Werk

Titel: Drei Vermutungen über algebraische Funktionenkörper.

Autor: Teichmüller, Oswald

Jahr: 1943

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0185|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Drei Vermutungen über algebraische Funktionenkörper.[1]

Von *Oswald Teichmüller*, z. Zt. Norwegen.

Es ist mir jetzt gelungen, neue rein algebraische Folgerungen aus meinen heuristischen Untersuchungen über quasikonforme Abbildungen zu ziehen.

Es handelt sich hauptsächlich (algebraisch ausgedrückt) um folgende Fragestellung: k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, $k(y, z) / k$ vom Transzendenzgrad 2 und $K / k(y, z)$ endlich algebraisch; Y sei der Körper aller i. b. a. $k(y)$ algebraischen Elemente aus K. Es kommt uns nur auf k, Y, K an; y ist beliebig in Y, aber nicht in k, und z ist beliebig in K, aber nicht in Y. Ist Y^* eine endlich-algebraische Erweiterung von Y, so sei K^* die Erweiterung des hyperkomplexen Systems Y^* mit dem Grundkörper Y auf den neuen Grundkörper K, also das Kompositum[2]). Bei gegebenem $k < Y < K$ wird nun gefragt: Gibt es ein Y^* so, daß in dem zugehörigen K^* ein algebraischer Funktionenkörper X vom Transzendenzgrad 1 über k existiert, der mit Y^* zusammen K^* erzeugt?

Zunächst einige Vorbemerkungen, deren Inhalt im Prinzip vielleicht schon bekannt ist. In einem separabel erzeugbaren algebraischen Funktionenkörper (einer Veränderlichen) bilden wir nicht nur gewöhnliche Differentiale wdz, sondern auch *Differentiale m-ter Dimension* wdz^m, insbesondere *quadratische* Differentiale für $m = 2$ und *reziproke* Differentiale für $m = -1$, und ordnen ihnen Divisoren aus $\mathfrak{W}^m$ zu[3]); sie heißen *überall endlich*, wenn der Divisor ganz ist. Für so ein wdz^m schreiben wir kurz $d\xi^m$, obwohl es i. a. keine m-te Potenz ist. — Unter einem *Hauptteil für Differentiale m-ter Dimension an der Stelle* $\mathfrak{p}$ verstehen wir eine additive Restklasse von Differentialen m-ter Dimension mod den in $\mathfrak{p}$ endlichen Differentialen m-ter Dimension. Wir sprechen von einem *Hauptteilsystem*, wenn an jeder Stelle $\mathfrak{p}$ ein Hauptteil gegeben ist, aber nur endlich viele $\neq 0$. So bilden die Hauptteile eines Differentials m-ter Dimension $d\xi^m$ das *Hauptteilsystem von* $d\xi^m$.

Nun seien $d\zeta_1^{1-m}, \ldots, d\zeta_\tau^{1-m}$ ($\tau = \dim \mathfrak{W}^{1-m}$) eine Basis der überall endlichen Differentiale $(1-m)$-ter Dimension. Dann ist

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (d\xi^m \cdot d\zeta_t^{1-m}) = 0 \qquad (t = 1, \ldots, \tau).$$

Hier ist über alle Stellen $\mathfrak{p}$ zu summieren; wenn $\mathfrak{p}$ vom Grade 1 ist[4]), ist das Residuum der

[1]) Aus einem Brief an Hasse vom 11. 8. 1940. Später durch Fußnoten und zwei Anhänge ergänzt.

[2]) K^* ist ein *Körper* (und *darum* das bis auf Isomorphie *einzige Kompositum* von Y^* und K i. b. a. Y), weil Y *in* K *algebraisch abgeschlossen* ist. Beweis etwa durch Übergang zu einem i. b. a. Y Galoisschen Oberkörper von Y^*.

[3]) $\mathfrak{W}$ ist die Differentialklasse.

[4]) Das kann man für die endlich vielen kritischen $\mathfrak{p}$ von vornherein annehmen oder durch Grundkörpererweiterung erreichen.

Koeffizient von $\frac{d\pi}{\pi}$ bei Entwicklung nach einem Primelement π. Dieses Residuum hängt nur vom *Hauptteil* von $d\xi^m$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ ab. Unsere $\tau = \dim \mathfrak{W}^{1-m}$ Gleichungen sind also τ *lineare Relationen, die für das Hauptteilsystem jedes* $d\xi^m$ *gelten.* Es gilt nun folgender

Hilfssatz[5]. *Diese* τ *Relationen sind linear unabhängig, und ein Hauptteilsystem ist dann und nur dann das Hauptteilsystem eines Differentials m-ter Dimension, wenn dafür diese* τ *Relationen bestehen.*

Diese Aussage wollen wir formal umformen. Ein *Isomorphismus* zwischen zwei endlichen Moduln (Linearmannigfaltigkeiten) über einem Körper P ist einfach eine eineindeutige lineare Abbildung; dabei ist der *Rang* invariant. Wir wollen von einer *Dualität* zwischen zwei endlichen Moduln sprechen, wenn der eine isomorph auf den Modul aller Linearformen im anderen Modul abgebildet ist. Diese Beziehung ist symmetrisch. Man hat dann ein „Produkt" eines Elements des einen Moduls mit einem des anderen, nämlich den Wert der dem ersten zugeordneten Linearform für das andere Element; dieses Produkt ist eine nicht ausgeartete Bilinearform, die die Dualität definiert. Duale endliche Moduln haben den gleichen Rang[6].

Jetzt können wir unseren Hilfssatz auch so ausdrücken: Wir fassen die Hauptteilsysteme in Klassen zusammen, nämlich additive Restklassen mod den Hauptteilsystemen von existierenden Differentialen m-ter Dimension. Es besteht eine Dualität zwischen dem Modul dieser *Hauptteilsystemklassen* und dem Modul der überall endlichen Differentiale $(1-m)$-ter Dimension. Die nicht ausgeartete Bilinearform ist dabei

$$\sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^{1-m})\ ^{7}).$$

Insbesondere sind die

$$x_t = \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta_t^{1-m}) \qquad (t = 1, \ldots, \tau)$$

ein Koordinatensystem im Modul aller Hauptteilsystemklassen[8], und dieser Modul hat i. b. a. den Konstantenkörper den Rang $\tau = \dim \mathfrak{W}^{1-m}$.

---

[5]) Beweis in verallgemeinerter Form s. Anhang I.

[6]) Gleichbedeutend ist offenbar folgende Erklärung der Dualität: M sei ein endlicher Modul vom Rang m mit der Basis $u_1, \ldots, u_m$ und dem allgemeinen Elemente $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i$ (ξ_i in P), N ein endlicher Modul vom Rang n mit der Basis $v_1, \ldots, v_n$ und dem allgemeinen Element $y = \sum_{k=1}^{n} v_k \eta_k$ (η_k in P). Es soll eine Bilinearform $C(x, y)$ gegeben sein, die jedem Paar x aus M, y aus N ein Element $C(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \xi_i \gamma_{ik} \eta_k$ in P bilinear zuordnet. Bei Übergang zu neuen Basen $u_1', \ldots, u_m'$ oder $v_n', \ldots, v_n'$ hat man natürlich die γ_{ik} so zu transformieren, daß $C(x, y)$ invariant ist. Diese Bilinearform soll nichtausgeartet sein, d. h. ein x, für das $C(x, y)$ für alle y gleich 0 ist, ist 0, und ein y, für das $C(x, y)$ für alle x gleich 0 ist, ist 0. Die Bedingung ist offenbar $m = n$, $|\gamma_{ik}| \neq 0$. Dann sprechen wir von einer durch die Bilinearform C definierten Dualität zwischen M und N. Für jedes x in M ist $C(x, y)$ eine *Linearform* in N, d. h. eine Funktion, die den Elementen von N linear Werte aus P zuordnet, und diese Abbildung, die jedem Element von M eine Linearform in N zuordnet, ist linear und eineindeutig; so kommt man auf die im Text gegebene Definition zurück. S. auch Anm. [15]).

[7]) Wenn N ein endlicher und M ein beliebiger P-Modul ist, sonst sich aber alles wie in Anm. [6]) verhält, dann ist von selbst auch M ein endlicher Modul mit demselben Rang wie N. (Beweis: Jeder endliche Teilmodul von M ist dual zu einem gewissen Restklassenmodul von N.) In unserem Falle ist M der Modul aller Hauptteilsystemklassen und N der Modul aller überall endlichen $d\zeta^{1-m}$; P ist der Konstantenkörper unseres Funktionenkörpers. Zunächst ist klar, daß $C(x, y)$ nur von der Hauptteilsystemklasse x abhängt. Daß die τ Relationen linear unabhängig sind, besagt: aus $C(x, y) = 0$ für alle x folgt $y = 0$; die zweite Behauptung des Hilfssatzes besagt, daß aus $C(x, y) = 0$ für alle y folgt $x = 0$.

[8]) Sind $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von N, so sind $C(x, v_1), \ldots, C(x, v_n)$ n linear unabhängige Linearformen in M, also ein Koordinatensystem. Man kann eine neue Basis $u_1, \ldots, u_n$ von M durch $C(u_i', v_k) = \left\{\begin{matrix} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{matrix}\right\}$ bestimmen; dann ist $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' u_i'$ mit $\xi_i' = C(x, v_i)$.

Nun sei wie zu Anfang k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, Y ein algebraischer Funktionenkörper über k und K ein algebraischer Funktionenkörper mit dem genauen Konstantenkörper Y, und es seien y in Y, aber nicht in k, und z in K, aber nicht in Y beliebig gewählt. An jeder Primstelle $\mathfrak{P}$ von K/Y nehme ich eine *verallgemeinerte Ortsuniformisierende* z' — darunter verstehen wir eine Funktion aus K, die ihren endlichen Wert in $\mathfrak{P}$ einfach annimmt, so daß jede in $\mathfrak{P}$ ganze Funktion in eine Potenzreihe nach $z' - a$ entwickelbar ist, wo a in einem algebraischen Oberkörper von Y liegt — und ein irreduzibles Polynom F mit Koeffizienten aus Y mit $F(z, z') = 0$; wenn z für $\mathfrak{P}$ unendlich ist, soll z durch $\frac{1}{z}$ ersetzt werden[9]). Dann bilde ich das reziproke Differential

$$-\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1}$$

und nehme seinen Hauptteil an der Stelle $\mathfrak{P}$. Man sieht leicht, daß dieser Hauptteil von der Wahl von z' (und F) unabhängig ist und invariant ist, wenn z einer linearen gebrochenen Transformation mit Koeffizienten aus k unterworfen wird. F_y ist selbstverständlich durch Differentiation der einzelnen Koeffizienten von F zu berechnen. Der Hauptteil hängt also bei gegebenem $k < Y < K$ nur von y und z ab; er ist höchstens an den endlich vielen Verzweigungsstellen von $K/Y(z)$ von 0 verschieden, und die Ordnung des Pols des Hauptteils ist höchstens gleich der Verzweigungsordnung[10]). Wir haben es also mit einem Hauptteilsystem zu tun. Ersetzen wir y durch ein y' (in Y, aber nicht in k), so multipliziert sich das Hauptteilsystem nur mit $\frac{dy}{dy'}$.

Auf Grund funktionentheoretisch-differentialgeometrischer Überlegungen von heuristischer Art stelle ich nun folgende **Vermutungen** auf:

1. *Die Klasse des eben definierten Hauptteilsystems ist auch von z unabhängig, hängt also nur von k, K und y ab.*

2. *Dann und nur dann gibt es eine endlich-algebraische Erweiterung Y^* von Y und in der entsprechenden Erweiterung K^* von K einen algebraischen Funktionenkörper X vom Transzendenzgrad 1 über k, der mit Y^* zusammen K^* erzeugt, wenn diese Hauptteilsystemklasse $= 0$ ist.*

Diese beiden Vermutungen möchte ich noch etwas näher erklären und in einen größeren Zusammenhang stellen. Jetzt ist k der Körper der komplexen Zahlen.

Das y, das bisher eine *Unbestimmte* war, soll jetzt eine *veränderliche Zahl* sein[11]). An die Stelle des Funktionenkörpers K vom Transzendenzgrad 2 tritt jetzt[12]) ein algebra-

[9]) Dieser Satz ist nach einem Vorschlag von Eichler gegenüber dem Text des Briefes abgeändert. Der Inhalt der Arbeit wird dadurch nicht berührt.

[10]) All dies kann man aus folgender Darstellung sehen: Hat $\mathfrak{P}$ den Grad 1 und hat z bei $\mathfrak{P}$ die Entwicklung

$$z = p + c_\nu(z' - a)^\nu + c_{\nu+1}(z' - a)^{\nu+1} + \cdots (\nu \geqq 1),$$

so hat $-\frac{F_y}{F_z}\,dz^{-1}$ denselben Hauptteil wie

$$p_y \frac{dz'}{dz}\,dz'^{-1}.$$

Das folgt aus $F(x, z') = (x - p - c_\nu(x' - a)^\nu - \cdots)\,H(x)$, wo das Polynom $H(x)$ Koeffizienten aus dem $\mathfrak{P}$-adischen Körper $K_\mathfrak{P}$ hat. Wieder darf man sich auf den Fall grad $\mathfrak{P} = 1$ beschränken. Vgl. auch Anhang II.

[11]) y war als i. b. a. k transzendentes Element des Oberkörpers Y von k als *Unbestimmte über k* anzusehen. Jetzt aber soll y eine *komplexe Zahl in k* sein, die wir variieren lassen. Der Übergang zwischen beiden Auffassungen durch „Spezialisierung" des y bietet bei exakter Durchführung manche Schwierigkeiten.

[12]) Wenn man y spezialisiert, s. Anm. [11]).

ischer Funktionenkörper $Z_y = k(z, w)$, der algebraisch (oder doch analytisch) von einem Parameter y abhängt und dafür nur noch den Transzendenzgrad 1 über k hat. z mag weiterhin als Unbestimmte angesehen werden. Die Koeffizienten der z mit einer „verallgemeinerten Ortsuniformisierenden" z' verbindenden irreduziblen Gleichung $F(z, z') = 0$ sind also Funktionen von y. Wieder wird durch

$$-\frac{F_y}{F_z}\, dz^{-1}$$

ein Hauptteilsystem für reziproke Differentiale bestimmt, das nur aus dem obigen durch Spezialisierung des y entsteht und Pole höchstens an den Verzweigungspunkten von $Z_y/k(z)$ hat.

Wir fassen nun die *Klassen birational äquivalenter irreduzibler Gleichungen* $f(z, w) = 0$ oder die *Klassen isomorpher Funktionenkörper* oder die *Klassen konform äquivalenter Riemannscher Flächen* eines festen Geschlechts g zu einer algebraischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$, in der ein Punktbegriff gegeben ist, oder zu einem *Raum* $\mathfrak{R}$ zusammen. P sei ein regulärer Punkt von $\mathfrak{R}$. Ein *kontravarianter Vektor in* P ist eine Vorschrift, die jedem in P regulären Koordinatensystem $u^1, \ldots, u^\tau$ Komponenten (Zahlen) $v^1, \ldots, v^\tau$ so zuordnet, daß, wenn sie auch dem Koordinatensystem $\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^\tau$ Komponenten $\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^\tau$ zuordnet,

$$\tilde{v}^i = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k} v^k$$

gilt. Ein *kovarianter Vektor in* P hat entsprechend Komponenten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$ mit

$$\tilde{\lambda}_i = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}\, \lambda_k.$$

Die kontravarianten und die kovarianten Vektoren in P bilden je einen τ-dimensionalen Modul über k, wo τ die Dimension von $\mathfrak{R}$ ist[13]), und es besteht zwischen ihnen eine Dualität, beschrieben durch die nicht ausgeartete Bilinearform $\sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i v^i$. Jeder analytischen oder gar algebraischen Parameterkurve $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ ist in jedem regulären Punkt $P(y)$ ein kontravarianter „*Geschwindigkeitsvektor*" zugeordnet: hat $P(y)$ die Koordinaten $u^1(y), \ldots, u^\tau(y)$, so hat dieser Vektor die Komponenten $\frac{du^1}{dy}, \ldots, \frac{du^\tau}{dy}$.

Nun habe ich in Nr. 88 der Abhandlung „Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale"[14]) im Vorübergehen, ohne es damals gebührend zu betonen, eine *Dualität zwischen dem Modul der überall endlichen quadratischen Differentiale* $d\zeta^2$ *eines algebraischen Funktionenkörpers* Z *und dem Modul der infinitesimalen Verrückungen des diesen Körper* Z *in* $\mathfrak{R}$ *vertretenden Punktes* P heuristisch aufgestellt. (Die Bilinearform heißt dort $\iint \bar{B} \frac{d\zeta^2}{dz^2} \boxed{dz}$, wo $\bar{B} \frac{\boxed{dz}}{dz^2}$ die infinitesimale Verrückung beschreibt.) Die infinitesimalen Verrückungen werden aber durch kontravariante Vektoren beschrieben. Darum ist der Modul der kontravarianten Vektoren dual zum Modul der überall endlichen quadratischen Differentiale[13]). Dieser ist aber nach dem Hilfssatz ($m = -1$)

---

[13]) Bekanntlich ist die Dimension von $\mathfrak{R}$ stets gleich dim $\mathfrak{W}^2$, denn beide sind gleich

$$\begin{Bmatrix} 0, & g = 0 \\ 1, & g = 1 \\ 3(g-1), & g > 1 \end{Bmatrix}.$$

Meines Wissens ist früher kein Versuch gemacht worden, diese Übereinstimmung zu erklären.

[14]) Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1939.

dual zum Modul der Hauptteilsystemklassen für reziproke Differentiale. Folglich[15]) haben wir einen *Isomorphismus des Moduls der kontravarianten Vektoren mit dem Modul der Hauptteilsystemklassen für reziproke Differentiale.*

Wie sieht nun dieser Isomorphismus praktisch aus? Wenn eine Kurve $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ durch einen vom Parameter y abhängigen Funktionenkörper Z_y wie oben festgelegt wird, ist ihr ja in jedem regulären Punkt ein kontravarianter Geschwindigkeitsvektor zugeordnet; welche Hauptteilsystemklasse entspricht ihm? Das habe ich ausgerechnet[16]); das Ergebnis ist[17]) (bis auf einen Faktor -2π) gerade das oben durch $-\frac{F_y}{F_z}dz^{-1}$ bestimmte Hauptteilsystem. Allerdings mußte ich voraussetzen, es träten nur einfache Verzweigungspunkte auf; aber diese Voraussetzung dürfte aus Stetigkeitsgründen entbehrlich sein. Eigentlich sollte man die singulären Punkte von $\mathfrak{R}$ ausnehmen, aber vermutlich ist das nicht nötig; die „topologische Festlegung", die ich nicht algebraisch fassen kann, beseitigt alle Singularitäten.

(Ebenso besteht ein Isomorphismus zwischen dem Modul der kovarianten Vektoren und dem Modul der überall endlichen quadratischen Differentiale. Man kann also jeder analytischen Invariante eines Funktionenkörpers das überall endliche quadratische Differential zuordnen, das ihrem Gradienten entspricht.)

Die Hauptteilsystemklasse, die dem Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ entspricht, darf von der Wahl von z nicht abhängen; das entspricht unserer ersten Vermutung. Wenn ferner diese Hauptteilsystemklasse für alle y verschwindet, muß $P(y)$ konstant sein; in allen Körpern Z_y muß sich dann durch birationale Transformationen ein und derselbe (in $\mathfrak{R}$ durch das konstante $P(y)$ vertretene) algebraische Funktionenkörper $X = k(x, u)$ realisieren lassen. Wenn Z_y algebraisch von y abhängt, wird vermutlich auch diese birationale Transformation in y algebraisch gewählt werden können (Zusammenhang mit *W. Weber*, Über die Einheitlichkeit von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal[18])); das habe ich durch die zweite Vermutung zu präzisieren versucht. Wir müssen nur im Auge behalten, daß y in der Formulierung als Unbestimmte, in der Begründung aber als Veränderliche auftritt.

Die Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche $y_1, \ldots, y_n$ drängt sich auf. Wir formulieren sofort die weitere **Vermutung**:

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, $k(y_1, \ldots, y_n)$ der rationale Funktionenkörper in n Unbestimmten, $Y/k(y_1, \ldots, y_n)$ endlich algebraisch und K ein algebraischer Funktionenkörper (vom Transzendenzgrad 1) über dem genauen Konstantenkörper Y; z liege in K, aber nicht in Y. Wir bilden in K ähnlich wie vorhin die n durch

$$-\frac{F_{y_\nu}}{F_z}dz^{-1} \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

bestimmten Hauptteilsysteme; r sei der Rang des von den n zugehörigen Hauptteilsystemklassen erzeugten Moduls über Y. Dann gibt es eine endlich algebraische Erweiterung Y^*

[15]) Mit jedem Modul M ist zugleich der Modul M' aller Linearformen in M gegeben, der Prototyp eines zu M dualen Moduls, und die Beziehung zwischen M und M' ist symmetrisch. Eine Dualität zwischen M und N kann als Doppelisomorphie $M \cong N'$, $M' \cong N$ angesehen werden, wo jede dieser beiden Isomorphien die andere festlegt. Bei dieser Auffassung ist es klar, daß beim Zusammensetzen einer Dualität von L und M mit einer Dualität von M und N eine Isomorphie $L \cong N$ (und $L' \cong N'$) entsteht.

[16]) Die Rechnung, die auf der Theorie der infinitesimalen quasikonformen Abbildungen aufbaut, wird in Anhang II durchgeführt.

[17]) Nachdem ein bestimmtes z zugrunde gelegt worden ist.

[18]) Deutsche Mathematik **1**.

von Y und in der zugehörigen Erweiterung K^* von K einen Teilkörper X vom Transzendenzgrad $r+1$ über k, der mit Y^* zusammen K^* erzeugt.

Es ist zu beachten, daß hier stets

$$r \leqq \dim \mathfrak{W}^2 = \begin{cases} 0, & g = 0 \\ 1, & g = 1 \\ 3(g-1), & g > 1 \end{cases}$$

ist, wo g das Geschlecht von K/Y ist.

Anhang I.

Wir beweisen eine Verallgemeinerung des zu Anfang formulierten Hilfssatzes. m sei eine ganze rationale Zahl, $\mathfrak{a}$ sei ein Divisor unseres Funktionenkörpers und $\mathfrak{A}$ seine Divisorenklasse. Unter einem *Hauptteil bezüglich* $\mathfrak{a}$ *an der Stelle* $\mathfrak{p}$ verstehen wir eine additive Restklasse von Differentialen m-ter Dimension mod den, durch $\mathfrak{a}$ dividiert, in $\mathfrak{p}$ endlichen Differentialen m-ter Dimension; entsprechend *Hauptteilsystem bezüglich* $\mathfrak{a}$. Die additiven Restklassen von Hauptteilsystemen bezüglich $\mathfrak{a}$ mod den Hauptteilsystemen bezüglich $\mathfrak{a}$ von existierenden Differentialen m-ter Dimension heißen *Hauptteilsystemklassen bezüglich* $\mathfrak{a}$. Hier hat man eine Basis

$$d\zeta_1^{1-m}, \ldots, d\zeta_\tau^{1-m} \quad (\tau = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m})$$

der, mit $\mathfrak{a}$ multipliziert, überall endlichen Differentiale $(1-m)$-ter Dimension, und

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (d\xi^m \cdot d\zeta_t^{1-m}) = 0 \qquad (t = 1, \ldots, \tau)$$

sind τ lineare Relationen für das Hauptteilsystem jedes $d\xi^m$ bezüglich $\mathfrak{a}$. *Wir behaupten wieder, daß diese τ Relationen linear unabhängig sind und daß es zu einem gegebenen Hauptteilsystem dann und nur dann ein Differential m-ter Dimension $d\xi^m$ gibt, wenn diese τ Relationen erfüllt sind*[19]). Oben wurde nur der Sonderfall $\mathfrak{a} = 1$ gebraucht.

Zum *Beweis* nehmen wir einen ganzen Divisor $\mathfrak{d}$ der Klasse $\mathfrak{D}$, den wir hinreichend groß wählen werden. Vorgelegt sei ein Hauptteilsystem, für das jene τ Relationen erfüllt sind; ich wähle $\mathfrak{d}$ so groß, daß die Hauptteile, mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert, ganz werden, und betrachte alle Hauptteilsysteme mit der letzteren Eigenschaft zugleich. Nach dem *Riemann-Rochschen Satz* ist

$$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = \dim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} \mathfrak{W}^{1-m} + \operatorname{grad} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - g + 1$$

$$\dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m} + \operatorname{grad} \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - g + 1$$

$$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - \dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = \operatorname{grad} \mathfrak{D} - \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m},$$

wenn $\mathfrak{d}$ so groß gewählt ist, daß $\dim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} \mathfrak{W}^{1-m} = 0$ ist. $\operatorname{grad} \mathfrak{D}$ ist nun der Rang der Linearmannigfaltigkeit aller Hauptteilsysteme bezüglich $\mathfrak{a}$, die mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert ganz werden;

[19]) Demnach definiert auch hier die Bilinearform

$$\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^{1-m})$$

eine Dualität zwischen den Hauptteilsystemen für Differentiale m-ter Dimension bezüglich $\mathfrak{a}$ und den, mit $\mathfrak{a}$ multipliziert, überall endlichen Differentialen $(1-m)$-ter Dimension $d\zeta^{1-m}$.

$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - \dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m$ ist der Rang derjenigen linearen Teilmannigfaltigkeit, wo es ein Differential m-ter Dimension gibt[20]), und wir kennen schon $\tau = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$ lineare Relationen, die in der letzteren Teilmannigfaltigkeit gelten. Wir sind fertig, wenn wir zeigen, daß diese Relationen in der großen Linearmannigfaltigkeit linear unabhängig sind[21]). Dann liegt nämlich erstens jedes Element der großen Linearmannigfaltigkeit (Hauptteilsystem für Differentale m-ter Dimension bezüglich $\mathfrak{a}$, das mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert ganz wird), sowie dafür jene τ Relationen erfüllt sind, schon in der Teilmannigfaltigkeit derer, die Hauptteilsystem bezüglich $\mathfrak{a}$ eines Differentials m-ter Dimension sind; insbesondere gilt dies dann für das vorgelegte Hauptteilsystem, von dem wir ausgegangen sind; zweitens sind dann jene τ Relationen linear unabhängig, weil sie schon bei Beschränkung auf unsere große Linearmannigfaltigkeit vom Rang grad $\mathfrak{D}$ linear unabhängig sind.

Wir wählen $\mathfrak{d}$ so groß, daß $k >$ grad $\mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$ Primstellen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ darin aufgehen, die in $\mathfrak{a}$ nicht vorkommen. Wären die τ Relationen linear abhängig, dann gäbe es ein $d\zeta^{1-m} = \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i \, d\zeta_i^{1-m} \neq 0$, für das $\sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^{1-m}) = 0$ für jedes, mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert, ganze Hauptteilsystem wäre. Nimmt man hier ein Hauptteilsystem $\mathfrak{p}$, das bei $\mathfrak{p}_k$ in beliebiger Weise einen Pol erster Ordnung hat und sonst überall verschwindet, so folgt, daß $d\zeta^{1-m}$ an der Stelle $\mathfrak{p}_k$ verschwindet. Ein, mit $\mathfrak{a}$ multipliziert, überall endliches Differential $(1-m)$-ter Dimension $d\zeta^{1-m}$ kann aber höchstens grad $\mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$ Nullstellen haben; Widerspruch.

Folglich sind die τ Linearformen linear unabhängig, und die Behauptung ist bewiesen.

Der soeben bewiesene Hilfssatz kann als erklärender Zusatz zum Riemann-Rochschen Satz aufgefaßt werden[22]).

Anhang II.

Wir nehmen einen algebraischen Funktionenkörper Z_y an, der analytisch oder sogar algebraisch von einem Parameter y abhängt, und fassen ihn als Oberkörper von $k(z)$ und seine Riemannsche Fläche $\mathfrak{Z}_y$ als Überlagerungsfläche der z-Ebene auf. Wir nehmen an, es treten *nur einfache* (zweiblättrige) Windungspunkte $\mathfrak{p}_\nu$ über $z = p_\nu$ auf; durch eine lineare gebrochene Transformation von z mit von y unabhängigen Koeffizienten können wir erreichen, daß alle p_ν für einen gewissen y-Bereich endlich sind.

[20]) Denn dim $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m$ ist der Rang des Moduls aller in Frage kommenden $d\xi^m$, und dim $\frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}$ ist der Rang des Teilmoduls derjenigen $d\xi^m$, die bezüglich $\mathfrak{a}$ das Hauptteilsystem 0 haben.

[21]) In einem endlichen Modul M vom Rang d über dem Grundkörper P mögen τ linear unabhängige Linearformen gegeben sein. Die Teilmannigfaltigkeit N aller Elemente von M, wofür alle diese Linearformen 0 sind, hat dann den Rang $d - \tau$. Wenn also ein Teilmodul N' von M bekannt ist, in dem alle diese Linearformen 0 sind und der den Rang $d - \tau$ hat, dann ist $N' = N$, d. h. jedes Element von M, wo alle τ Linearformen verschwinden, liegt in N'. In unserem Falle ist M der Modul aller Hauptteilsysteme für Differentiale m-ter Dimension bezüglich $\mathfrak{a}$, die mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}}$ multipliziert ganz werden, N' der Teilmodul derer, die Hauptteilsystem bezüglich $\mathfrak{a}$ eines existierenden Differentials m-ter Dimension sind, P der Konstantenkörper, $d =$ grad $\mathfrak{D}$ und $\tau = \dim \mathfrak{A}\mathfrak{W}^{1-m}$; N' hat den Rang

$$\dim \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m - \dim \frac{1}{\mathfrak{A}} \mathfrak{W}^m = d - \tau.$$

[22]) Vgl. hierzu O. Teichmüller, Extremalprobleme der konformen Geometrie; Eine Begründung der algebraischen Funktionentheorie durch Uniformisierung.

Sie sind dann analytische Funktionen $p_\nu(y)$ von y und legen $\mathfrak{Z}_y$ und damit Z_y fest, sowie nur ein einziges $\mathfrak{Z}_{y_0}$ bekannt ist.

Nun muß erst kurz wiederholt werden, wie die Dualität zwischen den infinitesimalen Abänderungen eines algebraischen Funktionenkörpers und seinen quadratischen Differentialen zustande kommt. Z_y hängt ja von y ab; ich bilde die Riemannsche Fläche $\mathfrak{Z}_y$ von Z_y durch eine Abbildung, die (nach Übergang zu den Ortsuniformisierenden) hinreichend regulär ist und die nur unendlich wenig von der Identität verschieden ist, auf die unendlich benachbarte Fläche $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ ab, wo δy eine von erster Ordnung unendlich kleine *reelle* Zahl ist. Ist π eine verallgemeinerte Ortsuniformisierende an einer Stelle von $\mathfrak{Z}_y$ und π' eine an der entsprechenden Stelle von $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$, so ist vermöge unserer Abbildung

$$|\, d\pi' \,|^2 = \lambda\{|\, d\pi \,|^2 + \delta y \cdot \Re(Bd\pi^2)\},$$

wo λ ein von π abhängiger reeller Faktor ist, in den noch δy eingeht und der in erster Näherung gleich 1 ist, und wo B eine komplexwertige Funktion von π ist. Wenn man von π und π' zu neuen Ortsuniformisierenden übergeht, ist $B\dfrac{d\pi^2}{|\,d\pi\,|^2}$ und damit auch

$$\overline{B}\frac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$$

($\overline{|d\pi|}$ Flächenelement in der π-Ebene) invariant, und *durch dieses auf* $\mathfrak{Z}_y$ *gegebene* $\overline{B}\dfrac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *beschreibe ich die infinitesimale Abänderung* $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$. Aber man konnte $\mathfrak{Z}_y$ auf verschiedene Arten auf $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ abbilden, deshalb muß man immer diejenigen (durch ihr $\overline{B}\dfrac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ beschriebenen) Abbildungen zu einer *Klasse* zusammenfassen, die $\mathfrak{Z}_y$ auf *dieselbe oder eine konform äquivalente Nachbarfläche* $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ abbilden oder die Z_y in *denselben oder einen isomorphen* Körper $Z_{y+\delta y}$ überführen. *Es hat sich gezeigt, daß diese Klassen von* $\overline{B}\dfrac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *genau die additiven Restklassen mod denjenigen* $\overline{B}\dfrac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *sind, für die*

$$\int\int \overline{B}\frac{d\zeta^2}{d\pi^2}\overline{|d\pi|} = 0$$

für alle überall endlichen quadratischen Differentiale $d\zeta^2$ *von* Z_y *ist, daß diese additiven Restklassen eineindeutig und linear den früher eingeführten kontravarianten Vektoren in dem* Z_y *entsprechenden Punkte* P_y *von* $\mathfrak{R}$ *entsprechen, und daß die Bilinearform*

$$\int\int \overline{B}\frac{d\zeta^2}{d\pi^2}\overline{|d\pi|}$$

eine Dualität zwischen diesen kontravarianten Vektoren oder Klassen von $\overline{B}\dfrac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$ *einerseits und den überall endlichen quadratischen Differentialen* $d\zeta^2$ *andererseits festlegt.*

Wir nehmen jetzt also irgendeine Abbildung $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ wie oben, berechnen ihr $\overline{B}\dfrac{\overline{|d\pi|}}{d\pi^2}$, das noch einige Willkür enthält, und dann die Linearform $l(d\zeta^2) = \int\int \overline{B}\dfrac{d\zeta^2}{d\pi^2}\overline{|d\pi|}$; diese Linearform (die jedem $d\zeta^2$ linear eine komplexe Zahl zuordnet) muß von aller Willkür wieder frei sein und kann zur Beschreibung des Geschwindigkeitsvektors der Parameterkurve $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ dienen. Selbstverständlich sind singuläre Werte von y auszunehmen; über singuläre Punkte von $\mathfrak{R}$ siehe oben.

$\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ entsteht aus $\mathfrak{Z}_y$, indem der Windungspunkt $\mathfrak{p}_\nu$ von der Stelle $z = p$, nach $z = p_\nu(y + \delta y) = p_\nu(y) + \delta y \cdot p'_\nu(y)$ geschoben wird. Die positive Zahl R sei so klein, daß die zweiblättrigen Kreise $\mathfrak{K}_\nu$ um die Windungspunkte $\mathfrak{p}_\nu$ mit dem Halbmesser

R alle punktfremd sind. Es sei $0 < r < R$; die zweiblättrigen Kreise um die $\mathfrak{p}_\nu$ mit dem Halbmesser r sollen $\mathfrak{U}_\nu$ heißen, die zweiblättrigen Kreisringe $r < |z - p_\nu| < R$ um die $\mathfrak{p}_\nu$ aber $\mathfrak{R}_\nu$, so daß $\mathfrak{K}_\nu$ aus $\mathfrak{U}_\nu$ und $\mathfrak{R}_\nu$ zusammengesetzt ist. Auf der Fläche $\mathfrak{Z}_y$ wählen wir eine Funktion w von folgender Art: Außerhalb der $\mathfrak{K}_\nu$ ist $w = 0$. In $\mathfrak{U}_\nu$ ist w konstant gleich $p'_\nu(y)$. In $\mathfrak{R}_\nu$ soll w irgendwie so bestimmt werden, daß w auf $\mathfrak{Z}_y$ hinreichend regulär ist. Die Abbildung

$$z \to z + \delta y \cdot w$$

bildet dann $\mathfrak{Z}_y$ auf $\mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ ab. Für diese infinitesimale Abbildung ist, wenn man $z = x + iy$ als Ortsuniformisierende nimmt,

$$B = \overline{w_x + iw_y}^{23}).$$

(*Beweis.* z geht bei der Abbildung in

$$\pi' = z + \delta y \cdot w$$

über. Es ist

$$d\pi' = dz + \delta y \cdot dw;$$
$$|d\pi'|^2 = |dz|^2 + 2\delta y \cdot \Re(dz\, d\overline{w}).$$

Nun ist aber

$$2dw = (w_x - iw_y)dz + (w_x + iw_y)d\overline{z};$$

setzt man das ein und berücksichtigt man, daß δy unendlich klein und darum δy^2 zu vernachlässigen ist, so kann man schreiben

$$|d\pi'|^2 = (1 + \delta y \cdot \Re(w_x - iw_y))\{|dz|^2 + \delta y \Re(\overline{(w_x + iw_y)}dz^2)\}.$$

Vergleich mit

$$|d\pi'|^2 = \lambda\{|dz|^2 + \Re(Bdz^2)\}$$

ergibt

$$B = \overline{w_x + iw_y}.)^{24})$$

B ist nur in den $\mathfrak{R}_\nu$ von 0 verschieden (weil sonst die Abbildung $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ überall konform ist); darum durften wir z als verallgemeinerte Ortsuniformisierende nehmen.

Jetzt haben wir, um die in unserer Abbildung $\mathfrak{Z}_y \to \mathfrak{Z}_{y+\delta y}$ steckende Willkür zu beseitigen,

$$l(d\zeta^2) = \int\int \overline{B}\frac{d\zeta^2}{dz^2}\overline{|dz|}$$

zu berechnen. Das Integral ist die Summe der Integrale über die einzelnen $\mathfrak{R}_\nu$:

$$l(d\zeta^2) = \sum_\nu \int\int_{\mathfrak{R}_\nu} (w_x + iw_y)\frac{d\zeta^2}{dz^2}\overline{|dz|}.$$

Partielle Integration ergibt

$$l(d\zeta^2) = \sum_\nu \frac{1}{i}\int_{\mathfrak{R}_\nu} w\frac{d\zeta^2}{dz^2}dz.$$

---

[23]) Wenn man von y zu $\frac{y}{a}$ übergeht ($a \neq 0$ komplex), multipliziert sich $p'_\nu(y)$ mit a, und ebenso multiplizieren sich w und $\overline{B}\frac{\overline{|dz|}}{dz^2}$ mit a. $\delta y \cdot \overline{B}\frac{\overline{|dz|}}{dz^2}$ ändert sich also bei der Abänderung $y \to \frac{y}{a}$ überhaupt nicht. Ebenso bleibt es, wenn man $\overline{B}\frac{\overline{|dz|}}{dz^2}$ durch den kontravarianten Geschwindigkeitsvektor ersetzt. Deshalb ist es gestattet, auch hier (wie schon immer stillschweigend) *komplexe Koordinaten* in $\mathfrak{R}$ zu benutzen, und zugleich sehen wir, daß es nichts schadet, daß wir uns oben auf reelle δy beschränken mußten.

[24]) Die Rechnung verläuft genau wie in Nr. **64** von O. Teichmüller, Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1939.

w hat aber auf den beiden Randkurven von $\mathfrak{R}_\nu$ die konstanten Randwerte 0 bzw. $p'_\nu(y)$:

$$l(d\zeta^2) = \sum_\nu i \int_{\mathfrak{R}_\nu} p'_\nu(y) \frac{d\zeta^2}{dz}.$$

Das Vorzeichen hat sich geändert, weil $|z - p_\nu| = r$ als Randkurve von $\mathfrak{R}_\nu$ entgegengesetzt orientiert ist wie als Randkurve von $\mathfrak{R}_\nu$. Es ist also

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_\nu p'_\nu(y) \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}_\nu} \frac{d\zeta^2}{dz}.$$

Wir können jetzt in den $\mathfrak{R}_\nu$ immer

$$\pi_\nu = \sqrt{z - p_\nu}$$

als Ortsuniformisierende einführen; dann hat $\frac{d\zeta^2}{d\pi_\nu^2}$ in $\mathfrak{p}_\nu$ einen endlichen Wert $\frac{d\zeta^2}{d\pi_\nu^2}(\mathfrak{p}_\nu)$; es ist

$$\frac{1}{dz} = \frac{1}{2\pi_\nu d\pi_\nu}$$

und darum

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_\nu p'_\nu(y) \cdot \frac{1}{2} \frac{d\zeta^2}{d\pi_\nu^2}(\mathfrak{p}_\nu).$$

Aber diese explizite Formel verbirgt mehr, als sie zeigt. Wir bleiben lieber bei

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_\nu p'_\nu(y) \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}_\nu} \frac{d\zeta^2}{dz}.$$

Diese Formel lesen wir folgendermaßen: Jedem Verzweigungspunkt $\mathfrak{p}_\nu$ ordnen wir einen *Hauptteil für reziproke Differentiale* mit höchstens einem Pol erster Ordnung zu, nämlich $\frac{p'_\nu(y)}{dz}$ (oder, in der Ortsuniformisierenden $\pi_\nu = \sqrt{z - p_\nu}$ ausgedrückt, $\frac{p'_\nu(y)}{2\pi_\nu d\pi_\nu}$). Den anderen Punkten wird der Hauptteil 0 zugeordnet. Mit diesem Hauptteilsystem ist

$$l(d\zeta^2) = -2\pi \sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{Res}_{\mathfrak{p}} (\text{Hauptteil} \cdot d\zeta^2).$$

Das ist aber bis auf den Faktor -2π gerade die Linearform in der τ-dimensionalen Linearmannigfaltigkeit aller überall endlichen quadratischen Differentiale $d\zeta^2$, die ganz zu Anfang einem Hauptteilsystem immer zugeordnet wurde; so war ja die Dualität zwischen den Hauptteilsystemklassen und den $d\zeta^2$ erklärt.

Da nun sowohl die Linearmannigfaltigkeit der Hauptteilsystemklassen für reziproke Differentiale wie auch die Linearmannigfaltigkeit der kontravarianten Vektoren in dem entsprechenden Punkte von $\mathfrak{R}$ in bestimmter Weise dual zu der Linearmannigfaltigkeit der $d\zeta^2$ ist, bilden wir die ersten beiden isomorph aufeinander ab: wir ordnen eine Hauptteilsystemklasse und einen kontravarianten Vektor einander zu, wenn ihnen bei der Dualität bis auf den Faktor -2π dieselbe Linearform $l(d\zeta^2)$ in der Linearmannigfaltigkeit aller $d\zeta^2$ entspricht[15]). *In diesem Sinne entspricht dem Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ die durch $\frac{p'_\nu(y)}{dz}$ beschriebene Hauptteilsystemklasse.* Und für diese läßt sich auch die oben an die Spitze gestellte Definition durch $-\frac{F_y}{F_z} dz^{-1}$ geben, die vorzuziehen ist, sowie Verzweigungspunkte zusammenfallen; vgl. Anm.[10]).

z ist nur irgendeine nichtkonstante Funktion aus dem Körper Z_y; der Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ hat mit z nichts zu tun, und darum muß die ihm zugeordnete Hauptteilsystemklasse von der Wahl von z unabhängig sein. Wenn ferner diese Haupt-

teilsystemklasse verschwindet, ist auch der Geschwindigkeitsvektor von $P(y)$ gleich 0 und darum $P(y)$ in $\mathfrak{R}$ konstant. Das ist die heuristische analytische Begründung meiner Vermutungen.

Das Einführen der ziemlich willkürlichen Funktion w in der bestimmten Erwartung, daß sich alle Willkür bei der weiteren Rechnung wieder herausheben wird, ist der eigentliche Kerngedanke der ganzen Arbeit; alles andere ist nur formale Umformung, die aber notwendig ist, um dem Algebraiker das Verstehen meiner Vermutungen zu ermöglichen.

Eingegangen 3. März 1941.