über die Fundamentalteiler algebraischer Gattungsbereiche. *J. f. Math.* **117** (1897) 333—345.
21. Über die Fundamentalteiler eines Gattungsbereichs in Bezug auf zwei verschiedene Rationalitätsbereiche. *J. f. Math.* **118** (1897) 173—185.
22. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reducirte Form. *J. f. Math.* **118** (1897) 234—250.
23. Über die Elementarteiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist. *J. f. Math.* **117** (1897) 346—355.
24. Über die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers. *Gött. Nachr.* 1897, 247—253.
25. Über die Fundamentalgleichung und die außerwesentlichen Discriminantenteiler eines algebraischen Körpers. *Gött. Nachr.* 1897, 254—260.
26. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form (2. Abhandlung). *J. f. Math.* **119** (1898) 114—130.
27. Über die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe. *J. f. Math.* **119** (1898) 175—185.
28. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresber. Deutsche Math.-Ver.* **6** (1899) 83—88.
29. Über die Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen. *Jahresber. Deutsche Math.-Ver.* **7** (1899) 58—61.
30. Über diejenigen algebraischen Körper, welche aus zwei anderen componirt sind. *J. f. Math.* **120** (1899) 99—108.
31. Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen. *Jahresber. Deutsche Math.-Ver.* **8** (1900) 221—231.
32. Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen. *Acta math.* **23** (1900) 339—416.
33. Zur Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der Abelschen Integrale. *Math. Ann.* **54** (1901) 437—497.
34. Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen. *Math. Ann.* **55** (1901) 301—336.
35. Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes. *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **1** (1901) 319—322.
36. Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen. *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **2** (1902) 293 bis 294.
37. Über analytische Functionen und algebraische Zahlen. *Berl. Math. Ges. Ber.* **1** (1902) 29—32.
38. Bemerkungen zur Determinantentheorie. *J. f. Math.* **126** (1903) 73—82.
39. Zur Theorie der Systeme. *J. f. Math.* **126** (1903) 165—170.
40. Neue Grundlagen der Arithmetik. *J. f. Math.* **127** (1904) 51—84.
41. Theorie der Körper von Matrizen. *J. f. Math.* **127** (1904) 116—166.
42. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *J. f. Math.* **128** (1904) 1—32.
43. Über die zu einem algebraischen Körper gehörigen Invarianten. *J. f. Math.* **129** (1905) 68—85.
44. Sur la relation $(D/p) = (-1)^{n-1}$ et la loi de réciprocité. Gemeinsam mit D. Mirimanoff. *J. f. Math.* **129** (1905) 86—87.
45. Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen. *Jahresber. Deutsche Math.-Ver.* **14** (1905) 545—558.
46. Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen. *Jahresber. Deutsche Math.-Ver.* **16** (1907) 299 bis 319, 388—393, 473—496.
47. Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper. *J. f. Math.* **136** (1909) 183—209.

48. Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers. Mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker. Herausgegeben vom Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Abh. z. Geschichte d. math. Wiss. **29** (1910), Leipzig/Berlin, B. G. Teubner.
49. Ernst Eduard Kummer und der große Fermatsche Satz. Akademische Festrede zu Kaisers Geburtstag. Marburg, N. G. Elwertsche Verlagsbuchh., 1910.
50. Georg Landsberg gestorben. Frankf. Zeitung **261** (1912).
51. Über die Grundlagen einer neuen Theorie der quadratischen Zahlkörper. J. f. Math. **144** (1914) 57—70.
52. Die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors. H. A. Schwarz-Festschr. 61—75, Berlin 1914.
53. Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primdivisors. J. f. Math. **145** (1915) 92—113.
54. Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers. J. f. Math. **146** (1916) 189—215.
55. Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul. J. f. Math. **147** (1917) 1—15.
56. Die Verallgemeinerung des Legendreschen Symbolen für allgemeine algebraische Körper. J. f. Math. **147** (1917) 233—248.
57. Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen. Math. Zeitschr. **2** (1918) 433—452.
58. Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. Math. Zeitschr. **5** (1919) 118—131.
59. Über die Invarianten algebraischer Körper. J. f. Math. **149** (1919) 125—146.
60. Über die Zerlegung der Primteiler in relativ zyklischen Körpern, nebst einer Anwendung auf die Kummerschen Körper. J. f. Math. **151** (1920) 112—120.
61. Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper. J. f. Math. **151** (1921) 200—209.
62. Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers. J. f. Math. **151** (1921) 210—212.
63. Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ Abelschen Zahlkörpern. Math. Ann. **85** (1922) 1—10.
64. Über die Normenreste und Nichtreste eines relativ zyklischen Körpers vom Primzahlgrad l nach einem Primteiler l von l . Gemeinsam mit H. Hasse. Math. Ann. **90** (1923) 262—278.
65. Über ein neues Normenrestsymbol und seine Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern. J. f. Math. **152** (1923) 225—234.
66. Arithmetische Eigenschaften der Polynomkoeffizienten. J. f. Math. **153** (1924) 8—11.
67. Über Potenzreihen von Matrizen. J. f. Math. **155** (1926) 107—110.
68. Aus der Geschichte des Journals für die reine und angewandte Mathematik. J. f. Math. **157** (1926) 1—2.
69. Paul Bachmann und sein Lebenswerk. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **36** (1927) 31—73.
70. Über eindeutige Zerlegung in Primelemente. J. f. Math. **158** (1927) 195—198.
71. Die Exponentialdarstellung der rationalen Zahlen für den Bereich einer Primzahl. Ges. Bef. ges. Naturw. Marburg **62** (1927) 431—434.
72. Über den Zusammenhang zwischen den Systemen und ihren Determinanten. J. f. Math. **159** (1928) 246—254.
73. Über Systeme in einfachen Körpern. J. f. Math. **160** (1929) 131—142.
74. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. J. f. Math. **165** (1931) 257—264.
75. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen, II. J. f. Math. **168** (1932) 117—128.
76. Über die Ausführbarkeit der elementaren Rechenoperationen in Ringen von Systemen. J. f. Math. **169** (1933) 67—70.
77. Über die vollständige arithmetische Auflösung der algebraischen Gleichungen. Berl. Math. Ges. Ber. **32** (1933) 3—16.
78. Über den Zusammenhang zwischen den Kongruenzgruppen eines algebraischen Körpers für alle Potenzen eines Primteilers als Modul. J. f. Math. **177** (1937) 82—93.