Werk

Titel: Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix.

Autor: Buckel, Walter

Jahr: 1943

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0185|log17

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix.*)

Von *Walter Buckel*, in Erlangen.

Einleitung.

In der klassischen Differentialgeometrie der Flächen des R_3 spielt eine wichtige Rolle die sogenannte Dupinsche Indikatrix, mit deren Hilfe sich das Verhalten der Fläche in der Umgebung des betrachteten Flächenpunktes in gewissem Sinne angenähert beschreiben läßt. Für diesen Indikatrixbegriff liegen in verschiedenen Richtungen Verallgemeinerungen vor[1]). In der vorliegenden Arbeit wird demgegenüber ein, wie uns scheint, neues Moment in die Betrachtungen hineingetragen.

Entscheidend nämlich für die Gewinnung unserer, wie wir glauben, naturgemäßen Verallgemeinerung war die Erkenntnis, daß die Dupinsche Indikatrix aufs innigste zusammenhängt mit geometrischen Ordnungen, speziell mit der kinematischen Ordnung des betrachteten Flächenpunktes bezüglich der Geraden des R_3. Dieser von Herrn Haupt aufgedeckte Zusammenhang[2]), welcher den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet, läßt die metrischen Eigenschaften der Dupinschen Indikatrix unberücksichtigt, rückt dagegen die Tatsache in den Vordergrund, daß die Dupinsche Indikatrix im allgemeinen die Ordnung des betrachteten Flächenpunktes angibt. Ob die Ordnung 3 oder 2 vorliegt, hängt im allgemeinen davon ab, ob es in dem betrachteten Punkte Tangenten gibt, die eine Berührung zweiten Grades mit der Fläche haben oder nicht. Um diese Frage zu entscheiden, hat man die in der Taylorentwicklung der Fläche enthaltene Form 2. Grades gleich Null zu setzen. Die Dupinsche Indikatrix erhält man, indem man diese Form gleich einer Konstanten setzt; die Wahl dieser Konstanten gleich Null bedeutet den Verzicht auf gewisse metrische Eigenschaften der Dupinschen Indikatrix. Der oben für $n = 3$ erwähnte Zusammenhang zwischen der Ordnung eines Flächenpunktes und dem höchsten in diesem Punkte vorhandenen Grad der Berührung einer Tangente bleibt auch bestehen für geeignet differenzierbare Hyperflächen des R_n (§ 1). Als Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix in der von uns angestrebten Richtung ergibt sich damit ein System von Gleichungen, welches man durch Nullsetzen der Formen der Grade 2 bis

---

*) Von der Universität Erlangen genehmigte Dissertation (D 29). Berichterstatter: Prof. Dr. Otto Haupt.

[1]) Wir zitieren chronologisch (S. V. = Schriftenverzeichnis am Schluß der Arbeit): Kommerell S. V. 13, Hjelmslev S. V. 11, Bouligand S. V. 3, Busemann u. Feller S. V. 4 (dort auch eine eingehende Würdigung der wichtigen Arbeit des Herrn Hjelmslev), Falckenberg S. V. 6. Siehe auch S. V. 5, S. 151, 154, 166, 167.

[2]) S. V. 8, S. 97.

$n-1$ aus der Taylorentwicklung der Fläche erhält (1526). Im allgemeinen kann man nun zu einer direkt geometrischen Fassung übergehen, indem man an die Stelle dieser Gleichungen die ineinandergeschachtelten Mengen der Tangenten der Mindestberührungsgrade 1, 2, ... setzt (1531). Damit ist zugleich der Übergang zu den direkt geometrischen Methoden vollzogen[3]). Die so definierte Indikatrix erweist sich ihrerseits als überaus verallgemeinerungsfähig, wobei ihre Eigenschaft als „Ordnungsanzeiger" erhalten bleibt (§ 2). Diese allgemeinen Entwicklungen des § 2 werden zum Schluß (§ 3) dazu benutzt, um für entsprechend differenzierbare Hyperflächen im R_n die Indikatrix rechnerisch zu ermitteln, wobei aber, allgemeiner als in § 1, nicht die Geraden (lineare Ordnung), sondern beliebige, hinreichend oft differenzierbare Bogen als (Ordnungs)-Charakteristiken der kinematischen Ordnung zugrunde gelegt werden.*)

§ 1. Über die Auflösung des Berührungspunktes einer Tangente an eine Hyperfläche in mehrere gemeinsame Punkte.

Wir studieren in diesem Paragraphen die Auflösung des Berührungspunktes einer Tangente an eine Hyperfläche in mehrere gemeinsame Punkte. Die Möglichkeit der Auflösung des Berührungspunktes in zwei verschiedene gemeinsame Punkte ist trivial. Für die Möglichkeit der Auflösung in $m \geqq 3$ verschiedene gemeinsame Punkte werden wir zunächst eine notwendige und dann auch eine hinreichende Bedingung kennen lernen. Diese Ergebnisse werden uns dann in den Stand setzen, mit Methoden der klassischen Differentialgeometrie zu ordnungsgeometrischen Aussagen über Hyperflächenpunkte zu gelangen.

111. Der Sachverhalt.

1111. Hyperflächenstück. Es sei $k \geqq 2$ und ganz. Im k-dimensionalen Euklidischen Raume der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_k)$ liege ein Bereich $\mathfrak{B}$, der ein topologisches Bild eines offenen k-dimensionalen Würfels sein soll. In diesem Bereich $\mathfrak{B}$ sei eine reelle Funktion $y = f(P)$ erklärt, über die wir folgende Voraussetzungen machen wollen:

1. $f(P)$ sei überall in $\mathfrak{B}$ stetig.

2. Die partiellen Ableitungen von $f(P)$ seien bis zur Ordnung $k+1$ einschließlich überall in $\mathfrak{B}$ erklärt und stetig.

Die Funktion $y = f(P)$ gibt uns im $(k+1)$-dimensionalen Euklidischen Raume der Punkte $(x_1, \ldots, x_k, y)$ ein Hyperflächenstück, das heißt ein topologisches Bild eines k-dimensionalen, offenen Würfels,

---

*) Zusatz bei der Korrektur: In § 2 handelt es sich also nicht mehr allein um die in § 1 entwickelte „affine" Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix, also letzten Endes nicht nur um eine Verallgemeinerung der Haupttangentenkurven (vgl. dazu F. Roger, Zentralblatt für Math. **24** (1943), S. 138, Besprechung von W. Buckel, Über die Auflösung mehrfacher Nullstellen ..., Sitz.-Ber. d. physikal.-med. Societät zu Erlangen **73** (1942-43), S. 13-21). So kann man z. B. entsprechend § 2 auch die metrischen Eigenschaften der Dupinschen Indikatrix direkt geometrisch wiedergeben, und dies läßt sich leicht für Hyperflächen im R_n verallgemeinern.

[3]) In der Arbeit der Herren Busemann u. Feller wird auf direkt geometrischem Wege unter Verzicht auf Differenzierbarkeitsvoraussetzungen eine Indikatrix für konvexe Flächen des R_3 definiert. Diese Indikatrix beschreibt aber im wesentlichen metrische Eigenschaften des betrachteten Flächenpunktes. Der Ordnungsbegriff tritt hierbei, wegen der Beschränkung auf konvexe Flächen, naturgemäß zurück.

1112. **Tangente.** Es sei $P^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$ ein Punkt von $\mathfrak{B}$ und $y^* = f(P^*)$. Den zu P^* gehörenden Hyperflächenpunkt $(x_1^*, \ldots, x_k^*, y^*)$ bezeichnen wir auch kürzer mit (P^*, y^*). Wir betrachten eine im Punkte (P^*, y^*) an die Hyperfläche gelegte Tangente g^*. Es sei g^* gegeben durch:

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1^* t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k^* t, \; y = y^* + \beta^* t;$$

dabei sei $\alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*2} = 1$. Da g^* Tangente an die Hyperfläche im Punkte (P^*, y^*) sein soll, so muß $\beta^* = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(1)} f(P^*)$ sein.

112. Einige Definitionen.

1121. **Begriff der Auflösung.** Es sei r der Radius einer ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden, k-dimensionalen, offenen Kugel mit dem Mittelpunkt P^*. Wir sagen, der Berührungspunkt der Tangente g^* lasse sich in mindestens $m \geqq 2$ verschiedene, gemeinsame Punkte auflösen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varrho > 0$ mit $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ eine Gerade g, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1^{(0)} t, \ldots, x_k = x_k^{(0)} + \alpha_k^{(0)} t, \; y = y^{(0)} + \beta^{(0)} t$$

mit $(\alpha_1^{(0)})^2 + \cdots + (\alpha_k^{(0)})^2 = 1$ gibt, die folgende Eigenschaften hat:

1. $$|x_1^{(0)} - x_1^*| < \varrho, \ldots, |x_k^{(0)} - x_k^*| < \varrho;$$
$$|\alpha_1^{(0)} - \alpha_1^*| < \varepsilon, \ldots, |\alpha_k^{(0)} - \alpha_k^*| < \varepsilon.$$

2. Die wegen $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\psi(t) = f(x_1^{(0)} + \alpha_1^{(0)} t, \ldots, x_k^{(0)} + \alpha_k^{(0)} t) - (y^{(0)} + \beta^{(0)} t)$$

hat in diesem Intervall mindestens m verschiedene Nullstellen. Es ist nicht schwer einzusehen, daß der Berührungspunkt einer jeden Tangente sich in mindestens zwei verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt.

1122. **Berührungsgrad.** Wir sagen von jeder Tangente g^* an die Hyperfläche, sie habe mindestens den Berührungsgrad 1. Ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(2)} f(P^*) \neq 0$, so sagen wir, der Berührungsgrad von g sei genau gleich 1. Ist $m \geqq 3$ und das Zahlensystem $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ eine Lösung des Gleichungssystems:

$$h_2 \;(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(2)} f(P^*) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_{m-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(m-1)} f(P^*) = 0,$$

so sagen wir, der Berührungsgrad von g^* sei mindestens gleich $m - 1$. Ist außerdem

$$h_m(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(m)} f(P^*) \neq 0.,$$

so sagen wir, der Berührungsgrad von g sei genau gleich $m - 1$.

1123. **Auflösungsmatrix.** Es sei $m \geqq 3$. Mit Hilfe der Polynome $h_2, \ldots, h_{m-1}$ bilden wir die Funktionalmatrix

$$\mathfrak{M}_{m-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial h_{m-1}}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial h_{m-1}}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathfrak{M}_{m-1}(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ nennen wir die $(m-1)$-te Auflösungsmatrix von g^*. Der Name Auflösungsmatrix ist deshalb berechtigt, weil, wie wir sehen werden, uns diese Matrix einen Schluß auf die Auslösbarkeit des Berührungspunktes von g^* in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte gestatten wird.

113. **Formulierung der Bedingungen** für die Auflösbarkeit des Berührungspunktes von g^* in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte.

1131. **Notwendige Bedingung.** *Es sei* $3 \leqq m \leqq k+2$. *Notwendig für die Auflösbarkeit des Berührungspunktes von* g^* *in mindestens* m *verschiedene gemeinsame Punkte ist, daß der Berührungsgrad von* g^* *mindestens gleich* $m-1$ *ist.*

Der Beweis folgt in 12.

1132. **Hinreichende Bedingung.** *Es sei* $3 \leqq m \leqq k+1$. *Hinreichend für die Auflösbarkeit des Berührungspunktes von* g^* *in mindestens* m *verschiedene gemeinsame Punkte ist, daß*

1. *der Berührungsgrad von* g^* *mindestens gleich* $m-1$ *ist,*
2. *außerdem der Rang der* $(m-1)$*-ten Auflösungsmatrix von* g^* *gleich ihrer Zeilenzahl, also gleich* $m-2$ *ist.*

Der Beweis folgt in 13.

12. **Beweis** der in 1131 aufgestellten notwendigen Bedingung. Zum Beweise betrachten wir die beiden Zahlenfolgen $\{\varepsilon_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ und $\{\varrho_n\} = \left\{\frac{r}{2^n}\right\}$. Die Definition von r ist in 1121 gegeben. Es wird vorausgesetzt, daß $3 \leqq m \leqq k+2$ und daß der Berührungspunkt von g^* sich in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen lasse. Dann gibt es zu jedem Zahlenpaar ε_n, ϱ_n mit $n \geqq 1$ eine Gerade g_n, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} t, \ldots, x_k = x_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)} t, \; y = y^{(n)} + \beta^{(n)} t$$

mit $(\alpha_1^{(n)})^2 + \cdots + (\alpha_k^{(n)})^2 = 1$, die folgende Eigenschaften hat:

1. $$|x_1^{(n)} - x_1^*| < \varrho_n, \ldots, |x_k^{(n)} - x_k^*| < \varrho_n,$$
$$|\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^*| < \varepsilon_n, \ldots, |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^*| < \varepsilon_n.$$

2. Die wegen $\varrho_n \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho_n, \varrho_n)$ mit Sicherheit erklärte Funktion $\psi_n(t) = f(x_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} t, \ldots, x_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)} t) - (y^{(n)} + \beta^{(n)} t)$ hat in diesem Intervall mindestens m verschiedene Nullstellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_m^{(n)}$.

Aus der Eigenschaft 1. von g_n folgt sofort:

(1) $$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*; \lim_{n\to\infty} \alpha_1^{(n)} = \alpha_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = \alpha_k^*.$$

Wegen der in 1111 über $f(P)$ gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist die Funktion $\psi_n(t)$ im ganzen Intervall $(-\varrho_n, \varrho_n)$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar.

Nun sei m' irgendeine der Zahlen $3, \ldots, m$. Wir bilden mit den m' Nullstellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{m'}^{(n)}$ von $\psi_n(t)$ den Differenzenquotienten[4]) der Ordnung $m'-1$ von $\psi_n(t)$:

[4]) S. V. 10, S. 70ff.

$$[t_1^{(n)}, \ldots, t_{m'}^{(n)}]\,\psi_n = 0.$$

Wegen $m' - 1 \leqq m - 1 \leqq k + 1$ kann man den ersten Mittelwertsatz der Differenzenrechnung anwenden. Man bekommt damit: Zwischen dem größten und dem kleinsten der Werte $t_1^{(n)}, \ldots, t_{m'}^{(n)}$ gibt es wenigstens eine Stelle τ_n, für die $\psi_n^{(m'-1)}(\tau_n) = 0$ gilt. Da τ_n im Intervall $(-\varrho_n, \varrho_n)$ liegt, so ist $|\tau_n| < \varrho_n$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0. \tag{2}$$

Wegen $m' - 1 \geqq 2$ ist $(y^{(n)} + \beta^{(n)}t)^{(m'-1)} = 0$. Daher folgt aus $\psi_n^{(m'-1)}(\tau_n) = 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^{(n)} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^{(n)}\right)^{(m'-1)} f(x_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)}\tau_n, \cdots, x_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)}\tau_n) = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung konvergiert nun aber wegen (1) und (2) und wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen der Ordung $m' - 1$ der Funktion $y = f(P)$ gegen den Wert

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(m'-1)} f(P^*).$$

Dieser Wert ist also gleich Null, und da m' jede beliebige der Zahlen $3, \ldots, m$ sein kann, ist damit die Bedingung als notwendig erwiesen.

13. **Beweis** der in 1132 aufgestellten hinreichenden Bedingung.

1311. Zu diesem Beweise benötigen wir mehrere Hilfssätze. Wir schicken der Formulierung des ersten dieser Hilfssätze einige Definitionen voraus.

Es sei $k \geqq 2$ und $1 \leqq l \leqq k$. Wir betrachten l Funktionen von k Variablen:

$$p_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, p_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Einen Punkt im Raume der Zahlen k-tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ bezeichnen wir mit A. In einer Umgebung des Punktes $\mathsf{A}^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$ sollen die l Funktionen $p_1, \ldots, p_l$ erklärt und stetig sein und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben.

Unter $\mathsf{M}_l(\mathsf{A})$ verstehen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix},$$

unter $\mathfrak{M}_0$ den ganzen Raum der Punkte A und unter $\mathfrak{M}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ die Gesamtheit aller der Punkte von $\mathfrak{M}_0$, für die $p_\lambda(\mathsf{A}) = 0$ gilt.

Mit Hilfe der Mengen $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_l$ bilden wir nun ein neues System von Mengen auf folgende Weise: Wir definieren

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{D}_{\lambda-1} \cdot \mathfrak{M}_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l).$$

Es ist also $\mathfrak{D}_\lambda$ die Gesamtheit aller gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$p_1(\mathsf{A}) = 0, \ldots, p_\lambda(\mathsf{A}) = 0.$$

Wir bezeichnen weiter die Menge aller Punkte von $\mathfrak{D}_{\lambda-1}$, für die $p_\lambda(\mathsf{A}) > 0$ gilt, mit $\mathfrak{D}_\lambda^+$ und entsprechend die Menge aller Punkte von $\mathfrak{D}_{\lambda-1}$, für die $p_\lambda(\mathsf{A}) < 0$ gilt, mit $\mathfrak{D}_\lambda^-$. Dann hat man: $\mathfrak{D}_{\lambda-1} = \mathfrak{D}_\lambda^+ + \mathfrak{D}_\lambda + \mathfrak{D}_\lambda^-$.

1312. **Hilfssatz 1.** *Voraussetzungen.* 1. A^* *sei ein Punkt von* $\mathfrak{D}_l$.

2. *Der Rang der Matrix* $\mathsf{M}_l(\mathsf{A}^*)$ *sei gleich* l, *also gleich der Zeilenzahl.*

Behauptung. In jeder Umgebung von A^* *gibt es wenigstens einen Punkt* A^+ *von* $\mathfrak{D}_l^+$ *und wenigstens einen Punkt* A^- *von* $\mathfrak{D}_l^-$.

1313. *Beweis.* Wir liefern den Beweis, indem wir ein ganz in $\mathfrak{D}_{l-1}$ verlaufendes Kurvenstück mit dem inneren Punkt A^* betrachten, von dem wir zeigen können, daß es im Punkte A^* von dem einen der beiden Bereiche $\mathfrak{D}_l^+$, $\mathfrak{D}_l^-$ in den anderen übertritt. O. B. d. A. sei die Determinante

$$D(\mathsf{A}^*) = \left| \begin{matrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_l} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_l}{\partial p_l} \end{matrix} \right|_{\mathsf{A}^*} \neq 0$$

und für den Fall $l > 1$ auch die Determinante

$$d(\mathsf{A}^*) = \left| \begin{matrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_{l-1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial p_{l-1}}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial p_{l-1}}{\partial \alpha_{l-1}} \end{matrix} \right|_{\mathsf{A}^*} \neq 0 .$$

Für den Fall $l > 1$ betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & p_1 \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l, \alpha_{l+1}^*, \ldots, \alpha_k^*) = 0, \\ & \ldots, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & p_{l-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l, \alpha_{l+1}^*, \ldots, \alpha_k^*) = 0 \end{aligned}$$

mit den l Unbekannten $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen sind in einem Intervall $| \alpha_l - \alpha_l^* | < \delta$ durch dieses Gleichungssystem die $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ als eindeutige Funktionen von α_l erklärt:

$$\alpha_1 = \chi_1(\alpha_l), \ldots, \alpha_{l-1} = \chi_{l-1}(\alpha_l).$$

Dabei ist: $\alpha_1^* = \chi_1(\alpha_l^*), \ldots, \alpha_{l-1}^* = \chi_{l-1}(\alpha_l^*)$. Weiter setzen wir durch Definition:

$$\chi_l(\alpha_l) = \alpha_l, \ \chi_{l+1}(\alpha_l) = \alpha_{l+1}^*, \ldots, \ \chi_k(\alpha_k) = \alpha_k^*.$$

Im Falle $l = 1$ haben wir überhaupt nur diese letzteren Gleichungen.

In beiden Fällen, $l = 1$ und $l > 1$, ist uns nun durch die in einem Intervall $| \alpha_l - \alpha_l^* | < \delta$ erklärten Funktionen

$$\alpha_1 = \chi_1(\alpha_l), \ldots, \alpha_k = \chi_k(\alpha_l)$$

im Raume der Punkte A ein Kurvenstück gegeben. Dieses Kurvenstück enthält A^* als inneren Punkt, verläuft ganz in $\mathfrak{D}_{l-1}$ und ist außerdem in einen linearen Raum von der Dimension l eingebettet. Ist also $l = 1$, so ist das Kurvenstück eine Strecke. Wir wollen nun zeigen, daß das Kurvenstück streckbar ist. Für $l = 1$ ist dies trivial. Ist $l > 1$, so betrachten wir nun noch die Determinanten, die aus $d = d(\mathsf{A})$ hervorgehen, wenn man in der λ-ten Spalte die Ableitungen nach α_λ durch die derselben Funktionen nach α_l ersetzt. Die so entstehenden Determinanten bezeichnen wir entsprechend mit $d_\lambda = d_\lambda(\mathsf{A})$. Für das Intervall $| \alpha_l - \alpha_l^* | < \delta$ gilt dann:

$$\frac{d\chi_1}{d\alpha_l} = -\frac{d_1}{d}, \ldots, \frac{d\chi_{l-1}}{d\alpha_l} = -\frac{d_{l-1}}{d}, \ \frac{d\chi_l}{d\alpha_l} = 1, \ \frac{d\chi_{l+1}}{d\alpha_l} = 0, \ldots, \frac{d\chi_k}{d\alpha_l} = 0.$$

Aus der Stetigkeit dieser Ableitungen folgt die Streckbarkeit des Kurvenstücks für ein Intervall $| \alpha_l - \alpha_l^* | \leqq \delta'$ mit $0 < \delta' < \delta$. Wir können daher jetzt die vom Punkte A^*

aus gemessene Bogenlänge als neuen Parameter s für die Darstellung des Kurvenstücks wählen. Das Vorzeichen der Bogenlänge s soll dabei so festgelegt werden, daß $\left(\frac{d\alpha_l}{ds}\right)_{s=0}$ dasselbe Vorzeichen wie $d(\mathsf{A}^*)$ bekommt.

Wir setzen $+\sqrt{d_1^2 + \cdots + d_{l-1}^2 + d^2} = w$. Es gibt ein Intervall $|s| < \bar{\delta}$, in welchem für das Kurvenstück gilt:

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{d_1}{w}, \ldots, \frac{d\alpha_{l-1}}{ds} = -\frac{d_{l-1}}{w}, \frac{d\alpha_l}{ds} = \frac{d}{w}, \frac{d\alpha_{l+1}}{ds} = 0, \ldots, \frac{d\alpha_k}{ds} = 0.$$

Nun betrachten wir die Werte von $p_l(\mathsf{A})$ auf dem Kurvenstück in einer Umgebung des Punktes A^*. Wir bilden:

$$p_l(s) = p_l(\alpha_1(s), \ldots, \alpha_k(s)) = p_l(\alpha_1(s), \ldots, \alpha_l(s), \alpha_{l+1}^*, \ldots, \alpha_k^*).$$

An der Stelle $s = 0$ gilt $p_l(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}\left(\frac{dp_l}{ds}\right)_{s=0} &= \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{ds} + \cdots + \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_l}\frac{d\alpha_l}{ds} \\ &= -\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1}\frac{d_1}{w} - \cdots - \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_{l-1}}\frac{d_{l-1}}{w} + \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_l}\frac{d}{w} \\ &= \frac{D(\mathsf{A}^*)}{w} \neq 0.\end{aligned}$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit des letzten Gleichheitszeichens, indem man sich an die Bedeutung von $d_1, \ldots, d_{l-1}$ und d erinnert.

Nun sei $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ eine Umgebung von A^* und $\mathfrak{K}_r$ eine k-dimensionale, offene Kugel um den Mittelpunkt A^*, die ganz in $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ liegt. Wir betrachten zunächst den Fall $\left(\frac{dp_l}{ds}\right)_{s=0} > 0$. Dann gibt es ein Teilintervall $|s| < \bar{\bar{\delta}}$ des Intervalles $|s| < \bar{\delta}$ derart, daß in diesem Teilintervall für $s > 0$ auch $p_l(s) > 0$ und für $s < 0$ auch $p_l(s) < 0$ ist. Daraus folgt: Jedes s mit $0 < s < \bar{\bar{\delta}}$ liefert einen Kurvenpunkt A^+ von $\mathfrak{D}_l^+$, und jedes s mit $-\bar{\bar{\delta}} < s < 0$ liefert einen Kurvenpunkt A^- von $\mathfrak{D}_l^-$. Um zu erreichen, daß diese Punkte A^+ und A^- auch in $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ liegen, hat man nur noch $|s| < r$ zu wählen.

Entsprechend ist der Fall $\left(\frac{dp_l}{ds}\right)_{s=0} < 0$ zu behandeln. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

1314. Der Hilfssatz 1 läßt sich mühelos noch etwas erweitern. Dazu betrachten wir die Matrix $\mathsf{M}_\lambda(\mathsf{A})$, die aus $\mathsf{M}_l(\mathsf{A})$ entsteht, wenn man die $(\lambda+1)$-te und alle späteren Zeilen wegläßt. Der Rang von $\mathsf{M}_\lambda(\mathsf{A}^*)$ ist λ. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}, \ldots, \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_l}$ gibt es eine Umgebung von A^*, in der sich der Rang einer jeden der Matrizen $\mathsf{M}_1(\mathsf{A}), \ldots, \mathsf{M}_l(\mathsf{A})$ nicht ändert.

Daraus folgt mit Benutzung von Hilfssatz 1 die

Erweiterung. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 gibt es eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ des Punktes A^* derart, daß für $\lambda = 1, \ldots, l$ zu jedem Punkt A aus $\mathfrak{D}_\lambda$, der zugleich ein Punkt von $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ ist, in beliebiger Nähe von A mindestens ein Punkt A^+ aus $\mathfrak{D}_\lambda^+$ und mindestens ein Punkt A^- aus $\mathfrak{D}_\lambda^-$ existieren, die beide ebenfalls zu $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ gehören.*

132. Die beiden weiteren Hilfssätze, die wir noch benötigen, enthalten Aussagen über den Begriff des berührungsfreien Schnittpunktes einer ebenen Kurve und einer in

derselben Ebene gelegenen Geraden. Wir haben daher zunächst den Begriff des berührungsfreien Schnittpunkts zu definieren.

1321. **Berührungsfreier Schnittpunkt.** In einem Intervall (t_1, t_2) sei eine Funktion $y = f(t)$ erklärt und wenigstens einmal stetig differenzierbar. Außerdem liege in der y, t-Ebene eine Gerade $y = g(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$. Wir sagen: An der Stelle t_0 aus (t_1, t_2) liege ein berührungsfreier Schnittpunkt von $f(t)$ und $g(t)$ vor, wenn folgendes gilt:

$$1.\ f(t_0) = g(t_0),$$
$$2.\ f'(t_0) \neq g'(t_0).$$

1322. Der zweite Hilfssatz, den wir benötigen, besagt, daß ein berührungsfreier Schnittpunkt durch eine hinreichend kleine Änderung der Geraden nicht zerstört wird[5]).

Hilfssatz 2. *Voraussetzung. An der Stelle t_0 liege ein berührungsfreier Schnittpunkt von $f(t)$ und $g_{y_0,\beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$ vor.*

Behauptung. Zu jedem $\eta > 0$ gibt es ein $\zeta > 0$ derart, daß jede Gerade $g_{y_1,\beta_1}(t) \equiv y_1 + \beta_1 t$, für die $|y_1 - y_0| < \zeta$ und $|\beta_1 - \beta_0| < \zeta$ gilt, mit $f(t)$ einen berührungsfreien Schnittpunkt hat, für dessen Abszisse t^* gilt: $|t^* - t_0| < \eta$.

Beweis. Wir setzen $|f'(t_0) - g'_{y_0,\beta_0}(t_0)| = u$. Es ist $u > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f'(t)$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für $|t - t_0| \leqq \delta$ gilt: $|f'(t) - f'(t_0)| < \frac{u}{2}$.

Nun sei $\eta > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta_1 = \mathrm{Min}(\delta, \eta)$ und zeigen, daß

$$F(t) = f(t) - g_{y_0,\beta_0}(t)$$

außer t_0 keine weitere Nullstellen in $|t - t_0| \leqq \delta_1$ hat. Wäre nämlich $\bar{t}$ eine solche weitere Nullstelle von $F(t)$, dann gäbe es nach dem ersten Mittelwertsatz zwischen $\bar{t}$ und t_0 eine Stelle τ mit $F'(\tau) = 0$. Es wäre also $f'(\tau) = g'_{y_0,\beta_0}(\tau)$. Da $g'_{y_0,\beta_0}(\tau) = g'_{y_0,\beta_0}(t_0) = \beta_0$ ist, wäre also $f'(\tau) = g'_{y_0,\beta_0}(t_0)$. Da τ in $|t - t_0| \leqq \delta_1$ läge, würde weiter gelten $|f'(\tau) - f'(t_0)| < \frac{u}{2}$. Es wäre also $|g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t_0)| < \frac{u}{2}$, was mit der Bedeutung von u im Widerspruch steht.

Es gilt also insbesondere $F(t_0 - \delta_1) \neq 0$ und $F(t_0 + \delta_1) \neq 0$. Wir setzen

$$u_1 = \mathrm{Min}(|F(t_0 - \delta_1)|, |F(t_0 + \delta_1)|,$$
$$\varrho = \mathrm{Max}(|t_0 - \delta_1|, |t_0 + \delta_1|),$$
$$\zeta = \mathrm{Min}\left(\frac{u}{2}, \frac{u_1}{1 + \varrho}\right).$$

Dann gilt für jede Gerade $g_{y_1,\beta_1}(t) \equiv y_1 + \beta_1 t$ mit $|y_1 - y_0| < \zeta$ und $|\beta_1 - \beta_0| < \zeta$:

$$|g_{y_1,\beta_1}(t_0 - \delta_1) - g_{y_0,\beta_0}(t_0 - \delta_1)| = |(y_1 + \beta_1(t_0 - \delta_1)) - (y_0 + \beta_0(t_0 - \delta_1))|$$
$$= |(y_1 - y_0) + (\beta_1 - \beta_0)(t_0 - \delta_1)| \leqq |y_1 - y_0| + |\beta_1 - \beta_0| \cdot |t_0 - \delta_1|$$
$$< \zeta + \zeta\varrho = \zeta(1 + \varrho) \leqq \frac{u_1}{1 + \varrho}(1 + \varrho) = u_1.$$

---

[5]) Wir geben hier und an anderen Orten für einfache geometrische Behauptungen arithmetische Formulierungen und Beweise. Dies geschieht (abgesehen von der Vollständigkeit der Beweise), um Bezeichnungen und Überlegungen einzuführen, die später gebraucht werden und deren Einführung dort den Text zu sehr belasten würde.

Wegen der Bedeutung von u_1 besagt dies, daß an der Stelle $t_0 - \delta_1$ die beiden Geraden $g_{y_0,\beta_0}(t)$ und $g_{y_1,\beta_1}(t)$ auf ein und derselben Seite der Kurve $f(t)$ verlaufen.

Ebenso zeigt man dies für die Stelle $t_0 + \delta_1$. Da nun zwischen $t_0 - \delta_1$ und $t_0 + \delta_1$ die Gerade $g_{y_0,\beta_0}(t)$ die Kurve $f(t)$ durchsetzt, muß dies auch bei $g_{y_1,\beta_1}(t)$ der Fall sein. Es liegt also in $|t - t_0| < \delta_1$ eine Stelle t^*, für die $f(t^*) = g_{y_1,\beta_1}(t^*)$ gilt. Für t^* gilt aber auch:

$$\begin{aligned} |g'_{y_1,\beta_1}(t^*) - f'(t^*)| &= |g'_{y_1,\beta_1}(t^*) - g'_{y_0,\beta_0}(t_0) + g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t^*)| \\ &\geqq |g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t_0) + f'(t_0) - f'(t^*)| - |g'_{y_1,\beta}(t^*) - g'_{y_0,\beta_0}(t_0)| \\ &\geqq |g'_{y_0,\beta_0}(t_0) - f'(t_0)| - |f'(t_0) - f'(t^*)| - |\beta_1 - \beta_0| > u - \frac{u}{2} - \frac{u}{2} = 0. \end{aligned}$$

Es ist also $g'_{y_1,\beta_1}(t^*) \neq f'(t^*)$. Daher liegt an der Stelle t^* ein berührungsfreier Schnittpunkt von $g_{y_1,\beta_0}(t)$ und $f(t)$ vor. Außerdem liegt t^* in $|t - t^*| < \eta$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen

1323. Der dritte Hilfssatz, den wir benötigen, macht eine Aussage über die Möglichkeit, den Berührungspunkt einer Tangente an eine ebene Kurve in zwei berührungsfreie Schnittpunkte aufzulösen[5]).

Hilfssatz 3. *Voraussetzung.* *$f(t)$ sei in (t_1, t_2) stetig und einmal stetig differenzierbar. An der Stelle t_0 aus (t_1, t_2) sei die Gerade $g_{y_0,\beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$ Tangente an $f(t)$.*

Behauptung. *Entweder fällt $f(t)$ in einer Umgebung von t_0 mit $g_{y_0,\beta_0}(t)$ zusammen oder es gibt zu jedem $\delta > 0$ in der Umgebung $|t - t_0| < \delta$ wenigstens einen Punkt $\bar{t}$, so daß die Sekante durch die Kurvenpunkte $t_0, f(t_0)$ und $\bar{t}, f(\bar{t})$ sowohl an der Stelle t_0 als auch an der Stelle $\bar{t}$ mit $f(t)$ einen berührungsfreien Schnittpunkt hat.*

Beweis. Es sei $\delta > 0$ und so gegeben, daß $|t - t_0| < \delta$ ganz in (t_1, t_2) liegt. Wir betrachten die Sekante s_τ durch die beiden Kurvenpunkte $t_0, f(t_0)$ und $\tau, f(\tau)$, wobei τ in $|t - t_0| < \delta$ beliebig veränderlich gedacht sei.

Für die Steigung $m(\tau)$ dieser Sekante gilt:

$$m(\tau) = \frac{f(\tau) - f(t_0)}{\tau - t_0}.$$

Wir setzen weiter fest $m(t_0) = f'(t_0)$. Wegen der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit von $f(t)$ ist $m(\tau)$ überall in $|\tau - t_0| < \delta$ erklärt und stetig. Nun nehmen wir an, es gebe in $|t - t_0| < \delta$ kein $\bar{t}$, wie es in der Behauptung gefordert wird. Dann gilt in jedem τ aus $|\tau - t_0| < \delta$ für die Steigung der Sekante s_τ entweder $m(\tau) = f'(t_0)$ oder $m(\tau) = f'(\tau)$.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

I. $m(t)$ ist überall in $|\tau - t_0| < \delta$ gleich $f'(t_0) = \beta$. Dann fällt $f(t)$ in $|t - t_0| < \delta$ mit $g_{y_0,\beta_0}(t)$ zusammen.

II. Es gibt eine Stelle τ^* in $|t - t_0| < \delta$, für die $m(\tau^*) \neq f'(t_0)$ ist. Es ist $\tau^* \neq t_0$.

Wir nehmen zunächst an, es sei $\tau^* > t_0$. Wegen der Stetigkeit von $m(\tau)$ gibt es ein größtes offenes Intervall J, das ganz in $t_0 < \tau < t_0 + \delta$ liegt, τ^* enthält und nur aus Punkten τ besteht, für welche $m(\tau) \neq f'(t_0)$ ist. Der linke Endpunkt von J wird von einem Punkt $\bar{\tau}$ gebildet, für den $m(\bar{\tau}) = f'(t_0)$ gilt. In J gilt:

$$m(\tau) = \frac{f(\tau) - f(t_0)}{\tau - t_0} = f'(\tau)$$

Daraus folgt:

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(t_0)}=\frac{1}{\tau-t_0},$$

$$^e\log|f(\tau)-f(t_0)|=^e\log|\tau-t_0|+C,$$

$$^e\log\left|\frac{f(\tau)-f(t_0)}{\tau-t_0}\right|=C,$$

$$\frac{f(\tau)-f(t_0)}{\tau-t_0}=k.$$

Es ist also $m(\tau)$ in J konstant. Da im linken Endpunkt $\bar{\tau}$ von J $m(\bar{\tau})=f'(t_0)$ ist, so folgt aus der Stetigkeit von $m(\tau)$, daß in J $m(\tau)=f'(t_0)$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zu $m(\tau^*)\neq f'(t_0)$. Analog behandelt man den Fall $\tau^*<t_0$. Damit ist gezeigt, daß der Fall II unmöglich ist.

Wenn es daher kein Intervall $|t-t_0|<\delta'$ gibt, in dem der Fall I eintritt, dann muß es zu jedem $\delta>0$ im Intervall $|t-t_0|<\delta$ eine Stelle $\bar{t}$ geben, die die Forderungen der Behauptung erfüllt. Damit ist auch der Hilfssatz 3 bewiesen.

133. Mit Hilfe der Hilfssätze 1, 2 und 3 soll jetzt die in 1132 aufgestellte hinreichende Bedingung bewiesen werden.

13311. Mit Benutzung von Hilfssatz 1 ziehen wir zunächst eine auch schon für $m=2$ gültige Folgerung aus den in 1132 angegebenen Bedingungen. Dazu betrachten wir die Polynome

$$h_1(\mathsf{A})\equiv\alpha_1^2+\cdots+\alpha^2{}_k-1,$$

$$h_2(\mathsf{A})\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(2)}f(P^*)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_{m-1}(\mathsf{A})\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(m-1)}f(P^*),$$

und die Matrix

$$\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A})=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_k}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \frac{\partial h_{m-1}}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial h_{m-1}}{\partial x_k}\end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_1}=2\alpha_1,\ldots,\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_k}=2\alpha_k.$$

Ist $m=2$ und $h_1(\mathsf{A}^*)=0$, so ist der Rang von $\mathsf{M}_1(\mathsf{A}^*)$ gleich 1, also gleich der Zeilenzahl. Nun sei $m\geqq 3$ und g^* eine Tangente, die die hinreichenden Bedingungen aus 1132 erfülle. Dann ist

$$h_1(\mathsf{A}^*)=0,\ h_2(\mathsf{A}^*)=0,\ldots,h_{m-1}(\mathsf{A}^*)=0$$

und der Rang der $(m-1)$-ten Auflösungsmatrix $\mathfrak{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ gleich $m-2$. Wir beweisen nun: Der Rang von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ ist gleich $m-1$. Zum Beweise fassen wir die Elemente der μ-ten Zeile von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{v}_\mu$ auf. Dann haben wir

$$\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)=\begin{pmatrix}\mathfrak{v}_1\\ \mathfrak{v}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathfrak{v}_{m-1}\end{pmatrix}\text{ und }\mathfrak{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)\equiv\begin{pmatrix}\mathfrak{v}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathfrak{v}_{m-1}\end{pmatrix}.$$

Wäre nun der Rang von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ kleiner als $m-1$, so hätte man, da der Rang von $\mathfrak{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ nach Voraussetzung gleich $m-2$ ist, eine Gleichung von der Gestalt:

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2\lambda_2 + \cdots + \lambda_{m-1}\mathfrak{v}_{m-1}.$$

Wir multiplizieren beiderseits skalar mit $\mathfrak{v}_1$ und bekommen:

$$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 = \lambda_2\mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\mathfrak{v}_{m-1} \cdot \mathfrak{v}_1.$$

Für die linke Seite dieser Gleichung bekommt man:

$$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 = 2\alpha_1^* \cdot 2\alpha_1^* + \cdots + 2\alpha_k^* \cdot 2\alpha_k^* = 4(h_1(\mathsf{A}^*) + 1).$$

Für die rechte Seite bekommt man mit Benützung des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen ($\mu = 2, \ldots, m-1$):

$$\mathfrak{v}_\mu \cdot \mathfrak{v}_1 = 2\left(\left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \alpha_1}\right)_{\mathsf{A}^*} \alpha_1^* + \cdots + \left(\frac{\partial h_\mu}{\partial \alpha_k}\right)_{\mathsf{A}^*} \alpha_k^*\right) = 2\mu h_\mu(\mathsf{A}^*).$$

Also ergibt sich:

$$4(h_1(\mathsf{A}^*) + 1) = \lambda_2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot h_2(\mathsf{A}^*) + \cdots + \lambda_{m+1} \cdot 2 \cdot (m-1)h_{m-1}(\mathsf{A}^*).$$

Das führt aber wegen $h_1(\mathsf{A}^*) = 0, \ldots, h_{m-1}(\mathsf{A}^*) = 0$ zu einem Widerspruch. Also ist der Rang von $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ gleich $m-1$.

13312. Nun führen wir für das Gleichungssystem $h_1(\mathsf{A}) = 0, \ldots, h_{m-1}(\mathsf{A}) = 0$ die Mengen $\mathfrak{D}_\mu$, $\mathfrak{D}_\mu^+$, $\mathfrak{D}_\mu^-$ ein, entsprechend den Definitionen von 1311. Dann haben wir für $m \geqq 2$:

1. A^* ist ein Punkt von $\mathfrak{D}_{m-1}$.

2. Der Rang der Matrix $\mathsf{M}_{m-1}(\mathsf{A}^*)$ ist gleich $m-1$, also gleich der Zeilenzahl.

Wir können also die Erweiterung von Hilfssatz 1 anwenden und kommen zu dem Ergebnis:

Es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ des Punktes A^* derart, daß für $\mu = 1, \ldots, m-1$ zu jedem Punkt A aus $\mathfrak{D}_\mu$, der zugleich ein Punkt von $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ ist, in beliebiger Nähe von A mindestens ein Punkt A^+ aus $\mathfrak{D}_\mu^+$ und mindestens ein Punkt A^- aus $\mathfrak{D}_\mu^-$ existieren, die beide ebenfalls zu $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$ gehören.

13313. Nun stellen wir die folgende Behauptung auf: Es sei $1 \leqq \mu \leqq m-1$. Ferner sei $\bar{\mathsf{A}} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k)$ ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_\mu$ und $\mathfrak{U}_{\mathsf{A}^*}$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $0 < \varrho < r$ (Definition von r siehe in 1121).

Dann gibt es eine Gerade $g_{\mathsf{A},y_0,\beta_0}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k t, \; y = y_0 + \beta_0 t, \text{ wo } \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 = 1,$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $$|\alpha_1 - \bar{\alpha}_1| < \varepsilon, \ldots, |\alpha_k - \bar{\alpha}_k| < \varepsilon.$$

2. Die wegen $\varrho < r$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Kurve

$$y = f_{\mathsf{A}}(t) = f(x_1^* + \alpha_1 t, \ldots, x_k^* + \alpha_k t)$$

verläuft entweder in einem Teilintervall des Intervalles $(-\varrho, \varrho)$ geradlinig und fällt dabei mit $g_{y_0,\beta_0}(t)$ zusammen oder sie hat mit der Geraden

$$y = g_{y_0,\beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$$

im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mindestens $\mu + 1$ verschiedene berührungsfreie Schnittpunkte.

13314. Diese Behauptung enthält die Auflösbarkeit des Berührungspunktes der Tangente $\bar{g}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \bar{\alpha} t, \; y = y^* + \bar{\beta} t$$

mit $\bar{\alpha}_1^2 + \cdots + \bar{\alpha}_k^2 = 1$ und $\bar{\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{\alpha}_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\bar{\alpha}_k\right)^{(1)} f(P^*)$, in mindestens $\mu + 1$ gemeinsame Punkte, wie man durch Vergleich mit 1121 feststellt. Sie geht aber in zwei wesentlichen Punkten noch darüber hinaus.

1. Die in 1121 vorkommenden Koordinaten $x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$ werden jetzt durch die Koordinaten von P^* ersetzt. Das heißt, es wird behauptet, daß man die Gerade $g_{\bar{A},y_0,\beta_0}$ sogar so wählen kann, daß sie die im Punkte P^* auf dem Raum der Punkte P errichtete Senkrechte trifft.
2. In 1121 ist nur von gemeinsamen Punkten die Rede. Jetzt treten an deren Stelle berührungsfreie Schnittpunkte oder eine volle gemeinsame Strecke.

1332. Wir beweisen die in 13313 aufgestellte Behauptung durch vollständige Induktion.

13321. I. $\mu = 1$. $\bar{A}$ sei ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$. Es sei $\varepsilon > 0$ und $0 < \varrho < r$. Wir wählen für A den Punkt $\bar{A}$ selbst und betrachten die im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion $y = f_{\bar{A}}(t) = f(x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k^* + \bar{\alpha}_k t)$. Durch irgend zwei verschiedene Punkte dieser Kurve, deren Abszissen t in $(-\varrho, \varrho)$ liegen, legen wir die Gerade $g_{y_0,\beta_0}(t) \equiv y_0 + \beta_0 t$. Sind nun diese beiden Punkte berührungsfreie Schnittpunkte, so leistet die Gerade $g_{\bar{A},y_0,\beta_0}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \bar{\alpha}_k t, \; y = y_0 + \beta_0 t,$$

das, was in der Behauptung gefordert wird.

Ist mindestens einer dieser beiden Punkte ein Berührungspunkt von $f_{\bar{A}}(t)$ und $g_{y_0,\beta_0}(t)$, so sind nach Hilfssatz 3 zwei Fälle zu unterscheiden:

1. In einer Umgebung des Berührungspunktes fällt $f_{\bar{A}}(t)$ mit $g_{y_0,\beta_0}(t)$ zusammen. In diesem Falle leistet wieder die Gerade $g_{\bar{A},y_0,\beta_0}$ das in der Behauptung Geforderte.

2. Der Berührungspunkt läßt sich durch eine beliebig kleine Drehung der Tangente um den Berührungspunkt in mindestens zwei verschiedene, berührungsfreie Schnittpunkte auflösen, die beide in $(-\varrho, \varrho)$ liegen. Durch die Drehung gehe g_{y_0,β_0} über in g_{y_1,β_1}. Dann leistet die Gerade $g_{\bar{A},y_1,\beta_1}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \bar{\alpha}_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \bar{\alpha}_k t, \; y = y_1 + \beta_1 t,$$

das in der Behauptung Geforderte.

Damit ist die Behauptung für $\mu = 1$ bewiesen.

13322. II. Wir nehmen an, die Behauptung sei für μ bewiesen. Dabei sei $1 \leqq \mu \leqq m - 1$. Es sei $\bar{A}$ ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$, und es sei $\varepsilon > 0$ und $0 < \varrho < r$. Da $\bar{A}$ auch ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_\mu$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, so gibt es nach Induktionsannahme wenigstens eine Gerade g_{A,y_0,β_0}, die die Forderungen der Behauptung für μ erfüllt. Von einer jeden solchen Geraden wollen wir sagen, sie gehöre für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ). Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

133221. Fall A. Unter den für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Geraden gibt es wenigstens eine Gerade g_{A,y_0,β_0}, für die in einem Teilintervall von $(-\varrho, \varrho)$

$$f_{\mathfrak{A}}(t) = y_0 + \beta_0 t$$

gilt. In diesem Falle erfüllt die Gerade $g_{\mathfrak{A},y_0,\beta_0}$ die Forderungen der Behauptung auch für $\mu + 1$.

133222. Fall B. Unter den für den Punkt $\bar{\mathfrak{A}}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Geraden gibt es keine mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft. Es sei $g_{\mathfrak{A},y_0,\beta_0}$ eine für $\bar{\mathfrak{A}}$ zu (ε, ϱ) gehörende Gerade. Dann hat nach Induktionsannahme die Kurve $f_{\mathfrak{A}}(t)$ mit der Geraden $y = y_0 + \beta_0 t$ mindestens $\mu + 1$ verschiedene berührungsfreie Schnittpunkte, dessen Abszissen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ liegen. t sei ein beliebiger Punkt des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$. Wir bilden den Differenzenquotienten der Ordnung $\mu + 1$

$$\varphi_g(t) = [t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t](f_{\mathfrak{A}}).$$

$\varphi_g(t)$ ist überall in $(-\varrho, \varrho)$ erklärt, an den Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ als Grenzdifferenzenquotient[4]) und in $(-\varrho, \varrho)$ überall k-mal stetig differenzierbar.

133223. Nun wird behauptet: Unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{\mathfrak{A}}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, gibt es wenigstens eine, für die die Funktion $\varphi_g(t)$ an einer Stelle t^* des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$ verschwindet.

133224. Der Beweis für diese Behauptung soll in 133225 nachgeholt werden. Wir ziehen hier gleich aus ihr die Folgerungen. Die Gerade heiße $g_{\mathfrak{A},y_0,\beta_0}$. Wir nehmen zunächst an, t^* sei von einer jeden der Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ verschieden. Ist $\mu = 1$, so hat man unmittelbar: $\varphi_g(t^*) = [t_1, t_2, t^*](f_{\mathfrak{A}}) = 0$.

Für $\mu \geqq 2$ folgt aus

$$\varphi_g(t^*) = \frac{1}{t_{\mu+1} - t^*}([t_1, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}](f_{\mathfrak{A}}) - [t_1, \ldots, t_\mu, t^*](f_{\mathfrak{A}})) = 0$$

wegen $[t_1, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}](f_{\mathfrak{A}}) = 0$ die Beziehung

$$[t_1, \ldots, t_\mu, t^*](f_{\mathfrak{A}}) = 0.$$

So kann man weiterschließen bis auf $[t_1, t_2, t^*](f_{\mathfrak{A}}) = 0$. Es ist also stets

$$\frac{f_{\mathfrak{A}}(t_1) - f_{\mathfrak{A}}(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{f_{\mathfrak{A}}(t_1) - f_{\mathfrak{A}}(t^*)}{t_1 - t^*} = 0.$$

Das heißt aber: Der Punkt $(t^*, f_{\mathfrak{A}}(t^*))$ ist ein weiterer gemeinsamer Punkt von $f_{\mathfrak{A}}(t)$ und $y_0 + \beta_0 t$. Ist dieser Punkt ein berührungsfreier Schnittpunkt, so leistet die Gerade $g_{\mathfrak{A},y_0,\beta_0}$ das in der Behauptung Geforderte. Ist er dagegen ein Berührungspunkt von $f_{\mathfrak{A}}(t)$ und $y_0 + \beta_0 t$, so kann man diesen Berührungspunkt nach Hilfssatz 3 durch den Übergang zu einer beliebig benachbarten Geraden $y = y_1 + \beta_1 t$ in zwei berührungsfreie Schnittpunkte auflösen, die beide in $(-\varrho, \varrho)$ liegen. Denn der Fall, daß $f_{\mathfrak{A}}(t)$ und $y_0 + \beta_0 t$ in einer Umgebung von t^* zusammenfallen, würde dem Fall A entsprechen und ist ausgeschlossen. Dabei kann man $y = y_1 + \beta_1 t$ nach Hilfssatz 2 so wählen, daß die bereits vorher vorhandenen $\mu + 1$ berührungsfreien Schnittpunkte nicht zerstört werden und im Inneren von $(-\varrho, \varrho)$ bleiben. $y = f_{\mathfrak{A}}(t)$ und $y = y_1 + \beta_1 t$ haben daher in $(-\varrho, \varrho)$ in diesem Falle sogar $\mu + 3$ berührungsfreie Schnittpunkte. Die Gerade $g_{\mathfrak{A},y_1,\beta_1}$, gegeben durch

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k t, y = y_1 + \beta_1 t \text{ mit } \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 = 1,$$

leistet also das in der Behauptung Geforderte.

Nun haben wir noch den Fall zu betrachten, daß t einem der Werte $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ gleich ist. Es sei o. B. d. A. $t^* = t_1$. Ist $\mu \geqq 2$, so schließen wir aus

$$[t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t^*](f_A) = 0$$

wieder auf $[t_1, t_2, t^*](f_A) = 0$; ist $\mu = 1$, so ist unmittelbar $[t_1, t_2, t^*](f_A) = 0$. Das bedeutet aber hier

$$\frac{f_A(t_1) - f_A(t_2)}{t_1 - t_2} = f'(t^*) = f'(t_1).$$

Das heißt, an der Stelle $t_1 = t^*$ ist $y = y_0 + \beta_0 t$ Tangente an $y = f_A(t)$. Nach Induktionsannahme liegt aber an der Stelle t_1 ein berührungsfreier Schnittpunkt vor, also kann der Fall $t_1 = t^*$ gar nicht eintreten.

133225. Wir haben noch den Beweis für die in 133223 aufgestellte Behauptung nachzutragen. Wir nehmen an, diese Behauptung sei falsch. Dann gibt es unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, keine, für die die Funktion $\varphi_g(t)$ an einer Stelle des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$ verschwindet. Für jede solche Gerade muß daher $\varphi_g(t)$ überall in $(-\varrho, \varrho)$ dasselbe Vorzeichen haben, da $\varphi_g(t)$ stetig ist. Wir betrachten nun die Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$, wobei $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$ und $\varrho_n = \frac{\varrho}{2^n}$ sein soll, und beweisen: Unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Gerade g^+, für die in $(-\varrho, \varrho)$ überall $\varphi_{g^+}(t) > 0$ gilt.

Zum Beweise betrachten wir ein Zahlenpaar (ε', ϱ') mit $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon_n}{2}$ und $0 < \varrho' < \varrho$. Nach 13312 gibt es zu $\bar{A}$ einen Punkt A^+ aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}^+_{\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$, für den $|\alpha_1^+ - \bar{\alpha}_1| < \varepsilon', \ldots, |\alpha_k^+ - \bar{\alpha}_k| < \varepsilon'$ gilt.

Da $\mathfrak{D}^+_{\mu+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{D}_n$ ist, so ist A^+ auch ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_\mu$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$. Wir können daher auf den Punkt A^+ die Induktionsannahme anwenden und die Geraden g_{A, y_0, β_0} betrachten, die nach Induktionsannahme für den Punkt A^+ zum Zahlenpaar (ε', ϱ') gehören. Für jede solche Gerade g_{A, y_0, β_0} gilt:

$$|\alpha_1 - \bar{\alpha}_1| \leqq |\alpha_1 - \alpha_1^+| + |\alpha_1^+ - \bar{\alpha}_1| < \varepsilon' + \varepsilon' < \varepsilon_n,$$
$$|\alpha_k - \bar{\alpha}_k| \leqq |\alpha_k - \alpha_k^+| + |\alpha_k^+ - \bar{\alpha}_k| < \varepsilon' + \varepsilon' < \varepsilon_n.$$

Deswegen und wegen $\varrho' < \varrho$ gehört eine jede solche Gerade zugleich für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ und damit auch zum Zahlenpaar (ε, ϱ), also hat für jede solche Gerade die Funktion $\varphi_g(t)$ überall in $(-\varrho, \varrho)$ dasselbe Vorzeichen.

Wir können zeigen, daß $\varphi_g(t) > 0$ ist in $(-\varrho, \varrho)$, sobald man ε' und ϱ' hinreichend klein wählt. Dazu betrachten wir im Intervall $(-\varrho', \varrho')$ eine Stelle t', die von den ebenfalls in $(-\varrho', \varrho')$ gelegenen Abszissen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ der nach Induktionsannahme vorhandenen $\mu + 1$ verschiedenen Schnittpunkte von $y_0 + \beta_0 t$ und $f_A(t)$ verschieden ist. Dann gilt nach dem ersten Mittelwertsatz der Differenzenrechnung

$$\varphi_g(t') = f_A^{\mu+1}(\tau).$$

Dabei ist τ eine Stelle des Intervalls $(-\varrho', \varrho')$. Gäbe es nun zu beliebig kleinen ε' und ϱ' stets eine Gerade g mit $\varphi_g(t) < 0$ in $(-\varrho, \varrho)$, so könnte man eine Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon_s', \varrho_s'\}$ konstruieren und dazu eine Folge $\{g_s\}$ von Geraden angeben derart, daß immer g_s für A^+ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_s, \varrho_s)$ gehört, wobei gilt:

1. $\lim_{s \to \infty} \varepsilon_s' = 0$; $\lim_{s \to \infty} \varrho_s' = 0$.
2. In $(-\varrho, \varrho)$ ist $\varphi_g(t) < 0$.

Man könnte aus dem Intervall $(-\varrho_s, \varrho_s)$ eine Stelle t_s' wählen, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Schnittpunktabszissen $t_1^{(s)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(s)}$ verschieden ist, und bekäme

$$\varphi_{g_s}(t_s') = f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s).$$

Dabei läge τ_s in $(-\varrho_s', \varrho_s')$; es wäre also $|\tau_s| < \varrho_s'$. Aus $\lim_{s\to\infty} \varrho_s' = 0$ würde daher folgen: $\lim_{s\to\infty} \tau_s = 0$. Aus $\lim_{s\to\infty} \varepsilon_s' = 0$ folgt aber $\lim_{s\to\infty} A_s = A^+$. Aus $\lim_{s\to\infty} \tau_s' = 0$ und $\lim_{s\to\infty} A_s = A^+$ ergäbe sich nun wie beim Beweise der notwendigen Bedingung in 12

$$\lim_{s\to\infty} f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s) = f_{A^+}^{(\mu+1)}(0) = p_{\mu+1}(A^+).$$

Aus $\varphi_{g_s}(t_s') < 0$ würde aber $f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s) < 0$ folgen und daraus

$$\lim_{s\to\infty} f_{A_s}^{(\mu+1)}(\tau_s) = p_{\mu+1}(A^+) \leqq 0.$$

Da A^+ ein Punkt von $\mathfrak{D}_{\mu+1}^+$ ist, so ist $p_{\mu+1}(A^+) > 0$. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

Ganz analog beweist man: Unter den Geraden, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Gerade g^-, für die in $(-\varrho, \varrho)$ überall $\varphi_{g^-}(t) < 0$ gilt.

Nun ordnen wir jedem Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ der Folge $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$ eine solche Gerade g_n^+ zu, so daß in $(-\varrho, \varrho)$ überall $\varphi_{g_n^+}(t) > 0$ ist

Die Schnittpunktabszissen seien $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$; sie liegen in $(-\varrho_n, \varrho_n)$. Es sei t eine Stelle aus $(-\varrho, \varrho)$, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Stellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) verschieden ist und für die $t > 0$ gilt.

Dann gilt für hinreichend große n wegen $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 0$:

$$t - t_1^{(n)} > 0, \ldots, t - t_{\mu+1}^{(n)} > 0.$$

Für $\mu \geqq 2$ folgt aus $[t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0$ wegen $[t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}](f_{A_n}) = 0$ und $t - t_{\mu+1}^{(n)} > 0$

$$[t_1^{(n)}, \ldots, t_\mu^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0.$$

So kann man weiter schließen bis auf:

$$[t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0.$$

Ist $\mu = 1$, so bedeutet $\varphi_{g_n^+}(t) > 0$ unmittelbar:

$$[t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t](f_{A_n}) > 0.$$

Also ist stets:

$$\frac{f_{A_n}(t) - f_{A_n}(t_1^{(n)})}{t - t_1^{(n)}} > \frac{f(t_1^{(n)}) - f(t_2^{(n)})}{t_2^{(n)} - t_1^{(n)}}$$

Daraus folgt durch Grenzübergang:

$$\frac{f_{\bar{A}}(t) - f_{\bar{A}}(0)}{t} \geqq f_{\bar{A}}'(0).$$

Wegen der Stetigkeit von $f_A(t)$ gilt diese Beziehung für alle $t > 0$, auch für die Schnittpunktabszissen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Analog beweist man für $t > 0$ mit Benützung der Geradenfolge $\{g_n^-\}$:

$$\frac{f_{\bar{A}}(t) - f_{\bar{A}}(0)}{t} \leqq f_{\bar{A}}'(0).$$

Damit hat man für $t > 0$ in $(-\varrho, \varrho)$:

$$\frac{f_{\bar{A}}(t) - f_{\bar{A}}(0)}{t} = f'_{\bar{A}}(0)$$

oder

$$f_{\bar{A}}(t) = f_{\bar{A}}(0) + t \cdot f'_{\bar{A}}(0) \text{ für } 0 < t < \varrho.$$

Das heißt: Die Gerade $g_{\bar{A}}, f_{\bar{A}(0)}, f_{\bar{A}(0)}$ gehört für den Punkt $\bar{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) und hat die in 133221 unter Fall A beschriebene Eigenschaft. In 133222 wurde aber vorausgesetzt, daß es eine Gerade mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft unter den für $\bar{A}$ zu (ε, ϱ) gehörenden Geraden nicht geben soll. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

133226. Damit ist die in 13313 aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen. Da A^* ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{m-1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, ist damit auch die in 1132 aufgestellte Bedingung als hinreichend erwiesen.

14. **Verhalten „im allgemeinen“** eines Hyperflächenpunktes hinsichtlich des Berührungsgrades der Tangenten und der Auflösbarkeit ihres Berührungspunktes.

141. Dazu erklären wir zunächst, was wir unter der Formulierung „im allgemeinen“ verstehen.

1411. Es sei $n \geqq 1$, $k \geqq 1$, $s \geqq 1$. Ferner sei $\mathfrak{S}$ ein System von n Gleichungen mit k Unbekannten. Die Koeffizienten von $\mathfrak{S}$ seien Polynome der s Veränderlichen[6]) $a_1, \ldots, a_s$ mit Koeffizienten aus einem Körper K.

1412. **Definition.** Wir sagen das System $\mathfrak{S}$ habe im allgemeinen keine nichttriviale Lösung, wenn mindestens ein nicht identisch verschwindendes Polynom der s Veränderlichen $a_1, \ldots, a_s$ mit Koeffizienten aus K existiert, das für jede spezielle Wahl der Veränderlichen $a_1, \ldots, a_s$, für die das System $\mathfrak{S}$ eine nichttrivale Lösung hat, notwendig den Wert Null annehmen muß.

1413. Wir sagen allgemeiner von einem beliebigen Sachverhalt, er trete im allgemeinen nicht ein, wenn zu seinem Eintreten die Existenz einer nichttrivialen Lösung von mindestens einem unter höchstens endlich vielen solchen Systemen $\mathfrak{S}$ notwendig ist, die im allgemeinen keine nichttriviale Lösung haben.

1421. Über Systeme von homogenen Gleichungen gilt folgender Satz: Ein System von homogenen Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten besitzt ein Resultantensystem aus gaznzahligen Polynomen in diesen Koeffizienten so, daß für spezielle Werte[7]) der Koeffizienten das Nullwerden aller Resultanten notwendig und hinreichend ist für die Existenz einer nichttrivialen Lösung des Gleichungssystems.

Man sagt, ein solches Resultantensystem liefere ein algebraisches Kriterium für die nichttriviale Lösbarkeit des Gleichungssystems. Für den Beweis des Satzes sei auf die Literatur verwiesen[7]).

1422. Wir werden zeigen, daß eine Tangente an eine Hyperfläche vom Berührungsgrad l, wobei $2 \leqq l \leqq k + 1$ sein soll, im allgemeinen eine Auflösungsmatrix vom Rang $l - 1$ hat. Dazu betrachten wir für einen Punkt P^* des Bereiches $\mathfrak{B}$ das Gleichungssystem

---

[6]) S. V. 14, 1. Teil, S. 51.
[7]) S. V. 14, 2. Teil, S. 9.

$$h_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(2)} f(P^*) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\mathfrak{S}) \qquad h_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(l)} f(P^*) = 0,$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial h_l}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix} < l - 1.$$

Die letzte Forderung ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden aller $(l-1)$-reihigen Unterdeterminanten der Matrix, also mit $\binom{k}{l-1}$ homogenen Gleichungen.

Das System $\mathfrak{S}$ von insgesamt $(l-1) + \binom{k}{l-1}$ homogenen Gleichungen mit den Unbekannten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ hat, wenn man die sich nur durch die Reihenfolge der Differentiationen voneinander unterscheidenden partiellen Ableitungen von $f(P)$ als identisch ansieht, die in 1411 geforderten Eigenschaften. Denn die partiellen Ableitungen von $f(P)$ können im Punkte P^* völlig unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen.

1423. **Hilfssatz 4.** *Das Gleichungssystem* $\mathfrak{S}$ *aus* 1422 *hat im allgemeinen keine nichttriviale Lösung.*

Beweis. Wir betrachten ein Resultantensystem von $\mathfrak{S}$, das ein algebraisches Kriterium für die Lösbarkeit liefert. Da die Resultanten ganzzahlige Polynome in den Koeffizienten von $\mathfrak{S}$, diese selbst aber Polynome der partiellen Ableitungen von $f(P)$ im Punkte P^* mit ganzzahligen Koeffizienten sind, so sind die Resultanten ebenfalls ganzzahlige Polynome dieser partiellen Ableitungen. Wir zeigen, daß nicht alle Resultanten identisch verschwinden. Da das Verschwinden sämtlicher Resultanten für das Vorliegen einer nichttrivialen Lösung von $\mathfrak{S}$ hinreichend ist, ist dies getan, wenn es gelingt, für die partiellen Ableitungen solche speziellen Werte einzusetzen, daß das entstehende Gleichungssystem keine nichttriviale Lösung hat. Da das Verschwinden aller Resultanten für das Vorliegen einer nichttrivialen Lösung auch notwendig ist, ist eine solche nicht identisch verschwindende Resultante ein Polynom mit den in 1412 geforderten Eigenschaften. Damit ist dann alles gezeigt.

Ein spezielles System, das nur die triviale Lösung hat, erhalten wir aus $\mathfrak{S}$, indem wir die rein partiellen Ableitungen gleich 1, die gemischt partiellen Ableitungen gleich 0 setzen. Das System $\mathfrak{S}$ geht dadurch über in

$$\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1^l + \cdots + \alpha_k^l = 0,$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l-1} & \cdots & \alpha_1^{l-1} \end{pmatrix} < l - 1.$$

Diesen Forderungen genüge das Zahlensystem $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k)$. Aus der Forderung über den Rang der Matrix folgt, daß höchstens $l-2$ der Größen $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ zu je zweien

und von Null verschieden sein können. Es seien unter den $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ genau s und zwar o. B. d. A. $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s$ zu je zweien und von Null verschieden. Dabei komme der Wert von $\bar{\alpha}_\sigma$ unter den $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k$ genau c_σ-mal vor ($\sigma = 1, \ldots, s$; $c_\sigma \geqq 1$). Dann hat man:

$$\begin{aligned} c_1\bar{\alpha}_1^2 + \cdots + c_s\bar{\alpha}_s^2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_1\bar{\alpha}_1^{s+1} + \cdots + c_s\bar{\alpha}_s^{s+1} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1^2 & \cdots & \bar{\alpha}_s^2 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \bar{\alpha}_1^{s+1} & \cdots & \bar{\alpha}_s^{s+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Das heißt, die Größen $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s$ sind nicht zu je zweien und von Null verschieden im Widerspruch zur Bedeutung von s. Also hat das System nur die triviale Lösung. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

143. Auf Grund von Hilfssatz 4 definieren wir:

1431. **Außergewöhnlicher Punkt der Stufe** l. Es sei $2 \leqq l \leqq k+1$. Einen Punkt (P^*, y^*) der Hyperfläche, für den das in 1422 definierte Gliechungssystem $\mathfrak{S}$ eine reelle oder komplexe nichttrivale Lösung hat, nennen wir einen außergewöhnlichen Punkt der Stufe l. Ein Punkt kann ein außergewöhnlicher Punkt von mehr als einer Stufe sein, wie leicht zu konstruierende Beispiele zeigen.

1432. **Gewöhnlicher Punkt.** Einen Punkt (P^*, y^*) der Hyperfläche, der nicht außergewöhnlicher Punkt von mindestens einer der Stufen $2, \ldots, k+1$ ist, nennen wir einen gewöhnlichen Punkt. Aus 1413 und Hilfssatz 4 folgt sofort: *Ein Hyperflächenpunkt ist im allgemeinen ein gewöhnlicher Punkt.* (Man vgl. dazu den algebraischen Charakter unseres Begriffes „im allgemeinen").

1441. **Hauptsatz über gewöhnliche Punkte.** *Jede Tangente an eine Hyperfläche in einem gewöhnlichen Punkte hat einen Berührungsgrad l, für den $1 \leqq l \leqq k$ gilt. Ihr Berührungspunkt läßt sich in höchstens $l+1$ verschiedene gemeinsame Punkte auflösen und, bei geeignetem Vorgehen, auch in genau $l+1$.*

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil der Behauptung, indem wir zeigen, daß es eine Tangente mit dem Mindestberührungsgrad $k+1$ in einem gewöhnlichen Punkte nicht geben kann. Wir nehmen an, es gebe eine solche. Dann hätte das Gleichungssystem

$$h_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0, \ldots, h_{k+1}(\alpha_1 \ldots \alpha_k) = 0$$

eine nichttriviale Lösung $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$. Nach dem Satz von Euler über homogene Funktionen ist aber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_k}\alpha_k &= 2h_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial h_{k+1}}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial h_{k+1}}{\partial \alpha_k} &= (k+1)h_{k+1}. \end{aligned}$$

Setzt man für $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die nichttriviale Lösung $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$ des Systems $h_2 = 0, \ldots, h_{k+1} = 0$ ein, so werden die rechten Seiten zu Null und die Determinante der Matrix $\mathfrak{M}_{k+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ muß daher verschwinden. Das heißt der betrachtete Punkt wäre ein außergewöhnlicher Punkt von der Stufe $k+1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich ohne weiteres aus der notwendigen

Bedingung von 1131 und der hinreichenden Bedingung von 1132. Denn die Auflösungsmatrix einer Tangente vom Berührungsgrad l in einem gewöhnlichen Punkte ist auf Grund der Definition des gewöhnlichen Punktes vom Rang $l-1$.

1442. Wir betrachten noch kurz die außergewöhnlichen Punkte. Es gilt folgender

Satz. *Dann und nur dann ist ein Hyperflächenpunkt ein außergewöhnlicher Punkt von der Stufe* 2, *wenn für ihn gilt:*

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| = 0; \quad i,j = 1,\ldots,k.$$

Beweis. Ist der Punkt ein außergewöhnlicher Punkt von der Stufe 2, so hat das System von k linearen Gleichungen mit k Unbekannten

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_j = 0, \quad i = 1,\ldots,k,$$

eine nichttriviale Lösung. Also ist die Bedingung notwendig. Ist umgekehrt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, so hat das betrachtete lineare Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung, und für diese bekommt man mit Benützung des Satzes von Euler über homogene Funktionen:

$$0 = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\alpha_j\right)\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_i}\alpha_i = h_2.$$

Also ist der Punkt ein außergewöhnlicher Punkt der Stufe 2, die Bedingung ist hinreichend.

Für $k = 2$ folgt daraus, daß die außergewöhnlichen Punkte der Stufe 2 identisch sind mit den durch die Bedingung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0$ gekennzeichneten parabolischen Punkten. Wir nennen deshalb für $k > 2$ einen außergewöhnlichen Punkt der Stufe 2 auch einen parabolischen Punkt im verallgemeinerten Sinne.

Ist $k = 2$, so haben die nur aus parabolischen Punkten bestehenden Flächen die Eigenschaft, daß durch jeden ihrer Punkte wenigstens eine ganz in der Fläche verlaufende Gerade geht[8]). Man kann sich überhaupt die Aufgabe stellen, die Hyperflächen zu erforschen, die nur aus außergewöhnlichen Punkten einer bestimmten Stufe bestehen. Für $k = 2$ und die Stufe 3 ergeben sich ebenfalls die Flächen, die gerade Linien enthalten[9]). Es bleibt zu untersuchen, ob sich für beliebige k und l ähnlich einfache geometrische Aussagen machen lassen, wie für $k = 2$ und $l = 2, 3$.

15. **Ordnungsgeometrische Aussagen.** Unsere bisherigen Ergebnisse setzen uns in den Stand, über gewöhnliche Hyperflächenpunkte ordnungsgeometrische Aussagen zu machen. Der Ordnungsbegriff wird sich dabei als äußerst fruchtbar erweisen, denn aus ihm wird eine weitgehende Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix unmittelbar hervorgehen, die ohne jede Differenzierbarkeitsvoraussetzung auf geometrischem Wege gewonnen werden kann.

151. Für die Definition der Mindestordnung und der Ordnung eines Hyperflächenpunktes, sowie der Grenzcharakteristik der Mindestordnung und der Ordnung m verzichten wir auf die in 1111, 2. über $y = f(P)$ formulierten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. Wir machen aber über $y = f(P)$ eine neue Voraussetzung.

---

[8]) S. V. 12, S. 225.
[9]) S. V. 7, S. 183, 184.

1511. Um zu erreichen, daß wir nur sog. „starke" Ordnung[10]) zu betrachten haben, wollen wir $y = f(P)$ der folgenden Bedingung unterwerfen:

Es sei P^* ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}$ und r der Radius einer ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden, k-dimensionalen, offenen Kugel mit dem Mittelpunkt P^*. Dann soll folgendes erfüllt sein: Es gibt ein ϱ^* mit $0 < \varrho^* \leqq \frac{r}{2}$ derart, daß für jedes ϱ mit $0 < \varrho \leqq \varrho^*$ jede Gerade g, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^{(0)} + \alpha_k t, \; y = y^{(0)} + \beta t \text{ mit } \alpha_1^2, + \ldots + \alpha_k^2 = 1,$$

für die $| x_1^{(0)} - x_1^* | < \varrho, \ldots, | x_k^{(0)} - x_k^* | < \varrho$ ist, die Eigenschaft hat, daß die wegen $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\varphi(t) = f(x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k^{(0)} + \alpha_k t) - (y^{(0)} + \beta t)$$

in diesem Intervall höchstens endlich viele verschiedene Nullstellen besitzt. Wir werden in 1522 sehen, daß diese Bedingung in jedem gewöhnlichen Punkte erfüllt ist.

1512. **Mindestordnung.** Wir sagen von jedem Hyperflächenpunkte, er habe die Mindestordnung 1. Ist $m \geqq 2$, so sagen wir von dem Hyperflächenpunkte (P^*, y^*), er habe die Mindestordnung m, wenn folgendes gilt:

Zu jedem ϱ mit $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$ gibt es eine Gerade g, gegeben durch

$$x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k = x_k^{(0)} + \alpha_k t, \; y = y^0 + \beta t, \text{ mit } \alpha_1^2 + \cdot \quad + \alpha_k^2 = 1,$$

die folgende Eigenschaften hat:

1. $$| x_1^{(0)} - x_1^* | < \varrho, \ldots, | x_k^{(0)} - x_k^* | < \varrho.$$

2. Die wegen $\varrho \leqq \frac{r}{2}$ im Intervall $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\varphi(t) = f(x_1^{(0)} + \alpha_1 t, \ldots, x_k^{(0)} + \alpha_k t) - (y_0 + \beta t)$$

hat in diesem Intervall mindestens m verschiedene Nullstellen. Von einer Geraden g die diese Eigenschaft hat, sagen wir: g gehöre zu ϱ in bezug auf die Mindestordnung m.

1513. **Ordnung.** Hat die Menge der Mindestordnungen eines Hyperflächenpunktes ein größtes Element, so nennen wir dieses größte Element die Ordnung des Hyperflächenpunktes. Hat diese Menge kein größtes Element, so sagen wir die Ordnung des Hyperflächenpunktes sei nicht beschränkt.

1514. **Charakteristik und Charakteristikensystem.** Das System aller Geraden des $(k+1)$-dimensionalen Raumes der Punkte $(x_1, \ldots, x_k, y)$ nennen wir das unserem Ordnungsbegriff zugrunde liegende Charakteristikensystem, eine einzelne Gerade eine Ordnungscharakteristik.

1515. **Grenzcharakteristik der Mindestordnung m.** Unter einer Grenzcharakteristik der Mindestordnung 1 des Punktes (P^*, y^*) verstehen wir jede durch (P^*, y^*) gehende Gerade. Ist $m \geqq 2$, so benötigen wir zur Definition den Begriff der Grenzgeraden einer Geradenfolge.

Es sei $\{g_n\}$ eine Geradenfolge und g^* gegeben durch

[10]) S. V. 9.

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1^* t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k^* t, \; y = y^* + \beta^* t, \text{ mit } \alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*2} = 1.$$

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g^*$, wenn g_n dargestellt werden kann durch

(3) $$x_1 = x_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} t, \ldots, x_k = x_k^{(n)} + \alpha_k^{(n)} t, \; y = y^{(n)} + \beta^{(n)} t, \text{ mit } \alpha_1^{(n)2} + \cdots + \alpha_k^{(n)2} = 1,$$

wobei

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*, \lim_{n\to\infty} y^{(n)} = y^*,$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_1^{(n)} = \alpha^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = \alpha_k^*, \lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} = \beta^*.$$

Es sei $\{g_n\}$ eine Geradenfolge und g^* gegeben durch

$$x_1 = x_1^*, \ldots, x_k = x_k^*, \; y = y^* + t.$$

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g^*$, wenn g_n dargestellt werden kann durch (3) wobei

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*, \; \lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} = \infty.$$

Folgen, in denen Elemente vorkommen, die auf dem Raum der Punkte P senkrecht stehen, brauchen wir hier nicht zu betrachten.

Nun sei $m \geqq 2$. Wir nennen eine Gerade g eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m des Hyperflächenpunktes (P^*, y^*), wenn sie Grenzgerade einer Geraden folge $\{g_n\}$ ist, mit der Eigenschaft:

Zu jedem ϱ mit $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$ gibt es ein N so, daß für $n \geqq N$ die Gerade g_n in bezug auf die Mindestordnung m zu ϱ gehört.

Aus dieser Definition folgt ohne Mühe: Ist $m \geqq 2$, so ist jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung m zugleich eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung $m - 1$. Insbesondere geht jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung 2 durch den Punkt (P^*, y^*), ist also eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung 1.

1516. **Grenzcharakteristik der Ordnung m.** Es sei $m \geqq 1$. Unter einer Grenzcharakteristik der Ordnung m eines Hyperflächenpunktes verstehen wir jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung m dieses Punktes, die nicht zugleich Grenzcharakteristik der Mindestordnung $m + 1$ dieses Punktes ist.

1517. **Satz 1.** *Notwendig und hinreichend für das Vorliegen der Mindestordnung $m \geqq 1$ im Punkte (P^*, y^*) ist die Existenz einer Grenzcharakteristik der Mindestordnung m in diesem Punkte.*

Beweis. Der Satz ist trivial für $m = 1$. Wir beweisen ihn für $m \geqq 2$. Die Bedingung ist notwendig: Wir betrachten die Zahlenfolge $\{\varrho_n\}$ mit $\varrho_n = \frac{r}{2^n}$. Aus dem Vorliegen der Mindestordnung m folgt, daß es zu jedem $n \geqq 1$ eine Gerade g_n gibt, die in bezug auf m zu ϱ_n gehört. g_n sei gegeben durch (3), wobei

$$|x_1^{(n)} - x_1^*| < \varrho_n, \ldots, |x_k^{(n)} - x_k^*| < \varrho_n.$$

Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = x_1^*, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^*$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Die zur Folge $\{g_n\}$ gehörige Folge $\{\beta^{(n)}\}$ ist beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $\{g_s\}$ von $\{g_n\}$, für die

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_1^{(s)} = \alpha_1^*, \ldots, \lim_{s\to\infty} \alpha_k^{(s)} = \alpha_k^*, \lim_{s\to\infty} \beta^{(s)} = \beta^*; \; \alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*2} = 1,$$

gilt. Nun sei τ_s eine der beiden in $(-\varrho_s, \varrho_s)$ sicher vorhandenen Nullstellen der Funktion

$\psi_s(t) = f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}t, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}t) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}t)$. Dann gilt $\lim_{s\to\infty} \tau_s = 0$ und aus $\psi_s(\tau_s) = 0$ folgt $\lim_{s\to\infty} \psi_s(\tau_s) = 0$. Nun ist aber andererseits

$$\lim_{s\to\infty} \psi_s(\tau_s) = f(x_1^*, \ldots, x_k^*) - \lim_{s\to\infty} y^{(s)}.$$

Daraus folgt $\lim_{s\to\infty} y^{(s)} = y^*$. Man hat also: Versteht man unter g^* die Gerade

$$(4) \qquad x_1 = x_1^* + \alpha_1^* t, \ldots, x_k = x_k^* + \alpha_k^* t, \; y = y^* + \beta^* t,$$

so gilt: $\lim_{s\to\infty} g_s = g^*$.

Ist nun ϱ gegeben und $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$, so kann man S so bestimmen, daß $\varrho_s < \varrho$ für $s \geqq S$ gilt. Dann gehört g_s für $s = S$ in bezug auf m zu ϱ. Damit ist gezeigt, daß g^* eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m ist.

2. Fall. Die Folge $\{\beta^{(n)}\}$ ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $\{g_s\}$, für die $\lim_{s\to\infty} \beta^{(s)} = \pm\infty$ gilt. Daraus folgt: Versteht man unter g^* die Gerade

$$x_1 = x_1^*, \ldots, x_k = x_k^*, \; y = y^* + t,$$

so gilt: $\lim_{s\to\infty} g_s = g^*$. Auch hier gibt es zu jedem ϱ mit $0 < \varrho \leqq \frac{r}{2}$ ein S so, daß g_s für $s \geqq S$ in bezug auf m zu ϱ gehört. Also ist g^* eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m

Die Bedingung ist hinreichend: Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Grenzcharakteristik und der Definition der Mindestordnung.

152. Im folgenden sollen wieder die in 111, 2. formulierten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über $y = f(P)$ als gültig angenommen werden. Dann gilt folgender Satz:

1521. **Satz 2.** *Es sei $m \geqq 2$. Eine Grenzcharakteristik g^* der Mindestordnung m des Punktes (P^*, y^*) ist eine Tangente an die Hyperfläche in diesem Punkte, deren Berührungspunkt sich in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt.*

Beweis. Wir beweisen zunächst: g^* ist Tangente im Punkte (P^*, y^*). Da $g^* = \lim_{n\to\infty} g_n$, wobei g_n durch (3) gegeben ist, so folgt: $x_1^{(n)} \to x_1^*, \ldots, x_k^{(n)} \to x_k^*$. Weiter gibt es eine Teilfolge $\{g_s\}$ von $\{g_n\}$ mit $\alpha_1^{(s)} \to \alpha^*, \ldots, \alpha_k^{(s)} \to \alpha_k^*$. Für $\{g_s\}$ gilt auch: Zu jedem ϱ mit $0 < \varrho < \frac{r}{2}$ gibt es ein S, so daß für $s \geqq S$ die in $(-\varrho, \varrho)$ mit Sicherheit erklärte Funktion

$$\psi(t) = f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}t, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}t) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}t)$$

in diesem Intervall mindestens zwei Nullstellen τ_1 und τ_2 besitzt. Daraus folgt aber:

$$0 = \psi(\tau_1) - \psi(\tau_2) = [f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_1, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}\tau_1) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}\tau_1)] - [f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_2, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}\tau_2) - (y^{(s)} + \beta^{(s)}\tau_2)],$$

$$\beta^{(s)} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}[f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_1, \ldots, x_k^{(s)} + \alpha_k^{(s)}\tau_1 - f(x_1^{(s)} + \alpha_1^{(s)}\tau_2, \ldots, x_k^{(s)} + x_k^{(s)}\tau_2)].$$

Da man ϱ beliebig klein wählen kann, folgt daraus:

$$\lim_{s\to\infty} \beta^{(s)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(1)} f(P^*) = \beta^*.$$

Da somit $\beta^{(s)}$ beschränkt ist, folgt wie in 1517, Fall 1: $\lim_{s\to\infty} y^{(s)} = y^*$.

Also ist g^* die Tangente (4) mit $\alpha_1^{*2} + \cdots + \alpha_k^{*1} = 1$ und

$$y^* = f(x_1^*, \ldots, x_k^*), \quad \beta^* = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1^* + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k^*\right)^{(1)} f(P^*).$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Daß sich der Berührungspunkt von g^* in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt, folgt unmittelbar aus der Definition der Grenzcharakteristik und des Begriffes der Auflösung.

1522. Wir wollen nun speziell gewöhnliche Punkte betrachten und zeigen, daß in diesen Punkten die in 1511 formulierte Bedingung stets erfüllt ist. Wir haben diese Bedingung bisher noch nirgends benutzt, weder zu einer Definition noch zu einem Beweise. Da wir uns auf die Betrachtung der starken Ordnung beschränken, wollen wir aber nur in solchen Punkten die Ordnung als erklärt ansehen, die diese Bedingung erfüllen. Damit schließen wir unter anderem den Fall aus, daß der betrachtete Punkt auf einer ganz in der Hyperfläche liegenden Strecke liegt.

In diesem Abschnitt 1522 wollen wir aber auf diese Bedingung verzichten und trotzdem unsere Definitionen aufrechterhalten. Wir nehmen an, die Bedingung aus 1511 gelte in einem gewöhnlichen Punkte nicht. Dann ist $k + 2$ eine Mindestordnung dieses Punktes. Nach Satz 1 gibt es dann eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung $k + 2$ in diesem Punkte. Nach Satz 2 ist dies eine Tangente, deren Berührungspunkt sich in mindesten $k + 2$ gemeinsame Pnukte auflösen läßt. Nach der notwendigen Bedingung aus 1131 ist sie also eine Tangente vom Mindestberührungsgrad $k + 1$. Eine solche gibt es aber in einem gewöhnlichen Punkte nicht. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

1523. Damit haben wir den

Satz 3. *In einem gewöhnlichen Punkte ist die Ordnung erklärt, beschränkt, mindestens gleich* 2 *und höchstens gleich* $k + 1$.

1524. **Satz 4.** *Es sei* $2 \leqq m \leqq k + 1$. *In einem gewöhnlichen Punkte ist jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung* m *eine Tangente vom Mindestberührungsgrad* $m - 1$ *und umgekehrt.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes wird bewiesen, wie es für $m = k + 2$ in 1522 geschehen ist. Der zweite Teil folgt aus der Tatsache, daß man in einem gewöhnlichen Punkte den Berührungspunkt einer Tangente vom Berührungsgrad $m - 1$ in m verschiedene, gemeinsame Punkte auflösen kann, und aus den Definitionen der Auflösung und der Grenzcharakteristik.

1525. Um in einem gewöhnlichen Punkte die Gesamtheit der Grenzcharakteristiken der Mindestordnung m mit $2 \leqq m \leqq k + 1$ durch Rechnung zu bestimmen, hat man nach Satz 4 die Gesamtheit der Tangenten vom Mindestberührungsgrad $m - 1$ zu bestimmen. Diese Aufgabe läuft im wesentlichen auf die Bestimmung der gemeinsamen, reellen, nichttrivialen Lösungen der ersten $m - 1$ Gleichungen des Systems $\mathfrak{S}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(2)} f(P^*) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_k\right)^{(k)} f(P^*) = 0$$

hinaus. Die Bestimmung der Ordnung läuft auf die Bestimmung des größten Index l hinaus, für den die ersten l Gleichungen des Systems $\mathfrak{S}$ eine gemeinsame, reelle, nichttriviale Lösung haben. Die gesuchte Ordnung ist dann $l + 1$.

1526. Auf Grund dieser Feststellungen definieren wir:

Affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix. Das Gleichungssystem $\mathfrak{S}$ aus 1525 nennen wir die affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix des Hyperflächenpunktes (P^*, y^*). Den größten Index l, für den die ersten l Gleichungen dieses Systems eine gemeinsame, reelle, nichttriviale Lösung haben, nennen wir ihren **Lösbarkeitsindex.** Der Punkt (P^*, y^*) braucht dabei kein gewöhnlicher Punkt zu sein.

Für gewöhnliche Punkte gilt jedoch nach Satz 1 und Satz 4 der

Hauptsatz über die affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix. *In einem gewöhnlichen Punkte ist der um 1 vermehrte Lösbarkeitsindex der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix gleich der genauen Ordnung des Punktes:*

Die affin verallgemeinerte Dupinsche Indikatrix geht für

$$k = 2, \frac{\partial f(P^*)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f(P^*)}{\partial x_2} = 0$$

in den Grenzfall der gewöhnlichen Dupinschen Indikatrix über.

1531. Unter wesentlicher Benützung des Ordnungsbegriffes kann man auf rein geometrischem Wege unter Vermeidung jeglicher Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu einer Indikatrix für einen Hyperflächenpunkt kommen, die für gewöhnliche Punkte in einem bestimmten Sinne (vgl. 1533) genau der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix entspricht. Für ihre Definition verzichten wir wieder auf die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen aus 1111, 2., verlangen aber das Erfülltsein der Bedingung aus 1511.

Ordnungsgeometrische Indikatrix. Es sei $m \geqq 1$. Wir betrachten in einem Hyperflächenpunkte die Menge aller Grenzcharakteristiken der Mindestordnung m und bezeichnen sie mit M_m. Es gilt $M_{m+1} < M_m$. Dabei ist M_1 nicht leer. Wir schreiben die Mengenfolge $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_m, \ldots$ an, soweit sie aus nichtleeren Mengen besteht, und bezeichnen sie mit J. Dann nennen wir

$$J = (M_1, M_2, \ldots)$$

die ordnungsgeometrische Indikatrix des betrachteten Hyperflächenpunktes. Ist die Mengenfolge J endlich, so nennen wir den Index der letzten Menge die **Länge** der ordnungsgeometrischen Indikatrix, ist sie nicht endlich, so sagen wir die Länge der ordnungsgeometrischen Indikatrix sei nicht beschränkt.

1532. Wir können den Satz 1 (1517) anwenden, da zu seinem Beweise keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über $y = f(P)$ benutzt wurden, und bekommen damit den folgenden Satz:

Hauptsatz über die ordnungsgeometrische Indikatrix. *Ist die Ordnung eines Hyperflächenpunktes beschränkt, so ist sie gleich der Länge seiner Indikatrix. Ist sie nicht beschränkt, so ist auch die Länge der Indikatrix nicht beschränkt.*

1533. Nach Satz 4 (1524) und der Definition des Mindestberührungsgrades einer

Tangente entsprechen für einen gewöhnlichen Punkt die Elemente der Menge M_m umkehrbar eindeutig den gemeinsamen, reellen, nichttrivialen Lösungen der ersten $m-1$ Gleichungen der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix. In diesem Sinne entspricht die ordnungsgeometrische Indikatrix in einem gewöhnlichen Punkt genau der affin verallgemeinerten Dupinschen Indikatrix.

§ 2. Die verallgemeinerte ordnungsgeometrische Indikatrix.

21. Die Überlegungen des § 1 haben uns zu der Definition einer ordnungsgeometrischen Indikatrix für einen Punkt eines Hyperflächenstückes im n-dimensionalen Euklidischen Raum geführt. Dabei wurde über den betrachteten Punkt des Hyperflächenstückes lediglich die in 1511 formulierte Voraussetzung gemacht. Irgendwelche Differenzierbarkeitsvoraussetzungen waren dagegen zur Definition dieser ordnungsgeometrischen Indikatrix nicht nötig.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Begriff dieser ordnungsgeometrischen Indikatrix einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig ist. Wir werden dabei den n-dimensionalen Euklidischen Raum, das Hyperflächenstück und das System der Ordnungscharakteristiken durch wesentlich allgemeinere Begriffe ersetzen.

211. Die im § 1 gewonnene ordnungsgeometrische Indikatrix beruht wesentlich auf dem Ordnungsbegriff. Wir werden daher zunächst versuchen, unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen einen Ordnungsbegriff aufzustellen.

2111. Wir machen dabei Gebrauch von folgender Definition:

Definition des schwächsten Umgebungsraumes. Eine Menge $\mathfrak{A}$ von irgendwelchen beliebigen Elementen, die wir „Punkte" nennen wollen, soll ein „schwächster Umgebungsraum" heißen, wenn für jeden Punkt P von A und jede Teilmenge A′ von A feststeht, ob A′ als Umgebung von P angesehen werden soll oder nicht[11]).

2112. **Verallgemeinerung des E_n.** Es sei $\mathfrak{R}$ ein schwächster Umgebungsraum, in dem außerdem das folgende Axiom erfüllt sein soll:

Axiom A 1. Zu jedem Punkt P von $\mathfrak{R}$ gibt es wenigstens eine Umgebung $\mathfrak{U}_P$.

Diesen Raum $\mathfrak{R}$ nehmen wir als Verallgemeinerung des n-dimensionalen Euklidischen Raumes und werden sehen, daß wir in diesem sehr allgemeinen Raume einen Ordnungsbegriff erklären können, der den Ordnungsbegriff des § 1 als Spezialfall enthält.

2113. **Verallgemeinerung des Hyperflächenstücks.** Als Verallgemeinerung des Hyperflächenstücks im n-dimensionalen Euklidischen Raum nehmen wir eine beliebige Punktmenge $\mathfrak{M}$ des Raumes $\mathfrak{R}$.

2114. **Verallgemeinerung des Charakteristikensystems.** Ein verallgemeinertes System von Ordnungscharakteristiken gewinnen wir in folgender Weise:

Es sei $\mathfrak{B}$ irgendeine Punktmenge im Raume $\mathfrak{R}$. Ist T eine eindeutige Abbildung dieser Menge $\mathfrak{B}$ auf die Menge $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{R}$, so schreiben wir $\mathfrak{B}' = T(\mathfrak{B})$. Wird dabei der Punkt P von $\mathfrak{B}$ abgebildet auf den Punkt P' von $\mathfrak{B}'$, so schreiben wir $P' = T(P)$.

Nun betrachten wir ein System $\mathfrak{k}$ von solchen eindeutigen Abbildungen der Menge $\mathfrak{B}$. Den durch die Abbildungen T aus $\mathfrak{k}$ erzeugten Bildmengen $T(\mathfrak{B})$ der Urbildmenge $\mathfrak{B}$ wollen wir die Rolle der Ordnungscharakteristiken zuweisen. Die Gesamtheit der Mengen $T(\mathfrak{B})$ für alle T aus $\mathfrak{k}$ soll also unser **Charakteristikensystem** sein; die Menge $\mathfrak{B}$ wollen

[11]) S. V. 1, S. 160.

wir seine **Basis** nennen, $\mathfrak{R}$ sein **erzeugendes System.** Dabei kann es natürlich vorkommen, daß zwei verschiedene Abbildungen ein und dieselbe Ordnungscharakteristik liefern, denn bei verschiedenen Abbildungen T_1 und T_2 können sehr wohl die Mengen $T_1(\mathfrak{B})$ und $T_2(\mathfrak{B})$ identisch sein.

2115. Um nun bezüglich dieses Charakteristikensystems zu einem Ordnungsbegriff zu gelangen, fassen wir einen festen Punkt P der Menge $\mathfrak{M}$ und einen festen Punkt Q der Basis $\mathfrak{B}$ ins Auge. Wir machen folgende Voraussetzung, die der Bedingung in 1511 entspricht (vgl. dazu 1511):

Es gibt im Raume $\mathfrak{R}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_P$ des Punktes P so, daß für jedes T aus $\mathfrak{R}$ mit $T(Q)\varepsilon\mathfrak{U}_P$ der Durchschnitt der drei Mengen $T(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{U}_P$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht.

2116. **Mindestordnung.** Es sei $\mathfrak{U}_P$ eine Umgebung des Punktes P im Raume $\mathfrak{R}$ und m eine nicht negative, ganze Zahl. Mit $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen T aus $\mathfrak{R}$, welche die folgenden beiden Eigenschaften haben:

1. $T(Q)$ ist ein Punkt von $\mathfrak{U}_P$.
2. $\mathfrak{M}$, $T(\mathfrak{B})$ und $\mathfrak{U}_P$ haben wenigstens m verschiedene Punkte gemein.

Nun soll m festgehalten und $\mathfrak{U}_P$ veränderlich gedacht werden. Ist für keine Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P die Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ leer, so wollen wir m eine Mindestordnung von $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ nennen.

2117. **Ordnung.** Es ist mit zwei Möglichkeiten zu rechnen:

a) Die Mindestordnungen von $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ haben einen endlichen Höchstwert. Wir nennen dann diesen Höchstwert die Ordnung des Punktes $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf den Punkt $Q\varepsilon\mathfrak{B}$, bezeichnen ihn mit r und schreiben:

$$r = \omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}).$$

Durch diese Schreibweise ist angedeutet, daß die Ordnung auch von dem Komplex $\mathfrak{R}$ abhängt.

b) Die Mindestordnungen von $P\varepsilon\mathfrak{M}$ in bezug auf $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ haben keinen Höchstwert. Wir sagen dann der Punkt $P\varepsilon\mathfrak{M}$ sei in bezug auf den Punkt $Q\varepsilon\mathfrak{B}$ von nicht beschränkter Ordnung.

Im Falle nicht beschränkter Ordnung sagen wir auch: die Ordnung sei größer als jede beschränkte Ordnung, und schreiben $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}) > N$, wobei N eine beliebige, natürliche Zahl sein kann.

Die Voraussetzung aus 2115 wurde bei der Definition der Mindestordnung und der Ordnung nicht benutzt. Wir wollen jedoch, falls nichts anderes ausdrücklich bemerkt ist, diese Begriffe nur dann als erklärt ansehen, wenn die Voraussetzung aus 2115 erfüllt ist.

Es macht keine Mühe sich zu überzeugen, daß der in § 1 benutzte Ordnungsbegriff ein Spezialfall dieses allgemeineren Ordnungsbegriffes ist. Man kommt auf den Spezialfall des § 1, wenn man für $\mathfrak{B}$ eine beliebige Gerade g des E_n setzt, für Q einen beliebigen Punkt dieser Geraden g und als erzeugendes System die Gruppe aller Bewegungen von g im E_n nimmt.

212. Um neben dem verallgemeinerten Ordnungsbegriff nun auch zu einer verallgemeinerten, ordnungsgeometrischen Indikatrix zu gelangen, benötigen wir einen neuen Begriff.

21211. **Definition des schwächsten Häufungsraumes.** Eine Menge $\mathfrak{A}$ von irgendwelchen beliebigen Elementen soll ein „schwächster Häufungsraum" heißen, wenn zu

jedem Element P von $\mathfrak{A}$ und zu jeder Teilmenge $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ feststeht, ob P als Häufungspunkt von $\mathfrak{A}'$ angesehen werden soll oder nicht[11]).

21212. **Abgeschlossene Hülle.** Ist $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge des schwächsten Umgebungsraumes $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir die Menge aller Häufungspunkte von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}$.

Unter der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{T}$ versteht man die Menge $\mathfrak{T} + \mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}$. Wir schreiben $\mathfrak{T} + \mathfrak{H}_{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{T}}$. Man sagt $\mathfrak{T}$ ist abgeschlossen, wenn $\overline{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}$.

21213. Nun sei der Komplex $\mathfrak{R}$ der Abbildungen $\mathfrak{T}$ ein schwächster Häufungsraum, in dem außerdem das folgende Axiom erfüllt sein soll:

Axiom B 1. Die leere Menge hat keinen Häufungspunkt.

21214. Aus Axiom B 1 und der Definition der abgeschlossenen Hülle folgt

Satz 1. *Die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{T}}$ einer Teilmenge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann leer, wenn $\mathfrak{T}$ leer ist.*

2122. Die ordnungsgeometrische Indikatrix des § 1 ist ein System von ineinandergeschachtelten Mengen von Grenzcharakteristiken. Wir werden daher zunächst den Begriff der Grenzcharakteristik zu verallgemeinern trachten. Dazu erklären wir den Begriff der Grenzabbildung.

21221. **Grenzabbildung der Mindestordnungen** m. Es seien $P \varepsilon \mathfrak{M}$ (siehe 2113) und $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ (siehe 2114) zwei im weiteren fest angenommene Punkte. Dabei sei die Voraussetzung 2115 erfüllt. Ebenfalls fest vorgegeben sei die nicht negative, ganze Zahl m. Nun betrachten wir für jede Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_P)$ der Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ (vgl. 2116). Gehört die Abbildung T_m allen diesen abgeschlossenen Hüllen an, so nennen wir T_m eine Grenzabbildung der Mindestordnung m für den Punkt $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf den Punkt $Q \varepsilon \mathfrak{B}$. Die durch diese Abbildung T_m erzeugte Ordnungscharakteristik $T_m(B)$ heiße eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m für den Punkt $P \varepsilon M$ in bezug auf den Punkt $Q \varepsilon B$. Die Menge aller Grenzabbildungen T_m bezeichnen wir mit M_m. Es ist also $M_m = \prod_{\mathfrak{U}_P} \overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_P)$.

21222. **Die ordnungsgeometrische Indikatrix.** Wir wollen nun unter der ordnungsgeometrischen Indikatrix des Punktes $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf den Punkt $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ die Mengenfolge $\{M_m\}$ verstehen und schreiben:

$$J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}) = (M_0, M_1, M_2, \ldots).$$

Durch diese Schreibweise ist angedeutet, daß die Indikatrix auch von dem Komplex $\mathfrak{R}$ abhängt. Die Mengen M_m wollen wir die **Glieder** der Indikatrix nennen.

2123. Wir wollen den Zusammenhang dieser verallgemeinerten Indikatrix $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R})$ mit der Ordnung $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R})$ betrachten.

Aus der Definition der Mengen M_m, der Definition der Ordnung und aus Axiom B 1 folgt sofort: Ist m der Index einer nicht leeren Menge M_m, so ist $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R}) \geqq m$. Ist also die Anzahl der nicht leeren Mengen M_m in $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{R})$ nicht beschränkt, so ist $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ von nicht beschränkter Ordnung. Ist dagegen diese Anzahl beschränkt, so kann man aus der Indikatrix zunächst nur eine untere Schranke für die Ordnung entnehmen.

2124. Man kann jedoch für den Fall, daß die Anzahl der nicht leeren Mengen M_m beschränkt ist, aus der Indikatrix sogar die genaue Ordnung von $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ entnehmen, falls man über den Raum $\mathfrak{R}$ (vgl. 2112) und über das System $\mathfrak{R}$ (siehe

2114 und 21221) nur noch einige weitere, naheliegende Voraussetzungen sehr allgemeiner Natur macht.

21241. Für den Raum $\mathfrak{R}$ und damit für den Umgebungsbegriff fordern wir die Gültigkeit eines weiteren Axioms:

Axiom A 2. Zu jedem Punkt P von $\mathfrak{R}$ gibt es wenigstens eine unendliche Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ von nicht notwendig verschiedenen Umgebungen dieses Punktes P mit folgenden beiden Eigenschaften:

1. Für alle n ist $\mathfrak{U}_{n+1} \leqq \mathfrak{U}_n$.

2. Zu jeder beliebigen Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P gibt es stets wenigstens eine Umgebung $\mathfrak{U}_{n^*}$ aus der Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ mit $\mathfrak{U}_{n^*} \leqq \mathfrak{U}_P$.

21242. Für den Komplex $\mathfrak{K}$ fordern wir die Gültigkeit zweier weiterer Axiome.

Axiom B 2. Gilt $\mathfrak{T}_1 \leqq \mathfrak{T}_2$ für zwei Teilmengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ aus $\mathfrak{K}$, so gilt auch für die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_1 \leqq \overline{\mathfrak{T}}_2$.

Axiom B 3. Ist $\{\overline{\mathfrak{T}}_n\}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen aus $\mathfrak{K}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

1. $\overline{\mathfrak{T}}_{n+1} \leqq \overline{\mathfrak{T}}_n$,

2. Kein Element $\overline{\mathfrak{T}}_n$ der Folge ist leer,

so ist der Durchschnitt der $\overline{\mathfrak{T}}_n$ nicht leer, das heißt, es gibt wenigstens eine Abbildung T, die allen Elementen $\overline{\mathfrak{T}}_n$ der Folge angehört.

21251. Mit Hilfe dieser Axiome beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 2. *Die Glieder M_m der ordnungsgeometrischen Indikatrix bilden eine absteigende Folge, das heißt es gilt $M_{m+1} \leqq M_m$.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß jede Grenzcharakteristik der Mindestordnung $m+1$ zugleich eine Grenzcharakteristik der Mindestordnung m ist oder, was dasselbe bedeutet, daß jede Grenzabbildung T_{m+1} zugleich eine T_m ist, das heißt, daß jede T_{m+1} der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_P)$ der für jede beliebige Umgebung $\mathfrak{U}_P$ des Punktes P gebildeten Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ angehören muß.

Wir betrachten eine Grenzabbildung T_{m+1} und eine Umgebung $\mathfrak{U}_P$ von P. Auf Grund seiner Definition gehört T_{m+1} der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}(m+1, \mathfrak{U}_P)$ der Menge $\mathfrak{T}(m+1, \mathfrak{U}_P)$ an. Auf Grund der Definition der Menge $\mathfrak{T}(m+1, \mathfrak{U}_P)$ und der Menge $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$ (siehe 2116) gilt aber: $\mathfrak{T}(m+1, \mathfrak{U}_P) \leqq \mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_P)$. Nach Axiom B 2 folgt daraus: $\overline{\mathfrak{T}}(m+1, U_P) \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m, U_P)$. Daraus und aus $T_{m+1} \varepsilon \overline{\mathfrak{T}}(m+1, U_P)$ folgt dann $T_{m+1} \varepsilon \mathfrak{T}(m, U_P)$, w. z. b. w.

21252. Die **Länge** der Indikatrix. Aus Satz 2 folgt: Ist ein Glied M_m der Indikatrix leer, so sind es auch alle folgenden. Wir wollen festsetzen, daß leere Mengen in der Indikatrix nicht angeschrieben werden sollen und unterscheiden dann folgende Fälle:

a) Eine der Mengen M_m ist leer. Den Index m^* der letzten nicht leeren dieser Mengen nennen wir die Länge der Indikatrix.

b) Keine der Mengen M_m ist leer. Wir sagen dann: die Länge der Indikatrix ist nicht beschränkt.

2126. Nun können wir den für die Indikatrix wesentlichen Satz beweisen:

Hauptsatz über die ordnungsgeometrische Indikatrix. *Ist die Länge der Indikatrix $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K})$ beschränkt, so ist sie gleich der Ordnung $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K})$; ist sie nicht beschränkt, so ist auch die Ordnung $\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K})$ nicht beschränkt.*

Beweis. Fall b): Ist die Länge der Indikatrix nicht beschränkt, so folgt die Behauptung unmittelbar aus 2123.

Fall a): Ist die Länge der Indikatrix beschränkt und gleich m, so ist die Ordnung nach 2123 nicht kleiner als m. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß sie auch nicht größer als m ist. Wir zeigen dies, indem wir folgendes beweisen: Ist m_0 eine Mindestordnung von $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$, so ist M_{m_0} nicht leer. Dazu betrachten wir zu dem Punkt P eine unendliche Folge von Umgebungen $\{\mathfrak{U}_n\}$ mit den Eigenschaften des Axioms A 2. Zu den Elementen dieser Folge bilden wir die Mengen $\mathfrak{T}(m_0, \mathfrak{U}_n) = \mathfrak{T}_n$ und erhalten die Mengenfolge $\{\mathfrak{T}_n\}$. Aus der Definition der Mengen $\mathfrak{T}_n$ und aus $\mathfrak{U}_{n+1} \leqq \mathfrak{U}_n$ folgt $\mathfrak{T}_{n+1} \leqq \mathfrak{T}_n$. Nach Axiom B 2 gilt daher auch für die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_{n+1} \leqq \overline{\mathfrak{T}}_n$.

Da m_0 eine Mindestordnung ist, ist keine der Mengen $\mathfrak{T}_n$ leer. Nach Satz 1 ist daher auch keine der abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_n$ leer. Nach Axiom B 3 ist daher auch der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller $\overline{\mathfrak{T}}_n$ nicht leer. Nun zeigen wir noch:

$$\mathfrak{D} \leqq M_{m_0}.$$

Dazu haben wir zu zeigen: Ist $\mathfrak{U}_P^{(0)}$ eine beliebige Umgebung von P, so gilt $\mathfrak{D} \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0, \mathfrak{U}_P^{(0)})$. Nach Axiom A 2 gibt es zu $\mathfrak{U}_P^{(0)}$ ein Element $\mathfrak{U}_{n^*}$ der Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$, für das $\mathfrak{U}_{n^*} \leqq \mathfrak{U}_P^{(0)}$ gilt. Daraus folgt: $\mathfrak{T}(m_0, \mathfrak{U}_{n^*}) \leqq \mathfrak{T}(m_0, \mathfrak{U}_P^{(0)})$.

Nach Axiom B 2 gilt $\overline{\mathfrak{T}}(m_0, \mathfrak{U}_{n^*}) \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0\, \mathfrak{U}_P^{(0)})$, und damit folgt aus $\mathfrak{D} \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0, U_{n^*})$ dann $\mathfrak{D} \leqq \overline{\mathfrak{T}}(m_0, \mathfrak{U}_P^{(0)})$. Da $\mathfrak{D}$ nicht leer ist, kann daher auch M_{m_0} nicht leer sein, w. z. b. w.

Zusatz. Da $\mathfrak{D} \geqq M_{m_0}$ ist, so folgt $\mathfrak{D} = M_{m_0}$. Dies gilt auch, wenn m_0 keine Mindestordnung, das heißt wenn M_{m_0} leer ist. Wir werden diese Bemerkung später benötigen.

2127. Die im § 1 definierte ordnungsgeometrische Indikatrix ist ein Spezialfall dieser allgemeinen ordnungsgeometrischen Indikatrix. Man braucht nur im System der Bewegungen einer Geraden im E_n in geeigneter Weise den Begriff des Häufungspunktes und damit den Begriff der abgeschlossenen Hülle einzuführen.

221. **Vertauschung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$.** Es kann sein, daß die Abbildungen T des erzeugenden Systems $\mathfrak{R}$ des Charakteristikensystems als Abbildungen des ganzen Umgebungsraumess $\mathfrak{R}$ auf eine echte oder unechte Teilmenge von sich selbst, das heißt von $\mathfrak{R}$, erklärt sind. Die Ordnungscharakteristik $T(\mathfrak{B})$ ist dann eben die Teilmenge des Raumes $\mathfrak{R}$, auf die die Basis $\mathfrak{B}$ bei der Abbildung T des ganzen Raumes $\mathfrak{R}$ abgebildet wird. Es kann natürlich auch dabei vorkommen, daß zwei verschiedene Abbildungen dieselbe Charakteristik liefern.

2211. Sind die Abbildungen T von $\mathfrak{R}$ als Abbildungen des ganzen Umgebungsraumes erklärt, so kann man die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ die Rollen tauschen lassen. Denn jede Abbildung T bildet jetzt auch die Menge $\mathfrak{M}$ auf eine Menge $T(\mathfrak{M})$ ab. Man kann daher die Gesamtheit aller $T(\mathfrak{M})$ als Ordnungscharakteristikensystem zur Untersuchung von $\mathfrak{B}$ auffassen.

2212. Es sei wieder P ein fester Punkt von $\mathfrak{M}$ und Q ein fester Punkt von $\mathfrak{B}$. Entsprechend 2115 setzen wir voraus (vgl. dazu wieder 1511). :

Es gibt im Raume $\mathfrak{R}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_Q$ des Punktes Q so, daß für jedes T aus $\mathfrak{R}$ mit $T(P) \varepsilon U_Q$ der Durchschnitt der drei Mengen $T(\mathfrak{M}), \mathfrak{B}, \mathfrak{U}_Q$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht.

2213. Unter dieser Voraussetzung erklären wir entsprechend 2115 den Begriff der Mindestordnung und der Ordnung von $Q \varepsilon B$ in bezug auf $P \varepsilon M$. Ist diese Ordnung beschränkt, so nennen wir sie r' und schreiben $r' = \omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{R})$; ist sie nicht beschränkt, so schreiben wir $\omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{R}) > N$, wobei N wieder eine beliebige, natürliche Zahl sein kann. Zwischen der Ordnung von $P \varepsilon \mathfrak{M}$ in bezug auf $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ und der Ordnung von $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ in bezug auf $P \varepsilon \mathfrak{M}$ besteht im allgemeinen keinerlei Beziehung. Man kann leicht Beispiele konstruieren, für die die eine der beiden Ordnungen erklärt ist, die andere dagegen nicht.

2214. Ist der Komplex $\mathfrak{R}$ von Abbildungen des ganzen Raumes $\mathfrak{R}$ auf sich selbst ein schwächster Häufungsraum, für den das Axiom B 1 gilt, so haben wir neben der Ordnung $\omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{R})$ auch noch die Indikatrix $J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{R}) = (M_0', M_1', \ldots)$ von $Q \varepsilon \mathfrak{B}$ im Bezug auf $P \varepsilon \mathfrak{M}$. Gelten außerdem noch die Axiome A 2 und B 2 und B 3, so gilt der Hauptsatz über die ordnungsgeometrische Indikatrix entsprechend auch für

$$J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{R}).$$

222. **Kinematische Ordnung und Indikatrix.** Ein einfaches Beispiel für die in 211 ff. entwickelten Begriffe bekommt man, wie wir sehen werden, wenn man für $\mathfrak{R}$ den n-dimensionalen euklidischen Raum E_n und für $\mathfrak{R}$ die Gruppe der Bewegungstransformationen des E_n in sich selbst setzt. Man spricht in diesem Falle von kinematischer Ordnung[12]) bezüglich einer bestimmten Basis. Die Indikatrix wollen wir daher in diesem Falle entsprechend **kinematische Indikatrix** nennen.

2221. Die kinematische Ordnung und Indikatrix wollen wir etwas eingehender betrachten. Wir wollen daher hier einige Bemerkungen über lineare Abbildungen des E_n im allgemeinen und orthogonale im besonderen zusammenstellen, da sie für später wichtig sind.

22211. Eine lineare Abbildung mit nicht verschwindender Determinante des E_n auf sich selbst

$$x_\nu' = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda} x_\lambda + b_\nu, \quad | a_{\nu\lambda} | \neq 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

ist umkehrbar eindeutig; wir bezeichnen sie mit $(a_{\nu\lambda}, b_\nu) = T$.

Gleichheit zweier linearer Abbildungen. Es sei $T_j = (a_{\nu\lambda}^{(j)}, b_\nu^{(j)})$, $j = 1, 2$. Wir schreiben $T_1 = T_2$ dann und nur dann, wenn

$$a_{\nu\lambda}^{(1)} = a_{\nu\lambda}^{(2)} \text{ und } b_\nu^{(1)} = b_\nu^{(2)}, \qquad \nu, \lambda = 1, \ldots, n.$$

Für die identische Abbildung schreiben wir

$$E = (\delta_{\nu,\lambda}, 0), \quad \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = \lambda \\ 0 \text{ für } \nu \neq \lambda \end{cases}.$$

Werden zwei lineare Abbildungen T_1 und T_2 in dieser Reihenfolge nacheinander ausgeführt, so ist das Ergebnis wieder eine lineare Abbildung T_3 und wir schreiben $T_3 = T_2 T_1$. Die zu T inverse Abbildung bezeichnen wir mit T^{-1}. Bildet man zu jedem Element T einer Menge $\mathfrak{T}$ das inverse, so bezeichnen wir die Menge der so erhaltenen inversen Elemente von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{T}^{-1}$.

22212. **Abstand zweier linearer Abbildungen.** Wir führen im Raume der T eine Metrik ein, indem wir den Abstand zweier Abbildungen T_1 und T_2 definieren durch

$$| T_1, T_2 | = \sqrt{\sum_{\nu,\lambda=1}^{n} (a_{\nu\lambda}^{(1)} - a_{\nu\lambda}^{(2)})^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^{(1)} - b_\nu^{(2)})^2}.$$

[12]) S. V. 2; 1. Heft, S. 55; 2. Heft, S. 117.

Diese Abstandsdefinition erfüllt die Forderungen, die man üblicherweise an eine Metrik zu stellen pflegt. Es gilt nämlich:

1. Es ist $| T_1, T_2 | = 0$ dann und nur dann, wenn $T_1 = T_2$, sonst $| T_1, T_2 | > 0$.
2. Es ist $| T_1, T_2 | = | T_2, T_1 |$.
3. Es gilt die Dreiecksungleichung: $| T_1, T_2 | + | T_2, T_3 | \geqq | T_3, T_1 |$.

222213. **Betrag einer linearen Abbildung.** Den Abstand einer linearen Abbildung T von der identischen Abbildung E nennen wir den Betrag von T und schreiben

$$| T, E | = | T |.$$

Es ist $| E | = 0$.

22214. Nun beschränken wir uns auf die Betrachtung von Bewegungstransformationen, das heißt, wir setzen voraus, es solle für die Koeffizienten $a_{\nu\lambda}$ einer jeden betrachteten linearen Transformation gelten

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu_1\lambda} a_{\nu_2\lambda} = \delta_{\nu_1\nu_2} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu_1 = \nu_2 \\ 0 \text{ für } \nu_1 \neq \nu_2 \end{cases}, \quad \nu_1, \nu_2 = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt für je drei Abbildungen T_1, T_2 und T_3 die Beziehung

$$| T_1, T_2 | = | T_3 T_1, T_3 T_2 |.$$

Der Beweis läßt sich auf Grund der Definition des Abstands leicht führen. Es genügt, wenn T_3 orthogonal ist.

22215. Mit Hilfe dieser Bemerkung gewinnen wir einige für uns wichtige Beziehungen. Es gilt nämlich:

1. $$| T^{-1} | = | T |.$$
2. $$| T_1, T_2 | = | T_2^{-1} T_1 |.$$
3. $$| T_1 T_2 | \leqq | T_1 | + | T_2 |.$$

Der Beweis, der mit Hilfe der Beziehung aus 22214 leicht zu führen ist, soll hier nur für 1. erbracht werden. Es ist

$$| T^{-1} | = | T^{-1}, E | = | T T^{-1}, T E | = | E, T | = | T |.$$

22216. Gilt für eine Folge $\{T_n\}$ von Bewegungstransformationen und eine feste Transformation T die Beziehung $\lim_{n\to\infty} | T_n, T | = 0$, so schreiben wir auch $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Aus $\lim_{n\to\infty} T_n' = T'$ und $\lim_{n\to\infty} T_n'' = T''$ folgt stets $\lim_{n\to\infty} T_n' T_n'' = T' T''$, aus $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ stets $\lim_{n\to\infty} T_n^{-1} = T^{-1}$. Daraus ergibt sich: Zu einer Transformation T^* und einem $\varepsilon > 0$ gibt es stets ein $\vartheta(T^*, \varepsilon) > 0$, so daß für $| T | < \vartheta(T^*, \varepsilon)$ gilt: $| T^{*-1} T T^* | < \varepsilon$. Aus der Metrik ergibt sich der Begriff des Häufungspunktes und damit auch der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}$ einer Menge $\mathfrak{T}$ von Bewegungstransformationen. Es gelten die Axiome B 1 bis B 3. Weiter gilt für endlich oder unendlich viele $\mathfrak{T}_\nu$:

$$(\overline{\mathfrak{T}})^{-1} = \overline{\mathfrak{T}^{-1}} \text{ (Definition von } \mathfrak{T}^{-1} \text{ siehe 22211) und } \prod_\nu \overline{\mathfrak{T}}_\nu = \overline{\prod_\nu \mathfrak{T}_\nu}.$$

22221. Wir betrachten im Raume E_n die beiden Punktmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$. Es sei P ein fester Punkt von $\mathfrak{M}$ und Q ein fester Punkt von $\mathfrak{B}$. Wegen der Eineindeutigkeit der Bewegungstransformationen sind die Voraussetzungen aus 2115 und aus 2212 äquivalent.

22222. Die Voraussetzungen aus 2115 und 2212 seien erfüllt. Es sei $m \geqq 0$, ganz. Dann wird behauptet:

$M'_m = M_m^{-1}$ (zur Definition von M^{-1} siehe 22221).

Zunächst zeigen wir: $M_m^{-1} \leqq M'_m$. Dazu betrachten wir eine Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ von Umgebungen des Punktes P mit den Eigenschaften von Axiom A 2. Die nicht negative ganze Zahl m halten wir fest und betrachten dazu die Mengenfolge $\{\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)\}$ und die Folge der abgeschlossenen Hüllen $\{\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_n)\}$. Der Durchschnitt aller dieser abgeschlossenen Hüllen heiße $\mathfrak{D}$. Nach einer Bemerkung in 2126, Zusatz, ist $\mathfrak{D} = M_m$.

Nun konstruieren wir zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}_n$ von P aus der Folge $\{\mathfrak{U}_n\}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}'_n$ von Q auf folgende Weise: Für jedes T aus $T(m, \mathfrak{U}_n)$ bilden wir $T^{-1}(\mathfrak{U}_n)$. $T(Q)$ liegt nach Definition von $T(m, \mathfrak{U}_n)$ (siehe 2116) in $\mathfrak{U}_n$, also liegt $Q = T^{-1}(T(Q))$ in $T^{-1}(\mathfrak{U}_n)$. Man kann nun eine Folge $\{\mathfrak{U}'_n\}$ von Umgebungen des Punktes Q so angeben, daß die Eigenschaften von Axiom A 2 entsprechend erfüllt sind und außerdem $T^{-1}(\mathfrak{U}_n) \leqq \mathfrak{U}'_n$ ist für jedes T aus $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)$. Für die Betrachtung von $Q \varepsilon B$ in bezug auf $P \varepsilon \mathfrak{M}$ bilden wir, entsprechend den Mengen $\mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)$, die Mengen $\mathfrak{T}'(m, \mathfrak{U}'_n)$, ihre abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}'(m, U'_n)$ und deren Durchschnitt $\mathfrak{D}'$. Es ist $\mathfrak{D}' = M'_m$. Aus $T^{-1}(\mathfrak{U}_n) \leqq \mathfrak{U}_n$ für $T \varepsilon \mathfrak{T}(m, \mathfrak{U}_n)$ folgt:

$$\mathfrak{T}^{-1}(m, \mathfrak{U}_n) \leqq \mathfrak{T}'(m, \mathfrak{U}'_n).$$

Daraus folgt:

$$\overline{\mathfrak{T}^{-1}}(m, \mathfrak{U}_n) \leqq \overline{\mathfrak{T}}'(m, \mathfrak{U}'_n),$$

$$(\overline{\mathfrak{T}}(m, \mathfrak{U}_n))^{-1} \leqq \overline{\mathfrak{T}}'(m, \mathfrak{U}'_n),$$

$$\mathfrak{T}^{-1} \leqq \mathfrak{D}'.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit $M_m^{-1} \leqq M'_m$. Entsprechend beweist man $M'^{-1}_m \leqq M_m$ und hat damit die Behauptung.

22223. Nun bilden wir rein formal $J^{-1}(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}) = (M_0^{-1}, M_1^{-1}, \ldots)$ und nennen dies die zu $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; K)$ **inverse Indikatrix.**

22224. Gleichheit zweier kinematischer Indikatrizen. Wir sagen, zwei kinematische Indikatrizen J und J' seien gleich und schreiben $J = J'$, wenn die Glieder von J und J' vermöge einer festen Transformation T einander ein-eindeutig entsprechen, das heißt, wenn es eine feste Transformation T gibt mit folgenden Eigenschaften:

Ist M_m das m-te Glied von J, M'_m das m-te Glied von J', so gilt:

1. Ist $T_1 \varepsilon M_m$, so ist $T\, T_1 \varepsilon M'_m$.
2. Ist $T_2 \varepsilon M'_m$, so ist $T^{-1}\, T_2 \varepsilon M_m$.

Dann haben wir den folgenden Satz:

Satz 3. *Für die kinematische Indikatrix gilt:*

$$J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}) = J^{-1}(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}).$$

Daraus folgt

Satz 4. *Für die kinematische Ordnung gilt:*

$$\omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}) = \omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}).$$

$\omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}) = \omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K})$ nennen wir daher auch die **kinematische Relativordnung** der beiden Punkte $P \varepsilon M$ und $Q \varepsilon \mathfrak{B}$.

2231. Die Betrachtung der kinematischen Ordnung und Indikatrix, insbesondere die Überlegungen aus 22222 legen eine ordnungsgeometrische Verallgemeinerung des Bewegungsbegriffes nahe. Zum Zwecke dieser Verallgemeinerung beachten wir, daß zur Definition der Mengen M_m (siehe 21221) bzw. M'_m (siehe 2214) die Voraussetzung aus 2115 bzw. 2212 nicht benutzt wurde. Wir können und wollen daher hier diese Definitionen aufrechterhalten, ohne das Erfülltsein einer solchen Voraussetzung zu fordern.

2232. **Ordnungsgeometrische Verallgemeinerung des Bewegungsbegriffes.** Es sei $\mathfrak{R}$ ein schwächster Umgebungsraum, in dem die Axiome A 1 und A 2 gelten. Der Komplex $\mathfrak{K}^*$ habe folgende Eigenschaften:

1. $\mathfrak{K}^*$ sei ein Komplex von Abbildungen des ganzen Raumes $\mathfrak{R}$ auf sich selbst.
2. $\mathfrak{K}^*$ sei ein schwächster Häufungsraum, in dem die Axiome B 1 bis B 3 gelten.
3. $\mathfrak{K}^*$ sei eine Gruppe.

Wir sagen, $\mathfrak{K}^*$ sei eine ordnungsgeometrische Verallgemeinerung der Bewegungsgruppe, wenn außerdem folgendes gilt:

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen von $\mathfrak{R}$ mit $P \varepsilon \mathfrak{M}$, $Q \varepsilon \mathfrak{B}$, so gilt stets $M'_m = M_m^{-1}$. In diesem Falle nennen wir jedes Element T von $\mathfrak{K}^*$ eine ordnungsgeometrisch verallgemeinerte Bewegung; die Ordnungen $r = \omega(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}^*)$ und $r' = \omega(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}^*)$ und die Indikatrizen $J(P_{\mathfrak{M}}, Q_{\mathfrak{B}}; \mathfrak{K}^*)$ und $J(Q_{\mathfrak{B}}, P_{\mathfrak{M}}; \mathfrak{K}^*)$ nennen wir verallgemeinerte kinematische Ordnungen bzw. Indikatrizen.

Auch für verallgemeinerte kinematische Ordnung und Indikatrix gelten die Sätze 3 und 4 aus 22223, wenn man für verallgemeinerte kinematische Indikatrizen den Begriff der Gleichheit entsprechend 22224, jetzt aber mit Benützung einer festen ordnungsgeometrisch verallgemeinerten Bewegung T^* aus K^*, definiert.

§ 3. Über die Berechnung der kinematischen Indikatrix für ein aus einem Hyperflächen- und einem Kurvenpunkt bestehendes gewöhnliches Punktepaar.

Wir behandeln in diesem Paragraphen zunächst die Auflösung des Berührungspunktes einer beliebigen Kurve mit einer Hyperfläche in mehrere gemeinsame Punkte durch eine beliebig kleine Bewegung der berührenden Kurve. Diese Untersuchungen sind auf dem Begriff der Bewegungstransformation aufgebaut; auf den Spezialfall angewendet, daß die Kurve eine Gerade ist, stellen sie eine neue Behandlungsweise des Stoffes des ersten Paragraphen dar. Die Untersuchungsmethoden sind in weitem Umfange die bereits im ersten Paragraphen angewandten. Wo in diesem Paragraphen von einer Transformation die Rede ist, ist stets eine Bewegungstransformation gemeint.

3111. **Hyperflächenstück.** Wir erklären das Hyperflächenstück als $(n-1)$-dimensionales, topologisches Würfelbild. Im einzelnen setzen wir hier voraus: Es sei $n \geqq 2$. Im $(n-1)$-dimensionalen, Euklidischen Raume der Punkte $U = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ liege ein $(n-1)$-dimensionaler, offener Würfel W. In diesem Würfel W seien n Funktionen $\varphi_\nu(u_1, \ldots, u_{n-1})$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, erklärt, über die wir folgende Annahmen machen wollen:

1. Die Funktionen φ_ν seien überall in W stetig.
2. Ihre partiellen Ableitungen seien bis zur Ordnung $l = \binom{n}{2}$ einschließlich überall in W erklärt und stetig.

3. Die Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right)$ $(\nu = 1, \ldots, n; \varkappa = 1, \ldots, n-1)$ habe überall in W den Rang $n-1$.

Statt $x_\nu = \varphi_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, schreiben wir auch kürzer $P = \varphi(U)$. Aus $\varphi(U_1)\varphi = (U_2)$ soll hier stets folgen $U_1 = U_2$. Im n-dimensionalen, Euklidischen Raume der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_n)$ ist dann durch $P = \varphi(U)$ ein Hyperflächenstück F gegeben.

3112. **Kurvenstück.** Wir erklären das Kurvenstück als topologisches Streckenbild. Im einzelnen setzen wir hier voraus: In einem offenen Intervall J seien n Funktionen $\psi_\nu(t)$ erklärt, die folgende Eigenschaften haben sollen:

1. Die Funktionen ψ_ν seien überall in J stetig.
2. Ihre Ableitungen seien bis zur Ordnung $l = \binom{n}{2}$ einschließlich überall in J erklärt und stetig.
3. Überall in J sei $\psi_1'^2 + \cdots + \psi_n'^2 \neq 0$.

Statt $x_\nu = \psi_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, schreiben wir auch kürzer $P = \psi(t)$. Über C setzen wir noch voraus, daß aus

$$P_1 = \psi(t_1),\ P_2 = \psi(t_2) \text{ und } P_1 = P_2 \text{ folgen soll } t_1 = t_2.$$

Im n-dimensionalen, Euklidischen Raume der Punkte $P = (x_1, \ldots, x_n)$ ist dann durch $P = \psi(t)$ ein Kurvenstück C gegeben.

3113. **Die Funktion $\Phi_T(t)$.** Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Betrachtung des Durchschnittes von F und $T(C)$ schaffen wir uns durch die Definition der Funktion $\Phi_T(t)$. Wir betrachten einen Punkt $Q^* = \varphi(U^*)$ unseres Hyperflächenstückes. $U^* = (u_1^*, \ldots, u_{n-1}^*)$ liegt in W. O. B. d. A. sei die Determinante $d(U^*) = \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right|_{U^*}$ mit $\nu, \varkappa = 1, \ldots, n-1$ nicht gleich Null.

31131. Die Zahl δ. Wegen der Stetigkeit der $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}$ gibt es ein $\delta > 0$, für das gilt:

1. Der Bereich $|u_\varkappa - u_\varkappa^*| < \delta$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ liegt ganz in W.
2. In diesem Bereich ist $d(U) = \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa}\right| \neq 0$.

31132. Der Bereich B_ζ. Wir betrachten die $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= \varphi_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}). \end{aligned}$$

Sind $x_1^*, \ldots, x_n^*$ die Koordinaten von Q^*, so gilt:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \varphi_1(u_1^*, \ldots, u_{n-1}^*), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}^* &= \varphi_{n-1}(u_1^*, \ldots, u_{n-1}^*). \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher ein $\zeta > 0$, so daß für den Bereich B_ζ, gegeben durch $|x_\nu - x_\nu^*| < \zeta$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ im Raume der Punkte $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $n-1$ Funktionen $u_\varkappa = \chi_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\varkappa = 1, \ldots, n-1$, erklärt sind, für die folgendes gilt:

1. Die Funktionen $\chi_\varkappa(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ sind eindeutig und stetig in B_ζ.

2. Überall in B_ζ gilt: $|\chi_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n-1}) - \chi_\varkappa(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*)| < \delta$.
3. Die partiellen Ableitungen der $\chi_\varkappa$ sind überall in B_ζ bis zur Ordnung l einschließlich erklärt und stetig.
4. Überall in B_ζ gilt: $x_\nu = \varphi_\nu(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1})$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$.

31133. Die Zahlen ϱ^*, ε^*. Nun betrachten wir einen Punkt $P^* = \psi(t^*)$ unseres Kurvenstücks. t^* liegt in J. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\psi_\nu(t)$ gibt es ein $\varrho_\nu > 0$ so, daß das Intervall $|t - t^*| < \varrho_\nu$ ganz in J liegt und daß für $|t - t^*| < \varrho_\nu$ gilt: $|\psi_\nu(t) - \psi_\nu(t^*)| < \frac{\zeta}{3n}$. Wir setzen

$$\varrho^* = \mathrm{Min}(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),$$
$$M = \mathrm{Max}(|\psi_1(t^*)|, \ldots, |\psi_n(t^*)|),$$
$$\varepsilon^* = \frac{\zeta}{3n(M+1)}.$$

31134. Die Funktionen $\chi_{\varkappa T}(t)$. Es sei $T^* = (a_{\nu\lambda}^*, b_\nu^*)$ mit $T^*(P^*) = Q^*$. Weiter sei T' eine Transformation, für die $|T'| < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ gelte (vgl. 22216). Wir setzen

$$T'\,T^* = T = (a_{\nu\lambda}, b_\nu).$$

Dann gilt

$$|T, T^*| = |T' \cdot T^*, T^*| = |T^{*-1}\,T'\,T^*| < \varepsilon^*.$$

Das Kurvenstück $T(C)$ ist gegeben durch:

$$x_{\nu,T}(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) + b_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Es ist $x_{\nu,T^*}^* = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}^*\psi_\lambda(t^*) + b_\nu^*$. Für $|t - t^*| < \varrho^*$ gilt nun:

$$|x_{\nu,T}(t) - x_{\nu,T^*}(t^*)| \leqq \sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) - a_{\nu\lambda}^*\psi_\lambda(t^*)| + |b_\nu - b_\nu|.$$
$$\leqq \sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\nu\lambda}|\,|\psi_\lambda(t) - \psi_\lambda(t^*)| + \sum_{\lambda=1}^{n} |\psi_\lambda(t^*)|\,|a_{\iota\lambda} - a_\nu^*| + |b_\nu - b_\nu^*|$$
$$< n\frac{\zeta}{3n} + n\,M\frac{\zeta}{3n(M+1)} + \frac{\zeta}{3n(M+1)}$$
$$< \frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta}{3} = \zeta.$$

Setzt man daher die $n-1$ Funktionen $x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)$ in die $n-1$ Funktionen $\chi_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ein, so bekommt man die Funktionen

$$\chi_{\varkappa,T}(t) = \chi_\varkappa(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)), \quad \varkappa = 1, \ldots, n-1.$$

Für diese gilt:

1. Die Funktionen $\chi_{\varkappa,T}$ sind in $|t - t^*| < \varrho^*$ erklärt, stetig und l-mal stetig differenzierbar.
2. Es ist $\chi_{\varkappa,T^*}(t^*) = \chi_\varkappa(x_{1,T^*}^*, \ldots, x_{n-1,T^*}^*)$.
3. Für $|t - t^*| < \varrho^*$ gilt: $|\chi_{\varkappa,T}(t) - \chi_{\varkappa,T^*}(t^*)| < \delta^*$.

Nun bilden wir noch die Funktion

$$\Phi_T(t) = \varphi_n(\chi_{1,T}(t), \ldots, \chi_{n-1,T}(t)) - \left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) + b_\nu\right).$$

Diese Funktion ist in $| t - t^* | < \varrho^*$ erklärt, stetig und l-mal stetig differenzierbar.

3114. **Einige Eigenschaften der Funktion $\Phi_T(t)$.**

31141. **Die Nullstelleneigenschaft von $\Phi_T(t)$.** Notwendig und hinreichend dafür, daß der Parameterwert $\bar{t}$ mit $| \bar{t} - t^* | < \varrho^*$ einen Punkt des Kurvenstücks $T(C)$ liefert, der zugleich auf dem Hyperflächenstück F liegt, ist $\Phi_T(\bar{t}) = 0$. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition von Φ_T.

31142. **Eine Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$.** Es sei σ vorgegeben mit $0 \leqq \sigma \leqq l$ und $0 < \varrho < \varrho^*$. Zu jedem $\xi > 0$ gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$. (Definition ϱ^* und ε^* siehe 3113) und folgender Eigenschaft:

Ist $| T' | < \varepsilon$, so gilt für $T = T'\,T^*$ gleichmäßig in $| t - t^* | \leqq \varrho$:

$$| \Phi_T^{(\sigma)}(t) - \Phi_{T^*}^{(\sigma)}(t) | < \xi.$$

Beweis. a) Man sieht zunächst: Gilt diese hier für $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ ausgesprochene Gleichmäßigkeitseigenschaft für zwei von dem Parameter T abhängige Funktionen $f_T(t)$ und $g_T(t)$ der Variablen t, so gilt sie auch für $f_T(t) + g_T(t)$ und für $f_T(t) \cdot g_T(t)$.

b) Weiter beweisen wir: Ist die Funktion $h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ im Bereich B_ζ (siehe 3113) stetig und haben die $n - 1$ Funktionen $x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)$ (siehe 3113) die Gleichmäßigkeitseigenschaft, so hat auch die Funktion $h_T(t) = h(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t))$ die Gleichmäßigkeitseigenschaft.

Zum Beweise betrachten wir das im Raume der Punkte $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ durch $x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)$ gegebene Kurvenstück C', das dem Intervall $| t - t^* | \leqq \varrho$ entspricht. Dann gibt es im Raume der Punkte $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ einen Bereich B' mit folgenden Eigenschaften:

1. B' ist in B_ζ enthalten.
2. C' liegt ganz im Innern von B'.
3. B' ist abgeschlossen.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ in B' gibt es zu ξ ein $\delta_\xi > 0$ so, daß für je zwei Punkte $(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)})$ und $(x_1^{(2)}, \ldots, x_{n-1}^{(2)})$ aus B', für die $| x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)} | < \delta_\xi$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ gilt, auch

$$| h(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}) - h(x_1^{(2)}, \ldots, x_{n-1}^{(2)}) | < \xi$$

ist. Zu δ_ξ gibt es aber dann wegen der Gleichmäßigkeitseigenschaft der Funktionen $x_{\nu,T}(t)$ ein $\varepsilon(\delta_\xi) > 0$ so, daß für $| T' | < \varepsilon(\delta_\xi)$ und $T = T'\,T^*$ gilt:

$$| x_{\nu,T}(t) - x_{\nu,T^*}(t) | < \delta_\xi \text{ in } | t - t^* | \leqq \varrho \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1).$$

Daraus folgt aber $| h_T(t) - h_{T^*}(t) | < \xi$ für $| t - t^* | \leqq \varrho$ |, was zu zeigen war.

c) Die Funktionen $x_{\nu,T}(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) = b_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ haben die Gleichmäßigkeitseigenschaft. Zum Beweise sei M eine obere Schranke für alle $| \psi_\lambda(t) |$ in $| t - t^* | \leqq \varrho$. Wir setzen $\varepsilon_\xi = \dfrac{\xi}{2n\,(M+1)}$ und haben für $| T' | < \vartheta(T^*, \varepsilon_\xi)$ und $T'\,T^* = T$ in $| t - t^* | \leqq \varrho$:

$$\begin{aligned} | x_{\nu,T}(t) - x_{\nu,T^*}(t) | &\leqq \sum_{\lambda=1}^{n} | a_{\nu\lambda}\psi_\lambda(t) - a_{\nu\lambda}^*\psi_\lambda(t) | + | b_\nu - b_\nu^* | \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n} | \psi_\lambda(t) | \cdot | a_{\nu\lambda} - a_{\nu\lambda}^* | + | b_\nu - b_\nu^* | \\ &< n\,M \frac{\xi}{2n(M+1)} + \frac{\xi}{2n(M+1)} < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi. \end{aligned}$$

Entsprechend beweist man die Gleichmäßigkeitseigenschaft für die Funktionen

$$x_\nu^{(\sigma)}(t), \quad 1 \leqq \sigma \leqq l, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

d) Nun betrachten wir die Funktion $\Phi_T(t)$. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi_T(t) &= \varphi_n(\chi_1(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)), \ldots, \chi_{n-1,T}(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t))) - x_{n,T}(t)\\ &= h(x_{1,T}(t), \ldots, x_{n-1,T}(t)) - x_{n,T}(t).\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von h nach $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sind in B_ζ erklärt und stetig bis zur Ordnung l einschließlich. $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ baut sich durch Addition und Multiplikation aus den partiellen Ableitungen von h, in die die Funktionen $x_{\nu,T}(t)$ eingesetzt sind, und den Ableitungen der Funktionen $x_{\nu,T}(t)$ auf. Nach c) und b) gehen diese partiellen Ableitungen von h durch Einsetzen der $x_{\nu,T}(t)$ in Funktionen über, die die Gleichmäßigkeitseigenschaft haben. Nach c) und a) hat dann auch $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ die Gleichmäßigkeitseigenschaft. Aus der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi_T^{(\sigma)}(t)$ folgt: Ist $|T_\nu T^{*-1}| < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ und $\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T^*$, so gilt $\lim_{\nu\to\infty} \Phi_{T_\nu}^{(\sigma)}(t) = \Phi_{T^*}^{(\sigma)}(t)$ gleichmäßig in $|t - t^*| \leqq \varrho$.

31143. **Die Gestalt von $\Phi_{T^*}^{(\sigma)}(t^*)$.** Es sei $1 \leqq \sigma \leqq l$. Dann ist $\Phi_{T^*}^{(\sigma)}(t^*)$ ein Polynom der Koeffizienten $a_{\nu\lambda}^*$ von T^*, dessen Koeffizienten rationale Funktionen der partiellen Ableitungen der φ_ν bis zur Ordnung σ, genommen im Punkte U^*, und der Ableitungen der ψ_ν bis zur Ordnung σ, genommen an der Stelle t^*, sind.

Beweis. Wir betrachten die Determinante

$$D(u^*, t^*, T^*) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{n-1}} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{1\lambda}^* \varphi_\lambda' \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}} & \sum_{\lambda=1}^{n} a_{n\lambda}^* \varphi_\lambda' \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die Unterdeterminante, die durch Streichen der n-ten Zeile und der $\varkappa$-ten Spalte entsteht, mit $d_\varkappa = d_\varkappa(U)$. Dann gilt

$$\frac{du_\varkappa}{dt} = \frac{d\chi_{\varkappa,T^*}}{dt} = (-1)^{n-\varkappa-1}\frac{d_\varkappa}{d_n}.$$

Wir führen nun den Beweis durch vollständige Induktion:

I. $\sigma = 1$. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi_T'(t^*) &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}\frac{d\chi_{1,T^*}}{dt} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}}\frac{d\chi_{n-1,T^*}}{dt} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}^* \psi_\lambda'\\ &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}(-1)^{n-2}\frac{d_1}{d_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}}(-1)^0\frac{d_{n-1}}{d_n} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\nu\lambda}^* \psi_\lambda'\\ &= (-1)^n \frac{D}{d_n}.\end{aligned}$$

Damit ist für $\sigma = 1$ die Behauptung bewiesen.

II. Gilt die Behauptung für σ, so folgt sie für $\sigma + 1$ durch Differentiation und durch Berücksichtigung von $\frac{du_k}{dt} = (-1)^{n-\varkappa-1}\frac{d_k}{d_n}$.

312. **Einige Definitionen.**

3121. **Begriff der Auflösung.** Den Begriff der Auflösung definieren wir hier für einen gemeinsamen Punkt eines Hyperflächenstücks und eines Kurvenstücks, wobei wir nicht voraussetzen, daß das Kurvenstück in dem betrachteten Punkt das Hyperflächenstück berührt. Für die Transformation T^* gelte $T^*(P^*) = Q^*$ Dabei sei

$Q^* = \varphi(U^*)$ ein Punkt von F und $P^* = \psi(t^*)$ ein Punkt von C. Wir sagen, der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ lasse sich durch eine beliebig kleine Bewegung T' von $T^*(C)$ in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen, wenn es zu jedem Zahlenpaar (ε, ϱ) mit $0 < \varrho < \varrho^*$ und $0 < \varepsilon < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ (Def. von ϑ (T^*, ε^*) siehe 31133 bezw. 22216) eine Transformation T' gibt, die Eigenschaften hat:

1. $| T' | < \varepsilon$.
2. Ist $T = T' \cdot T^*$, so hat $\Phi_T(t)$ in $| t - t^* | < \varrho$ mindestens m verschiedene Nullstellen.

3122. **Berührungsgrad.** Es sei $m \geqq 1$. Wir sagen, der Berührungsgrad von F und $T^*(C)$ im Punkte $T^*(P^*) = Q^*$ sei mindestens gleich $m - 1$, wenn

$$\Phi^{(0)}_{T^*}(t^*) = 0, \Phi^{(1)}_{T^*}(t^*) = 0, \ldots, \Phi^{(m-1)}_{T^*}(t^*) = 0$$

gilt. Wir sagen, der Berührungsgrad sei genau gleich $m - 1$, wenn außerdem $\Phi^{(m)}_{T^*}(t^*) \neq 0$ gilt. Aus $T^*(P^*) = Q^*$ folgt, daß der Berührungsgrad mindestens gleich Null ist.

3123. **Auflösungsmatrix.** Wir betrachten zu $T^* = (a^*_{\nu\lambda}, b_\nu)$ die $k = \binom{n}{2} + n$ Polynome $\sum_{\lambda=1}^{n} a^*_{\nu\lambda} a^*_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\mu}$, wobei $\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = \mu \\ 0 \text{ für } \nu \neq \mu \end{cases}$ sein soll, und bezeichnen sie in irgendeiner Reihenfolge mit $p_1(a^*_{\nu\lambda}), \ldots, p_k(a^*_{\nu\lambda})$. Weiter betrachten wir die $m - 1$ Polynome von $a^*_{\nu\lambda}$:

$$p_{k+1}(a^*_{\nu\lambda}) = \Phi'_{T^*}(t^*), \ldots, p_{k+m-1}(a^*_{\nu\lambda}) = \Phi^{(m-1)}_{T^*}(t^*).$$

Nun bilden wir die Matrix

$$\mathfrak{M}_{m-1}(a^*_{\nu\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial a_{nn}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial p_{k+m-1}}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial p_{k+m-1}}{\partial a_{nn}} \end{pmatrix}$$

und nennen sie eine $(m - 1)$-te Auflösungsmatrix von T^*.

Die sich auf diese Weise für ein und dieselbe Funktion $\Phi_{T^*}(t)$ ergebenden, verschiedenen $(m - 1)$-ten Auflösungsmatrizen von T^* unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge der ersten k Zeilen. Da wir zwei Matrizen, die sich nur auf diese Weise voneinander unterscheiden, für unsere Zwecke als äquivalent ansehen können, wollen wir im folgenden nur von der $(m - 1)$-ten Auflösungsmatrix von T^* sprechen.

3124. Es ist zu beachten, daß der Definition der Funktion $\Phi_T(t)$ und damit den in 312 definierten Begriffen eine ganz bestimmte Numerierung der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ zugrunde liegt. Eine der Funktion $\Phi_T(t)$ entsprechende Funktion und die entsprechenden weiteren Begriffe lassen sich für jede Numerierung der $x_1, \ldots, x_n$ definieren, für die $\left| \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\varkappa} \right| \neq 0$ ist, wobei $\nu, \varkappa = 1, \ldots, n - 1$. Allen weiteren Überlegungen sei eine ganz bestimmte solche Nummerierung zugrunde gelegt.

313. Es sei $1 \leqq m \leqq l + 1$. Wir sind nun in der Lage, eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte aufzustellen.

3131. **Notwendige Bedingung.** Notwendig für die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte

ist, daß der Berührungsgrad von $T^*(C)$ und F in diesem Punkte mindestens gleich $m-1$ ist. Der Beweis folgt in 32.

3132. **Hinreichende Bedingung.** Hinreichend für die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte ist, daß

1. der Berührungsgrad von $T^*(C)$ und F in diesem Punkte mindestens gleich $m-1$ ist,
2. außerdem der Rang der $(m-1)$-ten Auflösungsmatrix von T^* gleich ihrer Zeilenzahl, also gleich $k+m-1$ ist.

Der Beweis folgt in 33.

32. Beweis der Richtigkeit der in 3131 aufgestellten notwendigen Bedingung. Zum Beweise betrachten wir die beiden Zahlenfolgen $\{\varepsilon_\nu\} = \left\{\frac{\vartheta(T^*,\varepsilon^*)}{2^\nu}\right\}$ und $\{\varrho_\nu\} = \left\{\frac{\varrho^*}{2^\nu}\right\}$. Definitionen von ε^* und ϱ^* sind in 3113 gegeben. Es wird vorausgesetzt, daß sich der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen lasse. Dann gibt es zum Zahlenpaar ε_ν, ϱ_ν eine Transformation T'_ν, welche folgende Eigenschaften hat:

1. $|T'_\nu| < \varepsilon_\nu$,

2. Ist $T_\nu = T'_\nu \cdot T^*$, so hat $\Phi_{T_\nu}(t)$ in $|t-t^*| < \varrho_\nu$ mindestens m verschiedene Nullstellen $t_1^{(\nu)}, \ldots, t_m^{(\nu)}$. Nun sei $0 \leqq \sigma \leqq m-1$. Wir beweisen: $\Phi^{(\sigma)}_{T^*}(t^*) = 0$. Für $\sigma = 0$ folgt $\Phi^{(0)}_{T^*}(t^*) = 0$ ohne weiteres aus $T^*(P^*) = Q^*$. Ist $\sigma > 0$, so betrachten wir die $\sigma+1$ verschiedenen Nullstellen $t_1^{(\nu)}, \ldots, t_{\sigma+1}^{(\nu)}$ von $\Phi_{T_\nu}(t)$ und bilden damit den Differenzenquotienten der Ordnung σ: $[t_1^{(\nu)}, \ldots, t_{\sigma+1}^{(\nu)}]\Phi_{T_\nu}$. Dann gibt es zwischen dem kleinsten und dem größten der Werte $t_1^{(\nu)}, \ldots, t_{\sigma+1}^{(\nu)}$ ein τ_ν, für das $\Phi^{(\sigma)}_{T_\nu}(\tau_\nu) = 0$ gilt. Es gilt also auch: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Phi^{(\sigma)}_{T_\nu}(\tau_\nu) = 0$. Es gilt aber auch:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Phi^{(\sigma)}_{T_\nu}(\tau_\nu) = \Phi^{(\sigma)}_{T^*}(t^*).$$

Der Beweis ist auf Grund der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi^{(\sigma)}_T(t)$ und der Stetigkeit von $\Phi^{(\nu)}_{T^*}(t)$ in bekannter Weise zu führen.

Daraus und aus $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi^{(\sigma)}_{T_n}(\tau_n) = 0$ folgt aber:

$$\Phi^{(\sigma)}_{T^*}(t^*) = 0.$$

Dies gilt also für $0 \leqq \sigma \leqq m-1$, w. z. b. w.

331. Beweis der Richtigkeit der in 3132 aufgestellten hinreichenden Bedingung. Hierzu benötigen wir den Begriff des berührungsfreien Schnittpunktes von $T(C)$ und F und darüber zwei Hilfssätze.

3311. **Berührungsfreier Schnittpunkt.** Es sei $|T'| < \vartheta(T^*,\varepsilon^*)$ und $T' \cdot T^* = T = (a_{\nu\lambda}, b_\nu)$. Wir sagen, für t_0 mit $|t_0 - t^*| < \varrho^*$ liege ein berührungsfreier Schnittpunkt von $T(C)$ und F vor, wenn folgendes gilt:

1. $\Phi_T(t_0) = 0$.
2. $\Phi'_T(t_0) \neq 0$.

Die Bezeichnung „berührungsfreier Schnittpunkt" erklärt sich folgendermaßen: Aus $\Phi_T(t_0) \neq 0$ folgt: Ist $P_0 = \varphi(t_0)$, $u_\varkappa^{(0)} = \chi_{\varkappa,T}(t_0)$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ und $Q_0 = \varphi(U_0)$ mit $U_0 = (u_1^{(0)}, \ldots, u_{n-1}^{(0)})$, so ist $T(P_0) = Q_0$. Entsprechend ist:

$$\Phi'_T(t_0) = (-1)^n \frac{D(U_0, t_0, T)}{d_n(U_0)}.$$

Also ist $\Phi'_T(t_0) = 0$ dann und nur dann, wenn $D(U_0, t_0, T) = 0$ ist. $D(U_0, t_0, T) = 0$ ist aber notwendig und hinreichend dafür, daß der Tangentenvektor an $T(C)$ für $P_0 = \psi(t)$ in der Tangentenhyperebene an F in $T(P_0) = Q_0 = \varphi(U_0)$ liegt.

3312. Der eine Hilfssatz, den wir über den Begriff des berührungsfreien Schnittpunktes benötigen, besagt, daß ein berührungsfreier Schnittpunkt durch eine hinreichend kleine Bewegung des Kurvenstücks $T(C)$ nicht zerstört wird[5]).

Hilfssatz 5. *Voraussetzung. Es sei* $| T' | < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ *und* $T = T'\,T^*$. *Weiter sei* $| t_0 - t^* | < \varrho < \varrho^*$. *Für* t_0 *liege ein berührungsfreier Schnittpunkt von* $T(C)$ *und* F *vor.*

Behauptung. Zu jedem $\zeta > 0$ *gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *so, daß für* $| T'' | < \varepsilon$ *gilt:* $T''\,T(C)$ *und* F *haben für* t_1 *einen berührungsfreien Schnittpunkt und es ist* $| t_1 - t_0 | < \zeta$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von $\Phi'_T(t)$ existiert ein $\zeta' > 0$ mit

1. $\zeta' \leqq \zeta$,
2. $| t - t_0 | < \zeta'$ liegt ganz in $| t - t^* | < \varrho$,
3. in $| t - t_0 | < \zeta$ ist $| \Phi'_T(t) - \Phi'_T(t_0) | < \dfrac{\Phi'_T(t_0)}{2}$.

Wegen $\Phi'_T(t_0) \neq 0$ gibt es in $| t - t_0 | < \zeta'$ eine Stelle t' mit $\Phi_T(t') > 0$ und eine Stelle t'' mit $\Phi_T(t'') < 0$. Wir setzen $c = \mathrm{Min}(\Phi_T(t'), | \Phi_T(t'') |)$. Auf Grund der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi_T(t)$ (siehe 31142) gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ so, daß für $| T'' | < \varepsilon_1$

$$| \Phi_{T''T}(t) - \Phi_T(t) | < c \text{ in } | t - t^* | < \varrho$$

gilt. Auf Grund der Gleichmäßigkeitseigenschaft von $\Phi'_T(t)$ gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$ so, daß für $| T'' | < \varepsilon_2$

$$\Phi'_{T''T}(t) - \Phi'_T(t) | < \frac{| \Phi'_T(t_0) |}{2}$$

gilt. Wir setzen $\varepsilon = \mathrm{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Dann gilt für $| T'' | < \varepsilon$:

1. $\Phi_{T''T}(t)$ hat zwischen t' und t'', also in $| t - t_0 | < \zeta'$ eine Nullstelle t_1.

Es ist nämlich

$$\Phi_{T''T}(t') \geqq \Phi_T(t') - | \Phi_T(t') - \Phi_{T''T}(t') | > \Phi_T(t') - c > 0.$$

Entsprechend beweist man $\Phi_{T''T}(t'') < 0$. Aus der Stetigkeit von $\Phi_{T''T}(t)$ folgt dann die Behauptung.

2. Es ist $\Phi'_{T''T}(t_1) \neq 0$, denn es ist

$$| \Phi'_{T''T}(t_1) - \Phi'_T(t_0) |$$

$$\leqq | \Phi'_{T''T}(t_1) - \Phi'_T(t_1) | + | \Phi'_T(t_1) - \Phi'_T(t_0) | < \frac{| \Phi'_T(t_0) |}{2} + \frac{| \Phi'_T(t_0) |}{2} = | \Phi'_T(t_0) |.$$

Also haben $T''\cdot T(C)$ und F für t_1 einen berührungsfreien Schnittpunkt.

3313. Der zweite Hilfssatz, den wir über den Begriff des berührungsfreien Schnittpunkts brauchen, besagt, daß man einen gemeinsamen Punkt von $T(l)$ und F, der kein berührungsfreier Schnittpunkt ist, durch eine beliebig kleine Bewegung von $T(C)$ in einen solchen verwandeln kann[5]).

Hilfssatz 6. *Voraussetzung. Es sei* $| T' | < \vartheta(T^*, \varepsilon^*)$ *und* $T = T'\cdot T^*$. *Weiter sei* $| t_0 - t^* | < \varrho < \varrho^*$ *und* $\Phi_T(t_0) = 0$, $\Phi'_T(t_0) = 0$.

Behauptung. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein T'' mit

1. $$| T'' | < \varepsilon.$$

2. $$\Phi_{T''T}(t_0) = 0, \Phi'_{T''T}(t_0) \neq 0.$$

Beweis. Es gilt folgender Satz: Ist φ ein System von n linear abhängigen, von ein und demselben Punkt ausgehenden Vektoren $a_1, \ldots, a_{n-1}$, b des n-dimensionalen, Euklidischen Raumes, wobei die $n-1$ Vektoren $a_1, \ldots a_{n-1}$ linear unabhängig sein sollen, so kann man durch eine beliebig kleine Drehung des Vektors b um den Ausgangspunkt aus φ ein System von n linear unabhängigen Vektoren machen. Aus diesem Satz, der hier als bekannt vorausgesetzt werden soll, folgt die Existenz einer Drehung T'' von $T(C)$ um den Punkt $T(P_0) = T(\psi(t_0)) = Q_0 = \varphi(U_0)$ mit den Eigenschaften:

1. $| T'' | < \varepsilon.$

2. Statt der Beziehung $\Phi'_T(t_0) = (-1)^n \dfrac{D(U_0, t_0, T)}{d(U_0)} = 0$ (siehe 3311) bekommt man:

$$\Phi'_{T''T}(t_0) = (-1)^n \frac{D(U_0, t_0, T''T)}{d(U_0)} \neq 0.$$

Da T'' eine Drehung um $T(P_0)$ ist, gilt $T''T(P_0) = Q_0$, also $\Phi_{T''T}(t_0) = 0$. Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

3321. Zum Beweise der Richtigkeit der hinreichenden Bedingung aus 3132 betrachten wir den n^2-dimensionalen Euklidischen Raum der Punkte $A = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Für das Gleichungssystem $p_1(A) = 0, \ldots, p_{k+m-1}(A) = 0$ (vgl. 3123) führen wir die in 1311 definierten Mengen $\mathfrak{D}^+_\lambda$, $\mathfrak{D}_\lambda$, $\mathfrak{D}^-_\lambda$ ein. Wir wollen aber hier den Index anders bezeichnen; wir schreiben nämlich $\mathfrak{D}^+_{k+\mu}$, $\mathfrak{D}_{k+\mu}$, $\mathfrak{D}^-_{k+\mu}$, wobei $-k \leqq \mu \leqq l$.

Nun sei $1 \leqq m \leqq l+1$ und $T^* = (a^*_{\nu\lambda}, b^*_\nu)$ eine Transformation, für die $T^*(P^*) = Q^*$ gelte und die die hinreichende Bedingung aus 3132 erfülle. Dann gilt für den Punkt $A^* = (a^*_{\nu\lambda}, b^*_\nu)$:

1. A^* ist ein Punkt von $\mathfrak{D}_{k+m-1}$.

2. Die Matrix $\mathsf{M}_{k+m-1}(A^*)$ ist gleich der $(m-1)$-ten Auflösungsmatrix $\mathfrak{M}_{m-1}(A^*)$ von T^*. Ihr Rang ist daher gleich ihrer Zeilenzahl, also gleich $k+m-1$.

Wir können daher die Erweiterung von Hilfssatz 1 (vgl. 1314) anwenden und bekommen: Es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{U}_{A^*}$ des Punktes A^* derart, daß für $-k \leqq \mu \leqq l$ zu jedem Punkt A aus $\mathfrak{D}_{k+\mu}$, der zugleich ein Punkt von $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, in beliebiger Nähe von A mindestens ein Punkt A^+ von $\mathfrak{D}^+_{k+\mu}$ und mindestens ein Punkt A^- aus $\mathfrak{D}^-_{k+\mu}$ existieren, die beide ebenfalls zu $\mathfrak{U}_{A^*}$ gehören.

3322. Nun stellen wir folgende Behauptung auf:

Voraussetzung. Es sei $0 \leqq \mu \leqq m-1$, ferner $\overline{A} = (\bar{a}_{\nu\lambda})$ ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{k+\mu}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$, der so nahe bei A^* liege, daß für die durch $\overline{A} = (\bar{a}_{\nu\lambda})$ und die Forderung $T(P^*) = Q^*$ eindeutig bestimmte Transformation $\overline{T} = (\bar{a}_{\nu\lambda}, b_\lambda)$ gilt: $| \overline{T}, T^* | < \dfrac{\varepsilon^*}{2}$ (Definition von ε^* siehe 3113). Die Menge dieser Punkte heiße $\mathfrak{D}'_{k+\mu}$.

Behauptung. Ist $0 < \varepsilon < \vartheta\left(\overline{T}, \dfrac{\varepsilon^*}{2}\right)$ und $0 < \varrho < \varrho^*$ (vgl. 3113), so gibt es zu $\overline{T}$ eine Transformation T' mit folgenden Eigenschaften:

1. $$| T' | < \varepsilon.$$

2. Ist $T = T'\overline{T}$, so ist $| T, T^* | \leqq | T, \overline{T} | + | \overline{T}, T^* |$

$$= | T'\overline{T}, \overline{T} | + | \overline{T}, T^* = | \overline{T}^{-1}T'\overline{T} | + | \overline{T}, T^* | < \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{\varepsilon^*}{2} = \varepsilon^*.$$

Die daher in $| t - t^* | < \varrho^*$ erklärte Funktion $\Phi_T(t)$ hat entweder in $| t - t^* | < \varrho_2$ mindestens $\mu + 1$ verschiedene Nullstellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$, für die $\Phi'_T(t_1) \neq 0, \ldots, \Phi'_T(t_{\mu+1}) \neq 0$ ist, oder es ist in einem Teilintervall von $| t - t^* | < \varrho$ überal $\Phi_T(t) = 0$.

3323. Diese Behauptung enthält die Auflösbarkeit des gemeinsamen Punktes $\overline{T}(P^*) = Q^*$ in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte, wie man durch Vergleich mit 3121 feststellt. Sie geht aber in einem wesentlichen Punkte noch darüber hinaus: In 3121 ist nur von gemeinsamen Punkten die Rede. Jetzt treten an deren Stelle berührungsfreie Schnittpunkte von $T(C)$ und F oder ein vollständiges Zusammenfallen von $T(C)$ und F für ein ganzes Intervall von t.

333. Wir beweisen die in 3322 aufgestellte Behauptung durch vollständige Induktion.

3331. I. $\mu = 0$. $\overline{A}$ sei ein Punkt aus $\mathfrak{D}'_{k+0}$. Es sei $0 < \varepsilon < \vartheta\left(\overline{T}, \frac{\varepsilon^*}{2}\right)$ und $0 < \varrho < \varrho^*$. Wir betrachten zu $\overline{T} = (\bar{a}_{\nu\lambda}, b_\nu)$ mit $\overline{T}(P^*) = Q^*$ die Transformation E. Es ist $| E | = 0 < \varepsilon$ und $\Phi_{E\overline{T}}(t^*) = \Phi_{\overline{T}}(t^*) = 0$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\Phi'_{\overline{T}}(t)^* \neq 0$. In diesem Falle leistet $T' = E$ das in der Behauptung Geforderte.

2. $\Phi'_{\overline{T}}(t^*) = 0$. In diesem Falle gibt es nach Hilfssatz 6 eine Transformation T' mit $| T' | < \varepsilon$ so, daß $\Phi_T(t^*) = 0$ und $\Phi'_T(t^*) \neq 0$ für $T = T'\overline{T}$ gilt.

Damit ist die Behauptung für $\mu = 0$ bewiesen.

3332. II. Wir nehmen an, die Behauptung sei für μ bewiesen. Dabei sei $0 \leqq \mu \leqq m - 1$. Wir beweisen die Behauptung für $\mu + 1$.

$\overline{A}$ sei ein Punkt von $\mathfrak{D}'_{k+\mu+1}$. Es sei $0 < \varepsilon < \vartheta\left(\overline{T}, \frac{\varepsilon^*}{2}\right)$ und $0 < \varrho < \varrho^*$. Weiter sei $T = (\bar{a}_{\nu\lambda}, \bar{b}_\nu)$ mit $T(P^*) = Q^*$. Da $\mathfrak{D}_{k+\mu+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{D}'_{k+\mu}$ ist, so gibt es nach Induktionsannahme wenigstens eine Transformation T', die die Forderungen der Behauptung für μ erfüllt. Von einer jeden solchen Transformation wollen wir sagen, sie gehöre für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ). Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

33321. Fall A. Unter den für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Transformationen gibt es wenigstens eine Transformation T' so, daß für $T = T'T$ in einem Teilintervall von $| t - t^* | < \varrho$ gilt: $\Phi_T(t) = 0$. In diesem Falle erfüllt die Transformation T' die Forderungen der Behauptung auch für $\mu + 1$.

33322. Fall B. Unter den für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehörenden Transformationen gibt es keine mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft.

Es sei T' eine für $\overline{A}$ zu (ε, ϱ) gehörende Transformation und $T = T'\overline{T}$. Dann hat nach Induktionsannahme die Funktion $\Phi_T(t)$ im Intervall $| t - t^* | < \varrho$ mindestens $\mu + 1$ Nullstellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$, für die $\Phi'_T(t_1) \neq 0, \ldots, \Phi'_T(t_{\mu+1}) \neq 0$ gilt. t sei ein beliebiger Punkt des Intervalls $| t - t^* | < \varrho$. Wir bilden den Differenzenquotienten der Ordnung $\mu + 1$:

$$\psi_T(t) = [t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t]\Phi_T.$$

$\psi_T(t)$ ist überall in $|t - t^*| < \varrho$ erklärt, an den Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ als Grenzdifferenzenquotient und in $|t - t^*| < \varrho$ überall $(l-1)$-mal stetig differenzierbar.

33323. Nun wird behauptet: Unter den Transformationen, die nach Induktionsannahme für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, gibt es wenigstens eine Transformation T' so, daß die Funktion $\psi_T(t)$ wobei $T = T' \cdot \overline{T}$, an einer Stelle t' des Intervalls $|t - t^*| < \varrho$ verschwindet.

33324. Der Beweis für diese Behauptung soll in 33325 nachgeholt werden. Wir ziehen hier gleich aus ihr die Folgerungen. Es sei zunächst t' von einer jeden der Stellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ verschieden. Dann folgt aus $\psi_T(t') = 0$ wegen $[t_1, \ldots, t_{\mu+1}]\Phi_T = 0$ die Beziehung $[t_1, \ldots, t_\mu, t']\Phi_T = 0$. Ist nun $\Phi'_T(t') \neq 0$, so leistet T' für $\mu + 1$ das in der Behauptung Geforderte. Ist dagegen $\Phi'_T(t') = 0$, so kann nach den Hilfssätzen 5 und 6 eine Transformation T'' so klein gewählt werden, daß $|T''T'| < \varepsilon$ und $\Phi'_{T''T}(t') \neq 0$ ist, daß $\Phi_{T''T}(t'') = 0$ bleibt und daß die $\mu + 1$ berührungsfreien Schnittpunkte von $T(C)$ und F beim Übergang zu $T''T(C)$ nicht zerstört werden, wie auch die zugehörigen t-Werte im Inneren von $|t - t^*| < \varrho$ bleiben. $T''T'$ leistet dann das in der Behauptung Geforderte. Nun haben wir noch den Fall zu betrachten, daß t' einem der Werte $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ gleich ist. Es sei o. B. d. A. $t' = t_1$.

Aus $\psi_T(t') = [t_1, \ldots, t_{\mu+1}, t']\Phi_T = 0$ schließen wir auf

$$[t_1, t']\Phi_T = \Phi'_T(t') = \Phi'_T(t_1) = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Induktionsannahme, also kann der Fall $t_1 = t'$ gar nicht eintreten.

33325. Wir haben noch den Beweis für die in 33323 aufgestellte Behauptung nachzutragen. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es unter den Transformationen T', die nach Induktionsannahme für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) gehören, keine, für welche die Funktion $\psi_T(t)$ mit $T = T'\overline{T}$ an einer Stelle des Intervalls $|t - t^*| < \varrho$ verschwindet. Für jede solche Transformation muß daher $\psi_T(t)$ überall in $|t - t^*| < \varrho$ dasselbe Vorzeichen haben, da $\psi_T(t)$ stetig ist.

Wir betrachten nun die Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$, wobei $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$ und $\varrho_n = \frac{\varrho}{2^n}$ sein soll und beweisen: Unter den Transformationen T', die nach Induktionsannahme für den Punkt A zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Transformation T'^+, für die in $|t - t^*| < \varrho$ überall $\psi_{T'^+\overline{T}}(t) > 0$ gilt.

Zum Beweise betrachten wir ein Zahlenpaar (ε', ϱ') mit $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon_n}{2}$ und $0 < \varrho' < \varrho_n$. Nach 3321 gibt es in beliebiger Nähe von $\overline{A}$ einen Punkt $A^+ = (a^+_{\nu\lambda})$ aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}^+_{k+\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$. Wir setzen $T^+ = (a^+_{i\lambda}, b^+_\nu)$, wobei die b^+_ν so bestimmt sein sollen, daß $T^+(P^*) = Q^*$ gilt. A^+ kann so nahe bei $\overline{A}$ gewählt werden, daß $|T^+\overline{T}^{-1}| < \varepsilon'$ und $|T^+, T^*| < \frac{\varepsilon^*}{2}$. Da $\mathfrak{D}^+_{k+\mu+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{D}_{k+\mu}$ ist, so ist A^+ auch ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{k+\mu}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$. Wir können daher auf den Punkt A^+ die Induktionsannahme anwenden, und die Transformationen betrachten, die nach Induktionsannahme für den Punkt A^+ zum Zahlenpaar (ε', ϱ') gehören. T' sei eine solche. Wir bilden die Transformation $T'' = T'T^+\overline{T}^{-1}$. Dann gilt

$$| T'' | = | T' T^+ \overline{T}^{-1} | = | T^+ \overline{T}^{-1}, T'^{-1} | \leqq | T^+ \overline{T}^{-1} | + | T' |$$
$$< \varepsilon' + \varepsilon' < \varepsilon_n.$$

Deswegen und wegen $\varrho' < \varrho$ gehört die Transformation T'' für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ und damit auch zum Zahlenpaar (ε, ϱ); also hat für

$$T'' \overline{T} = T' T^+ \overline{T}^{-1} \overline{T} = T' T^+$$

die Funktion $\psi_{T' \cdot T^+}(t)$ überall in $| t - t^* |$ dasselbe Vorzeicehn. Wir können zeigen, daß $\psi_{T' \cdot T^+}(t) > 0$ ist in $| t - t^* | < \varrho$ sobald man ε' und ϱ' hinreichend klein wählt. Dazu betrachten wir im Intervall $| t - t^* | < \varrho'$ eine Stelle t', die von den ebenfalls in $| t - t^* | < \varrho'$ gelegenen, nach Induktionsannahme vorhandenen $\mu + 1$ Nullstellen $t_1, \ldots, t_{\mu+1}$ der Funktion $\Phi_{T' \cdot T^+}(t)$ verschieden ist. Dann gibt es ein τ mit $| t - t^* | < \varrho'$ und

$$\psi_{T' \cdot T^+}(t') = \Phi^{(\mu+1)}_{T' \cdot T^+}(\tau).$$

Gäbe es nun zu beliebig kleinen ε' und ϱ' stets eine Transformation T' mit $\psi_{T' T^+}(t) < 0$ in $| t - t^* | < \varrho$, so könnte man eine Folge von Zahlenpaaren $\{\varepsilon'_s, \varrho'_s\}$ konstruieren und dazu eine Folge $\{T'_s\}$ von Transformationen angeben derart, daß immer T'_s für A^+ zum Zahlenpaar $(\varepsilon'_s, \varrho'_s)$ gehört, wobei gilt:

1. $\lim\limits_{s \to \infty} \varepsilon'_s = 0, \lim\limits_{s \to \infty} \varrho'_s = 0.$
2. In $| t - t^* | < \varrho$ ist $\psi_{T' T^+}(t) < 0.$

Man könnte aus dem Intervall $| t - t^* | < \varrho$ eine Stelle t' wählen, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Stellen $t_1^{(s)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(s)}$ verschieden ist und bekäme:

$$\psi_{T' T^+}(t') = \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(\tau_s).$$

Dabei läge τ_s in $| t - t^* | < \varrho'_s$. Aus $\lim\limits_{s \to \infty} \varrho'_s = 0$ würde daher folgen: $\lim\limits_{s \to \infty} \tau_s = t^*$. Aus $\lim T'_s = 0$ folgt aber nach der Schlußbemerkung aus 31142, daß $\lim\limits_{s \to \infty} \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(t) = \Phi^{(\mu+1)}_{T^+}(t)$ gleichmäßig in $| t - t^* | < \varrho$ gilt. Daraus und aus $\lim\limits_{s \to \infty} \tau = t^*$ folgt

$$\lim_{s \to \infty} \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(\tau_s) = \Phi^{(\mu+1)}_{T^+}(t^*) = p_{k+\mu+1}(A^+).$$

Aus $\psi_{T' T^+}(t') < 0$ würde aber folgen $\Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(\tau_s) < 0$ und daraus

$$\lim_{s \to \infty} \Phi^{(\mu+1)}_{T' T^+}(\tau_s) = \Phi^{(\mu+1)}_{T^+}(t)^* = p_{k+\mu+1}(A^*) \leqq 0.$$

Da A^+ ein Punkt von $\mathfrak{D}^+_{k+\mu+1}$ ist, so ist $p_{k+\mu+1}(A^+) > 0$. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

Ganz analog beweist man: Unter den Transformationen T', die nach Induktionsannahme für den Punkt A^- zum Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ gehören, gibt es wenigstens eine Transformation T'^-, für die in $| t - t^* | < \varrho$ überall $\psi_{T' \cdot \overline{T}}(t) < 0$ gilt.

Nun ordnen wir jedem Zahlenpaar $(\varepsilon_n, \varrho_n)$ aus $\{\varepsilon_n, \varrho_n\}$ eine solche Transformation T'^+_n zu. Überall in $| t - t^* | < \varrho$ ist $\psi_{T'^+_n \overline{T}}(t) < 0$. Die nach Induktionsannahme vorhandenen $\mu + 1$ Nullstellen von $\Phi_{T'^+_n \overline{T}}(t)$ seien $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$; sie liegen in $| t - t^* | < \varrho_n$.

t sei eine Stelle aus $| t - t^* | < \varrho$, die von den höchstens abzählbar unendlich vielen Stellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) verschieden ist, und für die $t - t^* > 0$ gilt. Dann gilt für hinreichend große n wegen $\lim\limits_{n \to \infty} \varrho_n = 0$:

$$t - t_1^{(n)} > 0, \ldots, t - t_{\mu+1}^{(n)} > 0.$$

Aus $\psi_{T_n'+\overline{T}}(t) = [t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{(n)}, t]\Phi_{T_n'+} \cdot \overline{T} > 0$ folgt dann $\Phi_{T_n'+\overline{T}}(t) > 0$ und daraus nach 31142: $\lim_{n\to\infty} \Phi_{T_n'+\overline{T}}(t) = \Phi_{\overline{T}}(t) \geqq 0$. Wegen der Stetigkeit von $\Phi_{\overline{T}}(t)$ gilt $\Phi_{\overline{T}}(t) \geqq 0$ für alle $t > 0$, auch für die Stellen $t_1^{(n)}, \ldots, t_{\mu+1}^{n}$. Analog beweist man für $t - t^* > 0$ mit Benutzung der Transformationenfolge $\{T_n'-\}$:

$$\Phi_{\overline{T}}(t) \leqq 0 \text{ in } |t - t^*| < \varrho.$$

Daraus folgt: Für $0 < t - t^* < \varrho$ gilt $\Phi_{\overline{T}}(t) = 0$. Das heißt: Die Transformation E gehört für den Punkt $\overline{A}$ zum Zahlenpaar (ε, ϱ) und hat die in 33321 unter Fall A beschriebene Eigenschaft. In 33322 wurde aber vorausgesetzt, daß es eine Transformation mit der unter Fall A beschriebenen Eigenschaft unter den für $\overline{A}$ zu (ε, ϱ) gehörenden Transformationen nicht geben soll. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

33326. Damit ist die in 3322 aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen. Da A^* ein Punkt aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{D}_{k+\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_{A^*}$ ist, ist damit auch die in 3132 aufgestellte hinreichende Bedingung vollständig bewiesen.

3411. **Gewöhnliches Punktepaar.** Wir sagen, das Punktepaar P^*, Q^* des Punktes P^* der Kurve C und des Punktes Q^* der Hyperfläche F sei ein gewöhnliches Punktepaar, wenn es keine Transformation T und kein σ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $T(P^*) = Q^*$,
2. $\Phi_T'(t^*) = 0, \ldots, \Phi_T^{(\sigma)}(t^*) = 0$.
3. Der Rang der σ-ten Auflösungsmatrix von T ist kleiner als die Zeilenzahl.

3412. Die σ-te Auflösungsmatrix einer Transformation T hat n^2 Spalten und $\binom{n}{2} + n + \sigma$ Zeilen. Für $\sigma > \binom{n}{2}$ ist die Zahl der Zeilen größer als die Zahl der Spalten. Daraus folgt: Ist P^*, Q^* ein gewöhnliches Punktepaar und $T(P^*) = Q^*$, so ist der Berührungsgrad von $T(C)$ und F im Punkte $T(P^*) = Q^*$ höchstens gleich $\binom{n}{2}$.

Hauptsatz über ein gewöhnliches Punktepaar. *Ist P^*, Q^* ein gewöhnliches Punktepaar, $T(P^*) = Q^*$ und der Berührungsgrad von $T(C)$ und F gleich $m - 1$, so läßt sich der gemeinsame Punkt $T(P^*) = Q^*$ von $T(C)$ und F durch eine beliebig kleine Bewegung von $T(C)$ in höchstens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen und, bei geeignetem Vorgehen, auch in genau m. Dabei ist $0 \leqq m - 1 \leqq \binom{n}{2}$.*

Beweis. Da der Berührungsgrad von $T(C)$ und F im Punkte $T(P^*) = Q^*$ höchstens gleich $\binom{n}{2}$ sein kann, folgt die Behauptung aus der notwendigen Bedingung aus 3131.

3413. Die Definition des gewöhnlichen Punktepaares ist auf eine ganz bestimmte Numerierung der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bezogen, da sie von der Funktion Φ_T Gebrauch macht (vgl. 3124). Die Bezeichnung „gewöhnliches Punktepaar" ist durch die Vermutung nahegelegt, daß es im allgemeinen zu einem Punktepaar P^*, Q^* bei einer bestimmten Numerierung der Koordinaten keine Transformation T mit den Eigenschaften 1. bis 3. aus 3411 gibt. Auf eine Nachprüfung dieser Vermutung soll hier nicht eingegangen werden.

3421. Für ein gewöhnliches Punktepaar ist die Voraussetzung aus 2115 erfüllt.

Wäre sie nämlich nicht erfüllt, so könnte man zu der Folge $\{\varrho_n\}$ mit $\varrho_n = \frac{\varrho^*}{2^n}$ eine

Folge von Transformationen $\{T_n\}$ angeben mit folgenden Eigenschaften:

1. $\lim_{n\to\infty} T_n = T^*$, wobei $T^*(P^*) = Q^*$.

2. $\Phi_{T_n}(t)$ ist in $|t - t^*| < \varrho^*$ erklärt und hat in $|t - t^*| < \varrho_n$ mindestens $\binom{n}{2} + 2$ verschiedene Nullstellen.

Daraus würde folgen, daß der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ von $T^*(C)$ und F sich durch eine beliebig kleine Bewegung in mindestens $\binom{n}{2} + 2$ verschiedene gemeinsame Punkte auflösen läßt. Damit bestünde ein Widerspruch zum Hauptsatz über gewöhnliche Punktepaare.

Für ein gewöhnliches Punktepaar sind also die Begriffe der Mindestordnung, der Ordnung, der Grenzcharakteristik der Mindestordnung m und der kinematischen Indikatrix erklärt.

3422. Ist $T^*(P^*) = Q^*$, so sind folgende beiden Aussagen äquivalent.

I. T^* ist eine Grenztransformation der Mindestordnung m von $P^* \varepsilon C$ in bezug auf $Q^* \varepsilon F$.

II. Der gemeinsame Punkt $T^*(P^*) = Q^*$ läßt sich durch eine beliebig kleine Bewegung von $T^*(C)$ in mindestens m verschiedene gemeinsame Punkte auflösen.

Der Beweis kann jetzt dem Leser überlassen bleiben.

3423. Unter dem Gleichungssystem S_{m-1} verstehen wir das System

$$p_1(a_{\nu\lambda}) = 0, \ldots, p_{k+m-1}(a_{\nu\lambda}) \geqq 0 \text{ (vgl. 3123).}$$

Aus 3422 folgt: Ist P^*, Q^* ein gewöhnliches Punktepaar, so läuft die Berechnung der Grenztransformationen der Mindestordnung m von $P^* \varepsilon C$ in bezug auf $Q^* \varepsilon F$ im wesentlichen auf die Bestimmung der Menge $\mathfrak{D}_{k+m-1}$ der reellen Wurzeln des Gleichungssystems S_{m-1} hinaus. Damit ist für ein gewöhnliches Punktepaar P^*, Q^* die Berechnung der beiden kinematischen Indikatrizen $J(P^*, Q^*)$ und $J(Q^*, P^*)$ auf die Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungssysteme $S_1, \ldots, S_{\binom{n}{2}}$ zurückgeführt.

351. Wir betrachten noch kurz den allgemeinen Fall eines k-dimensionalen und eines $(n-k)$-dimensionalen Flächenstücks im E_n. Es sei $n \geqq 4$, $k \geqq 2$, $n - k \geqq 2$. Das Flächenstück F_1 sei gegeben durch

$$x_\nu = \varphi_\nu(u_1, \ldots, u_k).$$

Die Funktionen φ_ν seien in einem Würfel W_1 des Raumes der Punkte $U = (u_1, \ldots, u_k)$ erklärt und stetig. Ihre partiellen Ableitungen seien bis zur Ordnung $l \geqq 1$ in W_1 erklärt und stetig. Überall in W_1 gelte: $\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial u_\varkappa}\right) = k$.

Das Flächenstück F_2 sei gegeben durch

$$X_\nu = \psi_\nu(v_1, \ldots, v_{n-k}).$$

Die Funktionen ψ_ν seien in einem Würfel W_2 des Raumes der Punkte $V = (v_1, \ldots, v_{n-k})$ erklärt und stetig. Ihre partiellen Ableitungen seien bis zur Ordnung $l \geqq 1$ in W_2 erklärt und stetig. Überall in W_2 gelte: $\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial v_\varkappa}\right) = n - k$.

Aus $P_1 = \varphi(U_1)$, $P_2 = \varphi(U_2)$ und $P_1 = P_2$ folge: $U_1 = U_2$, aus $Q_1 = \psi(V_1), Q_2 = \psi(V_2)$ und $Q_1 = Q_2$ folge: $V_1 = V_2$. Es sei $P^* \varepsilon F_1$ und $Q^* \varepsilon F_2$.

Für P^* und Q^* gelte die Voraussetzung aus 2115.

352. **Die Berührungsdimension.** Es sei T ein Transformation, für die $T(P^*) = Q^*$ gelte. Wir betrachten im Punkte $T(P^*) = Q^*$ den k-dimensionalen linearen Tangentialraum erster Ordnung an die Fläche $T(F_1)$ und den $(n-k)$-dimensionalen linearen Tangentialraum erster Ordnung an die Fläche F_2. Der Durchschnitt dieser beiden Tangentialräume ist ein linearer Raum von der Dimension d. Es ist

$$0 \leqq d \leqq \text{Min}\,(k, n-k).$$

Wir nennen d die Berührungsdimension von $T(F_1)$ und F_2 im Punkte $T(P^*) = Q^*$ oder auch die Berührungsdimension von T.

353. **Die d-Ordnung.** Wir sagen, die d-Ordnung des Punktes $P^* \varepsilon F_1$ in bezug auf den Punkt $Q^* \varepsilon F_2$ sei gleich m , wenn es eine Grenztransformation der Berührungsdimension d und der Mindestordnung m von P^* in bezug auf Q^* gibt, aber keine von der Berührungsdimension d und der Mindestordnung $m + 1$. Wir sagen, die d-Ordnung von Q^* in bezug auf P^* sei nicht beschränkt und schreiben $m_d = \infty$, wenn die Mindestordnungen der Grenztransformationen der Berührungsdimension d nicht beschränkt sind. Es sei $s = \text{Min}(k, n-k)$. Es gilt

$$\omega(P^*, Q^*) = \text{Max}(m_0, m_1, \ldots, m_s).$$

354. **Die große und die kleine kinematische Indikatrix.** Unter $M_{m,d}$ verstehen wir die Menge aller Grenztransformationen der Mindestordnung m und der Berührungsdimension d von P^* in bezug auf Q^*. Dann heiße

$$J_d(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}) = \begin{pmatrix} M_{1,0}, M_{2,0}, \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \\ M_{1,s}, M_{2,s}, \ldots \end{pmatrix}$$

die große kinematische Indikatrix von P^* in bezug auf Q^*. Entsprechend definieren wir $J_d(Q^*_{F_2}, P^*_{F_1})$. Ersetzen wir $M_{m,d}$ durch $M^{-1}_{m,d}$, so bekommen wir $J_d^{-1}(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2})$. Es gilt:

$$J_d(Q^*_{F_2}, P^*_{F_1}) = J_d^{-1}(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}).$$

Unter der kleinen kinematischen Indikatrix des Punktes P^* in bezug auf den Punkt Q^* verstehen wir die Folge der $(s+1)$ d-Ordnungen. Es gilt:

$$i(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}) = (m_0, m_1, \ldots, m_s).$$

$$i(P^*_{F_1}, Q^*_{F_2}) = i(Q^*_{F_2}, P^*_{F_1}).$$

355. Die 0-Ordnung ist stets gleich 1. Für $d = 1$ lassen sich die Untersuchungen zur Berechnung der d-Ordnung ganz wie für den Fall $k = 1$ des Kurven und Hyperflächenpunktes durchführen. Für $d > 1$ bestehen jedoch neue wesentliche Schwierigkeiten.

Schriftenverzeichnis.

1. K. Apfelbacher, Über Beziehungen zwischen Umgebungsräumen und Häufungsräumen, Monatshefte für Math. u. Phys. **49** (1941), S. 153—193.
2. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Hamburger Mathem. Einzelschriften **34**, 1. Heft, 2. Aufl. (1936), 2. Heft (1937).
3. G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.
4. H. Busemann u. W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta math. **66** (1935), S. 1—47.
5. L. Berwald, Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Enzyklopädie der Mathematik III. 3, D. 11.

6. R. Falckenberg, Eine Verallgemeinerung der klassischen (Dupinschen) Indikatrix auf höhere Räume, Jahresber. der D. M. V. **52** (1942), S. 43.
7. O. Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, Journal für die reine u. angew. Math. **169** (1933), S. 177—185.
8. O. Haupt, Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n, Journal für die reine u. angew. Math. **176** (1936), S. 95—111.
9. O. Haupt, Vollständigkeitsprobleme bei geometrischen Ordnungen, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., 1941, S. 57—66.
10. O. Haupt u. G. Aumann, Differential- u. Integralrechnung **2**, Berlin 1938.
11. J. Hjelmslev, Grundlag for Fladernes Geometri, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og Mathem. Afd. (7) **12** (1914), S. 1—52.
12. J. Horn, Partielle Differentialgleichungen, 2. Aufl., Berlin 1929.
13. K. Kommerell, Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen, Dissertation, Tübingen 1897.
14. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra **1**, 2. Aufl., Berlin 1937; **2**, 2. Aufl., Berlin 1940.

Eingegangen 28. April 1942.