Werk

Titel: Über die Kräfte und Momente, welche Singularitäten auf eine stationäre Flüssigkei...

Autor: Mohr, Ernst

Jahr: 1940

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0182|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Kräfte und Momente, welche Singularitäten auf eine stationäre Flüssigkeitsströmung übertragen.

Von *Ernst Mohr* in Breslau.

Einleitung.

1. In zwei grundlegenden Arbeiten hat Lagally [1]) zum ersten Male allgemein die Kräfte und Momente bestimmt, welche eine stationäre Flüssigkeitsströmung (unter gewissen Voraussetzungen) auf einen Körper bzw. umgekehrt dieser Körper auf die Flüssigkeit ausübt. Die Lösung gelingt ihm dadurch, daß er in bekannter Weise den Körper durch Singularitäten (Quellen, Dipole, Wirbel) ersetzt, die zusammen mit den übrigen Singularitäten der gegebenen Strömung in seine Endformeln für Kraft und Moment eingehen. Da hierbei der Körper gar nicht mehr auftritt, sondern nur noch das ihn ersetzende Singularitätensystem, so sieht man, daß die ganze Frage darauf hinausläuft, festzustellen, welche Kräfte und Momente solche Singularitäten auf die Flüssigkeitsströmung übertragen, bzw. mit welchen Kräften und Momenten diese Singularitäten in der stationären Flüssigkeitsströmung festgehalten werden müssen. Erinnern wir rasch an zwei bekannte Beispiele, in denen die konstante Dichte $= 1$ angenommen ist [2]):

1. Liegt eine auf die kugelförmige Volumeinheit verschmiert gedachte Quelle der Ergiebigkeit $\operatorname{div} \mathfrak{w} = e$ in einer Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ vor (Fig. 1), so benötigt sie die Haltekraft

$$\mathfrak{K}_h = \mathfrak{U} \operatorname{div} \mathfrak{w}. \tag{1}$$

Man sieht, daß im Mittelpunkt der Kugel die Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ herrscht, ein Resultat, das erhalten bleibt, wenn man das Quellgebiet immer mehr zusammenschrumpfen läßt, und daher auch noch für die punktförmige Quelle gilt; Fig. 1a. Es bildet sich

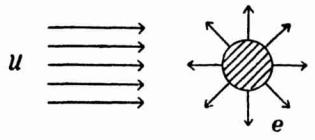


Fig. 1.

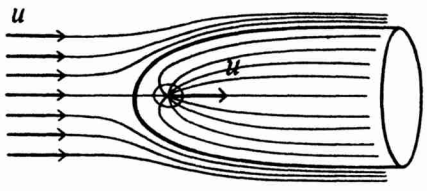


Fig. 1a.

dann eine Strömung mit einer Gleichgewichtsfläche, die einen sogenannten Halbkörper wie in Fig. 1a angedeutet, abgrenzt. Da jedem Teilchen bei seinem Eintritt in das Strömungsfeld die Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ erteilt wird, pro sec aber Teilchen von der Gesamt-

[1]) M. Lagally, Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. **2** (1922), S. 409-422. M. Lagally, Über den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche, Sitzungsberichte der bayr. Akad. d. Wissenschaften 1921, S. 209—226.

[2]) Vgl. hierzu Prandtl-Tietjens, Hydro- u. Aeromechanik **2**, Berlin 1931, S. 137—139 u. 173—180.

masse e eintreten, so beträgt der sekundliche Transport an Bewegungsgröße $e\mathfrak{U}$, dem nach Newtons Grundgesetz der Mechanik eine gleichgroße Kraft auf den Quellpunkt entspricht. — Denkt man sich die Gleichgewichtsfläche starr und starr verbunden mit dem Quellpunkt, und das Ganze an einem Faden als Pendel aufgehängt, so wird dieses nur dann in Ruhe bleiben, wenn der Pendelkörper mit der Kraft $\mathfrak{K}_h = e\mathfrak{U}$ festgehalten wird. — Es wird sich im folgenden als vorteilhaft erweisen, wenn wir in solcher Weise an Stelle der Impulstransporte die diesen entsprechenden Haltekräfte in die Rechnung einführen.

2. Ist die Strömung eben, und statt der Quelle ein auf die Flächeneinheit verschmiert gedachter Wirbel von der Stärke $|\operatorname{rot}\mathfrak{w}| = \Gamma$ vorhanden (Fig. 2), so erfordert er pro Längeneinheit (gerechnet in der Richtung des Wirbelvektors $\operatorname{rot}\mathfrak{w}$), also in räumlicher Auffassung wieder pro Volumeneinheit die Haltekraft

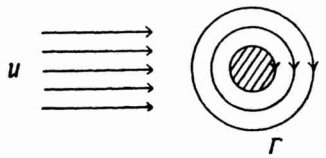


Fig. 2.

$$\mathfrak{K}_h = \operatorname{rot}\mathfrak{w} \times \mathfrak{U} \tag{2}$$

(sog. Kuttasche Kraft).

Später hat Betz [3]) in einer schönen Arbeit die rein rechnerische Betrachtungsweise von Lagally durch eine physikalisch-anschauliche ersetzt, und auf spezielle Strömungen angewandt.

Die folgende Untersuchung ist nun dadurch charakterisiert, daß in ihr konsequent der obenerwähnte Begriff der Haltekraft bzw. des Haltemomentes einer Singularität in den allgemeinen Betzschen Gedankengang eingeführt wird. Auf diese Weise lassen sich die Lagallyschen Formeln einfach begründen. Die Methode leistet jedoch noch mehr: Da sie direkt mit den Singularitäten operiert, ergibt sie, wenn man das den Körper ersetzende Singularitätensystem in besonderer Weise z. B. als auf der Oberfläche liegend wählt, für jeden solchen Fall besondere Formeln, z. B. solche, in denen im Gegensatz zu den Lagallyschen nur noch die Oberfläche selbst, jedoch nicht mehr das sie ersetzende Singularitätensystem in ihrem Innern auftritt. Hierzu ist es allerdings nötig, genauer auf das einen Körper ersetzende Singularitätensystem einzugehen, was in dem (etwas langen) vorbereitenden ersten Abschnitt geschieht. Schließlich läßt sich die Methode mit einer kleinen Abänderung im Falle der Momente auf ebene Strömungen übertragen, und führt dort zu analogen Ergebnissen.

Erster Abschnitt. Das Singularitätensystem.

§ 1. Quellen-, Dipol- und Wirbelflächen.

2. *Bezeichnungen und Voraussetzungen.* In diesem Abschnitt [4]) wollen wir die Theorie der Potentialströmungen in einer für uns passenden Form kurz und anschaulich fassen.

Die Bezeichnungen sind die üblichen [5]). x, y, z (bzw. x_1, x_2, x_3) seien kartesische Koordinaten, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ (bzw. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$) die zugehörigen Einheitsvektoren, O der Koordinatenursprung; $\mathfrak{a}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \ldots$ seien allgemeine Vektoren, $\mathfrak{r}$ i. a. der (von einer als fest betrachteten Stelle gezogene) Ortsvektor, r seine Länge; wo ein Vektor, z. B. $\mathfrak{w}$, für ein ganzes Feld erklärt ist, werde dieses mit $\{\mathfrak{w}\}$ bezeichnet. ∇ (Nabla) ist der bekannte Differentiationsvektor $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$; für $\nabla\varphi$ (φ Skalar), $\nabla \cdot \mathfrak{w}$ und $\nabla \times \mathfrak{w}$ schreiben wir oft auch grad φ, div $\mathfrak{w}$ und rot $\mathfrak{w}$. Ist $\mathfrak{a} = (a, b, c)$, so bedeutet $(\mathfrak{a} \cdot \nabla)$ den linearen Differentialoperator

[3]) A. Betz, Singularitätenverfahren zur Ermittlung der Kräfte und Momente auf Körper in Potentialströmungen, Ing.-Archiv **3** (1932), S. 465-462.

[4]) Vgl. hierzu H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (Deutsch von Elise Helly), 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1931, S. 1—69 und S. 214—230.

[5]) Siehe z. B. M. Lagally, Vektorrechnung, 2. Aufl., Leipzig 1934.

$a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}$. $\triangle$ ist der Laplacesche Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Wo ein Mißverständnis möglich ist, wird die Stelle, an der die Operation ∇ auszuführen ist, unter das Zeichen ∇ gesetzt; ist z. B. r der Abstand der beiden Punkte P, Q, so ist

$$\underset{P}{\nabla}\frac{1}{r}=-\underset{Q}{\nabla}\frac{1}{r}\,.$$

Der von einem Punkt A nach einem anderen Punkt B gezogene Vektor wird mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet. — ds, $d\sigma$, $d\tau$ sind Längen-, Flächen- und Volumelemente. Ist eine Fläche F orientiert, so seien $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ ihr allgemeiner normaler bzw. tangentieller (Einheits-)Vektor. Die beiden an F grenzenden Räume werden durch — und + unterschieden, die verschiedenen Seiten von F durch F^- und F^+, und analog die Werte von evtl. dort existierenden skalaren und vektoriellen Größen, z. B., $\mathfrak{w}$ durch Anhängen der Zeichen — und + als oberer rechter Index, also z. B. $\mathfrak{w}^-$ und $\mathfrak{w}^+$. Der Sprung, den eine solche Größe, z. B. $\mathfrak{w}$, beim Durchgang durch F oder kurz an F erleidet, wird durch $[\mathfrak{w}]^+_-=\mathfrak{w}^+-\mathfrak{w}^-$ bezeichnet. Falls F geschlossen ist, weist $\mathfrak{n}$ stets nach außen; es ist $d\mathfrak{o}=d\sigma\,\mathfrak{n}$, $d\mathfrak{o}'=-d\mathfrak{o}$. Wo Integrationsvariable bzw. -gebiete sich von selbst verstehen, lassen wir sie oft weg. — Die konstante Dichte sei $=1$ gesetzt.

3. *Geschwindigkeitspotential.* Ist die Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ in einem Gebiete drehungs-, wirbel-, oder im Kleinen zirkulationsfrei, d. h. dort rot $\mathfrak{w}=0$, so existiert bekanntlich ein Geschwindigkeitspotential φ, derart, daß $\mathfrak{w}=\operatorname{grad}\varphi$ ist; φ ist bis auf eine belanglose additive Konstante gleich der Zirkulation längs irgendeiner Kurve, die von einem beliebigen aber festen Feldpunkt zu dem variablen Feldpunkt P führt; längs einer Stromlinie nimmt also φ stets zu. Ist die Strömung überdies auch noch im Großen zirkulationsfrei, so ist φ eindeutig; speziell ist also φ in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet eindeutig. Ist e die Quelldichte, d. h. $\operatorname{div}\mathfrak{w}=e$, so erfüllt φ wegen $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\triangle\varphi$ die Poissonsche Gleichung

$$\triangle\varphi=e\,, \tag{3}$$

die im Falle der Quellenfreiheit in die Laplacesche Gleichung

$$\triangle\varphi=0 \tag{4}$$

übergeht. Konstruiert man im letzten Falle die Stromröhren bzw. -linien und die dazu orthogonalen Niveauflächen $\varphi=\text{const.}$, so gewinnt man ein anschauliches Bild der quellenfreien Potentialströmung $\{\operatorname{grad}\varphi\}$; dabei strömt durch jeden Querschnitt einer Stromröhre gleichviel Flüssigkeit (Kontinuitätsgleichung).

4. *Quellen und Dipole.* Die wichtigste Potentialströmung ist die der punktförmigen Quelle, insofern als jede beliebige Potentialströmung durch lineare Überlagerung solcher Quellströmungen entstanden gedacht werden kann; das (eindeutige) Potential ist hier

$$\varphi=\frac{-e}{4\pi}\frac{1}{r}\,, \tag{5}$$

wo r der Abstand vom Quellpunkt Q zum Aufpunkt P und e die Ergiebigkeit der Quelle ist. Läßt man zwei im Abstand a befindliche Quellen Q_- und Q_+ mit gleichgroßen entgegengesetzten Ergiebigkeiten e_- und e_+ in den Mittelpunkt Q ihrer Verbindungslinie rücken, und steigert gleichzeitig ihre Ergiebigkeiten derart, daß das Produkt $e_+\cdot a$ einem von 0 verschiedenen Grenzwert m zustrebt, so erhält man eine Doppelquelle oder einen Dipol mit dem Potential

$$\varphi=\frac{-m}{4\pi}(\mathfrak{t}\cdot\underset{Q}{\nabla})\frac{1}{r}=\frac{-m}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s} \tag{6}$$

oder explizit

$$\varphi = \frac{-m\cos\vartheta}{4\pi}\frac{1}{r^2}, \tag{6a}$$

wo t den Einheitsvektor in der Richtung von Q_- nach Q_+, $\frac{\partial}{\partial s}$ die Differentiation in Richtung t und ϑ den Winkel zwischen t und $\mathfrak{r} = \overrightarrow{QP}$ bedeutet; da durch m und t, d. h. also durch den Vektor $\mathfrak{d} = mt$ der Dipol charakterisiert ist, so können wir für sein Potential auch schreiben:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\underset{Q}{\nabla})\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\underset{P}{\nabla})\frac{1}{r}. \tag{6b}$$

Schreiben wir im Falle der Quelle ϱ an Stelle von r, so gilt mit $\overrightarrow{OQ} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}$ für $r > a$, wo $a = |\mathfrak{a}|$, die bekannte Reihenentwicklung [6])

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} - \frac{1}{1!}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)^2\frac{1}{r} - + \cdots, \tag{7}$$

in welcher die Differentiation $(\mathfrak{a}\cdot\nabla)$ im Aufpunkt P auszuführen ist; aus ihr folgen für die Potentiale einer in Q befindlichen Quelle e bzw. eines dort befindlichen Dipols $\mathfrak{d}$ die Entwicklungen

$$\begin{cases} -\dfrac{e}{4\pi}\dfrac{1}{\varrho} = -\dfrac{e}{4\pi}\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{1!}\dfrac{e}{4\pi}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\dfrac{1}{r} - + \cdots \\ \dfrac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{1!}\dfrac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\dfrac{1}{r} + - \cdots. \end{cases} \tag{8}$$

Hat man zwei Quellen bzw. zwei Dipole, deren Größen jeweils durch die unteren Zeiger 1 und 2 voneinander unterschieden werden, so gewinnt man durch Addition der entsprechenden Entwicklungen die Formeln

$$\begin{cases} -\dfrac{e_1}{4\pi}\dfrac{1}{\varrho_1} - \dfrac{e_2}{4\pi}\dfrac{1}{\varrho_2} = -\dfrac{e_1+e_2}{4\pi}\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{4\pi}((e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2)\cdot\nabla)\dfrac{1}{r} - + \cdots \\ \dfrac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}_1\cdot\nabla)\dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}_2\cdot\nabla)\dfrac{1}{\varrho_2} = \dfrac{1}{4\pi}((\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2)\cdot\nabla)\dfrac{1}{r} - + \cdots, \end{cases} \tag{9}$$

die folgendes aussagen: Zwei Quellen wirken im Unendlichen (d. h. für große r) bis auf Glieder von höherer Ordnung als $\frac{1}{r^2}$

a) wie die zugehörige Schwerpunktsquelle der Stärke $e_1 + e_2$ in $(e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2)/(e_1 + e_2)$, falls $e_1 + e_2 \neq 0$;

b) sonst wie der Dipol $e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2$ in O.

Zwei Dipole wirken entsprechend im Unendlichen wie der Dipol $\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$ in O. Hierbei dürfen wir den Fall b) offenbar als Grenzfall von a) auffassen.

Das zu der Quelldichte e gehörige Geschwindigkeitspotential können wir nach (5) sofort zu

$$\varphi = \int\frac{-e\,d\tau}{4\pi r} \tag{10}$$

angeben, und haben hierin die (eindeutige) Lösung der Poissonschen Gleichung (3). Die Geschwindigkeit im Aufpunkt beträgt

$$\mathfrak{w} = \underset{P}{\operatorname{grad}}\int\frac{-e\,d\tau}{4\pi r}, \tag{11}$$

[6]) Vgl. Lensé, Reihenentwicklung in der mathematischen Physik, Berlin u. Leipzig 1933, S. 84—85, und die erste unter [1]) zitierte Arbeit von Lagally, S. 417, Gl. (16).

eine Beziehung, die explizit die von einem Quellenfelde induzierte Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ angibt, und als die (im ganzen Raume) eindeutige Auflösung der Gleichung

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{w} = e, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{w} = 0$$

bei gegebenem e anzusehen ist.

Indem wir Quellen und Dipole stetig über Räume oder Flächen verteilen, kurz räumlich oder flächenhaft verschmieren, gelangen wir zu komplizierteren und wie schon erwähnt allgemeinsten Potentialströmungen.

5. *Quellenflächen.* Seien, wie in Fig. 3 angedeutet, über den Zwischenraum Z zweier paralleler Ebenen vom Abstand a Quellen mit der konstanten Dichte e (räumlich) verschmiert. Dann wird die Flüssigkeit senkrecht zu der gestrichelten Mittelebene nach beiden Seiten abströmen mit einer Geschwindigkeit, die von der Mittelebene bis zur Berandung von 0 auf einen Betrag v linear anwächst, um von da an konstant $= v$ zu bleiben. v ist dadurch bestimmt, daß der Fluß durch das doppelt schraffierte Volumelement $d\tau = a\,d\sigma$ einerseits $= e\;d\tau = e a\,d\sigma$, andererseits $= 2v\,ds$ ist:

$$2v = e\,a = \varepsilon, \qquad v = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lassen wir $a \to 0$ und gleichzeitig $e \to \infty$ gehen, derart daß $e\,a = \text{const.} = \varepsilon$ bleibt, so erhalten wir eine mit der konstanten Flächendichte ε belegte Quellebene F (Fig. 4).

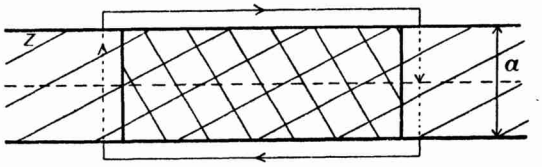


Fig. 3.

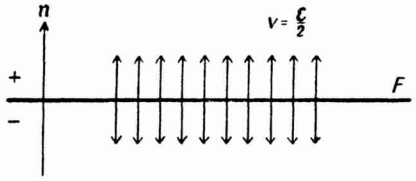


Fig. 4.

Hieraus ergeben sich die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Potentialströmung $\{\operatorname{grad} \varphi\}$:

1. Da während des Grenzüberganges $a \to 0$ die Geschwindigkeit innerhalb Z stets endlich $\left(\text{in unserem Beispiel} \leqq \frac{\varepsilon}{2}\right)$ bleibt, so liefert einer der in Fig. 3 punktierten Wege für $a \to 0$ keinen Beitrag zur Zirkulation, d. h. zum Potential φ; anders ausgedrückt: φ ändert sich stetig beim Durchgang durch F.

2. Da die Zirkulation längs des gezeichneten geschlossenen Weges $= 0$ sein muß (φ ist eindeutig!) und die punktierten Wegstücke im Grenzfall keinen Beitrag liefern, so müssen sich die Beiträge der beiden anderen Strecken aufheben, d. h. die Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_t$ muß zu beiden Seiten gleich sein:

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{w}_t^+ = \mathfrak{w}_t^- .$$

3. Dagegen ändert sich die Normalgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_n$ beim Durchgange durch F unstetig nach folgender Maßgabe: Die auf ein Flächenelement $d\mathfrak{o} = d\sigma\,\mathfrak{n}$ entfallende Ergiebigkeit oder Quellmasse ist einerseits $= \varepsilon\,d\sigma$, andererseits

$$= \mathfrak{w}^+ \cdot d\mathfrak{o} - \mathfrak{w}^- \cdot d\mathfrak{o} = [\mathfrak{w}]_-^+ \cdot d\mathfrak{o},$$

also gilt:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} \text{Quellmasse pro Element } d\mathfrak{o} = [\mathfrak{w}]_-^+ \cdot d\mathfrak{o} \quad \text{oder} \\ \qquad\qquad \varepsilon = [\mathfrak{w}]_-^+ \cdot \mathfrak{n} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_-^+ \text{[7]}. \end{cases}$$

[7]) Man beachte, daß die rechte Seite, also auch ε unabhängig von der Orientierung der Fläche ist, wie es sein muß; dasselbe gilt auch für die noch folgenden analogen Beziehungen.

4. Da sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ beim Durchgang durch Z linear ändert, so ist im Grenzfall die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ in der Fläche

$$\mathfrak{w}_0 = \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} \qquad (= 0 \text{ in unserem Beispiel}). \tag{15}$$

Diese vier Eigenschaften gelten allgemein für jede beliebige Quellenfläche, da bei ihrem Nachweis nirgends die Voraussetzungen unseres speziellen Beispieles benutzt wurden.

Liegt umgekehrt zu beiden Seiten einer Fläche F eine Potentialströmung vor, deren Normalgeschwindigkeit an F einen Sprung erleidet, so kann man sich diesen Sprung durch eine Quellbewegung von F mit der Dichte ε erzeugt bzw. „überwunden" denken.

6. *Anwendung.* Liegt die Quellmasse mit ihrer negativen Seite auf einer starren Fläche auf, so ist dort $\mathfrak{w}^- \cdot d\mathfrak{o} = 0$, so daß die Quellmasse pro Flächeneinheit nach (14) einfach $\mathfrak{w}^+ \cdot \mathfrak{n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^+$ wird. Als Anwendung hiervon lösen wir die Aufgabe, in einem gegebenen Gebiet eine Potentialströmung zu finden, deren Normalgeschwindigkeit auf einer Fläche vorgegebene Werte annimmt. Handle es sich z. B. um das Außengebiet A der in Fig. 5 gezeichneten starren Fläche F (die hier aus zwei geschlossenen Stücken besteht), auf der die Werte $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon$ vorgegeben sind. Dann denken wir uns auf dem schmalen Zwischenraum Z von der Dicke a Quellen mit der Dichte $e = \frac{\varepsilon}{a}$ verschmiert. In dem noch verbleibenden Außenraum wird sich dann eine Potentialströmung $\{\text{grad } \varphi\}$ einstellen, die im Grenzfall $a \to 0$ auf F die Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon$ annimmt. Außerdem sieht man: Die Strömung ruht im Unendlichen und wird sich dort wie die Strömung einer punktförmigen Quelle der Ergiebigkeit $\tilde{\varepsilon} = \int \varepsilon d\sigma$ verhalten, in Zeichen

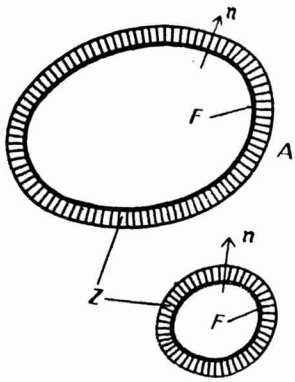


Fig. 5.

$$\varphi \sim -\frac{\tilde{\varepsilon}}{4\pi}\frac{1}{r}.$$

Dieselbe Konstruktion läßt sich auch auf ein Innengebiet anwenden, wobei hier die Randwerte ε an die selbstverständliche Bedingung $\int \varepsilon d\sigma = 0$ geknüpft sind (sog. zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie). Die Eindeutigkeit der Lösung ist schon hier anschaulich klar, wird aber auch später zusammen mit der Eindeutigkeit der sog. ersten Randwertaufgabe nochmals bewiesen werden.

7. *Dipolflächen.* Stellen wir der mit der konstanten Quelldichte ε belegten Ebene von vorhin eine parallele Ebene im Abstand a gegenüber, die mit der entgegengesetzten Dichte $-\varepsilon$ belegt ist, so haben wir den Fall der Fig. 6: Die Flüssigkeit strömt innerhalb

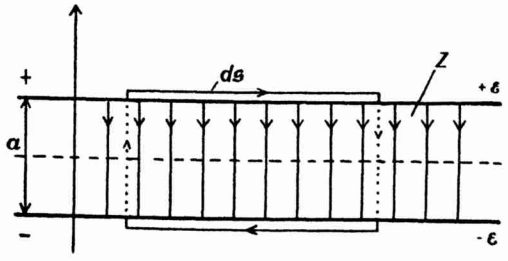


Fig. 6.

der Ebenen und senkrecht zu diesen mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \varepsilon$ ab, während außerhalb der Ebenen Ruhe herrscht (unendlich langer Plattenkondensator der Elektrostatik!). Lassen wir $a \to 0$ gehen und steigern gleichzeitig ε so, daß $\varepsilon \cdot a = \text{const.} = \gamma$ bleibt, so erhalten wir eine mit der konstanten Dichte γ besetzte Dipolebene F. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{w} = -v\mathfrak{n}$ im Zwischenraum Z wird im Grenzfall beliebig groß:

$$v = \varepsilon = \frac{\gamma}{a} \to \infty \quad \text{für} \quad a \to 0, \tag{16}$$

und zwar so, daß das Produkt

$$v\,a \text{ stets endlich und zwar } = \gamma \text{ bleibt.} \tag{16a}$$

Hieraus ergeben sich die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Potentialströmung {grad φ}:

1. Da der in Fig. 6 punktierte Weg links beim Grenzübergang gemäß (16a) stets einen endlichen Beitrag zur Zirkulation Γ liefert, so ändert sich Γ bzw. φ sprunghaft um $\mathfrak{w} \cdot a\mathfrak{n} = -\gamma$, d. h. es ist

$$\gamma = -\,[\varphi]^+_-\,. \tag{17}$$

Da ferner die Zirkulation, d. h. φ auf diesem Wege linear anwächst, so nimmt φ auf der gestrichelten Mittelebene, d. h. im Grenzfall auf F, den Wert an

$$\varphi_0 = \frac{\varphi^- + \varphi^+}{2}\,. \tag{18}$$

2. Da die Ergiebigkeit des in Fig. 6 durch den geschlossenen Weg abgegrenzten Volumelementes stets $= 0$ ist, so sind die Normalgeschwindigkeiten im Grenzfall auf beiden Seiten gleich:

$$\mathfrak{w}_n^+ = \mathfrak{w}_n^-\,. \tag{19}$$

Beide Eigenschaften gelten wieder, wie man sieht, für jede beliebige Dipolbelegung. Im allgemeinen Fall ergibt sich aus (17) noch die weitere Eigenschaft:

3. Die tangentielle Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_t$ erleidet an F einen Sprung von der Größe

$$[\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s} = \partial[\varphi]^+_- = -\,\partial\gamma\,. \tag{20}$$

Die Gesamtzirkulation $d\Gamma$ um die in Fig. 6 gezeichnete Kurve ist auch im Grenzfall noch $= 0$, indem ja der Beitrag der punktierten Wegstücke gerade $= \partial\gamma$ ist und daher die Zirkulation $-\,\partial\gamma$ um die übrige Berandung kompensiert.

Der Beitrag, den ein an der Stelle Q befindliches Dipolelement $\gamma\,d\mathfrak{o}$ zum Potential im Punkte P liefert, ist nach (6a):

$$-\frac{\gamma\,d\sigma}{4\pi} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{\gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\sigma \cdot \cos\vartheta}{r^2}\,,$$

wo ϑ den Winkel zwischen $d\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{r} = \overrightarrow{QP}$ bedeutet; hierbei ist der zweite Faktor auf der rechten Seite offenbar gleich dem Winkel $d\omega$, unter dem das Element $d\mathfrak{o}$ von P aus erscheint, so daß man also für den genannten Beitrag auch

$$-\frac{\gamma}{4\pi}\,d\omega \tag{21}$$

schreiben kann.

Liegt umgekehrt zu beiden Seiten einer Fläche F eine Potentialströmung vor, deren Potential an F einen Sprung $-\gamma$ bzw. deren Tangentialkomponente in einer bestimmten Flächenrichtung t einen Sprung $-\frac{\partial\gamma}{\partial s}$ erleidet, so kann man sich diesen Sprung durch eine Dipolbelegung von F mit der Dichte γ erzeugt bzw. überwunden denken.

8. *Wirbelflächen.* Neben den Dipolflächen sind bekanntlich auch flächenhafte Wirbelverteilungen, sog. Wirbelschichten, dazu geeignet, einen tangentiellen Geschwindigkeitsunterschied zu überwinden. Im Falle eines Zusammenflusses wie in Fig. 7 können wir uns vorstellen, daß der Übergang in einem schmalen Zwischenraum Z der Dicke a in linearer Weise vorgenommen wird: Dort herrscht dann eine konstante Wirbelstärke,

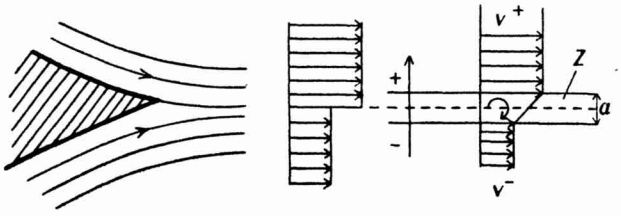


Fig. 7.

die gleich dem Geschwindigkeitsanstieg ist, und die im Grenzfall $a \to 0$ derart $\to \infty$ geht, daß ihr Produkt mit a stets endlich und gleich $v^+ - v^-$ bleibt; der Wirbelvektor steht hier senkrecht zur Zeichenebene, und bildet mit dem Drehsinn in Fig. 7 zusammen eine Rechtsschraube; die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ in der Fläche wird dann

$$\mathfrak{w}_0 = \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2}. \tag{22}$$

Um im allgemeinen Falle, wo Flüssigkeit zu beiden Seiten einer Fläche F mit verschiedener tangentieller Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_t^-$ und $\mathfrak{w}_t^+$ strömt, die Wirbellinien zu finden,

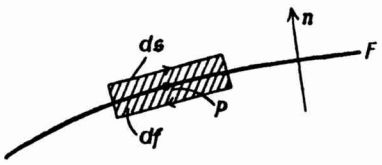


Fig. 8.

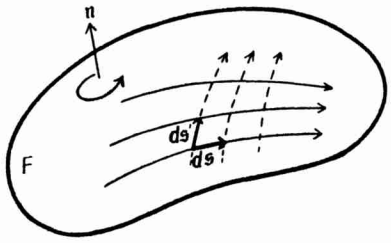


Fig. 9.

denken wir uns wieder den Übergang in einem schmalen Zwischenraum Z linear vorgenommen. Wegen der bekannten Beziehung $\partial\Gamma = \text{rot } \mathfrak{w} \cdot d\mathfrak{f}$ brauchen wir dann nur in jedem Punkte P der den Raum Z halbierenden und zu F parallelen Mittelfläche ein dort angebrachtes Flächenelement $d\mathfrak{f}$, das in Fig. 8 in Draufsicht gezeichnet ist, so lange um P zu drehen, bis die Zirkulation $\partial\Gamma$ um $d\mathfrak{f}$ ihr (positives) Maximum erreicht hat; dann zeigt $d\mathfrak{f}$ die Richtung der Wirbellinie an, wobei es genügt, $d\mathfrak{f}$ innerhalb der obigen Mittelfläche zu bewegen. Ist $d\mathfrak{s}$ das durch $d\mathfrak{f}$ auf F^+ ausgeschnittene Linienelement, so gilt

$$\partial\Gamma = [\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s}, \tag{23}$$

und dieser Ausdruck erreicht sein positives Maximum dann, wenn $d\mathfrak{s}$ parallel dem Geschwindigkeitsvektor $[\mathfrak{w}_t]^+_-$ der Relativströmung wird; d. h.: die Wirbellinien verlaufen senkrecht zu den Stromlinien der Relativströmung $\{[\mathfrak{w}_t]^+_-\}$ im Sinne des durch $\mathfrak{n}$ auf F gegebenen Drehsinnes (Fig. 9). Bedeutet $d\mathfrak{s}'$ das Linienelement längs der Wirbellinie, so beträgt im Grenzfall die auf das Oberflächenelement $d\mathfrak{o} = d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{s}'$ entfallende Wirbelmasse

$$\text{rot } \mathfrak{w}\, d\tau = \text{rot } \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s}' = d\mathfrak{s}'\, d\mathfrak{f} \cdot \text{rot } \mathfrak{w}$$

(da $d\mathfrak{s}' \parallel \text{rot } \mathfrak{w}$), also

$$d\mathfrak{s}'\, \partial\Gamma$$

und mithin nach (23)

$$d\mathfrak{s}'\,[\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s} = (\mathfrak{d}\mathfrak{s} \times d\mathfrak{s}') \times [\mathfrak{w}_t]^+_-$$

(wegen $d\mathfrak{s}' \perp [\mathfrak{w}_t]^+_-$), d. h.

$$d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}_t]^+_-$$

und hier kann offensichtlich der Index t auch weggelassen werden. Folglich gilt:

$$(24) \qquad \begin{cases} \text{Wirbelmasse pro Element } d\mathfrak{o} = d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_- , \\ \text{also pro Flächeneinheit} \quad = \mathfrak{n} \times [\mathfrak{w}]^+_- . \end{cases}$$

Liegt umgekehrt eine Strömung vor, deren tangentielle Geschwindigkeit an einer Fläche F einen Sprung erleidet, so können wir uns diesen stets durch eine Wirbelschicht überwunden denken, deren Dichte durch (24) gegeben ist. Da hierbei nicht vorausgesetzt wird, daß außerhalb F Potentialströmung herrscht, so sieht man, daß die Wirbelschichten mehr leisten als die Dipolbelegungen.

9. *Zusammenhang zwischen Dipol- und Wirbelbelegungen.* Es liege jetzt außerhalb der Fläche F eine Potentialströmung vor, deren Tangentialkomponente an F einen Sprung erleidet. Beide Belegungen, sowohl die durch Dipole wie die durch Wirbel, können dann diesen tangentiellen Geschwindigkeitsunterschied überwinden, leisten also genau dasselbe, jedoch auf ganz verschiedene Weise:

Innerhalb der Fläche F, die wir uns wieder von der kleinen Dicke a denken, strömt bei

Dipolen

die Flüssigkeit mit unendlich großer Geschwindigkeit von der positiven nach der negativen Seite ab.

Wirbeln

die Flüssigkeit mit endlicher Geschwindigkeit, die innerhalb F linear von $\mathfrak{w}_t^-$ auf $\mathfrak{w}_t^+$ wächst, so daß im Grenzfall $a \to 0$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ in der Fläche

$$= \frac{\mathfrak{w}_t^- + \mathfrak{w}_t^+}{2}$$

wird.

Dies bedingt, daß in der folgenden Figur 10 im Grenzfall $a \to 0$ bei

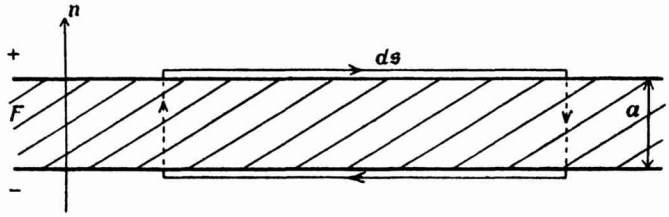


Fig. 10.

Dipolen

die Zirkulation längs der gestrichelten Wegstücke stets endlich bleibt, und die Beiträge des restlichen Weges gerade aufhebt, so daß die Gesamtzirkulation

$$\partial\Gamma = 0$$

ist.

Wirbeln

die Zirkulation längs der gestrichelten Wege $= 0$ wird, so daß die Gesamtzirkulation

$$\partial\Gamma \neq 0 ,$$

nämlich

$$\partial\Gamma = [\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s}$$

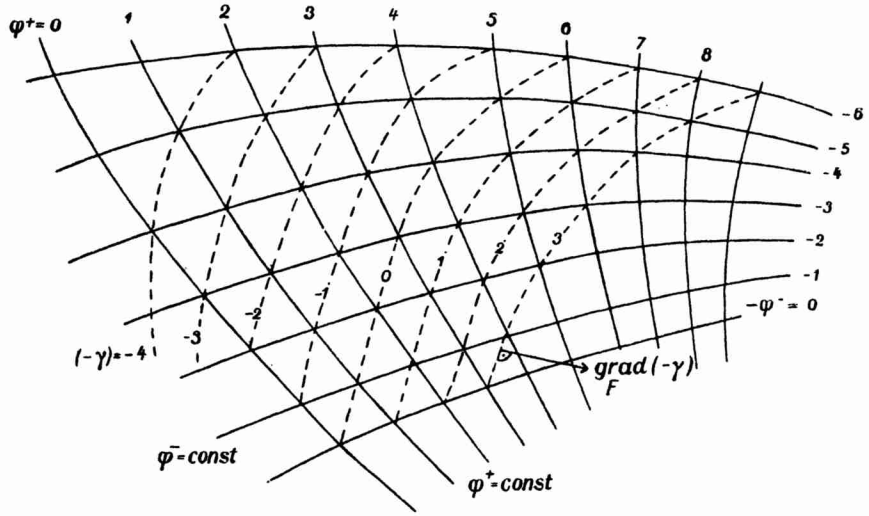
ist.

Außerhalb der Fläche F müssen jedoch beide Belegungen nach dem Grundsatz, daß eine Strömung durch ihre Singularitäten eindeutig bestimmt ist, dasselbe Geschwindigkeitsfeld $\{\mathfrak{w}\}$ erzeugen, können sich also dort gegenseitig ersetzen.

Wird das Potential einer Dipolbelegung auf der negativen bzw. positiven Seite durch φ^- und φ^+ bezeichnet, so daß also auf F

$$[\varphi]^+_- = \varphi^+ - \varphi^- = -\gamma$$

ist, so schneiden die Niveauflächen $\varphi^- = \text{const.}$, $\varphi^+ = \text{const.}$ innen und außen auf F Linien aus, welche die Niveaulinien bilden für die zugehörigen tangentiellen Strömungen $\{\mathfrak{w}_t^-\}$, $\{\mathfrak{w}_t^+\}$, die also ebenfalls Potentialströmungen und zwar *auf* der Fläche F sind. In Fig. 11 sind einige äquidistante Niveaulinien auf der positiven Seite von F gezeichnet,



Fgi. 11.

wobei der Potentialunterschied $= 1$ angenommen ist: Die gestrichelten Diagonalen stellen dann nach der bekannten Methode von Maxwell die Linien $-\gamma = [\varphi]^+_- = \text{const.}$ dar, sind also die Niveaulinien der relativen Potentialströmung

$$[\mathfrak{w}_t]^+_- = \operatorname{grad}_F [\varphi]^+_- = \operatorname{grad}_F (-\gamma)$$

(wo das Zeichen F unter grad andeuten soll, daß die Operation grad auf der Fläche vorzunehmen ist), senkrecht zu denen mithin die Relativströmung statthat. Verwendet man andererseits Wirbel, so verlaufen auch die Wirbellinien nach Nr. 8 senkrecht zu den relativen Stromlinien in dem früher festgesetzten Drehsinn, d. h. aber: die Linien $-\gamma = \text{const.}$ fallen mit den Wirbellinien zusammen, und es ist

$$-\partial\gamma = \partial\Gamma = [\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s}\,, \tag{25}$$

wo $\partial\Gamma$ die Zirkulation um die betreffende flächenhafte kleine Wirbelröhre darstellt.

Ist die Dipolfläche F nicht geschlossen, so wird es auf ihr i. a. Linien $\gamma = \text{const.}$ geben, die ebenfalls nicht geschlossen sind; beachtet man dann, daß die Endpunkte solcher Linien mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt werden (da ja in einem solchen Punkt das Potential plötzlich um γ springt), also zum Rand des Flüssigkeitsbereiches zu zählen sind, so sieht man, daß diese Linien in der Auffassung als Wirbelfäden entweder geschlossen sind oder von Rand zu Rand laufen, in Übereinstimmung mit dem Helmholtzschen Satz. — Ist die Dipolfläche F speziell geschlossen, so schneiden die Niveauflächen $\varphi^- = \text{const.}$, $\varphi^+ = \text{const.}$ auf F ebenfalls geschlossene Linien aus, so daß dann auch die früheren Diagonallinien der Fig. 11, d. h. die Wirbellinien, geschlossen sind.

10. *Ein Spezialfall.* Wir wollen noch einen speziellen Fall betrachten: Sei in Fig. 12 nur eine schmale Randzone der Fläche F mit geschlossenen Wirbelfäden von der Gesamtzirkulation Γ besetzt, und die restliche Kalotte frei von Wirbeln. Die Dichte

der entsprechenden Dipolbelegung sei wieder γ. Zieht man dann einen beliebigen Weg C von einem Punkte der unbedeckten Kalotte zum Rand, so wird sich γ nach (25) auf dem in die wirbelfreie Kalotte fallenden Wegstück nicht ändern, also dort einen konstanten Wert γ_0 besitzen, und auf dem restlichen Wege von diesem Werte auf 0 abfallen, und zwar gemäß (25) um den Betrag $\partial\gamma = -\Gamma$, d. h. es wird $0 - \gamma_0 = -\Gamma$ sein oder

$$\gamma_0 = \Gamma .$$

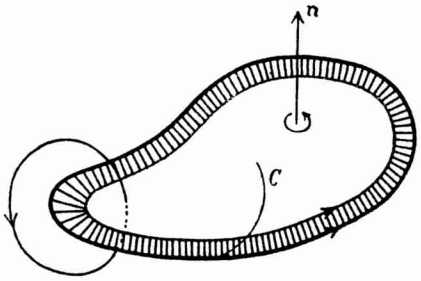


Fig. 12.

Denken wir uns weiter die Wirbelmasse auf den äußeren Rand zusammengeschoben, so erhalten wir das bekannte Resultat, daß ein geschlossener Wirbelfaden der Stärke Γ ersetzt werden kann durch eine Dipolbelegung irgendeiner in ihn gespannten Fläche F mit der Dichte Γ. Die Kurve selbst ist wieder zum Rande zu zählen, so daß hier der Wirbelfaden dem Rande entlang läuft.

Wir wollen noch das Potential φ und die induzierte Geschwindigkeit $\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\varphi$ des Wirbelfadens angeben. Nach (21) ist

$$\varphi = \int_F \frac{-\Gamma}{4\pi} d\omega = -\frac{\Gamma}{4\pi}\omega , \tag{26}$$

wo ω der Winkel ist, unter dem die (orientierte) Fläche von P aus erscheint; hierdurch ist der zyklische Charakter von φ in Evidenz gesetzt, da beim Durchgang durch die Fläche ω von 2π auf -2π springt, mithin beim Übergang von der positiven zur negativen Seite längs des in Fig. 12 gezeichneten Weges ω um -4π, also φ um Γ wächst, wie es sein muß. Um nun $\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\varphi$ zu bekommen, brauchen wir die Änderung $\delta\varphi$ bzw. $\delta\omega$ von φ bzw. ω bei einer Verrückung $\delta\mathfrak{r}$ von P nach P':

$$\delta\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot \delta\mathfrak{r} , \qquad \delta\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi}\delta\omega .$$

Dieselbe Änderung von ω erhält man aber auch, wenn man P festhält und den Wirbelfaden um $\delta\mathfrak{r}' = -\delta\mathfrak{r}$ verschiebt. Der Beitrag, den ein Element des Wirbelfadens zu $\delta\omega$ liefert, ist nach Fig. 13 offenbar

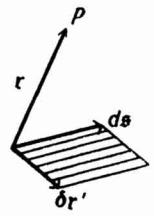


Fig. 13.

$$\frac{(\delta\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{s}) \cdot \mathfrak{e}}{r^2} = \frac{(d\mathfrak{s} \times \mathfrak{e}) \cdot \delta\mathfrak{r}'}{r^2} ,$$

wo $\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{r}}{r}$ ist; hieraus folgt

$$\delta\omega = \int \left(d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\right) \cdot \delta\mathfrak{r}' = \left\{\int d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\right\} \cdot \delta\mathfrak{r}' ,$$

d. h.

$$\mathfrak{w} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2} \left(= \frac{\Gamma}{4\pi}\int d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right) . \tag{27}$$

Geht man von hier aus zum entsprechenden Differentialgesetz über, so erhält man als Beitrag eines Elementes:

$$\frac{\Gamma}{4\pi}\left(d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\right) . \tag{27a}$$

(27) bzw. (27a) entspricht vollständig dem Biot-Savartschen Gesetz der Elektrodynamik, in das es übergeht, wenn man den Wirbelfaden der Stärke Γ durch einen Stromkreis der Stärke I und die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ durch die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ ersetzt.

11. Durch räumliche Verschmierung, d. h. Ersetzung von $\Gamma d\mathfrak{s}$ durch $d\tau \operatorname{rot} \mathfrak{w}$ gelangen wir mit der Abkürzung $\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{w}$ von (27) zu der Formel

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{4\pi}\int d\tau\, \mathfrak{c} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\,. \tag{28}$$

Wegen

$$\operatorname*{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{e}}{r^2} \quad \text{und} \quad \operatorname*{rot}_P \frac{\mathfrak{c}}{r} = \operatorname*{grad}_P \frac{1}{r} \times \mathfrak{c}$$

($\mathfrak{c}$ hängt vom Aufpunkt P nicht ab!) kann (28) auch so geschrieben werden:

$$\mathfrak{w} = \operatorname*{rot}_P \int \frac{\mathfrak{c}\, d\tau}{4\pi r} = \operatorname*{rot}_P \mathfrak{C} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{C} = \int \frac{\mathfrak{c}\, d\tau}{4\pi r}\,, \tag{28a}$$

eine Beziehung, die explizit das von einem gegebenen Wirbelfelde induzierte Geschwindigkeitsfeld $\{\mathfrak{w}\}$ angibt, also als die im ganzen Raum eindeutige Auflösung der Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w} = \mathfrak{c}\,, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{w} = 0 \tag{29}$$

bei gegebenem $\mathfrak{c}$ anzusehen ist. — Übrigens folgt aus dem Bau von $\mathfrak{C}$, daß $\mathfrak{C}$ (nach der Poissonschen Gleichung) der Beziehung

$$\triangle \mathfrak{C} = -\mathfrak{c}$$

genügt. Schreibt man $\operatorname{rot} \mathfrak{w} = \mathfrak{c}$ in der Form

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{C} = \mathfrak{c}\,,$$

so folgt wegen der bekannten Beziehung

$$\triangle \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{a} - \mathfrak{a}\,,$$

daß

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{C} = 0\,,$$

d. h. also

$$\operatorname{div} \mathfrak{C} = \text{const.}$$

sein muß, woraus, da $\mathfrak{C}$ im Unendlichen verschwindet, notwendig

$$\operatorname{div} \mathfrak{C} = 0 \tag{30}$$

folgt; in Worten: $\{\mathfrak{C}\}$ ist quellenfrei, eine Eigenschaft, die sich auch direkt an $\mathfrak{C}$ selbst nachprüfen läßt.

12. *Überlagerung der einzelnen Belegungen.* Bedeckt man schließlich eine Fläche gleichzeitig mit Quellen und Dipolen (bzw. Wirbeln), so überlagern sich die Eigenschaften der einzelnen Belegungen. Insbesondere kann man also normale und tangentielle Geschwindigkeitsunterschiede an einer Fläche F durch eine passende Verteilung von Quellen und Wirbeln überwinden, wobei auf ein Element do nach (14) und (24)

$$\begin{cases} \text{die Quellmasse} & do \cdot [\mathfrak{w}]^+_- \\ \text{die Wirbelmasse} & do \times [\mathfrak{w}]^+_- \end{cases} \tag{31}$$

entfällt, und die Geschwindigkeit auf der Fläche selbst

$$\mathfrak{w}_0 = \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} \tag{32}$$

wird. — Analog erhält man durch Überlagerung der Lösungen von (12) und (29) die im ganzen Raum eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = e\,, \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{w} = \mathfrak{c}$$

bei gegebenem e und $\mathfrak{c}$.

§ 2. Impulsive Erzeugung von Potentialströmungen.

13. *Das Potential als Stoßdruck.* Denken wir uns in Fig. 14 die abgegrenzte Flüssigkeit zunächst ruhend, die Begrenzung als Membran, und stellen uns vor, daß auf diese

plötzlich an jeder Stelle ein impulsiver oder stoßartiger Druck, bezeichnet durch $[p]$ [8]), ausgeübt wird, so wird sich auch im Innern an jeder Stelle instantan ein Stoßdruck eingestellt haben, unter dessen Gefälle das dort befindliche Flüssigkeitsteilchen von der Masse 1 instantan von der Ruhe auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ gebracht wird (Kraftstoß = Bewegungsgröße!), d. h. es wird sein

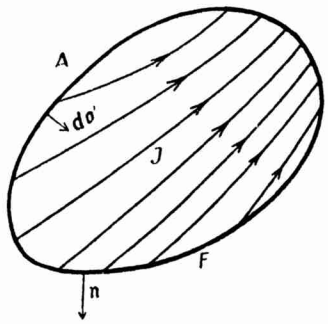


Fig. 14.

$$\mathfrak{w} = -\operatorname{grad}[p]. \tag{33}$$

M. a. W.: Im Innern findet eine Potentialströmung statt, mit dem Potential $\varphi = -[p]$. Auf den ganzen Flüssigkeitsraum angewandt, muß der gesamte Stoßdruck gleich der mitgeteilten Bewegungsgröße sein:

$$\int \mathfrak{w}\, d\tau = \int [p]\, d\sigma' \quad \text{oder} \quad \int \operatorname{grad}\varphi\, d\tau = \int \varphi\, d\sigma . \tag{34}$$

Da der Druck p und daher auch der Stoßdruck $[p]$ von Natur aus eine eindeutige Ortsfunktion ist, so können also auf diese Weise lediglich eindeutige Potentialströmungen erzeugt werden.

Denkt man sich in Fig. 14 den Innenraum I durch den Außenraum A ersetzt, so gelangt man durch Stoßdrucke auf F in der entgegengesetzten Richtung in gleicher Weise zu einer Potentialströmung $\{\operatorname{grad}\varphi\}$ im Außenraum A. Stets sollen im folgenden unter Potentialströmungen in einem Außengebiet nur die in solcher Weise (durch Stoßdrucke auf die im Endlichen liegende Begrenzung) entstandenen Strömungen verstanden werden; ihr Potential $\varphi = -[p]$ verschwindet stets im Unendlichen, da dort der Stoßdruck $[p]$ auf 0 abgeklungen ist.

Wir bemerken noch, daß der Stoßdruck an einer Stelle natürlich auch < 0 sein kann, insofern er dort eine plötzliche Verminderung des herrschenden Druckes p zur Folge hat. Da der Druck p selbst stets $\geqq 0$ ist (einen Zug kann eine Flüssigkeit nicht übertragen!), so muß nur der noch verbleibende Druck $\geqq 0$ sein, was man stets dadurch erreichen kann, daß man den ganzen Flüssigkeitsraum vor Beginn des Stoßvorganges auf einen genügend großen konstanten Druck gebracht hat (vgl. das Beispiel unter Nr. 17).

Da eine Stoßkraft $[k]$ pro Masseneinheit die Arbeit $[k]\cdot\frac{[\mathfrak{w}]^+_-}{2}$ leistet, wo $[\mathfrak{w}]^+_-$ den durch $[k]$ bedingten Geschwindigkeitszuwachs bedeutet [9]), so ist im obigen Falle an der Oberfläche F die Arbeit $\frac{1}{2}\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma$ aufgebracht worden, die andererseits in der kinetischen Energie steckt und dieser gleich sein muß:

$$\frac{1}{2}\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\tau = \int \frac{\mathfrak{w}^2}{2}\, d\tau \quad \text{oder} \quad \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = \int \operatorname{grad}^2\varphi\, d\tau , \tag{35}$$

eine Beziehung, die für alle in der obigen Weise erzeugten Potentialströmungen in I oder A gilt.

Um die Beziehung (35) auch analytisch zu beweisen, bemerken wir, daß die linke Seite offensichtlich eine additive Gebietsfunktion ist. Denken wir uns daher das Gebiet durch ein Bündel dünner Stromröhren und ein Paket benachbarter Potentialflächen in Volumelemente zerlegt, so genügt es, (35) für ein solches Element $d\tau$, wie es

---

[8]) Vgl. C. Schäfer, Einführung in die theoretische Physik 1, 3. Aufl., Berlin 1929, S. 114—116.

[9]) Wird z. B. eine ruhende Kugel von der Masse 1 durch die Stoßkraft $[\mathfrak{k}]$ plötzlich auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ gebracht, so hat sie die Bewegungsgröße $\mathfrak{c} = [\mathfrak{k}]$ und die Energie $\frac{\mathfrak{c}^2}{2} = [\mathfrak{k}]\cdot\frac{\mathfrak{c}}{2}$.

Fig. 15 zeigt, zu beweisen. Seine Oberfläche liefert in leicht verständlicher Bezeichnungsweise den Beitrag $\left(\text{mit } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = |\operatorname{grad} \varphi| = c\right)$

$$\varphi_2 c_2 d\sigma_2 - \varphi_1 c_1 d\sigma_1$$

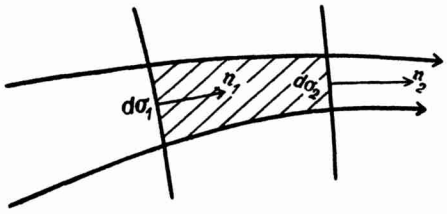


Fig. 15.

oder nach Addition und Subtraktion von $\varphi_1 c_2 d\sigma_2$

$$(36)\quad (\varphi_2 - \varphi_1)\, c_2 d\sigma_2 + \varphi_1 \{c_2 d\sigma_2 - c_1 d\sigma_1\},$$

wo der Ausdruck in der geschweiften Klammer nach der Kontinuitätsgleichung verschwindet; der Rest liefert aber bis auf vernachlässigbare Glieder höherer Ordnung

$$(37)\quad c \cdot c\, d\tau = \operatorname{grad}^2 \varphi\, d\tau,$$

womit (35) bewiesen ist. — Denken wir uns in dem Beweis $\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ durch $\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ ersetzt, wo $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$ ebenfalls eine eindeutige Potentialströmung im betrachteten Gebiete ist, und die in Fig. 5 veranschaulichte Zerlegung in Volumelemente mittels der Strömung $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$ durchgeführt, so hätten wir an Stelle von (36)

$$(38)\quad (\varphi_2 - \varphi_1)\, c_2' d\sigma_2 + \varphi_1 \{c_2' d\sigma_2 - c_1' d\sigma_1\}$$

und an Stelle von (37)

$$(39)\quad c_{n'} \cdot c'\, d\tau,$$

wo $c_{n'}$ die in die Richtung von $n' = \frac{\operatorname{grad} \varphi'}{c'}$ fallende Geschwindigkeitskoordinate von grad φ bedeutet, also

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi'\, d\tau$$

und damit in Erweiterung von (35) die für zwei Potentialströmungen gültige Beziehung

$$(40)\quad \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma = \int \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi'\, d\tau$$

erhalten, aus der, da ihre rechte Seite symmetrisch in φ und φ' ist, die weitere Beziehung

$$(41)\quad \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma = \int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

folgt. In der Auffassung von φ und φ' als Stoßdrucke läßt sich (41) in dem Satz ausdrücken: Hat man zwei (eindeutige) Potentialströmungen $\{\operatorname{grad} \varphi\}$ und $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$, so ist die Arbeit, welche der erste Stoß φ bei der zweiten Bewegung $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$ leistet, gleich der Arbeit, welche der zweite Stoß φ' bei der ersten Bewegung $\{\operatorname{grad} \varphi\}$ leistet. In dieser Formulierung liegt ein Spezialfall eines viel allgemeineren von Thomson [10]) stammenden Satzes für dynamische Systeme vor. Setzt man umgekehrt diesen allgemeineren Satz voraus, so ist (41) eine spezielle Anwendung von ihm.

14. Es folgt, daß es sowohl in I als auch in A eine Potentialströmung $\{\operatorname{grad} \varphi\}$ gibt, deren Geschwindigkeitspotential auf F vorgegebene Randwerte annimmt: nämlich jene Strömung, die entsteht, wenn man auf F in Richtung zum Flüssigkeitsraum den Stoßdruck $[p] = -\varphi$ ausübt; dabei ist im Falle der äußeren Aufgabe stets $\varphi(\infty) = 0$ (sog. erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie). Und daß es nur eine solche Strömung gibt, ist durch (35) garantiert: Gäbe es nämlich noch eine weitere solche

---

[10]) Vgl. Lamb, a. a. O. [4]), S. 51, und Thomson u. Tait, Handbuch der theoretischen Physik, Art. 313, Gl. (11). Wird z. B. der in Fußnote [9]) erwähnten Kugel durch einen zweiten Stoß $[\mathfrak{k}']$ die Bewegungsgröße $\mathfrak{c}'$ erteilt, so ist die Arbeit der Stoßkraft $[\mathfrak{k}]$ während der zweiten Bewegung $= [\mathfrak{k}] \cdot \frac{\mathfrak{c}'}{2} = \frac{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}'}{2} = \frac{\mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{c}}{2}$, also in der Tat auch gleich der Arbeit der zweiten Stoßkraft bei der ersten Bewegung.

Strömung {grad φ'}, so wäre für die Strömung {grad $(\varphi - \varphi')$} die linke Seite von (35) identisch $= 0$, also auch die rechte, d. h. es wäre grad $\varphi' =$ grad φ; und auf dieselbe Weise folgt auch, daß die frühere zweite Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist. Speziell folgt noch, daß innerhalb oder außerhalb (hier mit der zusätzlichen Forderung, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruhen soll) einer starren Begrenzung die Ruhe die einzige eindeutige Potentialströmung ist $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ auf } F\right)$. — Denken wir uns auch die Lösung der zweiten Randwertaufgabe durch Stoßdrucke erzeugt (was ja stets möglich ist), so gelangen wir zu dem Resultat: Es ist stets und nur auf eine Weise möglich, durch passende Stoßdrucke auf die als Membran gedachte Begrenzung eines Flüssigkeitsbereiches jedem Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche eine ihm dort vorgeschriebene Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ zu erteilen. Nimmt man umgekehrt dieses Resultat als anschaulich gegeben hin, so kann man mit seiner Hilfe auch die zweite Randwertaufgabe ebenso wie die erste mittels Stoßdrucken lösen. — Durch eine Kombination der beiden Konstruktionen ergibt sich auch leicht die Lösung der sog. gemischten Randwertaufgabe, in der auf einem Teil der Berandung φ und auf dem anderen $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ vorgegeben ist; daß die Lösung eindeutig ist, folgt wie früher.

15. *Zyklische Potentialströmungen.* An dieser Stelle sei noch kurz auf die Erzeugung von Potentialströmungen mit mehrdeutigem Potential φ eingegangen. Das Flüssigkeitsgebiet (das ja notwendig mehrfach zusammenhängend sein muß) bilde z. B. das Äußere A des in Fig. 16 gezeichneten durchlochten Körpers, der die Form eines aufgepumpten Fahrradschlauches hat. Denken wir uns nun den schraffierten Querschnitt (der den Körper senkrecht treffen möge) als zwei benachbarte Membranen vom Abstand a, wie ihn Fig. 17 im Seitenriß zeigt, die Oberfläche F des Körpers aber starr (in Fig. 17 doppelt schraffiert), und üben auf die positive Membran einen konstanten Stoßdruck $[p] = \Gamma$

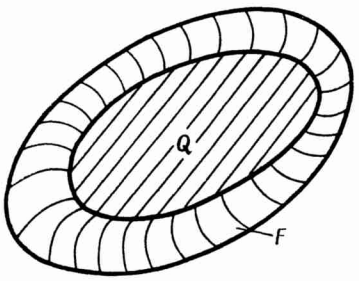


Fig. 16.

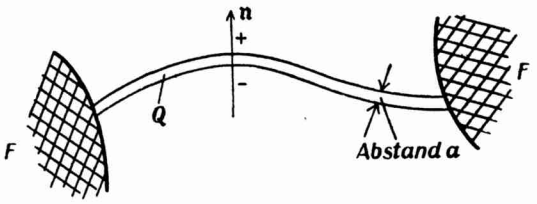


Fig. 17.

aus, so stellt sich in dem außerhalb des Körpers und der beiden Membranen befindlichen (einfach zusammenhängenden) Flüssigkeitsraum A' eine (eindeutige) Potentialströmung {grad φ'} ein mit folgenden Eigenschaften:

1. Auf der positiven Seite ist $\varphi' = -\Gamma$, auf der negativen Seite $\varphi' = 0$, d. h. φ' macht an F den konstanten Sprung $[\varphi']^+_- = -\Gamma$, woraus nach (20) weiter folgt, daß die Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_t'$ an F stetig ist: $[\mathfrak{w}_t']^+_- = 0$.

2. Da auf der negativen Membran $\varphi' = 0$ ist, so kann eine Stromlinie, die darauf entspringt, nicht mehr zu dieser zurückkehren, muß also, da sie auf der starren Körperoberfläche und im Unendlichen (wegen $\varphi'(\infty) = 0$) ebenfalls nicht enden kann, zur anderen Membran führen.

Hierbei wird nun aber i. a. die Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ an F einen Sprung machen, von der Größe $\left[\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right]_-^+ = \varepsilon'$. Denken wir uns dann den Zwischenraum der Membranen mit Quellen von der räumlichen Dichte $e' = \frac{-\varepsilon'}{a}$ erfüllt, und den Körper nach wie vor starr, so wird die daraus entstehende in A eindeutige Potentialströmung zusammen mit der von vorhin eine Flüssigkeitsbewegung $\{\text{grad } \varphi\}$ in A' ergeben, für die nach wie vor $[\varphi]_-^+ = -\Gamma$, $[w_t]_-^+ = 0$ ist, und für die außerdem auch die Normalgeschwindigkeit, mithin also auch die Geschwindigkeit selbst, sich an F stetig ändert. Denken wir uns also die Membranen samt ihrem Quelleninhalt zusammengezogen und entfernt, so haben wir in dem Außenraum A eine Potentialströmung, die jetzt in lauter geschlossenen Stromlinien verläuft, und deren Potential bei einem einmaligen Umgang jedesmal um Γ wächst. Haben wir einmal diese Strömung, so können wir sie nachträglich leicht durch Stoßdrucke allein erzeugen: Dazu brauchen wir offenbar den Querschnitt nur als Potentialfläche zu wählen und auf seine positive Seite den konstanten Stoßdruck $[p] = +\Gamma$ auszuüben! Gleichbedeutend damit ist, daß wir diesen Querschnitt konstant mit Dipolen der Dichte Γ belegen. Die so gewonnene Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ ist durch ihre „zyklische Konstante" Γ eindeutig bestimmt: Ist nämlich $\{\text{grad } \varphi'\}$ noch eine weitere solche Strömung, so stellt $\{\text{grad } (\varphi - \varphi')\}$ eine eindeutige Strömung außerhalb des starren Körpers dar, die im Unendlichen ruht, ist also nach Nr. **14** die Ruhe selbst, mithin grad $\varphi' =$ grad φ. — Die Ausdehnung auf den Fall, daß der Körper nicht eins, sondern mehrere, z. B. n, Löcher hat, ergibt sich durch Überlagerung der für die einzelnen Querschnitte nach dem obigen Muster erhaltenen Strömungen (in der Tat konnte in unserer obigen Betrachtung der Körper außer der einen Durchbohrung, mit der wir gearbeitet haben, noch weitere solche besitzen!): Man gelangt dann zu einer n-fach zyklischen Potentialströmung mit den den einzelnen n Querschnitten zugeordneten zyklischen Konstanten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$.

16. Indem wir uns weiter an unseren speziellen Fall des einfach durchbohrten Körpers halten, fassen wir zusammen: Man kann stets (und auf mannigfache Art) einen solchen Querschnitt wählen, daß bei Ausübung des konstanten Stoßdruckes Γ auf seine positive Seite sich die zu Γ als zyklische Konstante gehörige eindeutig bestimmte Potentialströmung $\{\text{grad } \varphi\}$ einstellt; ihre Erzeugung kommt einer Dipolbelegung dieses Querschnittes mit der Dichte Γ gleich. Bestimmen wir noch dabei die geleistete Arbeit! Auf der Fläche F (die wir uns hier ebenfalls als Membran denken müssen) wird wohl der Stoßdruck $[p] = -\varphi$ (der die Starrheit von F ersetzt) ausgeübt, leistet jedoch keine Arbeit, da dort $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ ist. Bleibt also nur die Arbeit am Querschnitt Q; diese ist

$$\frac{1}{2}\int [p]\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{2}\,\Gamma \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{2}\,\Gamma E\,,$$

wo E die durch den Querschnitt pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsmenge ist. Sie muß gleich der kinetischen Energie der Strömung sein:

$$\Gamma \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \Gamma E = \int_A \text{grad}^2 \varphi\, d\tau\,.$$

Überlagert man der zyklischen Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ eine beliebige eindeutige Potentialströmung $\{\text{grad } \psi\}$ im Außenraum A des Körpers (die also durch Stoßdrucke auf die jetzt als Membran gedachte Oberfläche entsteht), so gelangt man zur allgemeinsten Potentialströmung $\{\text{grad } \Phi\}$ mit $\Phi = \varphi + \psi$ in diesem Raum; dabei wird auf F jetzt die Arbeit

$$\frac{1}{2}\int_F (\varphi + \psi)\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{2}\int_F \Phi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

und am Querschnitt Q die Arbeit $\frac{1}{2}\Gamma\int_Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma$ geleistet, sodaß man insgesamt

$$\frac{1}{2}\int_F \Phi\frac{\partial\psi}{\partial n} + \frac{1}{2}\Gamma\int_Q\frac{\partial\Phi}{\partial n}$$

erhält, eine Beziehung, in der man offensichtlich im ersten Integral links die vorkommende Normalgeschwindigkeit durch $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ ersetzen darf; also muß sein:

$$\int_F \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma + \Gamma\int_Q\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma = \int_A \operatorname{grad}^2\Phi\,d\tau\,. \tag{42}$$

(42) erweitert die frühere Beziehung (35) auf den Fall zyklischer Potentialströmungen und hätte auch sofort aus dieser durch Anwendung auf den Raum A' (in dem ja Φ eindeutig ist) erhalten werden können. Derselbe Gedankengang oder aber unsere bisherige direkte Betrachtungsweise liefert auch die zu (40) und (41) analogen Beziehungen (wo $\{\operatorname{grad}\Phi'\}$ eine Strömung vom gleichen Charakter wie $\{\operatorname{grad}\Phi\}$ bedeutet):

$$\int_F \Phi\frac{\partial\Phi'}{\partial n}\,d\sigma + \Gamma\int_Q\frac{\partial\Phi'}{\partial n} = \int_A \operatorname{grad}\Phi\cdot\operatorname{grad}\Phi'\,d\tau \tag{43}$$

$$\int_F \Phi\frac{\partial\Phi'}{\partial n} + \Gamma\int_Q\frac{\partial\Phi'}{\partial n} = \int_F \Phi'\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \Gamma'\int_Q\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,, \tag{44}$$

wobei die letzte Relation wieder die Gleichheit der Arbeit zweier Impulse ausspricht.

§ 3. Erzeugung eindeutiger Potentialströmungen aus Quellen und Dipolen.

17. $\{\operatorname{grad}\varphi\}$ sei z. B. eine eindeutige Potentialströmung im Außenraum A der in Fig. 18 gezeichneten Fläche F. Denken wir uns dann den Innenraum I ebenfalls von Flüssigkeit erfüllt, die vorab ruhen möge, so daß das zugehörige Potential φ' zu 0 angenommen werden darf, so gelangen wir zu einer Strömung im ganzen Raum $R = I + A$, für welche F eine Unstetigkeitsfläche sowohl bezüglich der normalen wie tangentiellen Geschwindigkeit darstellt. Nach früherem (Nr. **5** und **7**) können wir also diese Strömung durch eine passende Verteilung von Quellen und Dipolen auf F erzeugen. Die diesbezüglichen Dichten sind $[\mathfrak{w}]^+_-\cdot\mathfrak{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ und $= -\varphi$, so daß nach (5) und (6) also sein muß:

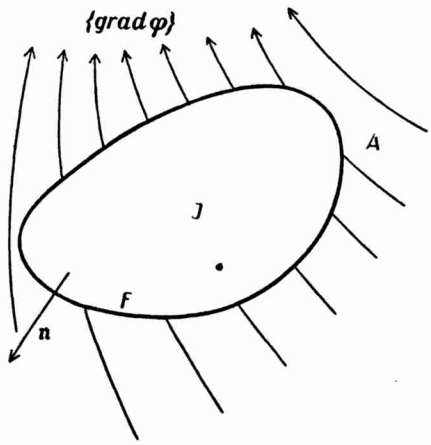


Fig. 18.

$$\int_F \frac{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)}{4\pi r} + \int_F \frac{-(-\varphi)}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = \begin{cases}\varphi & \text{in } A\\ 0 & \text{in } I\,.\end{cases} \tag{45}$$

Wären wir statt von der Ruhe von einer beliebigen (eindeutigen) Potentialströmung $\{\operatorname{grad}\varphi'\}$ in I ausgeganegen, so hätten wir für die Quellen und Dipole bzw. die Dichten $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right)$ und $-(\varphi-\varphi')$, d. h. an Stelle von (45) die erweiterte Beziehung

$$\int_F \frac{-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right)}{4\pi r} + \int_F \frac{-(-(\varphi-\varphi'))}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = \begin{cases}\varphi & \text{in } A\\ \varphi' & \text{in } I\end{cases} \tag{46}$$

erhalten (wobei die Verteilung der Singularitäten durch die in der rechten Seite zum Ausdruck kommende Forderung eindeutig bestimmt ist), die also aussagt, daß man die Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ im Außenraum A auf ebenso viele Arten durch eine Verteilung von Quellen und Dipolen auf der Oberfläche F erzeugen kann, wie es im Innengebiet eindeutige Potentialströmungen $\{\text{grad } \varphi'\}$ gibt. Ähnliches gilt auch für den Innenraum I. — Durch passende Wahl von $\{\text{grad } \varphi'\}$ können wir nun erreichen, daß entweder nur die normale oder nur die tangentielle Geschwindigkeit an F einen Sprung erleidet, und gelangen so zu einer (jeweils eindeutig bestimmten) Verteilung von Quellen allein oder Dipolen allein, die in A die Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ erzeugen: Denken wir uns F als doppelte Membran und die gegebene Strömung durch den Stoßdruck $[p] = -\varphi$ auf die äußere Membran erzeugt, so brauchen wir auf die andere Membran das eine Mal nur mit demselben Stoßdruck zu drücken, so daß also $\varphi' = \varphi$ wird, um zu der Quellverteilung $\left(\text{mit der Dichte } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)\right)$ zu gelangen, und das andere Mal nur jenen Stoßdruck auszuüben, welcher die normale Geschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ erzeugt, so daß $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ wird, um zu der Dipolverteilung (mit der Dichte $-(\varphi - \varphi')$) zu gelangen.

Jedes Singularitätensystem Δ_0 auf F, das in A die gegebene Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ erzeugt, nennen wir ein zu $\{\text{grad } \varphi\}$ gehörendes Singularitätensystem auf F; Δ_0 kann also bestehen aus

a) Quellen und Dipolen;

b) Quellen allein;

In dem speziellen Fall, daß wir einen Körper in einer zunächst ruhenden Flüssigkeit plötzlich auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ bringen (Fig. 19), übt die starre Oberfläche auf die Flüssigkeit Stoßdrucke aus, so daß also im Außenraum A eine Potentialströmung $\{\text{grad } \varphi\}$ mit der Eigenschaft $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}$ entsteht. Wählen wir als zugehöriges Singularitätensystem lauter Dipole, so müssen diese im Innern I eine Potentialströmung mit derselben Normalgeschwindigkeit $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}$ auf F ergeben, eine Bedingung, die offenbar von der Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ in I (und wegen der Eindeutigkeit der Lösung auch nur von dieser) erfüllt wird. Man kann also die Stromlinien in A unmittelbar durch den Körper hindurch gemäß Fig. 19 schließen.

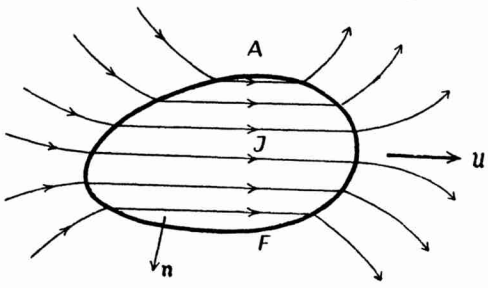


Fig. 19.

§ 4. Ersetzung eines Körpers durch Singularitäten.

18. Wir sind jetzt imstande, einen Körper, d. h. dessen starre Oberfläche F (denn nur um diese kann es sich ja handeln, da das Innere des Körpers z. B. auch hohl sein kann) durch Singularitäten zu ersetzen. F zerlege den Raum wieder in ein Innen- und Außengebiet I bzw. A. Die Strömung sei so beschaffen, wie sie später (mit einer geringen Einschränkung) vorkommen wird, d. h. es handle sich um eine Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ um den Körper, die im Endlichen beliebige Singularitäten besitzt und im Unendlichen in eine Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ übergeht, wobei auch $\mathfrak{U} = 0$ sein kann. Die Gesamtheit der in A befindlichen Singularitäten von $\{\mathfrak{w}\}$ sei Δ_a. — Nennen wir nun allgemein ein durch eine geschlossene Fläche abgegrenztes Singularitätensystem abgeschlossen, wenn alle Wirbelfäden sich in ihm schließen, andernfalls offen, so wird das Singularitätensystem Δ_a der gegebenen Strömung i. a. offen sein; die Gesamtheit der

auf F entspringenden und dort (notwendigerweise) wieder mündenden Wirbelfäden bezeichnen wir mit P. Jedes innerhalb oder auf F liegende Singularitätensystem Δ_i, das zusammen mit Δ_a und $\{\mathfrak{U}\}$ im Außenraum A die gegebene Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ um die Fläche F erzeugt, ist als ein die starre Fläche F in bezug auf die gegebene Strömung ersetzendes Singularitätensystem anzusprechen; durch Δ_i wird $\mathfrak{w}$ eindeutig in das Innere I fortgesetzt. Wir werden jetzt eine ganze Klasse solcher Singularitätensysteme aufzeigen, und betrachten zunächst den Spezialfall, daß Δ_a abgeschlossen ist.

Spezialfall: Δ_a ist abgeschlossen (Fig. 20). $\{\mathfrak{w}^*\}$ sei die Strömung ohne den Körper, also bedingt durch Δ_a und $\{\mathfrak{U}\}$ und definiert im ganzen Raum $R = I + A$. Um nun in A von $\{\mathfrak{w}^*\}$ wieder auf $\{\mathfrak{w}\}$ zu kommen, brauchen wir dort der Strömung $\{\mathfrak{w}^*\}$ nur jene (eindeutige und eindeutig bestimmte) Potentialströmung $\{\text{grad } \varphi\}$ zu überlagern, deren Normalkoordinate $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ jene von $\{\mathfrak{w}^*\}$ gerade aufhebt: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \mathfrak{w}^* \cdot \mathfrak{n} = 0$, was stets durch passende Stoßdrucke auf die als Membran gedachte Fläche F möglich ist. Jedes Singularitätensystem Δ_0 auf F, das zu $\{\text{grad } \varphi\}$ im Sinne von Nr. **17** gehört, ersetzt dann die starre Fläche F, ist also als ein Singularitätensystem Δ_i zu bezeichnen:

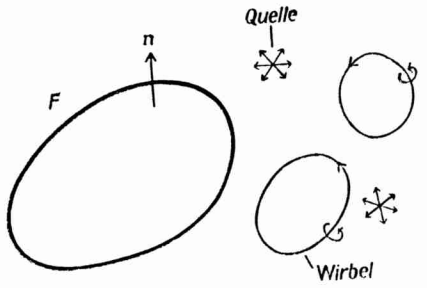


Fig. 20.

$$\Delta_i = \Delta_0 \text{ [11]}. \tag{47}$$

Besteht Δ_0 nur aus Dipolen, so ist wegen $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auch auf der Innenseite von F

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} + \mathfrak{w}^* \cdot \mathfrak{n} = 0 ,$$

d. h. die Flüssigkeit strömt auch in I glatt ab, muß also (da $\{\mathfrak{w}^*\}$ in I offenbar eine eindeutige Potentialströmung ist) dort ruhen. Ersetzen wir hierauf die Dipole durch Wirbel, so bilden diese ein Singularitätensystem, das wir offenbar auch direkt nach der folgenden Methode des Totwassers erhalten können: Denken wir uns in der gegebenen Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ den Körper durch ruhende Flüssigkeit (sog. Totwasser) ersetzt, so bildet das durch den tangentiellen Geschwindigkeitssprung auf F eindeutig bestimmte Wirbelsystem gerade das Singularitätensystem von vorhin. Wir bemerken noch, daß diese Methode des Totwassers augenscheinlich nicht an unsere besondere Voraussetzung, daß Δ_a abgeschlossen ist, gebunden ist.

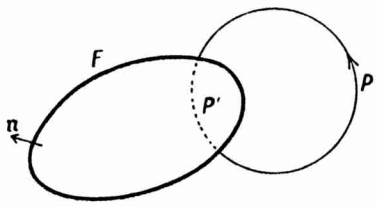


Fig. 21.

Der allgemeine Fall (Fig. 21). Indem wir hier die evtl. vorhandenen offenen Wirbel P durch innerhalb F verlaufende Schlußstücke P′ schließen, was stets möglich ist, entsteht ein abgeschlossenes Singularitätensystem $\Delta_a' = \Delta_a + \mathrm{P}'$, auf das wir die Überlegung des Spezialfalles anwenden können: $\{\mathfrak{w}^*\}$ sei die durch Δ_a' und $\{\mathfrak{U}\}$ induzierte Strömung in A mit $\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \mathfrak{w}^* \cdot \mathfrak{n} = 0$, Δ_0 ein zu $\{\text{grad } \varphi\}$ gehörendes Singularitätensystem auf F. Jedes Singularitätensystem $\Delta_0 + \mathrm{P}'$ ersetzt dann die starre Fläche F, ist also ein System Δ_i:

$$\Delta_i = \Delta_0 + \mathrm{P}' \text{ [12]}. \tag{48}$$

[11]) Jede Strömung, die außerhalb F die Ruhe ist, ergibt ein (notwendigerweise innerhalb F liegendes) Singularitätensystem Δ_i', das zu dem obigen addiert das allgemeinste derartige System liefert.

[12]) Auch hier gilt das in Fußnote [11]) Gesagte.

Δ_0 kann speziell aus Quellen allein oder aus Dipolen bzw. Wirbeln allein bestehen; nimmt man lauter Wirbel, so ergeben sie zusammen mit P' ebenfalls ein Wirbelsystem. Ein spezielles derartiges System liefert wieder die Methode des Totwassers. In der Auffassung von vorhin entsteht dieses dadurch, daß wir Δ_0 als Wirbel nehmen, die Schlußstücke P' von innen her auf die Fläche legen und die Wirbel dort passend verschieben, bis im Innern Ruhe eintritt.

Daß wir hier z. B. mit einer alleinigen Quellverteilung auf F nicht mehr durchkommen, hat seinen Grund darin, daß i. a. eine geschlossene Kurve auf F eine Zirkulation ergibt, d. h. daß die Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ um den Körper zirkuliert: Denken wir uns nämlich die Wirbellinien zu lauter kleinen Röhren von derselben konstanten Zirkulation, die $= 1$ angenommen werden darf, zusammengefaßt, und über die Fläche F eine im freien Zustande sich völlig auf einen Punkt zusammenziehende Gummischlinge hinweggeschoben, so wird längs ihr die Zirkulation jeweils gleich der Zahl der bereits geschnittenen Wirbelröhren (mit dem richtigen Vorzeichen gerechnet) sein. Das in Fig. 21 gezeichnete Schlußstück des Wirbelfadens entspricht völlig dem tragenden Faden der Prandtlschen Tragflügeltheorie [13]).

Man beachte, daß die hier durchgeführte Konstruktion rein kinematisch ist: So haben wir z. B. im Falle der Methode des Totwassers über die Größe des konstanten Druckes im Innern nichts vorausgesetzt und auch nirgends die Größe dieses Druckes bei unserer Konstruktion benutzt. Später werden wir in einem speziellen Falle (Zusatz zu Nr. **29**) die Größe dieses Druckes im Innern bestimmen.

Zweiter Abschnitt. Einführung des Begriffs der Haltekraft.

§ 5. Die Haltekräfte der Singularitäten.

19. Wir schicken zwei bekannte Vektorbeziehungen voraus. Wird $\{\mathfrak{w}\}$ als Geschwindigkeitsfeld aufgefaßt, so gilt für die „konvektive" Beschleunigung $(\mathfrak{w}\cdot\nabla)\mathfrak{w}$:

$$(\mathfrak{w}\cdot\nabla)\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}\times\mathfrak{w}\,. \tag{49}$$

Ferner folgt aus dem bekannten Gaußschen Satz für eine geschlossene Fläche

$$\int \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{o} = \int \operatorname{div}\mathfrak{w}\, d\tau$$

sofort die allgemeinere Beziehung

$$\int u\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} = \int u\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau + \int(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\, u\, d\tau\,. \tag{50}$$

$\{\mathfrak{v}\}$ sei eine stationäre Flüssigkeitsströmung in einem gewissen endlichen Gebiet G mit der Oberfläche O. Eine solche Strömung wird nun i. a. nicht möglich sein, ohne daß nicht innerhalb G Fremd- oder Haltekräfte an den einzelnen singulären Stellen (mit $\operatorname{div}\mathfrak{v} \neq 0$, $\operatorname{rot}\mathfrak{v} \neq 0$) wirksam sind. Wir bezeichnen diese Haltekräfte generell mit $\mathfrak{K}_h$, ihre (stets auf einen festen Punkt bezogenen) Momente mit $\mathfrak{M}_h$, also $\mathfrak{M}_h = \mathfrak{r}\times\mathfrak{K}_h$. Um diese Kräfte zu bestimmen, brauchen wir nur das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik

$$\left\{\begin{matrix}\text{Änderung der}\\ \text{Bewegungsgröße}\\ \text{in der Zeiteinheit}\end{matrix}\right\} = \text{Summe aller wirkenden Kräfte}$$

auf unseren Bereich G anzuwenden, und erhalten sofort

$$\begin{aligned}\int_G \mathfrak{K}_h d\tau &= \int_O (\mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + p\, d\mathfrak{o})\\ \int_G \mathfrak{M}_h d\tau &= \int_O \mathfrak{r}\times(\mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + p\, d\mathfrak{o})\,.\end{aligned} \tag{51}$$

[13]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, I. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1918, S. 14.

Gilt nun auf der Oberfläche O die Bernoullische Gleichung

$$p + \frac{v^2}{2} = C \tag{52}$$

(wobei die Konstante C für jeden einzelnen geschlossenen Teil der Oberfläche eine andere sein kann), so wird aus (51)

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{K}_h d\tau &= \int \left(\mathfrak{v}\mathfrak{v} \cdot do - \frac{\mathfrak{v}^2}{2} do \right) \\ \int \mathfrak{M}_h d\tau &= \int \mathfrak{r} \times \left(\mathfrak{v}\mathfrak{v} \cdot do - \frac{\mathfrak{v}^2}{2} do \right), \end{aligned} \tag{53}$$

woraus man mittels (49) und (50) sofort die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_G \mathfrak{K}_h d\tau &= \int_G (\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v})\, d\tau \\ \int_G \mathfrak{M}_h d\tau &= \int_G \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v})\, d\tau \end{aligned} \tag{54}$$

erhält, die aussagen, daß wir bei der Integration über das Gebiet G annehmen dürfen, daß pro Volumelement $d\tau$ die Haltekraft

$$\mathfrak{K}_h = \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \tag{55}$$

beträgt. Die tatsächliche Haltekraft wird sich von dieser i. a. um eine Zusatzkraft unterscheiden, die jedoch von solcher Art ist, das ihre Resultante bzw. ihr resultierendes Moment, genommen über G, verschwindet, eine Erscheinung, die ja bekanntlich immer eintritt, wenn man von einem Integralgesetz auf ein zugehöriges Differentialgesetz schließt.

Ist die Strömung wirbel- oder quellenfrei, so enthält die zugehörige Haltekraft $\mathfrak{K}_h$ die früher angegebenen (1) und (2) als Spezialfall in sich, von denen sie umgekehrt die sinngemäße Verallgemeinerung darstellt. — Schreibt man in diesen Fällen für $\mathfrak{v}$ das eine Mal $\mathfrak{E}$, das andere Mal $\mathfrak{H}$, so stellt $\mathfrak{K}_h$ die Kraftdichte (d. h. Kraft pro Volumen) dar, die in einem elektrostatischen bzw. einem von geschlossenen Strömen erzeugten magnetischen Felde mit den Feldstärken $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$ herrscht.

In dem Falle, daß nur Wirbel vorkommen, kann die Haltekraft $\mathfrak{K}_h = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$ verschwinden, so daß also der zugehörige Wirbel frei ist: Es folgt dann, daß notwendig $\operatorname{rot} \mathfrak{v} \parallel \mathfrak{v}$ ist, was bedeutet, daß an solchen Stellen die Wirbellinie in die Richtung der Stromlinie fällt; ein bekanntes Beispiel hierfür sind die von einem Prandtlschen Tragflügel abgehenden Wirbelfäden. — Bei ebenen Strömungen, wo, wie später gezeigt werden wird, die Haltekraft ebenfalls $\mathfrak{K}_h = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$ ist, kann der vorhin besprochene Fall offenbar nicht eintreten, da hier der Wirbelvektor stets auf der Strömungsebene senkrecht steht.

Da die Haltekraft $\mathfrak{K}_h$ an allen nicht singulären Stellen verschwindet, so dürfen wir auch die Integrationen in (54) rechts statt über G nur über das zu G gehörige Singularitätensystem Σ erstrecken. Da $\mathfrak{K}_h$ ferner linear in den Singularitäten $\operatorname{div} \mathfrak{v}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$, wie in der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist, so gibt jede Zerlegung des Singularitätengebietes bzw. jede lineare Zerlegung der Geschwindigkeit Anlaß zu einer entsprechenden Zerlegung von $\mathfrak{K}_h$. Es wird sich dann als zweckmäßig erweisen, wenn wir die folgende Verabredung treffen: Ist Σ irgendein Singularitätensystem einer Strömung $\{\mathfrak{v}\}$ und $\{\mathfrak{u}\}$ irgendein Geschwindigkeitsfeld (das in den Punkten von Σ definiert ist), so sei

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{u} \\ \Sigma \end{matrix} \right\} = \int_\Sigma (\mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{u}) \text{ bzw. } = \int_\Sigma \mathfrak{r} \times (\mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{u}), \tag{56}$$

wo wir die rechts stehenden Ausdrücke deuten können als die Haltekraft bzw. das Haltemoment des Singularitätensystems Σ in der Strömung $\{\mathfrak{u}\}$. Ist Σ flächenhaft, so denken wir uns Σ stets etwas räumlich verschmiert und die Integrationen in (56) als Grenzfall der entsprechenden räumlichen Integrationen aufgefaßt.

20. Sei nun speziell das Singularitätensystem Σ von G abgeschlossen, und $\{\mathfrak{v}\}$ die von ihm im ganzen Raume induzierte Strömung. Dann kann auf der rechten Seite von (53) die Oberfläche O speziell als eine ins Unendliche sich ausweitende Kugel K_∞ angenommen werden: Beachtet man dann, daß $\mathfrak{v}$ dort von der Größenordnung $\frac{1}{r^2}$ ist, so sieht man, daß im Grenzfalle die rechten Seiten von (53) und daher auch die linken verschwinden; d. h. aber in der Bezeichnungsweise von (56), daß

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} = 0 \text{ [14]} \quad (\Sigma \text{ abgeschlossen; } \{\mathfrak{v}\} \text{ von } \Sigma \text{ erzeugt}) \tag{57}$$

ist. (Analog üben z. B. elektrische Teilchen insgesamt weder eine Kraft noch ein Moment auf sich aus.) Spalten wir Σ und entsprechend auch $\mathfrak{v}$ in zwei Teile

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2, \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

auf, so können wir für (57) auch schreiben:

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} = 0. \tag{57a}$$

Ist nun Σ_1 und daher auch Σ_2 wieder abgeschlossen, so sind auf jedes dieser Systeme wieder die Beziehungen anwendbar, d. h. aber wir dürfen in (57a) die von dem betreffenden Singularitätensystem Σ_1 bzw. Σ_2 induzierte Eigengeschwindigkeit unterdrücken, was wir durch einen rechtsseitigen oberen Strich andeuten wollen:

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\}' = 0 \tag{58}$$

oder explizit

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_2\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_1\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} = 0\,. \tag{58a}$$

§ 6. Begründung der Lagallyschen Formeln.

21. Für später merken wir die beiden Beziehungen an:

$$\int_I \operatorname{div} \mathfrak{w}\, d\tau = 0 \qquad \text{(für das Innere } I \text{ einer starren Fläche } F) \tag{59}$$

$$\int \operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\tau = 0 \qquad \text{(für eine geschlossene Wirbelröhre).} \tag{60}$$

(59) drückt aus, daß die Gesamtergiebigkeit innerhalb F verschwinden muß. (60) beweist man so: Ist $d\mathfrak{f}$ ein senkrechter Querschnitt der (dünnen) Wirbelröhre, $d\Gamma$ ihre Stärke, und $d\tau = d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s}$ das zu $d\mathfrak{s}$ gehörige Volumelement, so ist wegen $d\mathfrak{f} \parallel d\mathfrak{s}$:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\tau = \operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s} = d\mathfrak{s} \operatorname{rot} \mathfrak{w} \cdot d\mathfrak{f} = d\mathfrak{s}\, d\Gamma\,, \tag{61}$$

eine Beziehung, aus der durch Integration über die Röhre sofort (60) folgt.

$\{\mathfrak{w}\}$ sei eine stationäre Strömung um einen Körper, die beliebige Singularitäten (Quellen und Wirbel) besitzen möge, die alle im Endlichen liegen, und die im Unendlichen in eine Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ übergeht; an der Oberfläche F des Körpers gelte die Bernoullische Gleichung (52). F teile den ganzen Raum R in ein Innen- und Außengebiet I bzw. A:

$$R = I + A\,.$$

Da $\{\mathfrak{w}\}$ im Unendlichen eine Potentialströmung ist, so ist dort die Bernoullische Gleichung von selbst erfüllt. Denken wir uns daher F durch ein Singularitätensystem ersetzt, so gilt sowohl an der Begrenzung von A (zu der außer F auch die unendlich ferne Kugel K_∞ zu zählen ist) wie I die Bernoullische Gleichung, d. h. man darf für diese Gebiete als Haltekraft der Singularitäten die durch (55) gegebene ansehen.

---

[14]) Vgl. hierzu Betz, a. a. O. [3]), S. 456—457.

Gesucht sind die Kraft $\mathfrak{K}_F$ bzw. das Moment $\mathfrak{M}_F$, welches die Fläche F auf die Flüssigkeit, bzw. umgekehrt diese auf die Fläche ausübt. Wegen der Bernoullischen Gleichung hat man für $\mathfrak{K}_F$ und $\mathfrak{M}_F$ die Ausdrücke

$$(62)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F = \int\limits_F \left(-\frac{\mathfrak{w}^2}{2}\right) d\mathfrak{o} \\ \mathfrak{M}_F = \int\limits_F \mathfrak{r} \times \left(-\frac{\mathfrak{w}^2}{2}\right) d\mathfrak{o}\,, \end{cases}$$

und es kann sich im folgenden nur darum handeln, diese Ausdrücke so umzuformen, daß der Einfluß der einzelnen Singularitäten (zu denen auch die Fläche F selbst bzw. das sie ersetzende Singularitätensystem Δ_i zu zählen ist) möglichst in Evidenz gesetzt ist.

Indem wir nun die Kraft $\mathfrak{K}_F$ bzw. das Moment $\mathfrak{M}_F$, das die Fläche F auf die Flüssigkeit ausübt, mit zu den Fremd- oder Haltekräften zählen, ergibt das Newtonsche Grundgesetz, angewandt auf das Flüssigkeitsgebiet A, sofort die den Gleichungen (53) entsprechenden Beziehungen

$$(63)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F + \int\limits_A \mathfrak{K}_h d\tau = \int\limits_{K_\infty} \left(\mathfrak{w}\mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{o} - \frac{\mathfrak{w}^2}{2} d\mathfrak{o}\right) = \mathfrak{K}_\infty \\ \mathfrak{M}_F + \int\limits_A \mathfrak{M}_h d\tau = \int\limits_{K_\infty} \mathfrak{r} \times \left(\mathfrak{w}\mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{o} - \frac{\mathfrak{w}^2}{2} d\mathfrak{o}\right) = \mathfrak{M}_\infty \end{cases}$$

mit $\mathfrak{K}_h = \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$, die wir unter Benutzung des Symbols (56) in die eine Gleichung zusammenfassen können:

$$(63\,a)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_a\end{matrix}\right\} = \mathfrak{K}_\infty \text{ bzw. } \mathfrak{M}_\infty\,.$$

Denken wir uns F durch ein Singularitätensystem Δ_i (das wir der folgenden Integrationen wegen stets etwas räumlich verschmiert annehmen) ersetzt, so liefert derselbe Gedankengang wie vorhin die Beziehung

$$(64)\qquad \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_a\end{matrix}\right\} = \mathfrak{K}_\infty \text{ bzw. } \mathfrak{M}_\infty$$

oder, wenn wir für die linke Seite $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\}$ schreiben und beachten, daß wir hierin nach (57) die Eigengeschwindigkeit von $\Delta = \Delta_i + \Delta_a$ vernachlässigen, d. h. $\mathfrak{w}$ durch $\mathfrak{U}$ ersetzen dürfen:

$$(65)\qquad \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = \mathfrak{K}_\infty \text{ bzw. } \mathfrak{M}_\infty\,.$$

Aus (63) und (64) folgt

$$(66)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$$

und aus (63) und (65)

$$(67)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F = -\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta\end{matrix}\right\}$$

oder explizit (wobei in (67) alle Vorzeichen gewechselt werden [15])):

$$(68)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F = \int\limits_I (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) \\ \mathfrak{M}_F = \int\limits_I \mathfrak{r} \times (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) \end{cases}$$

$$(69)\qquad \begin{cases} -\mathfrak{K}_F = \int\limits_A (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) - \int\limits_R \mathfrak{U}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{U}) \\ -\mathfrak{M}_F = \int\limits_A \mathfrak{r} \times (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) - \int\limits_R \mathfrak{r} \times (\mathfrak{U}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{U})\,. \end{cases}$$

[15]) Man beachte, daß z. B. der Druck der Flüssigkeit auf die Wandung im Falle des inneren Problems durch unser $\mathfrak{K}_F$, im Falle des äußeren durch $-\mathfrak{K}_F$ gegeben ist!

Gemäß (60) darf man in dem letzten Integral rechts für $-\mathfrak{R}_F$ das Glied mit rot $\mathfrak{w}$ unterdrücken und braucht dann weiter wegen (59) das verbleibende Integral nur noch über den Außenraum A zu erstrecken. (68) sind die Lagallyschen Formeln für das Innere (und zwar für das hier vorliegende Singularitätensystem Δ_i), (69) die für das Äußere.

Man sieht: Um ein vollständiges Bild von dem System der Singularitäten zu bekommen, das einen Körper ersetzt, hat man sich an diesen Singularitäten die entsprechenden Haltekräfte angebracht zu denken.

Der hier gebrachte Gedankengang läßt sich statt auf geschlossene natürlich auch auf offene (starre) Oberflächen anwenden. Als Beispiel betrachten wir ein Stück der Oberfläche des Halbkörpers, welcher der Strömung in Fig. 1a entspricht. Es sei bereits so lang gewählt, daß an seinem Ende die Abflußgeschwindigkeit zu $\mathfrak{U}$ und daher der Druck zu 0 angenommen werden darf. Ist dann $\mathfrak{R}_F$ der Druck der Schale auf die Flüssigkeit, so ergibt das Newtonsche Grundgesetz angewandt auf den Bereich, der von der festen Schale und deren Grundfläche gebildet wird, sofort

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} + \mathfrak{R}_F = e\mathfrak{U}\,.$$

Da nun im Gebiet Δ der Quellen deren Eigengeschwindigkeiten vernachlässigbar sind, hat man

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = e\mathfrak{U}\,,$$

mithin also

$$\mathfrak{R}_F = 0\,.$$

Für die Außenströmung bedeutet dies dann: ein Halbkörper erleidet in einer Parallelströmung keinen (Druck-)Widerstand [16]).

22. *Diskrete Singularitäten.* Wir betrachten den Fall, daß nur isolierte kleine Quellgebiete Δ_q der Ergiebigkeit e bzw. isolierte dünne (geschlossene) Wirbelröhren Δ_w der Stärke Γ auftreten und sich auf punktförmige Quellen bzw. linienförmige Wirbel (Wirbelfäden) derselben Ergiebigkeit e bzw. derselben Stärke Γ zusammenziehen. Nach (57) dürfen wir dann bei der Berechnung der zugehörigen Haltekräfte bzw. -momente die Eigengeschwindigkeit des betreffenden Singularitätengebietes Δ_q oder Δ_w unterdrücken; die jeweils verbleibende Geschwindigkeit $\mathfrak{w}^*$ ist dann innerhalb eines solchen Quellgebietes Δ_q bzw. einer solchen Wirbelröhre Δ_w stets endlich und stetig, so daß man unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen darf. Man erhält dann für die Quelle

$$\text{(70a)}\qquad \mathfrak{R}_h = \int\limits_{\Delta_q} \mathfrak{w}\,\operatorname{div}\,\mathfrak{w}\,d\tau = \int\limits_{\Delta_q} \mathfrak{w}^*\,\operatorname{div}\,\mathfrak{w}\,d\tau \longrightarrow e\mathfrak{w}^*$$

und analog

$$\text{(70b)}\qquad \mathfrak{M}_h = \mathfrak{r} \times e\mathfrak{w}^*\,,$$

und für den Wirbelfaden mit dem Linienelement $d\mathfrak{s}$ unter Beachtung von (61)

$$\text{(71a)}\qquad \mathfrak{R}_h = \int\limits_{\Delta_w} \operatorname{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}\,d\tau = \int \operatorname{rot}\,\mathfrak{w}\,d\tau \times \mathfrak{w}^* \longrightarrow \Gamma \int\limits_{\Delta_w} d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*$$

und analog

$$\text{(71b)}\qquad \mathfrak{M}_h = \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\,.$$

Aus der Haltekraft für eine Quelle folgert man sofort, daß für einen Dipol $\mathfrak{d} = m\mathfrak{t}$

$$\text{(72a)}\qquad \mathfrak{R}_h = (\mathfrak{d}\cdot\Delta)\mathfrak{w}^* = m(\mathfrak{t}\cdot\Delta)\mathfrak{w}^*$$

$$\text{(72b)}\qquad \mathfrak{M}_h = \mathfrak{d} \times \mathfrak{w}^* = m\mathfrak{t} \times \mathfrak{w}^*$$

[16]) Vgl. Prandtl-Tietjens, a. a. O. [2]), S. 16.

ist, wo $\mathfrak{w}^*$ wieder die Geschwindigkeit ohne den Dipol $\mathfrak{d}$ an dessen Mittelpunkt bedeutet und das Moment auf diesen Mittelpunkt bezogen ist; man sieht: hier existiert keine Einzelkraft. — Befindet sich z. B. ein einziger geschlossener Wirbelfaden in einer Parallelströmung, so erhält man für die Haltekraft bzw. das Haltemoment

$$\mathfrak{K}_h = \Gamma \int d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} = 0 \quad \text{wegen} \quad \int d\mathfrak{s} = 0 \tag{73a}$$

$$\mathfrak{M}_h = \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U}) . \tag{73b}$$

Multipliziert man den Integranden von $\mathfrak{M}_h$ aus, und verwandelt die entstehenden Ausdrücke (nach dem Stokesschen Satz) in Flächenintegrale, so hat man

$$\mathfrak{M}_h = \Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U} , \tag{74}$$

wo $\mathfrak{F}$ die im Sinne einer Rechtsschraube orientierte Fläche des Wirbelfadens ist. Noch rascher erhält man das letzte Resultat, wenn man den Wirbelfaden als einen Dipol $\int \Gamma d\mathfrak{o} = \Gamma \mathfrak{F}$ auffaßt, was erlaubt ist, und die frühere Formel (72b) anwendet. — Es sei bemerkt, daß die entsprechenden Formeln von Lagally die einfachen Resultate (73) nicht ergeben, da bei Lagally $\mathfrak{w}^*$ nicht die Geschwindigkeit ohne den Wirbelfaden bedeutet; daß man die Eigengeschwindigkeit eines Wirbelfadens unterdrücken darf, hat Lagally nicht bemerkt [17]).

Aus der Haltekraft für eine Quelle ergibt sich speziell das Coulombsche Gesetz: Eine in Q_1 befindliche Quelle e_1 zieht eine in Q_2 befindliche Quelle e_2 mit der Kraft $\frac{e_1 e_2}{4\pi r^2}\,\mathfrak{e}$ an, wo $\mathfrak{e}$ der Einheitsvektor von Q_2 nach Q_1 ist ($\mathfrak{e} = \overrightarrow{Q_2 Q_1}/r$).

Aus den Formeln (73a, b) für einen Wirbelfaden folgt noch: Ein einzelner (z. B. kreisförmiger) Wirbelfaden kann in sonst ruhender Flüssigkeit sich nicht, ohne seine Gestalt zu verändern, mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen. Sonst hätte man nämlich von dem Wirbelfaden aus gesehen eine streng parallele und stationäre Anströmung $\{\mathfrak{U}\}$, für die nach (73a) wohl keine Kraft, jedoch nach (73b) bzw. (74) das Moment $\Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U}$ nötig wäre.

Mit Hilfe der Formel (74) läßt sich das zweite Glied in dem letzten Integral rechts für $-\mathfrak{M}_F$ in (69) derart umformen, daß $\mathfrak{U}$ aus dem Integral herausgezogen werden kann. Gemäß (74) beträgt nämlich der Beitrag einer dünnen Wirbelröhre der Stärke $d\Gamma$

$$d\Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U} ,$$

also wegen $\mathfrak{F} = \frac{1}{2}(\mathfrak{r} \times d\mathfrak{s})$ (Fig. 22) und $d\Gamma\, d\mathfrak{s} = \operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\tau$

$$\tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\tau) \times \mathfrak{U} ,$$

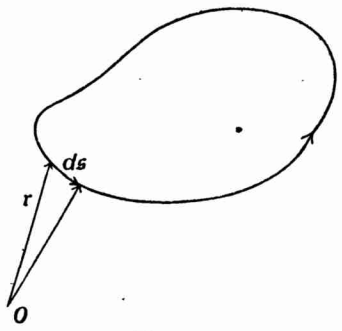


Fig. 22.

d. h. es gilt für eine und daher auch für beliebig viele Wirbelröhren

$$\int \mathfrak{r} \times (\operatorname{rot} \mathfrak{w} \times \mathfrak{U}) = \tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U} . \tag{75}$$

Ersetzt man in den erhaltenen Ausdrücken für die Haltekraft bzw. das Haltemoment einer diskreten Singularität $\mathfrak{w}^*$ durch $\mathfrak{U}$, so hat man die entsprechenden Ausdrücke für die Haltekraft bzw. das Haltemoment diskreter Singularitäten in einer Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$; der Beitrag einer Quelle bzw. eines Wirbelfadens beträgt danach

$$e\mathfrak{U} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{r} \times e\mathfrak{U} = e\mathfrak{r} \times \mathfrak{U}$$

$$\Gamma \int d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U}) = \Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U} .$$

Damit erhalten wir für den Fall, daß nur punktförmige Quellen und linienförmige Wirbel vorkommen, wobei wir die Fläche selbst ebenfalls als Grenzfall solcher diskreter Singu-

[17]) Vgl. Lagally a. a. O. [1]), S. 421 u. S. 219—220.

laritäten auffassen, die (68) und (69) entsprechenden Formeln

$$(76)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F = \sum\limits_I \{e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} \\ \mathfrak{M}_F = \sum\limits_I \{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} \end{cases}$$

$$(77)\qquad \begin{aligned} -\mathfrak{K}_F &= \sum_A \{e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} \qquad - \sum_R \{e\mathfrak{U} + \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U})\} \\ -\mathfrak{M}_F &= \sum_A \{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} - \sum_R \{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{U} + \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U})\}; \end{aligned}$$

kommen auch noch Dipole vor, so liefern diese gemäß (72) z. B. zu $-\mathfrak{K}_F$ bzw. $-\mathfrak{M}_F$ die Beiträge

$$(78a)\qquad \sum_A (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* \qquad - \sum_R (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{U}$$

bzw.

$$(78b)\qquad \sum_A \{\mathfrak{r} \times (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* + (\mathfrak{d} \times \mathfrak{w}^*)\} - \sum_R \{\mathfrak{r} \times (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\,\mathfrak{U} + (\mathfrak{d} \times \mathfrak{U})\},$$

wobei $(\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{U} = 0$ ist.

23. Ersetzen wir den diskreten Wirbelfaden in bekannter Weise durch eine Dipolfläche F, so gelangen wir zu Ausdrücken für $\mathfrak{K}_h$ und $\mathfrak{M}_h$, die mit den früher angegebenen (71) ihrem Werte nach übereinstimmen müssen. Wir denken uns auf der eingespannten Dipolfläche eine feste Einteilung in Flächenelemente $d\sigma$ gegeben, und berechnen die Haltekraft bzw. das Haltemoment pro Element $d\mathfrak{o} = d\sigma\,\mathfrak{n}$. Da die Dipole auf sich selbst keine Kraft und auch kein Moment ausüben, so dürfen wir deren Eigengeschwindigkeit vernachlässigen. Ist also $\mathfrak{w}^*$ die Geschwindigkeit ohne die Dipole, d. h. ohne den Wirbelfaden, so erfordern diese pro Element $d\mathfrak{o}$ bzw. die Haltekraft

$$\Gamma(d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^*$$

und das Haltemoment (hier bezogen auf den Koordinatenursprung O)

$$\mathfrak{r} \times \Gamma(d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\,\mathfrak{w}^* + \Gamma d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}^*.$$

I. a. ist dies jedoch noch nicht der volle Beitrag von $d\mathfrak{o}$. Fassen wir nämlich in gewohnter Weise die Dipolbelegung als Grenzfall einer doppelten Quellbelegung auf zwei zu F parallelen und im kleinen Abstand a verlaufenden Flächen auf, so werden sich für die innerhalb des Volumelementes $d\tau = a\,d\sigma$ befindlichen (räumlich verteilten) Quell- und Wirbelmassen $\operatorname{div}\mathfrak{w} = \operatorname{div}\mathfrak{w}^*$, $\operatorname{rot}\mathfrak{w} = \operatorname{rot}\mathfrak{w}^*$, obgleich a und damit $d\tau \to 0$ geht, infolge der dort im Grenzfall $a \to 0$ herrschenden unendlich großen Geschwindigkeit i. a. endliche Haltekräfte ergeben. Beachten wir, daß für einen innerhalb $d\tau$ befindlichen Beobachter beim Grenzübergang $a \to 0$ die beiden begrenzenden Flächenelemente $d\sigma$ als zwei parallele unendlich lange Ebenen erscheinen, so können wir für die dort herrschende Geschwindigkeit ansetzen:

$$\mathfrak{w} = -\frac{\Gamma\mathfrak{n}}{a} + \mathfrak{w}',$$

wo $\mathfrak{w}'$ von den übrigen Singularitäten herrührt und stets endlich ist. Hieraus ergibt sich für die zugehörige Haltekraft

$$\mathfrak{K}_h = (\mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{w}^* + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times \mathfrak{w})\,d\tau$$

mit $d\tau = a\,d\sigma$ für $a \to 0$ der zusätzliche Beitrag

$$-\Gamma(\operatorname{div}\mathfrak{w}^*\,d\mathfrak{o} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times d\mathfrak{o}).$$

Integriert man über die Fläche F, so erhält man also als Haltekraft bzw. Haltemoment der Dipolbelegung

$$(79)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_h = \Gamma \int (d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* \qquad - \Gamma \int \{\operatorname{div}\mathfrak{w}^* d\mathfrak{o} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times d\mathfrak{o}\} \\ \mathfrak{M}_h = \Gamma \int \{\mathfrak{r} \times (d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* + (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}^*)\} - \Gamma \int \mathfrak{r} \times \{\operatorname{div}\mathfrak{w}^* d\mathfrak{o} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times d\mathfrak{o}\}, \end{cases}$$

und diese Ausdrücke müssen bzw. den beiden folgenden gleich sein:

$$(80)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_h = \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*) \\ \mathfrak{M}_h = \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*) . \end{cases}$$

Durch Wegheben von Γ ergeben sich hieraus zwei Integralumwandlungen, die sich natürlich auch direkt mit Hilfe des Stokesschen Satzes beweisen lassen. Umgekehrt führt die Kenntnis dieser Integralumwandlungen von (79) sofort zu (80).

24. *Die Größen $\mathfrak{K}_\infty$, $\mathfrak{M}_\infty$ auf eine zweite Art bestimmt und gedeutet.* Hierzu gelangen wir auf Grund der Bemerkung, daß $\mathfrak{v} = \mathfrak{w} - \mathfrak{U}$ in $\mathfrak{K}_\infty$ und $\mathfrak{M}_\infty$ linear eingeht (vgl. **20**). D. h. aber: Ist $\{\widetilde{\mathfrak{w}}\}$ eine andere Strömung mit den entsprechenden Größen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\infty$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_\infty$ und gilt im Unendlichen

$$\widetilde{\mathfrak{w}} - \mathfrak{w} \sim \frac{1}{r^4} ,$$

bzw. für die dort existierenden Potentiale

$$\widetilde{\varphi} - \varphi \sim \frac{1}{r^3} ,$$

so ist

$$\widetilde{\mathfrak{K}}_\infty = \mathfrak{K}_\infty , \qquad \widetilde{\mathfrak{M}}_\infty = \mathfrak{M}_\infty .$$

Wir fassen nun das gesamte Singularitätensystem Δ als Grenzfall endlich vieler diskreter Quellen und Wirbel auf, und ersetzen gleichzeitig jeden Wirbelfaden durch eine Dipolfläche. Dann dürfen wir nach dem soeben erhaltenen Resultat und gemäß Nr. **4** die gesamten Quellen durch eine Quelle, die sog. Schwerpunktsquelle von der Ergiebigkeit Σe in $\Sigma e\mathfrak{r}/\Sigma e$, und die durch Dipolflächen ersetzten Wirbelfäden durch einen Dipol $\Sigma\Gamma\mathfrak{F}$ ersetzen. Es ist also nach (70) und (71)

$$\mathfrak{K}_\infty = \Sigma e \cdot \mathfrak{U} = \sum_R e\mathfrak{U} ,$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \frac{\Sigma e\mathfrak{r}}{\Sigma e} \times \Sigma e \cdot \mathfrak{U} + \Sigma\Gamma\mathfrak{F} \times \mathfrak{U} = \sum_R R\{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{U}) + (\Gamma\mathfrak{F} \times \mathfrak{U})\} .$$

Ersetzt man hierin $\Gamma\mathfrak{F} \times \mathfrak{U}$ vermöge (73b) durch $\Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U})$, so gelangt man durch Verschmierung sofort wieder zu den früher erhaltenen Formeln.

§ 7. Weitere Formeln.

25. Im folgenden bringen wir weitere Ausdrücke für $\mathfrak{K}_F$ und $\mathfrak{M}_F$, die gegenüber den bisherigen den Vorzug haben, daß in ihnen keine Integrale über den Innenraum I auftreten und vernachlässigbare Eigengeschwindigkeiten gestrichen sind. Wir setzen $\mathfrak{w} = \mathfrak{U} + \mathfrak{v}$, wo also $\mathfrak{v}$ von dem gesamten Singularitätensystem $\Delta = \Delta_i + \Delta_a$ herrührt. Indem wir in Δ_i und Δ_a die Wirbelfäden P' und P abspalten, für sich zusammenfassen und die entsprechende Zerlegung für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ vornehmen, erhalten wir

$$(81)\qquad \begin{cases} \Delta = \Delta_0 + (\mathsf{P}' + \mathsf{P}) + \tilde{\Delta}_a \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \quad \mathfrak{q} \quad + \tilde{\mathfrak{v}}_a , \end{cases}$$

und im Spezialfall, daß Δ_a abgeschlossen ist,

$$(81')\qquad \begin{cases} \Delta = \Delta_0 + \Delta_a \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}_a . \end{cases}$$

Indem wir weiter von den inneren Formeln für $\mathfrak{K}_F$ und $\mathfrak{M}_F$ ausgehen:

$$(82)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \Delta_i \end{matrix} \right\},$$

gelangen wir durch Aufspaltung des Singularitätengebietes Δ sowie der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ und Unterdrückung der Eigengeschwindigkeit jedes abgeschlossenen Teilsystems

gemäß (57) zu übersichtlichen Formeln, die besonders handlich werden, wenn wir Δ_i über die Fläche F ausbreiten. Durch Übergang von Δ_i zu dem komplementären Δ_a vermöge (57a) erhält man zu jeder inneren Formel eine entsprechende äußere. — Abspaltung der Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ ergibt

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}; \tag{83}$$

hieraus folgt durch Übergang zu Δ_a vermöge (57a)

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Delta_a\end{matrix}\right\}. \tag{84}$$

Ersetzt man in (84) $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{w} - \mathfrak{U}$, so kommt man auf die früheren Lagallyschen Formeln für das Äußere zurück. Die Zerfällung $\Delta_i = \Delta_0 + \mathsf{P}'$ bzw. $\Delta_a = \tilde{\Delta}_a + \mathsf{P}$ in den von $\mathfrak{U}$ freien Gliedern in (83) und (84) liefert, wenn man die Eigengeschwindigkeit von Δ_0 und $\tilde{\Delta}_a$ gleich vernachlässigt,

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Delta_0\end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \mathsf{P}'\end{matrix}\right\} \tag{85}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \tilde{\Delta}_a\end{matrix}\right\}' - \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \mathsf{P}\end{matrix}\right\}. \tag{86}$$

26. *Umformung von* $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$. Für $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$ d. h. die Haltekraft bzw. das Haltemoment in der Strömung $\{\mathfrak{U}\}$ können wir z. B. die folgenden Ausdrücke angeben: Wir denken uns Δ_i auf F ausgebreitet und aus Quellen und Wirbeln bestehend. Erinnern wir uns, daß diese Quellen und Wirbel gemäß (31) bzw. mit den Dichten $d\mathfrak{o} \cdot [\mathfrak{w}]^+_-$ und $d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_-$ verteilt sind, so haben wir für die Kraft

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \int_F \mathfrak{U}(d\mathfrak{o} \cdot [\mathfrak{w}]^+_-) + (d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_-) \times \mathfrak{U} \tag{87}$$

und speziell für das zum Totwasser gehörige Wirbelsystem

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \int_F \{(d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U}\}, \tag{88}$$

und analoge Ausdrücke für das Moment. — Verwenden wir die soeben erhaltene Formel, so gelangen wir von (85) und (86) zu den expliziten Ausdrücken für $\mathfrak{R}_F$

$$\mathfrak{R}_F = \int_F (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U} + \int_{\Delta_0} \{(\mathfrak{q} + \tilde{\mathfrak{v}}_a) \operatorname{div} \mathfrak{w} + \operatorname{rot} \mathfrak{w} \times (\mathfrak{q} + \tilde{\mathfrak{v}}_a)\} + \int_{\mathsf{P}'} (\operatorname{rot} \mathfrak{w} \times \mathfrak{v}) \tag{89}$$

$$\mathfrak{R}_F = \int_F (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U} - \int_{\tilde{\Delta}_a} \{(\mathfrak{q} + \mathfrak{v}_0) \operatorname{div} \mathfrak{w} + \operatorname{rot} \mathfrak{w} \times (\mathfrak{q} + \mathfrak{v}_0)\} - \int_{\mathsf{P}} (\operatorname{rot} \mathfrak{w} \times \mathfrak{v}) \tag{90}$$

und analogen für $\mathfrak{M}_F$, in denen der Einfluß der einzelnen Singularitäten in Evidenz gesetzt ist (man beachte, daß für P' und P gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0).$$

In dem Integral (88) können wir $\mathfrak{U}$ heraussetzen. Zu dem verbleibenden Teil liefern dann nach (60) nur die Wirbel P' einen Beitrag, deren Existenz eine Zirkulation um den Körper nach sich zieht, der also füglich als (räumlicher) Zirkulationsvektor $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden kann; dann lautet der betreffende Beitrag zur Haltekraft

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \mathfrak{z} \times \mathfrak{U} \tag{91}$$

und stellt, wie man sieht, die Verallgemeinerung der Kuttaschen Kraft dar.

Wir zerfällen $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$ gemäß der Zerlegung

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \mathsf{P}'\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_0\end{matrix}\right\}. \tag{92}$$

Im Falle der Kraft ergibt dann der erste Summand rechts die obige Kuttasche Kraft (91), die wir, falls P′ auf F gelegt wird, offenbar auch in die Form

$$\int (d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{q}]^+_-) \times \mathfrak{U} \tag{93}$$

setzen können; der zweite Summand ist $= 0$, wie man z. B. erkennt, wenn man Δ_0 aus lauter Dipolen oder lauter Wirbeln aufbaut. Im Falle des Momentes ergibt der zweite Summand, wenn man Δ_0 aus Quellen und Dipolen mit den Dichten $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)$, $-(\varphi - \varphi')$ gemäß Nr. **17** aufbaut

$$\left[\int \mathfrak{r}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right\} d\sigma + \int -(\varphi - \varphi')\, d\mathfrak{o}\right] \times \mathfrak{U} \tag{94}$$

mit $\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \mathfrak{U}\mathfrak{n} = 0$, woraus hervorgeht, daß man die eckige Klammer nur bis auf Vielfache des Vektors $\mathfrak{U}$ zu berechnen braucht. Nun ist nach (50)

$$\int \mathfrak{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -\int \mathfrak{r}\mathfrak{U} \cdot d\mathfrak{o} = -\int_I (\mathfrak{U} \cdot \nabla)\, \mathfrak{r}\, d\tau = \int_I \mathfrak{U}\, d\tau = \mathfrak{U} \int_I d\tau$$

$$\int \mathfrak{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma = \int \mathfrak{r}\, \mathrm{grad}\, \varphi' \cdot d\mathfrak{o} = \int \mathrm{grad}\, \varphi'\, d\tau = \int \varphi'\, d\mathfrak{o}\,,$$

mithin

$$\begin{Bmatrix} \mathfrak{U} \\ \Delta_0 \end{Bmatrix} = \mathfrak{U} \times \int_F \varphi\, d\mathfrak{o}\,. \tag{95}$$

27. In ähnlicher Weise wie $\begin{Bmatrix} \mathfrak{U} \\ \Delta_i \end{Bmatrix}$ könnten wir auch die beiden anderen Summanden in (85) in Integrale auf F verwandeln. Verwenden wir für Δ_i nur Quellen und Wirbel und legen sie auf F, so können wir auch alle drei Summanden zusammen in ein Flächenintegral verwandeln. Für die Kraft ergibt sich dann gemäß (31) und (32)

$$\mathfrak{R}_F = \int \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} d\mathfrak{o} \cdot [\mathfrak{w}]^+_- + (d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_-) \times \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} \tag{96}$$

und speziell bei der Totwasserströmung

$$\mathfrak{R}_F = \int (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \frac{\mathfrak{w}}{2}\,. \tag{97}$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für das Moment, aus denen rückwärts durch Aufspalten der Singularitäten und der Geschwindigkeit und Ausnutzung der Beziehungen (57), (58) Formeln vom Typ (93) erhalten werden können.

28. Was die rechnerische Bestätigung der erhaltenen Formeln anbetrifft, so sei kurz folgendes bemerkt. Die sich aus (84) und (88) ergebende Gestalt der Lagallyschen Formeln für das Äußere erhält man auch direkt dadurch, daß man in den Formeln (52) $\mathfrak{w}$ durch $\mathfrak{U} + \mathfrak{v}$ ersetzt, die Integrale in zwei Teile aufspaltet, einen in dem $\mathfrak{U}$ und einen anderen in dem nur $\mathfrak{v}$ als Geschwindigkeit auftritt, und den letzteren Teil direkt nach der unter Nr. **19** gebrachten Methode umwandelt (wobei die unendlich ferne Kugel K_∞ keinen Beitrag liefert!). — Die Äquivalenz von (87) und (88) ergibt sich so: Denkt man sich die Quellen und Wirbel auf einen schmalen Zwischenraum Z verschmiert, so daß $I = Z + S$ ist, und berechnet die Haltekräfte durch Integration über Z, so ergibt sich im Grenzfall (87); dieselbe Rechnung auf S angewandt liefert eine Identität: $0 =$ etwas, die zu (87) addiert, (88) ergibt; ähnliches gilt für die Äquivalenz von (96) und (97), wobei hier noch eine kleine Zwischenumformung nötig ist.

Es sei noch bemerkt, daß die gemachte Einschränkung, daß alle Wirbelfäden im Endlichen liegen, keineswegs notwendig ist. Besteht z. B. das Wirbelsystem aus den von

einem Prandtlschen Tragflügel abgehenden Wirbelfäden, für die, da sie „frei" sind, notwendig rot $\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} = 0$, d. h. rot $\mathfrak{w} \parallel \mathfrak{w}$ ist, so gilt also

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \mathsf{P} \end{matrix} \right\} = 0 .$$

Die Formeln für das Innere gelten in der gleichen Weise auch hier noch. Beim Übergang zum Außenraum tritt an Stelle der früheren Gleichung

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \Delta_i \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \Delta_a \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \Delta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{U} \\ \Delta \end{matrix} \right\} (= \mathfrak{K}_\infty, \mathfrak{M}_\infty)$$

die neue

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \Delta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \mathsf{P}' \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{q} + \mathfrak{U} \\ \Delta_0 + \widetilde{\Delta}_a \end{matrix} \right\} .$$

§ 8. Der Spezialfall: Körper in Parallelströmung; Kirchhoffs Satz.

29. Hier ist $\Delta_a = 0$, $\Delta_i = \Delta_0$, also nach früherem

$$\mathfrak{K}_F = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{U} \\ \Delta_0 \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\mathfrak{M}_F = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{U} \\ \Delta_0 \end{matrix} \right\} = \mathfrak{U} \times \int \varphi \, d\mathfrak{v}$$

mit $\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n} = 0$. φ und damit auch $\int \varphi \, d\mathfrak{v}$ hängen von $\mathfrak{U}$ offensichtlich in linearer Weise ab. Ist also in bezug auf ein Dreibein

$$\mathfrak{U} = U_1 \mathfrak{e}_1 + U_2 \mathfrak{e}_2 + U_3 \mathfrak{e}_3$$

und entsprechend

$$\varphi = U_1 \varphi_1 + U_2 \varphi_2 + U_3 \varphi_3$$

wo φ_k zu $\mathfrak{e}_k$ in derselben Beziehung wie φ zu $\mathfrak{U}$ steht, so daß also

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -(\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{n}) = -\alpha_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\alpha_2, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = -\alpha_3$$

ist, so gilt

$$\int \varphi \, d\mathfrak{v} = U_1 \int \varphi_1 \, d\mathfrak{v} + U_2 \int \varphi_2 \, d\mathfrak{v} + U_3 \int \varphi_3 \, d\mathfrak{v} ,$$

wo $d\mathfrak{v} = (d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\, d\sigma$, mit der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{matrix} \int \varphi_1 d\sigma_1 & \int \varphi_2 d\sigma_1 & \int \varphi_3 d\sigma_1 \\ \int \varphi_1 d\sigma_2 & \int \varphi_2 d\sigma_2 & \int \varphi_3 d\sigma_2 \\ \int \varphi_1 d\sigma_3 & \int \varphi_2 d\sigma_3 & \int \varphi_3 d\sigma_3 . \end{matrix}$$

Wir zeigen, daß diese Matrix symmetrisch ist. Um nachzuweisen, daß z. B.

$$\int \varphi_1 d\sigma_2 = \int \varphi_2 d\sigma_1$$

ist, setzen wir in $d\sigma_2 = \alpha_2 d\sigma$ und $d\sigma_1 = \alpha_1 d\sigma$ für die Größen α_2 und α_1 ihre Werte $-\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ und $-\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ und erhalten nach Unterdrückung des Minuszeichens

$$\int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \, d\tau = \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \, d\sigma ,$$

eine Beziehung, die nach (41) zu Recht besteht. Aus dem Obigen folgt also in bekannter Weise: Wird ein Körper in eine Parallelströmung getaucht, so erfährt er keine Kraft, wohl aber i. a. ein Moment; letzteres verschwindet jedoch für mindestens drei ausgezeich-

nete aufeinander senkrecht stehende Richtungen von $\mathfrak{U}$ (Satz von Kirchhoff [18])). — Ist der Körper ein Ellipsoid, so fallen diese Richtungen in die der drei Achsen, wobei übrigens die Richtung der kleinsten Achse die stabile ist. Der Kirchhoffsche Satz gilt auch für durchlochte Körper, sofern nur die Außenströmung singularitätenfrei ist; findet jedoch eine zyklische Umströmung des Körpers statt, so kommt dies einer Dipolbelegung eines passenden Querschnittes gleich, so daß dann die Voraussetzungen des Satzes nicht mehr zutreffen.

Der *Spezialfall der quer angeströmten Platte* sei noch näher betrachtet. Fig. 23 zeigt das Wirbelsystem und die Haltekräfte für die beiden Plattenhälften, deren Größe eine einfache Rechnung $\left(\text{die Wirbeldichte ist hier } = \frac{-2x}{\sqrt{b^2 - x^2}}\right)$ zu $2bU^2$ liefert. Bewegt man nun eine zur Hälfte in Wasser eingetauchte Platte mit konstanter Geschwindigkeit U durch die Flüssigkeit, so ergibt sich als Strömung die untere Hälfte der in Fig. 23 gezeichneten Plattenströmung; Fig. 24. Man sieht, daß auf die Platte eine Haltekraft von der Größe

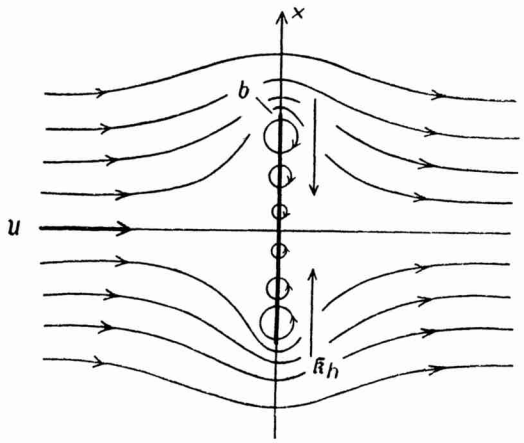


Fig. 23.

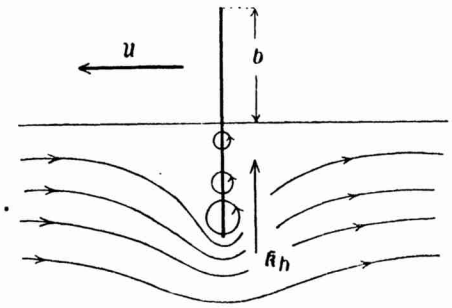


Fig. 24.

$2bU^2$ nach oben ausgeübt werden muß, die Platte also mit der entgegengesetzten Kraft nach innen gesaugt wird (Saugwirkung einer Schneide). Wird die Platte während der Vorwärtsbewegung plötzlich herausgenommen, so wird sich das in Fig. 24 gezeichnete Wirbelsystem momentan einstellen, jedoch im nächsten Augenblick infolge Fehlens der Haltekraft rasch zerfallen.

---

[18]) Vgl. Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1876, 19. Vorlesung, S. 236, und Lamb, a. a. O. [4]), S. 179. Bei Lamb findet man auch einen Nachweis für die folgende Tatsache: Ist in dem Achsensystem der drei ausgezeichneten Richtungen die obige Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

so ist von den drei Anstell- (d. h. hier Achsen-)Richtungen nur eine „stabil", und zwar jene, die dem größten der drei Werte A, B, C entspricht $\left(A, B, C \text{ sind nie negativ; so ist z. B. } A = \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 2\int \text{grad}^2 \varphi_1, \ldots\right)$. Denkt man sich also das Ellipsoid

$$(+) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.}$$

gezeichnet, das im Körper festliegt, so fällt die stabile Richtung mit der der kleinsten Ellipsoidachse zusammen. — Ist der Körper speziell ein Ellipsoid, so ist wie man sofort sieht, das Ellipsoid (+) bei passender Wahl der Konstanten mit dem Körper identisch. Die stabile Anstellrichtung ist dann also die der kleinsten Körperachse. Dieses Resultat steht in Übereinstimmung mit der bekannten Erscheinung, daß ein länglicher Körper, wie z. B. eine Platte, stets bestrebt ist, sich mit seiner Breitseite gegen die Strömung zu stellen.

Zusatz betr. den Druck im Innern des Körpers. Denken wir uns den Körper nach der Methode des Totwassers durch Wirbel ersetzt, so herrscht im Innern sicher ein konstanter Druck. Wir können diesen jedoch nicht beliebig vorschreiben: Sein Wert ist vielmehr durch die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen bestimmt, sobald man die sonst noch angreifenden Fremdkräfte kennt. In unserem Falle folgt sein Wert leicht so: Da z. B. im vorderen Staupunkt die Flüssigkeit ruht, dort also die Haltekraft $\mathfrak{R}_h = \text{rot } \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$ verschwindet, so ist an dieser Stelle, wenn wir noch voraussetzen, daß dort keine weitere Fremdkraft wirkt, die treibende Druckkraft ebenfalls $= 0$, d. h der Innendruck muß gleich dem Staudruck $p_{st} = p_0 + \frac{U^2}{2}$ (p_0 der Druck im Unendlichen, U die Anströmungsgeschwindigkeit) sein. Dies bedeutet, daß dann auch im Innern die Bernoullische Gleichung gilt, und ebenso in einem Bereiche, der, wie in Fig. 25, über die Begrenzung hinüberreicht; d. h. aber dann: hier ist die Haltekraft $\mathfrak{R}_h$ des Wirbels tatsächlich $= \text{rot } \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$, eine Zusatzkraft im Sinne der Ausführungen von Nr. **19** also nicht vorhanden.

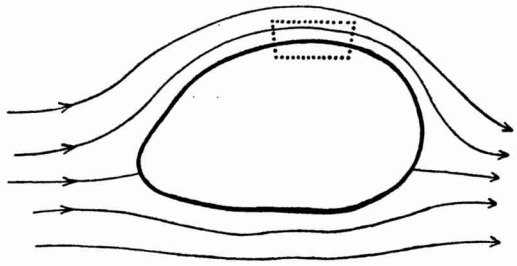


Fig. 25.

Liegt z. B. eine ebene Strömung vor, so wirkt $\mathfrak{R}_h$ senkrecht zur Oberfläche nach innen, muß also zusammen mit dem normalen Druckgefälle die Radialbeschleunigung des dort liegenden Teilchens ergeben, d. h. $\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{r}$, wo c die Größe der Außengeschwindigkeit und r den Krümmungsradius bedeutet. Denkt man sich die Wirbelschicht von der kleinen Dicke a so ist nach Fig. 26 in der Tat

$$v_x - u_y = -\frac{c}{a} - \frac{(\frac{1}{2}c)}{r},$$

also die Haltekraft

$$= -\left\{\frac{c}{a} \cdot \frac{\frac{1}{2}c}{2} + \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{r}\right\} \mathfrak{n};$$

die Druckkraft ist aber

$$\frac{\frac{1}{2}c^2}{r}\mathfrak{n},$$

mithin die Gesamtkraft

$$-\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{2}\mathfrak{n},$$

d. h. gerade gleich der Radialbeschleunigung [19]).

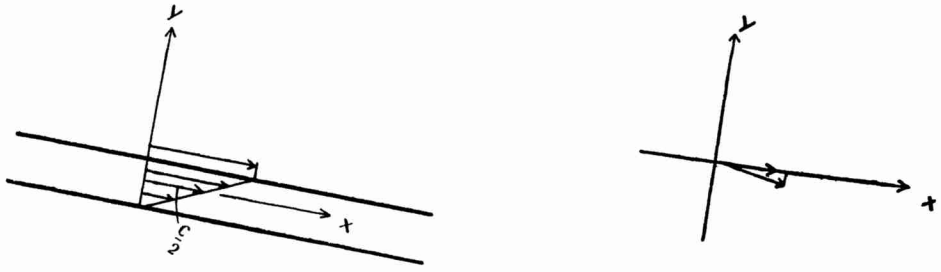


Fig. 26.

[19]) Eine Anwendung dieses Gedankenganges auf die bekannte Kirchhoffsche Plattenströmung mit Totwasser bringt eine demnächst erscheinende kleine Note des Verf. unter dem Titel: Zur Theorie der Kirchhoffschen Plattenströmung.

Nennen wir die evtl. zu der Haltekraft $\mathfrak{K}_h$ hinzutretende Zusatzkraft $\mathfrak{K}'_h$, so können wir auch direkt mit der Bewegungsgleichung arbeiten, die dann so lautet:

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{grad}\,\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} = -\,\mathrm{grad}\,p + \mathfrak{K}_h + \mathfrak{K}'_h .$$

(Man beachte, daß hier in der Mitte nicht einfach Masse · Beschleunigung steht, sondern infolge des Gliedes $\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}$ gemäß Newtons Grundgesetz die Änderung der Bewegungsgröße, in welcher also die Änderung der Masse mit einbegriffen ist. Im Falle der Prandtlschen Tragflügeltheorie ist z. B. die Bernoullische Gleichung als überall erfüllt angenommen, ferner $\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0$, also die wirkende Fremdkraft in Übereinstimmung mit unserem früheren Ergebnis $= \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{K}'_h = 0$.

§ 9. Über den rechnerischen Nachweis, daß eine Wirbelröhre bzw. ein Wirbelfaden auf sich selbst weder eine Kraft noch ein Moment ausübt.

30. Arbeitet man gleich mit dem Wirbelfaden, und denkt sich diesen durch Dipole ersetzt, so läuft, da ein Dipol auf sich selbst keine Kraft ausübt, der Nachweis darauf hinaus, zu zeigen, daß zwei (getrennte) Dipole $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ an den Stellen Q_1 und Q_2 weder eine Kraft noch ein Moment aufeinander ausüben. Indem wir fordern, daß die Zeiger i und k stets verschieden voneinander und nur der beiden Werte 1, 2 fähig sein sollen, führen wir die Bezeichnungen ein: Q_1 sei der Koordinatenursprung O,

$$\mathfrak{r}_i = \overrightarrow{OQ_i},\ \mathfrak{r}_{ik} = \overrightarrow{Q_iQ_k},$$

$\mathfrak{w}_{ik}$ die vom i-ten Dipol an der Stelle des k-ten Dipols induzierte Geschwindigkeit, $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{M}_i$ die Haltekraft bzw. das Haltemoment des i-ten Dipols. Dann ist nach (6b)

$$\mathfrak{w}_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\underset{k}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_i \cdot \underset{i}{\nabla})\frac{1}{r_{ik}}\right]$$

und nach (72)

$$\mathfrak{K}_i = (\mathfrak{d}_i \cdot \underset{i}{\nabla})\,\mathfrak{w}_{ki}\,,$$

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{K}_i + \mathfrak{d}_i \times \mathfrak{w}_{ki}\,.$$

Zu zeigen ist:

$$\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = 0\,, \qquad \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 0\,.$$

Diese Behauptung ist gleichbedeutend mit den beiden folgenden leicht verifizierbaren Relationen

$$(98)\quad \begin{cases} (\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\underset{1}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\frac{1}{r_{21}}\right] + (\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\underset{2}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\frac{1}{r_{12}}\right] = 0 \\ \mathfrak{d}_1 \times \underset{1}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\frac{1}{r_{21}}\right] + \mathfrak{d}_2 \times \underset{2}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\frac{1}{r_{12}}\right] = \mathfrak{r}_{21} \times (\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\underset{1}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\frac{1}{r_{12}}\right]. \end{cases}$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung symmetrisch in den Zeigern 1 und 2 ist, so muß sie auch

$$(98a)\qquad = \mathfrak{r}_{12} \times (\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\underset{2}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\frac{1}{r_{21}}\right]$$

sein, eine Beziehung, die aus der vorigen Gleichung einfach durch Verlegung des Koordinatenursprungs von Q_1 nach Q_2 entsteht.

31. Wir können aber auch mit der endlichen Wirbelröhre arbeiten. Sei $\mathfrak{c} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{w}$ und, da $\mathfrak{c}$ innerhalb der Röhre stetig und endlich ist, $|\mathfrak{c}| \leqq C$, wo C fest ist. Bedenkt man, daß das von einer beliebigen Wirbelröhre induzierte Geschwindigkeitsfeld um so „langsamer" wird, je weniger Wirbelmasse vorhanden ist, und in die Ruhe übergeht, wenn die Wirbelmasse verschwindet, so leuchtet ein, daß man die gegebene Röhre vom Volumen V und der Stärke Γ in soviel (es seien n) Teilröhren vom Volumen V_i und der Stärke Γ_i aufteilen kann, daß die von einer beliebigen (es sei die i-te) Teilröhre hervor-

gerufene Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_i$ ihrem Betrage nach kleiner als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$ wird. Für die Haltekraft bzw. das Haltemoment

$$\mathfrak{K}_i = \int_{i\text{-te Röhre}} (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i), \qquad \mathfrak{M}_i = \int_{i\text{-te Röhre}} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i),$$

die eine solche Teilröhre in ihrer Eigenströmung $\{\mathfrak{w}_i\}$ erfordert, gilt dann eine Abschätzung

(99) $$|\mathfrak{K}_i| \leqq \varkappa \varepsilon V_i, \qquad |\mathfrak{M}_i| \leqq \mu \varepsilon V_i$$

($\varkappa$, μ Konstante, die unabhängig von der betr. Teilröhre sind), aus der durch Addition über alle Teilröhren sich ergibt:

(100) $$\Sigma |\mathfrak{K}_i| \leqq \varkappa \varepsilon V, \qquad \Sigma |\mathfrak{M}_i| \leqq \mu \varepsilon V .$$

Um z. B. eine der ersten Ungleichung von (99) genügende Konstante $\varkappa$ zu finden, bilden wir von $\mathfrak{K}_i$ das Quadrat

$$|\mathfrak{K}_i|^2 = \mathfrak{K}_i \cdot \mathfrak{K}_i = \int d\tau (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i) \cdot \int d\tau (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i) ,$$

für das wir, wenn die dem Element $d\tau'$ entsprechenden Größen ebenfalls durch einen Strich gekennzeichnet werden, offenbar auch schreiben können:

$$|\mathfrak{K}_i|^2 = \iint d\tau \, d\tau' (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i) \cdot (\mathfrak{c}' \times \mathfrak{w}_i') .$$

Hier ist aber der Integrand [20]).

$$(\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i) \cdot (\mathfrak{c}' \times \mathfrak{w}_i') = \begin{vmatrix} \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}' & \mathfrak{w}_i \cdot \mathfrak{c}' \\ \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{w}_i' & \mathfrak{w}_i \cdot \mathfrak{w}_i' \end{vmatrix}$$

und daher seinem Betrage nach $\leqq 2\varepsilon^2 C^2$, mithin

$$|\mathfrak{K}_i|^2 \leqq 2\varepsilon^2 C^2 \iint d\tau \, d\tau' = 2\varepsilon^2 C^2 V_i^2 ,$$

d. h.

$$|\mathfrak{K}_i| \leqq \varkappa \varepsilon V_i$$

mit $\varkappa = \sqrt{2}\, C$.

Aus (100) geht hervor, daß wir bei der Bestimmung von $\mathfrak{K}_h$ und $\mathfrak{M}_h$ für die Wirbelröhre im Grenzfall einer beliebig feinen Aufteilung in Teilröhren, so daß also $\varepsilon \to 0$ ist, von der Beeinflussung der Teilröhren auf sich selbst absehen dürfen. Es braucht daher nur noch gezeigt zu werden, daß die gegenseitige Beeinflussung aller Teilröhren aufeinander insgesamt $= 0$ ist, eine Behauptung, die offenbar erwiesen ist, wenn sie für irgend zwei Teilröhren zu Recht besteht. Da nun von einer Teilröhre nur das Geschwindigkeitsfeld außerhalb ihrer benutzt wird, so kann man sich die Röhre jeweils auf einen Wirbelfaden zusammengeschrumpft denken. Dann lautet die zu beweisende Behauptung: Irgend zwei getrennte Wirbelfäden üben insgesamt keinen Einfluß aufeinander aus, eine Behauptung, deren Richtigkeit offensichtlich von der Stärke der Fäden unabhängig ist, so daß diese in dem nun folgenden Nachweis als beliebig angenommen werden darf. In der Dipolauffassung ist die letzte Behauptung evident, da zwei Dipole insgesamt aufeinander nicht einwirken. Wir wollen aber ohne diese Auffassung durchkommen, und führen den Beweis zunächst für die Kräfte, sodann für die Momente. Dazu bezeichnen wir die einzelnen Fäden durch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, ihre Linienelemente durch $d\mathfrak{s}$, $d\mathfrak{s}'$, ihre Stärken durch Γ, Γ' und ihre induzierten Eigengeschwindigkeiten durch $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$; generell sei die einzelne Stelle von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ durch s und s' charakterisiert; $\mathfrak{r}_{ss'}$ bedeutet z. B. den von der Stelle s nach der Stelle s' gezogenen Vektor; $\mathfrak{r}_s$ sei wie üblich der vom Ursprung O zu der Stelle s gezogene Ortsvektor. Die Haltekräfte bzw. Haltemomente von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in den Strömungen $\{\mathfrak{w}'\}$ bzw. $\{\mathfrak{w}\}$ seien bzw. $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{M}'$; (Fig. 27).

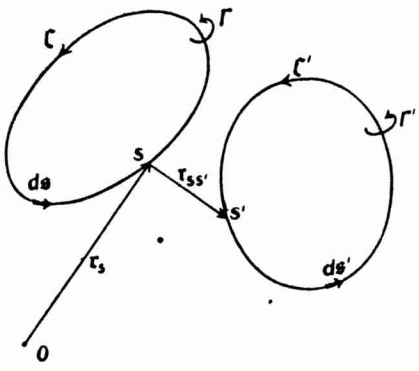


Fig. 27.

[20]) Siehe Lagally a. a. O. [5]), S. 33, Gl. (52).

a) Kräfte. Nach (71a) ist die Wirkung von $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{K} = \Gamma \int d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}',$$

wo nach (27)

$$\mathfrak{w}' = \frac{\Gamma'}{4\pi} \int d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3},$$

d. h.

$$(101) \qquad \mathfrak{K} = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi} \int d\mathfrak{s} \times \int d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi'} \int\int d\mathfrak{s} \times \left(d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right).$$

Entwickelt man den Integranden

$$(102) \qquad d\mathfrak{s} \times \left(d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right) = \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} d\mathfrak{s}' - (d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s}') \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3},$$

so verschwindet der Beitrag des ersten Summanden

$$\int\int \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} d\mathfrak{s}' = \int d\mathfrak{s}' \int \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3},$$

da das innere Integral nach dem Stokesschen Satze verschwindet:

$$(103) \qquad \int \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} = 0$$

(jedes kugelsymmetrische Geschwindigkeitsfeld ist rotationsfrei). Bleibt also der zweite Summand, der zusammen mit dem entsprechenden Summanden von $\mathfrak{K}'$ offensichtich 0 ergibt.

b) Momente. Nach (71b) ist die Wirkung von $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{M} = \Gamma \int \mathfrak{r}_s \times [d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}'],$$

d. h. nach (27)

$$(104) \qquad \mathfrak{M} = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi} \int \mathfrak{r}_s \times \left[d\mathfrak{s} \times \int d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right] = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi} \int\int \mathfrak{r}_s \times \left[d\mathfrak{s} \times \left(d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right) \right].$$

Entwickelt man hier die eckige Klammer wie oben, so erhält man für den Integranden

$$\frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} (\mathfrak{r}_s \times d\mathfrak{s}') - (d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s}') \frac{\mathfrak{r}_s \times \mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3},$$

und der zweite Summand mit dem entsprechenden von $\mathfrak{M}'$ zusammenfaßt ergibt wieder 0. Ersetzt man im ersten Summanden $\mathfrak{r}_s$ durch $\mathfrak{r}_{s'} + \mathfrak{r}_{s's}$, so spaltet er sich in die beiden Teile

$$\frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} (\mathfrak{r}_{s'} \times d\mathfrak{s}') + \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} (\mathfrak{r}_{s's} \times d\mathfrak{s}')$$

auf, von denen der erste Teil, da $\mathfrak{r}_{s'} \times d\mathfrak{s}'$ von s nicht abhängt, wieder wegen (103) bei der Integration 0 liefert; für den Zähler des zweiten Teiles kann man offenbar schreiben:

$$\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s} \, (\mathfrak{r}_{s's} \times d\mathfrak{s}') = \mathfrak{r}_{s's} \times \{(\mathfrak{r}_{s's} \times d\mathfrak{s}') \times d\mathfrak{s}\},$$

woraus hervorgeht, daß er mit dem entsprechenden Summanden von $\mathfrak{M}'$ zusammengefaßt ebenfalls 0 liefert.

Dritter Abschnitt.

Das entsprechende ebene Problem.

32. Alle vorstehenden im Raum durchgeführten Überlegungen lassen sich mit geringen Änderungen auf die Ebene übertragen. Dabei stellen wir uns in bekannter Weise

die ebene (in der x, y-Ebene verlaufende) Strömung stets als eine räumliche von der Höhe 1 vor, und beachten, daß in alle Überlegungen und Rechnungen im Endresultat nur die (zur z-Achse parallelen) Mantellinien und -flächen bzw. deren Spuren in der x, y-Ebene, nicht aber die (zur x, y-Ebene parallelen) Grund- und Deckflächen eingehen; kurz ausgedrückt: Wir denken räumlich, rechnen aber in der Spuren-Ebene x, y. Demgemäß übernehmen wir auch die Bezeichnungen von früher; dabei ist jetzt z. B. unter $d\tau$ das Produkt $df \cdot 1$ zu verstehen, wo df die Spur des Zylinderchens vom Inhalt $d\tau$ bedeutet. — Wir wollen jetzt nochmals alle unsere früheren Überlegungen rasch durcheilen und an einigen Stellen die entsprechenden Übertragungen angeben bzw. andeuten.

33. Die Potentiale ebener Quellen und Dipole unterscheiden sich von den entsprechenden räumlichen dadurch, daß 4π durch 2π und $\frac{1}{r}$ durch $\log\frac{1}{r}$ zu ersetzen ist. Als Reihenentwicklung für eine Quelle bzw. einen Dipol hat man in Analogie zu (8)

$$(105)\quad \begin{cases} -\dfrac{e}{2\pi}\log\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{-e}{2\pi}\log\dfrac{1}{r} + \dfrac{e}{2\pi}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{r} + \cdots \\ \dfrac{1}{2\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{2\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{r} + \cdots, \end{cases}$$

aus denen ähnlich wie im Raume folgt: Zwei Quellen wirken im Unendlichen bis auf Glieder von höherer Ordnung als $\frac{1}{r}$

a) wie die zugehörige Schwerpunktsquelle der Stärke $e_1 + e_2$ in $\dfrac{e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2}{e_1 + e_2}$, falls $e_1 + e_2 \neq 0$;

b) sonst wie der Dipol $e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2$ in O.

Zwei Dipole wirken entsprechend im Unendlichen wie der Dipol $\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$ in O.

34. Die Unstetigkeitseigenschaften der Quell- und Dipolflächen finden sich in derselben Form auch hier wieder; dasselbe gilt für Wirbelschichten und ihren Zusammenhang mit Dipolbelegungen. Dem geschlossenen Wirbelfaden im Raume entspricht hier das Wirbelpaar (d. h. zwei Wirbel mit entgegengesetzt gleicher Zirkulation). Ist nur ein ebener Wirbel vorhanden, so hat man den ihn zum Wirbelpaar ergänzenden Gegenwirbel im Unendlichen zu suchen, das hier (im Gegensatz zum Raume) stets als innerer Punkt anzusehen ist. Die Ersetzung eines geschlossenen Wirbels, d. h. eines Wirbelpaares der Stärke Γ durch Dipole geschieht analog wie im Raume: Ist eine Kurve C mit Dipolen von der konstanten Dichte Γ besetzt (Fig. 28), so ist das zugehörige Potential

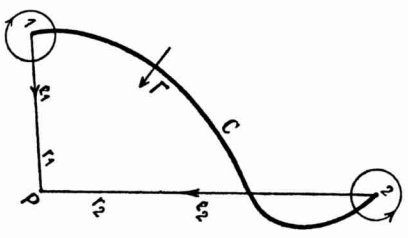


Fig. 28.

$$(106)\qquad \varphi = \frac{-\Gamma}{2\pi}\omega,$$

wo ω der Winkel ist, unter dem C von P aus erscheint. Hieraus folgt das „ebene" Biot-Savartsche Gesetz:

$$(107)\qquad \mathfrak{w} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left\{\frac{\mathfrak{k}\times\mathfrak{e}_2}{r_2} - \frac{\mathfrak{k}\times\mathfrak{e}_1}{r_1}\right\},$$

wo $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ die von den Endpunkten der Kurve nach dem Aufpunkt gezogenen Einheitsvektoren sind; rückt speziell der erste Endpunkt ins Unendliche, so erhält man mit

$\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}$, $r_2 = r$ das Feld eines einzigen Wirbels:

$$\mathfrak{w} = \frac{\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k} \times \frac{\mathfrak{e}}{r}\left(= \frac{\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k} \times \frac{\mathfrak{r}}{r^2}\right), \tag{107a}$$

für das man auch

$$\mathfrak{w} = \underset{P}{\mathrm{rot}}\, \frac{\Gamma \mathfrak{k}}{2\pi} \log \frac{1}{r} \tag{108}$$

oder auch

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{k} \times \underset{P}{\mathrm{grad}} \left\{ \frac{-\Gamma}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right\} \tag{109}$$

schreiben kann. Die letzte Beziehung läßt sich so ausdrücken: Denkt man sich den Wirbel durch eine Quelle von der gleichen Stärke ersetzt, so entsteht das Geschwindigkeitsfeld des Wirbels aus dem der Quelle durch vordere vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{k}$. Ähnlich wie für zwei Quellen gilt auch hier: Zwei Wirbel wirken im Unendlichen bis auf Glieder von höherer Ordnung als $\frac{1}{r}$:

a) wie der zugehörige Schwerpunktswirbel der Stärke $\Gamma_1 + \Gamma_2$ in $\frac{\Gamma_1 \mathfrak{a}_1 + \Gamma_2 \mathfrak{a}_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$, falls $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$,

b) sonst wie der Dipol $(\Gamma_1 \mathfrak{a}_1 + \Gamma_2 \mathfrak{a}_2) \times \mathfrak{k} = \Gamma \mathfrak{F}$ mit $\Gamma = \Gamma_2$, wo $\mathfrak{F}$ die orientierte Oberfläche von C ist.

35. Die Resultate von Nr. **17** und Nr. **18** lassen sich sofort übertragen: Ist $\{\mathrm{grad}\ \varphi\}$ eine eindeutige Potentialströmung im Außenraum A und F die Begrenzung, so kann ein zu $\{\mathrm{grad}\ \varphi\}$ gehöriges Singularitätensystem Δ_0 auf F wieder aus Quellen und Dipolen, aus Quellen allein, und aus Dipolen allein bestehen.

Was die Ersetzung eines Körpers durch ein Singularitätensystem Δ_i anbetrifft, so gibt es wie im Raum die beiden Möglichkeiten:

$$\Delta_i = \Delta_0, \tag{110}$$

$$\Delta_i = \Delta_0 + \mathsf{P}', \tag{111}$$

wobei das innerhalb F befindliche Wirbelsystem P' speziell wieder auf F ausgebreitet sein kann; der zweite Fall bedeutet, daß eine Zirkulation $\Gamma_C = \sum_{P'} \Gamma$ um die Kontur vorhanden ist. — Das außerhalb F und ganz im Endlichen gelegene Singularitätensystem Δ_a ist, wie auch jedes Teilsystem hiervon, stets als abgeschlossen anzusehen, so daß also das im räumlichen Fall auftretende System P hier $= 0$, mithin $\Delta_a = \tilde{\Delta}_a$ ist. Die Haltekraft $\mathfrak{R}_h$ ist dieselbe wie im Raum:

$$\mathfrak{R}_h = \mathfrak{w}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{v} + \mathrm{rot}\, \mathfrak{v} \times \mathfrak{w}. \tag{112}$$

36. Was jedoch den Wert von $\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{v} \\ \Sigma \end{matrix} \right\}$ anbetrifft (wo $\{\mathfrak{v}\}$ von dem Singularitätensystem Σ erzeugt ist), so besteht im Falle der Momente ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Raum: Während eine analoge Abschätzung wie dort im Falle der Kräfte wieder

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{v} \\ \Sigma \end{matrix} \right\} = 0 \qquad \text{(für Kräfte)} \tag{113}$$

ergibt, tut sie dies im Falle der Momente nicht mehr. Betrachten wir den Spezialfall, daß nur eine Quelle e und ein Wirbel Γ vorliegt! (Fig. 29). Hier ergibt sich offenbar ein Moment von der Größe

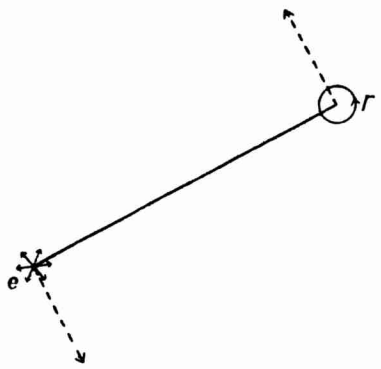


Fig. 29.

$$\frac{e\Gamma}{2\pi}k,$$

das also, wie man sieht, vom gegenseitigen Abstand der Singularitäten nicht abhängt, so daß letzterer auch $= 0$ sein kann. Hat man beliebig viele Quellen und Wirbel von den Gesamtstärken

$$\tilde{e} = \Sigma e, \qquad \tilde{\Gamma} = \Sigma\Gamma,$$

so ist das Moment dasselbe wie das einer Quelle $\tilde{e}$ und eines Wirbels $\tilde{\Gamma}$ in O, d. h. aber es ist

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} = \frac{\tilde{e}\,\tilde{\Gamma}}{2\pi}\mathfrak{k}\left(= \frac{\Sigma e \cdot \Sigma\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k}\right) \qquad \text{(für Momente)}, \tag{114}$$

woraus die (58a) entsprechende Beziehung

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_2\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_1\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\tilde{e}_1\tilde{\Gamma}_2 + \tilde{e}_2\tilde{\Gamma}_1}{2\pi}\mathfrak{k} \tag{115}$$

folgt. Speziell gilt also, falls

$$\tilde{e} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \tilde{\Gamma} = 0$$

ist (was z. B. der Fall ist, wenn Σ nur aus Quellen oder nur aus Wirbeln besteht),

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} = 0 \quad (\text{für } \tilde{e} = 0 \text{ oder } \tilde{\Gamma} = 0). \tag{116}$$

Mit dieser kleinen Abänderung im Falle der Momente lassen sich dann alle früheren Überlegungen und Formeln auf die Ebene übertragen.

37. Liegen z. B. nur diskrete Singularitäten vor, so gelten die (77) entsprechenden Formeln

$$\begin{cases} -\mathfrak{R}_F = \sum\limits_A \{e\mathfrak{w}^* + (\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{w}^*)\} - \sum\limits_R \{e\mathfrak{U} + (\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U})\}, \\ -\mathfrak{M}_F = \sum\limits_A \{(\mathfrak{r}\times e\mathfrak{w}^*) + \mathfrak{r}\times(\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{w}^*)\} - \sum\limits_R \{(\mathfrak{r}\times e\mathfrak{U}) + \mathfrak{r}\times(\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U})\} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\Sigma e\Sigma\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k} \end{cases} \tag{117}$$

wo $\mathfrak{w}^*$ dieselbe Bedeutung hat wie im Raume, also die Geschwindigkeit ohne die betreffende Singularität an der Stelle derselben darstellt. In diesen Formeln können noch folgende Vereinfachungen bzw. Umformungen vorgenommen werden:

$$\begin{cases} \sum\limits_R e\mathfrak{U} = \sum\limits_A e\mathfrak{U}, \\ \sum\limits_R (\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}) = (\sum\limits_I \Gamma + \sum\limits_A \Gamma)\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{U} = (\Gamma_C + \sum\limits_A \Gamma)\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}, \end{cases} \tag{118}$$

wo $\Gamma_C = \sum\limits_I \Gamma$, d. h. = der Zirkulation um die Kontur und daher $\Gamma_C\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}$ die Kuttasche Kraft ist; ferner:

$$\mathfrak{r}\times(\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}) = (\mathfrak{r}\times\Gamma\mathfrak{k})\times\mathfrak{U}. \tag{119}$$

Für zwei punktförmige Quellen e_1, e_2 im Abstand r gilt in Analogie zum räumlichen Fall, daß sie sich mit der Kraft $\frac{e_1 e_2}{2\pi r}$ anziehen; analog stoßen sich zwei Wirbel Γ_1, Γ_2 mit der Kraft $\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi r}$ ab.

Schreibt man $M\mathfrak{k}$ für $-\mathfrak{M}_F$, so ergibt sich mit $\mathfrak{U} = (U, V)$, $\mathfrak{w}^* = (u^*, v^*)$

$$(120)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = \sum\limits_A \left\{ e \begin{vmatrix} x & y \\ u^* & v^* \end{vmatrix} + \Gamma \begin{vmatrix} x & y \\ -v^* & u^* \end{vmatrix} \right\} \\ \quad - \sum\limits_R \left\{ e \begin{vmatrix} x & y \\ U & V \end{vmatrix} + \Gamma \begin{vmatrix} x & y \\ -V & U \end{vmatrix} \right\} - \dfrac{\Sigma e \cdot \Sigma \Gamma}{2\pi} . \end{cases}$$

Geht man vermöge der Beziehungen

$$\begin{array}{lll} \bar{P} = X - iY & \text{mit} & (X, Y) = -\mathfrak{K}_F \\ \bar{v} = u - iv & \text{mit} & (u, v) = \mathfrak{w} \\ v_\infty = U - iV & \text{mit} & (U, V) = \mathfrak{U} \\ z = x + iy & \text{mit} & (x, y) = \mathfrak{r} \end{array}$$

und der Rechenregel

$$i(a + ib)\,(p - iq) = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ -q & p \end{vmatrix}$$

zur komplexen Schreibweise über, so erhält man [21])

$$(121)\qquad \begin{aligned} \bar{P} = X - iY &= \sum_A (e\bar{v}^* - i\Gamma\bar{v}^*) - \sum_R \{e\bar{v}_\infty - i\Gamma\bar{v}_\infty) \\ M + iN &= \sum_A (iez\bar{v}^* + \Gamma z\bar{v}^*) - \sum_R \{iez\bar{v}_\infty + \Gamma z\bar{v}_\infty) - i\frac{(\Sigma e - i\Sigma\Gamma)^2}{4\pi} . \end{aligned}$$

Nur der Vollständigkeit wegen seien auch noch die entsprechenden Formeln für kontinuierliche Singularitäten angegeben. Ergänzen wir das Potential einer Quelle φ zu einer komplexen Größe $\Omega = \varphi + i\psi$, so erhalten wir nach Fig. 30 und gemäß der bekannten Beziehung $\log \varrho e^{i\psi} = \log \varrho + i\psi$

$$\varphi = \frac{e}{2\pi} \log \varrho \longrightarrow \Omega = \varphi + i\psi = \frac{e}{2\pi} \log (z - z_0) .$$

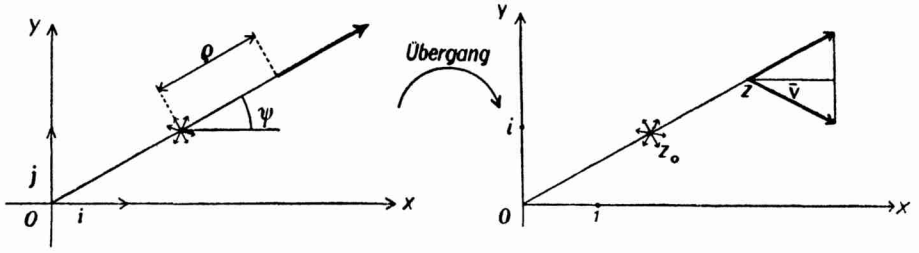


Fig. 30.

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ die folgende Zuordnung:

$$\mathfrak{w} = \varphi_x \mathfrak{i} + \varphi_y \mathfrak{j} \dashrightarrow \bar{v} = \Omega'(z) = \varphi_x + i\psi_x = \varphi_x - i\varphi_y = \frac{e}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$$

(es ist $\psi_x = -\varphi_y$ auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Für einen Wirbel erhalten wir dann gemäß (109) und unter Beachtung, daß durch den Übergang zur komplexen Geschwindigkeit der Drehsinn verkehrt wird, das komplexe Potential aus dem der Quelle, indem wir e durch Γ ersetzen, und den entstehenden Ausdruck noch mit $-i$ multiplizieren (was einer Drehung um -90^0 entspricht)

$$\Omega = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log (z - z_0) ,$$

d. h. für die komplexe Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log (z - z_0).$$

[21]) Vgl. hierzu auch W. Müller, Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928, S. 53, Formel (16), die leider stark mit Druckfehlern durchsetzt ist.

Wegen

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \cdots$$

ergeben sich für die Koeffizienten a_1 und a_2 in der Entwicklung

$$\bar{v} = \bar{v}_\infty + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

die Werte

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \Sigma (e - i\Gamma), \quad a_2 = \frac{1}{2\pi} \Sigma (ez - i\Gamma z).$$

Die Zusatzglieder in (121) sind dann offenbar

$$-2\pi a_1 \bar{v}_\infty \quad \text{und} \quad -i\pi (2 a_2 \bar{v}_\infty + a_1^2),$$

also wegen

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_\infty^2 + \frac{2a_1\bar{v}_\infty}{z} + \frac{2a_2\bar{v}_\infty + a_1^2}{z^2} + \cdots$$

gleich dem Wert der beiden Integrale, in denen K eine Kurve bedeutet, welche alle Singularitäten einschließt:

$$\frac{i}{2} \oint_K \bar{v}^2 dz \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} \oint_K \bar{v}^2 z\, dz\,.$$

Bedeutet dann rot $\mathfrak{w}$ den Skalar $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, so hat man also im Grenzfall eines kontinuierlichen Singularitätenfeldes als komplexe Kraft bzw. komplexes Moment der Flüssigkeit auf den Körper

$$\text{(122)} \qquad \begin{aligned} X - iY &= \int_A (\operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot \bar{v} - i \operatorname{rot} \mathfrak{w} \cdot \bar{v})\, d\sigma + \frac{i}{2} \oint_K \bar{v}^2 dz\,, \\ M + iN &= \int_A (i \operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot z\bar{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{w} z\bar{v})\, d\sigma - \frac{1}{2} \oint_K \bar{v}^2 z\, dz\,. \end{aligned}$$

Liegen im Außenraum keine Singularitäten, so kann die Kurve K auf die Kontur des Körpers zusammengezogen werden; man erhält dann die zuerst von Blasius [22]) angegebenen Formeln:

$$\text{(122a)} \qquad X - iY = \frac{i}{2} \oint_K \bar{v}^2 dz \quad \text{und} \quad M + iN = -\frac{1}{2} \oint_K \bar{v}^2 z\, dz\,.$$

Die (122) entsprechenden inneren Formeln lauten

$$\text{(123)} \qquad \begin{aligned} X - iY &= \int_I (\operatorname{div} \mathfrak{w}\bar{v} - i \operatorname{rot} \mathfrak{w}\bar{v})\, d\sigma\,, \\ M + iN &= \int_I (i \operatorname{div} \mathfrak{w} z\bar{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{w} z\bar{v})\, d\sigma\,. \end{aligned}$$

---

[22]) H. Blasius, Funktionentheoretische Methoden der Hydrodynamik, Ztschr. f. Math. u. Phys. 58 (1910), S. 90—96.

Eingegangen 28. Februar 1939.