Allgemeine Bewertungstheorie.

Von *Wolfgang Krull* in Erlangen.

Einen Hauptausgangspunkt der Bewertungstheorie [1]) bildet das Streben nach einer gemeinsamen Behandlung der Henselschen p-adischen Körper und des Körpers aller reellen oder aller komplexen Zahlen. Mit Hilfe des Bewertungsbegriffs wird gezeigt, daß sowohl die Abgeschlossenheitseigenschaft der p-adischen Körper als auch die „Stetigkeit" des Körpers aller reellen oder komplexen Zahlen aufgefaßt werden kann als „Perfektheit" hinsichtlich einer gewissen Bewertung. Durch diese Erkenntnis tritt der Begriff der allgemeinen perfekt bewerteten Körper in den Vordergrund des Interesses, und das hat sich für die Entwicklung der Algebra sehr nützlich erwiesen. In der Analysis dagegen führt die Bewertungstheorie nur zu einer neuen Charakterisierung des Körpers aller gewöhnlichen reellen oder komplexen Zahlen [2]). Nachdem nun durch Artin und Schreier [3]) der Begriff der allgemeinen reellen Körper rein algebraisch eingeführt wurde, liegt die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, den Bewertungsbegriff so zu verallgemeinern, daß er zu einer — ihrer Natur nach halb algebraischen, halb analytischen — Behandlung der allgemeinen reellen Körper brauchbar wird. Es zeigt sich, daß diese Frage zu bejahen ist, und daß die entstehende allgemeine Bewertungstheorie nicht nur auf die reellen Körper, sondern auch auf verschiedene rein arithmetische oder algebraische Probleme mit Erfolg angewandt werden kann.

Um die Art unsrer Verallgemeinerung zu erklären, müssen wir kurz eingehen auf den in der gewöhnlichen Bewertungstheorie grundlegenden Unterschied zwischen „archimedischen" und „unarchimedischen" Bewertungen. Eine gewöhnliche Bewertung liegt immer dann vor, wenn jedem Element a des zu bewertenden Körpers $\mathfrak{K}$ eine bestimmte Zahl $\alpha = w(a)$ als „Wert" so zugeordnet ist, daß die Gleichungen $w(a \cdot b) = w(a) \cdot w(b)$, $w(a + b) \leqq w(a) + w(b)$ für beliebige Körperelemente a und b gelten [4]). Ist die Bewertung „archimedisch", so kommt es mindestens einmal vor, daß der Wert einer Summe größer ist als der Wert jedes einzelnen Summanden, bei einer „unarchimedischen" Bewertung dagegen kann die allgemeine „Dreiecksungleichung" $w(a + b) \leqq w(a) + w(b)$ ersetzt werden durch die schärfere Ungleichung $w(a + b) \leqq \max\,(w(a),\ w(b))$. Man

[1]) Von den grundlegenden Arbeiten zur Bewertungstheorie vgl. vor allem: A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$. Acta Mathematica 41 (1917), S. 271-284. Zitiert mit „O.". — Siehe auch die gleichzeitig in diesem Bande, S. 157, erscheinende Arbeit: E. Artin, Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper, in der die Hauptresultate der Ostrowskischen Arbeit auf vereinfachte Art hergeleitet werden.

[2]) In O. werden die Bewertungen in „archimedische" und „unarchimedische" eingeteilt, und es wird gezeigt, daß der Körper aller reellen und der aller komplexen Zahlen die einzigen perfekt archimedisch bewerteten Körper darstellen.

[3]) E. Artin und O. Schreier, Algebraische Konstruktion reeller Körper. Hamburger Abhandlungen 5 (1926), S. 85-100, zitiert mit „A. S.".

[4]) Im Text werden später die Bewertungseigenschaften etwas anders formuliert. Vgl. § 1, insbesondere Anm. 14.

sieht, bei der Definition der archimedischen Bewertungen ist es wesentlich, daß die reellen Zahlen sowohl durch Addition als auch durch Multiplikation miteinander verknüpft werden können; bei den unarchimedischen Bewertungen dagegen braucht man letzten Endes nur die Tatsache, daß die Werte hinsichtlich der Multiplikation eine Untergruppe der Gruppe aller reellen Zahlen bilden, d. h. eine geordnete Abelsche Gruppe, die hinsichtlich der Ordnungsbeziehung dem „archimedischen Axiom" im Sinne der Geometrie genügt [5]). Es liegt nun der Gedanke nahe, archimedische Bewertungen ganz bei Seite zu lassen[6]), und die gewöhnlichen, „speziellen" unarchimedischen Bewertungen dadurch zu verallgemeinern, daß man als Werte nicht nur reelle Zahlen, sondern die Elemente einer ganz beliebigen geordneten Abelschen Gruppe zuläßt. Daß ein solches Vorgehen zweckmäßig ist, zeigen die mannigfachen Anwendungen, die man von dem neugewonnenen allgemeinen Bewertungsbegriff machen kann.

Zunächst einige arithmetische Betrachtungen! Genau so wie jede spezielle, definiert auch jede allgemeine Bewertung B eines gegebenen Körpers $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}$ einen für B charakteristischen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, und es gelten die Sätze: Ein Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn in $\mathfrak{B}$ von zwei Elementen stets eines durch das andere teilbar ist; ein Unterring $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$ gehört dann und nur dann zu den „ganz abgeschlossenen" Ringen, wenn er als Durchschnitt von Bewertungsringen dargestellt werden kann. Die allgemeinen Bewertungen — und nur die allgemeinen! — liefern also eine neue einfache Charakterisierung der arithmetisch weitaus wichtigsten Ringklasse.

Was ferner die Idealtheorie in einem Bewertungsringe, oder auch im Durchschnitt von endlich vielen Bewertungsringen angeht, so kann dieselbe leicht mit Hilfe des Wertbegriffs entwickelt werden. Dagegen versagen bei den allgemeinen Bewertungsringen die auf den Begriff des Primärideals aufgebauten Methoden, die zuerst von E. Noether für Ringe mit Teilerkettensatz entwickelt und dann später auf größere Ringklassen ausgedehnt wurden. Es zeigt sich also, daß die Heranziehung der allgemeinen Bewertungstheorie oder ähnlicher Methoden für die systematische Untersuchung allgemeiner Ringe unentbehrlich ist.

Weiter eine Bemerkung zur mehrdimensionalen algebraischen Geometrie! Ist mit Hilfe eines algebraischen Funktionenkörpers $\mathfrak{K}$ eine algebraische Kurve bzw. Fläche bzw. ein (dreidimensionaler) algebraischer Raum definiert, so kann man bekanntlich die Punkte der Kurve bzw. die Kurven der Fläche bzw. die Flächen des Raumes — also immer die Gebilde der Höchstdimension — arithmetisch durch „Divisoren", d. h. durch spezielle Bewertungen von $\mathfrak{K}$ festlegen [7]). In genau der gleichen Weise kann man nun die allgemeinen Bewertungen dazu benützen, um auf der Fläche die Kurvenpunkte und im Raume die Flächenkurven, sowie die Punkte der Flächenkurven arithmetisch zu charakterisieren. Wir gehen auf diese Zusammenhänge mit der algebraischen Geometrie

[5]) Damit die Werte eine Multiplikationsgruppe bilden, muß man den Wert 0, der bei einer nicht trivialen Bewertung nur dem Nullelement zugeordnet ist, von der Betrachtung ausschließen! Zu dem Begriff der „geordneten Gruppe" und zum „archimedischen Axiom" vgl. § 1. Dort ist allerdings die Addition statt der Multiplikation als Verknüpfungsoperation gewählt.

[6]) Im folgenden ist unter einer „speziellen Bewertung" ohne weiteren Zusatz immer eine gewöhnliche unarchimedische Bewertung zu verstehen.

[7]) Vgl. H. W. E. Jung, Primteiler und ihr Verhalten bei birationalen Transformationen, Rendiconti di Palermo **26** (1908), S. 113. — B. L. v. d. Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen **101** (1923), § 3. — H. W. E. Jung, Algebraische Flächen. Hannover 1925, Helwingsche Verlagsbuchhandlung. Insbesondere § 4 und § 8. Die Jungschen Divisoren „zweiter Stufe" entsprechen allgemeinen Bewertungen. Natürlich können die allgemeinen Bewertungen nicht nur in der zwei- und dreidimensionalen sondern ebensogut in der n-dimensionalen algebraischen Geometrie Verwendung finden.

im Text nicht mehr näher ein. Doch werden in § 5 die algebraischen Grundlagen soweit entwickelt, daß für die geometrische Anwendung sozusagen nur noch die Übersetzung in eine andre Sprache nötig ist.

Eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der speziellen Bewertungen stellt bekanntlich die Galoissche Theorie dar: Ist $\mathfrak{N}$ ein endlicher Normalkörper über dem speziell bewerteten Körper $\mathfrak{K}$, so kann man mit Hilfe der Begriffe des Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungskörpers genauere Aussagen über den Aufbau von $\mathfrak{N}$ über $\mathfrak{K}$ machen [8]. Ganz ähnliche Sätze gelten nun auch, wenn wir es nicht mit einer speziellen, sondern mit einer allgemeinen Bewertung von $\mathfrak{K}$ zu tun haben, nur erhalten wir im allgemeinen nicht wie sonst nur eine, sondern endlich viele Serien von Verzweigungskörpern. Ist aber $\mathfrak{K}$ hinsichtlich seiner gegebenen Bewertung perfekt, so tritt diese neuartige Erscheinung nicht auf, und man kann die Theorie für speziell und allgemein bewerteten Grundkörper $\mathfrak{K}$ wörtlich gleich entwickeln.

Natürlich ist es von entscheidender Bedeutung, daß der Perfektheitsbegriff auch in der allgemeinen Bewertungstheorie eingeführt werden kann; das gelingt dadurch, daß man eine vorgelegte allgemeine Bewertung gewissermaßen in eine geordnete Kette von speziellen Bewertungen auflöst. — Um mit der so gewonnenen Perfektheitsdefinition praktisch arbeiten zu können, hat man dann noch zu zeigen, daß jeder bewertete Körper ohne Änderung der Wertgruppe und ohne Änderung des durch die Bewertung definierten „Restklassenkörpers" zu einem perfekt bewerteten Körper erweitert werden kann. Auch dieser Nachweis gelingt — allerdings nicht so einfach wie bei speziell bewerteten Körpern —, am zweckmäßigsten durch Einführung des Hilfsbegriffs der „maximal" bewerteten Körper.

Die Heranziehung der maximal bewerteten Körper lohnt sich vor allem, wenn wir unsre Bewertungen zur näheren Untersuchung der geordneten Körper verwenden. Die geordneten oder allgemeinen reellen Körper können, wie bereits erwähnt, nach Artin-Schreier rein algebraisch charakterisiert werden [9]. Es erhebt sich dann sofort die weitere Frage: Welche allgemeinen reellen Körper sind geeignet eine ähnlich ausgezeichnete Rolle zu spielen wie im Spezialfall der „stetige" Körper aller gewöhnlichen reellen Zahlen? Dieses Problem wurde erfolgreich von H. Hahn [10] angegriffen und zwar unter Gesichtspunkten, die man wohl als vorwiegend analytisch bezeichnen kann. Vom mehr algebraischen Standpunkt aus liefert nun die allgemeine Bewertungstheorie ein Hilfsmittel, das eine ganz allgemeine und einfache Beantwortung der aufgeworfenen Frage ermöglicht.

Für die Ordnung O eines Körpers $\mathfrak{K}$, der nicht archimedisch geordnet ist, d. h. nicht unter die gewöhnlichen reellen Zahlkörper gehört, sind zwei Dinge von entscheidender Bedeutung: Einerseits die Einteilung von $\mathfrak{K}$ in Klassen äquivalenter, d. h. der Größenordnung nach vergleichbarer Elemente, andrerseits die Ordnung der Elemente in den einzelnen Klassen. R. Baer [11] hat nun gezeigt, daß man die Klasseneinteilung im wesentlichen algebraisch fassen kann, und zwar lauten die Baerschen Ergebnisse in der Sprache der allgemeinen Bewertungstheorie folgendermaßen: Die nichtarchimedische Ordnung O von $\mathfrak{K}$ definiert eine ausgezeichnete Bewertung, die Ordnungsbewertung B_l. Allein

[8]) Vgl. Anm. 35 in § 8.

[9]) Im Sinne von A. S. ist allerdings ein allgemeiner reeller Körper $\mathfrak{K}$ zunächst nur ordenbar, nicht geordnet, und die weiteren Probleme, mit denen wir es zu tun haben, tauchen erst auf, wenn eine bestimmte Ordnung von $\mathfrak{K}$ vorgelegt ist.

[10]) H. Hahn, Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie, Math.-Nat. Klasse, Abt. IIa, **116** (1907), S. 601—653. Zitiert mit „H."

[11]) R. Baer, Über nicht-archimedisch geordnete Körper. (Beiträge zur Algebra. 1.) Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akademie 1927, 8. Abhandl. Zitiert mit „B".

auf B_l beruht die Festlegung der Klassen äquivalenter Elemente. Um in den einzelnen Klassen die Elemente zu ordnen, hat man im wesentlichen nur den durch B_l bestimmten Restklassenkörper zu ordnen, und zwar so, daß er auf einen gewöhnlichen reellen Zahlkörper abgebildet wird.

Betrachten wir nun unter Benutzung der Baerschen Ergebnisse die Stetigkeitseigenschaften, durch die die von Hahn untersuchten besonderen geordneten Körper ausgezeichet sind, so ergibt sich: Bei den Hahnschen Körpern ist einerseits der Restklassenkörper der Ordnungsbewertung B_l gleich dem Körper aller reellen Zahlen, und es sind andrerseits die Hahnschen Körper hinsichtlich B_l perfekt, ja sogar maximal. Durch die beiden genannten Eigenschaften ist aber ohne weiteres Konstruktionsverfahren eine Klasse K ausgezeichneter geordneter Körper abstrakt festgelegt, und es kann nach den Hahnschen Untersuchungen nicht zweifelhaft sein, daß gerade die Körper der Klasse K als passende Verallgemeinerungen des stetigen Körpers aller gewöhnlichen reellen Zahlen anzusehen sind. Von besonderem Vorteil bei unsrer bewertungstheoretischen Festlegung der Klasse K ist noch die Tatsache, daß auf Grund der Theorie der Galoisschen Erweiterungen perfekt bewerteter Körper sofort angegeben werden kann, wann ein Körper der Klasse K im Artinschen Sinne reell abgeschlossen ist und wann nicht. Will man nun einen genaueren Einblick in den Bau der Körper der Klasse K gewinnen, so kommt man naturgemäß auf die allgemeine Frage: Was kann man über die Struktur eines maximal bewerteten Körpers aussagen, wenn der Restklassenkörper und die Wertgruppe der Bewertung vorgegeben sind? Daß diese Frage bei speziell, und zwar diskret bewerteten Körpern erfolgreich angegriffen werden kann, zeigt eine demnächst in diesem Journal erscheinende Abhandlung von H. Hasse und F. K. Schmidt [12]). F. K. Schmidt hat außerdem für beliebig speziell bewertete Körper eine Reihe von wichtigen Ergebnissen gewonnen, und gerade die Schmidtschen Resultate [13]), die ich bisher nur aus mündlicher Mitteilung kenne, lassen mich hoffen, daß auch bei allgemein bewerteten Körpern das oben formulierte Strukturproblem einer erfolgreichen Behandlung fähig ist.

Im Rahmen dieses Programms erscheint die Weiterentwicklung der Theorie der geordneten Körper als ein — sogar verhältnismäßig einfacher — Spezialfall der Theorie der allgemein bewerteten Körper. Nur allein der Körper aller gewöhnlichen reellen Zahlen behauptet eine Sonderstellung, für ihn braucht man eben die gewöhnlichen archimedischen Bewertungen. Im übrigen können auch die „transzendentesten" geordneten Körper mit den vorwiegend der Algebra entnommenen Methoden unsrer allgemeinen Bewertungstheorie behandelt werden. Das erscheint mir, wie bereits zu Beginn der Einleitung hervorgehoben, als das wichtigste Ergebnis und die eigentliche Rechtfertigung der Einführung des allgemeinen Bewertungsbegriffs.

§ 1. Definition und Grundeigenschaften der allgemeinen Bewertungen.

$\mathfrak{K}$ bedeutet stets einen Körper, Γ eine Abelsche Gruppe mit der Addition als Verknüpfungsrelation und der 0 als Einheitselement. Elemente aus $\mathfrak{K}$ werden mit kleinen lateinischen, Elemente aus Γ mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Γ bzw. $\mathfrak{K}$ soll *linear geordnet* heißen, wenn zwischen den Elementen von Γ bzw. $\mathfrak{K}$ eine Ordnungsbeziehung definiert ist mit den üblichen charakteristischen Eigenschaften:

1. Sind α und β beliebige Elemente aus Γ (a und b beliebige Elemente aus $\mathfrak{K}$); so

[12]) Die Struktur diskret bewerteter Körper.

[13]) Vgl. Anm. 55 in § 12 und Anm. 57 in § 13.

gilt stets entweder $\alpha > \beta$, $\beta < \alpha$ oder $\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$ ($a > b$, $b < a$ oder $a < b$, $b > a$). — Aus $\alpha > \beta$, $\beta > \alpha$ ($a > b$, $b > a$) folgt $\alpha = \beta$ ($a = b$).

2. Ist $\alpha \geqq \gamma$, $\beta \geqq \delta$ ($a \geqq c$, $b \geqq d$), so ist stets auch $\alpha + \beta \geqq \gamma + \delta$ ($a + b \geqq c + d$, und außerdem $a \cdot b \geqq c \cdot d$, falls $a > 0$, $b > 0$). $\alpha(a)$ wird positiv oder negativ genannt, je nachdem ob $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$ ($a > 0$ oder $a < 0$). 0 selbst bezeichnen wir weder als positiv noch als negativ. — Gibt es zu $\alpha \geqq \beta > 0$ ($a \geqq b > c$) stets eine natürliche Zahl n so daß $n\beta > \alpha$ ($nb > a$), so soll Γ ($\mathfrak{K}$) *archimedisch* (geordnet) heißen. Ist Γ ($\mathfrak{K}$) archimedisch, so ist Γ ($\mathfrak{K}$) zu einer Untergruppe der Additionsgruppe (zu einem Unterkörper) der gewöhnlichen reellen Zahlen isomorph.

Von einer *Bewertung B von $\mathfrak{K}$ mit der Wertgruppe Γ* [14]) soll gesprochen werden, wenn jedem Element $a \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ eindeutig ein Element $\alpha = w(a)$ aus Γ als *Wert* zugeordnet ist, und wenn dabei folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. $w(a \cdot b) = w(a) + w(b)$. — 2. $w(a + b) \geqq \min(w(a), w(b))$. — 3. Zu jedem α aus Γ gibt es ein a aus $\mathfrak{K}$, so daß $\alpha = w(a)$ [15]). — Den trivialen Fall, daß Γ aus der 0 allein besteht, und daß jedes $a \neq 0$ den Wert 0 erhält, schließen wir von der Betrachtung aus.

Zu einer vorgegebenen linear geordneten Gruppe Γ gibt es stets Körper, die eine Bewertung B mit der Wertgruppe Γ besitzen. Am einfachsten zeigt man das so: $\mathfrak{K}_0$ sei irgendein Körper, u eine Variable. Bilden wir dann mit den Elementen α aus Γ formell die „Potenzen“ u^α und setzen wir insbesondere u^0 gleich dem Einheitselement 1 von $\mathfrak{K}_0$, so können wir mit den „Polynomen“ $p(u) = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \cdots + a_n u^{\alpha_n}$ (a_i aus $\mathfrak{K}_0$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i$) genau so rechnen wie mit gewöhnlichen Polynomen, bei denen die Exponenten ganze oder auch reelle Zahlen sind. Die Gesamtheit aller Polynome $p(u)$ bildet einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$, und die Gesamtheit aller „rationalen Funktionen“ $r(u) = \dfrac{p(u)}{q(u)}$ ($q(u) \neq 0$) stellt einen Körper $\mathfrak{K}$ dar. Zu jeder rationalen Funktion $r(u) \neq 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Exponenten α, der dadurch ausgezeichnet ist, daß sich $r(u)$ auf die Gestalt $r(u) = u^\alpha \dfrac{a_0 + a_1 u^{\alpha_1} + \cdots + a_n u^{\alpha_n}}{b_0 + b_1 u^{\beta_1} + \cdots + b_m u^{\beta_m}}$ ($\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$) bringen läßt. Ordnen wir jeweils $r(u)$ gerade diesen Exponenten als Wert zu, so erhalten wir eine Bewertung von $\mathfrak{K}$ mit der Wertgruppe Γ.

Die Gesamtheit der Elemente a, die in einer festen Bewertung B von $\mathfrak{K}$ nichtnegative Werte haben, bildet zusammen mit dem Nullelement einen echten Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$, den „*zu B gehörigen Bewertungsring*“.

Es seien nun B_1 und B_2 zwei Bewertungen von $\mathfrak{K}$ mit den Wertgruppen Γ_1 und Γ_2, zu denen der gleiche Bewertungsring $\mathfrak{B}$ gehört. Ordnen wir dann zwei Elemente α_1 und α_2 aus Γ_1 bzw. Γ_2 immer dann einander zu, wenn sie in B_1 bzw. B_2 Werte ein- und desselben Körperelementes a sind, so werden Γ_1 und Γ_2 eineindeutig und hinsichtlich der Addition und Ordnungsbeziehung isomorph aufeinander abgebildet. Es sind also Γ_1 und Γ_2 sowie B_1 und B_2 abstrakt identisch und man kann infolgedessen unbedenklich

---

[14]) In der Formulierung der Bewertungsaxiome schließe ich mich an an meine Arbeit: Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II. Math. Zeitschrift 31 (1930), S. 527-557. (Zitiert mit „K.“). Vgl. insbesondere § 1 Anm. 3 wo der Zusammenhang mit der üblichen Bewertungsdefinition genauer auseinandergesetzt ist. — Die Tatsache, daß bei unserer Bewertungsdefinition die 0 keinen Wert zugeordnet erhält, machte eigentlich an manchen Stellen gewisse Zusatzbemerkungen notwendig, die wir ihrer Selbstverständlichkeit halber weglassen. So z. B. muß bei der Bewertungseigenschaft 2 selbstverständlich $a, b, a + b \neq 0$ sein, ferner muß ein Bewertungsring auch die 0 enthalten u. dgl.

[15]) Die scharfe Forderung 3 hat zur Folge, daß man eindeutig von *der* zur Bewertung B gehörigen Wertgruppe reden kann.

von *der* zu einem gegebenen Bewertungsring gehörigen Bewertung bzw. Wertgruppe sprechen [16]).

Satz 1. *Ein echter Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn $\mathfrak{B}$ den Körper $\mathfrak{K}$ zum Quotientenkörper hat und wenn in $\mathfrak{B}$ von zwei Elementen a_1 und a_2 stets (mindestens) eines durch das andre teilbar ist.*

a) Es sei $\mathfrak{B}$ zur Bewertung B gehöriger Bewertungsring. Dann ist jedes Element aus $\mathfrak{K}$ entweder Element aus $\mathfrak{B}$ oder Reziprokes eines Elementes aus $\mathfrak{B}$, weil a^{-1} in B einen positiven Wert hat, falls der Wert von a in B negativ ist. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{B}$ darstellt, und daß für irgend zwei Elemente a_1 und a_2 aus $\mathfrak{B}$ stets einer der Quotienten $a_1 a_2^{-1}$ und $a_2 a_1^{-1}$ zu $\mathfrak{B}$ gehört. Das sagt aber nichts anderes, als daß in $\mathfrak{B}$ entweder a_1 durch a_2 oder a_2 durch a_1 teilbar ist, d. h. der Bewertungsring $\mathfrak{B}$ genügt den charakteristischen Bedingungen von Satz 1.

b) Es seien umgekehrt diese Bedingungen für den irgendwie vorgegebenen Ring $\mathfrak{B}$ erfüllt. Dann müssen wir zu $\mathfrak{B}$ eine zugehörige Bewertung B und eine zugehörige Wertgruppe Γ konstruieren. Wir machen das so: Unter einer Klasse α^* hinsichtlich $\mathfrak{B}$ assoziierter Elemente aus $\mathfrak{K}$ verstehen wir — im wesentlichen in Übereinstimmung mit der üblichen Terminologie — die Gesamtheit der Elemente, die aus einem festen Element $a \neq 0$ durch Multiplikation mit den Einheiten von $\mathfrak{B}$ entstehen. Für die Klassen α^* definieren wir dann Addition und Ordnungsbeziehung folgendermaßen: Die Klassen α^* und β^* werden addiert, indem man zwei beliebige ihrer Repräsentanten multipliziert und die durch das Produkt bestimmte Klasse bildet. Die Klasse α^* soll größer heißen als die Klasse β^*, wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ eines Repräsentanten a von α^* durch einen Repräsentanten b von β^* zu $\mathfrak{B}$ gehört. — Durch diese Festsetzungen wird in Anbetracht der besonderen Eigenschaften des Ringes $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit Γ^* aller Klassen α^* zu einer linear geordneten Gruppe. Ordnen wir jedem Körperelement $a \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ die durch a bestimmte Klasse α^* als Wert zu, so erhalten wir eine Bewertung B von $\mathfrak{K}$ mit der Wertgruppe Γ^* und dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$. — Die Definition der Werte durch Klassen assoziierter Elemente zeigt deutlich den Vorteil der abstrakten Fassung des Begriffes der Wertgruppe.

Satz 1 führt uns zu einer für später sehr wichtigen Anwendung des allgemeinen Bewertungsbegriffs.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein linear geordneter Körper, und es werde wie üblich in $\mathfrak{K}$ das Element a unendlich groß genannt gegenüber b, wenn für keine natürliche Zahl n jemals $n\,|b| > |a| \cdot \left(|a| = \begin{cases} a(a>0) \\ -a(a<0) \end{cases}\right)$. Dann bildet die Gesamtheit derjenigen Körperelemente, die gegenüber dem Einheitselement 1 nicht unendlich groß sind, einen Unterring $\mathfrak{B}_l$ von $\mathfrak{K}$, und zwar ist $\mathfrak{B}_l$ immer dann ein echter Unterring, wenn $\mathfrak{K}$ nichtarchimedisch geordnet ist. In diesem Falle muß $\mathfrak{B}_l$ nach Satz 1 Bewertungsring sein. Sind nämlich a und b zwei Elemente aus $\mathfrak{B}_l$ oder allgemeiner auch aus $\mathfrak{K}$, so ist stets höchstens einer der Quotienten $a \cdot b^{-1}$ und $b \cdot a^{-1}$ unendlich groß gegenüber 1. Es gilt also: *Zu jedem nichtarchimedisch geordneten Körper $\mathfrak{K}$ gehört eine ausgezeichnete, allein durch die Ordnung bestimmte Bewertung B_l von $\mathfrak{K}$. Ihr zugehöriger Bewertungsring $\mathfrak{B}_l$ besteht aus allen den Elementen, die in der gegebenen Ordnung gegenüber der 1 nicht unendlich groß sind* [17]).

---

[16]) Zur eindeutigen Bestimmtheit von B und Γ durch $\mathfrak{B}$ vgl. K., S. 536, Satz 6.

[17]) Vgl. hierzu insbesondere B., § 2.

Die volle Bedeutung unseres Resultats wird sich erst in § 12 zeigen. Zunächst wenden wir uns zu einer genaueren idealtheoretischen Untersuchung der Bewertungsringe.

§ 2. Idealtheorie der Bewertungsringe.

Für den Fall, daß die zu dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ gehörige Wertgruppe Γ archimedisch, also zu einer reellen Zahlgruppe isomorph ist, habe ich die Idealtheorie von $\mathfrak{B}$ schon früher entwickelt [18]). Die damals benützten Methoden lassen sich fast unmittelbar auf den allgemeinen Fall anwenden, wir müssen nur zunächst den von den reellen Zahlen her bekannten Begriff des Schnittes für beliebige linear geordnete Gruppen definieren. Es genügt sogar für unsere Zwecke, wenn wir gar nicht die vollen Schnitte, sondern nur die zugehörigen Oberklassen einführen.

Unter einer *Oberklasse* Ω aus der linear geordneten Gruppe Γ verstehen wir eine Untermenge von Γ, die ausschließlich aus nichtnegativen Elementen besteht, und gleichzeitig mit α stets auch jedes $\beta > \alpha$ enthält. Als Summe $\Omega_1 + \Omega_2$ der Oberklassen Ω_1 und Ω_2 bezeichnen wir diejenige Oberklasse, die alle und nur die in der Form $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$ (α_1 aus Ω_1, α_2 aus Ω_2) darstellbaren Elemente β umfaßt. Von zwei beliebigen Oberklassen Ω_1 und Ω_2 ist stets eine Obermenge der andern. Ist etwa Ω_1 Obermenge von Ω_2, so gibt es eine der Gleichung $\Omega_1 + \Omega_3 = \Omega_2$ genügende Oberklasse Ω_3 dann und nur dann, wenn entweder Ω_1 ein kleinstes Element besitzt, oder weder Ω_1 noch Ω_2 ein kleinstes Element enthalten. (Beweis nach dem Vorbild entsprechender Beweise bei reellen Zahlen.)

Es sei jetzt B bzw. Γ die zu dem gegebenen Bewertungsring $\mathfrak{B}$ gehörige Bewertung bzw. Wertgruppe. „Wert von a" schlechtweg bedeute stets „Wert von a in B". Dann gilt:

Satz 2. *Die Ideale aus $\mathfrak{B}$ entsprechen eindeutig umkehrbar den Oberklassen aus Γ; das der Oberklasse Ω zugeordnete Ideal besteht aus der Null und allen den Elementen, deren Wert zu Ω gehört* [19]). — *Die Oberklasse des Produktes ist gleich der Summe der Oberklassen der Faktoren. — Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist Hauptideal, wenn die zugeordnete Oberklasse Ω ein kleinstes Element enthält; gibt es dagegen in Ω kein kleinstes Element, so besitzt $\mathfrak{a}$ keine endliche Basis.*

Von zwei Idealen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ist stets eines Teiler des andern. Ist etwa $\mathfrak{a}_1$ Teiler von $\mathfrak{a}_2$, so ist $\mathfrak{a}_1$ Faktor von $\mathfrak{a}_2$ dann und nur dann, wenn entweder $\mathfrak{a}_1$ Hauptideal ist, oder $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beide keine endliche Basis besitzen.

Die Beweise der einzelnen Behauptungen von Satz 2 können übergangen werden. Sie ergeben sich ohne Schwierigkeit aus den Definitionen von Bewertung und Oberklasse und verlaufen grundsätzlich genau so wie bei den archimedischen Wertgruppen [20]).

Es sollen jetzt die (von $\mathfrak{B}$ selbst verschiedenen) Primideale aus $\mathfrak{B}$ bestimmt werden. *Ein Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{B}$ ist Primideal, wenn es gleichzeitig mit a^ϱ stets auch a selbst enthält.* Es seien nämlich a_1 und a_2 zwei Elemente aus $\mathfrak{B}$, deren Produkt durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist; wählen wir dann, was ja in dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ möglich ist, die Bezeichnung so, daß a_1 durch a_2 teilbar ist, so muß auch a_1^2 und damit nach Voraussetzung a_1 in $\mathfrak{p}$ enthalten sein, d. h. ist ein Produkt durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so auch mindestens ein Faktor. — Zu einer genaueren Übersicht über die Gesamtheit der Primideale von $\mathfrak{B}$ kommen wir auf Grund

---

[18]) Vgl. K., § 3. Dort werden allgemeine Ideale, d. h. beliebige $\mathfrak{B}$-Moduln in den Bewertungsringen spezieller Bewertungen untersucht. Im Text betrachten wir der Kürze halber ausschließlich „ganze" Ideale, d. h. solche $\mathfrak{B}$-Moduln, die Untermengen von $\mathfrak{B}$ sind. Doch gilt Satz 2 auch für allgemeine Ideale, wenn man nur bei der Definition der Oberklassen die Forderung wegläßt, daß sie ausschließlich aus nicht negativen Elementen bestehen sollen.

[19]) Unter „Ideal" ohne weiteren Zusatz verstehen wir im folgenden stets ein vom Nullideal (0) und vom Einheitsideal (1) verschiedenes Ideal. Bei Satz 2 ist allerdings das Einheitsideal in der Idealreihe mitzurechnen.

[20]) Vgl. K., § 3, insbesondere Satz 7 und 8 nebst Beweisen.

folgender Definition: *Eine echte Untergruppe Δ der linear geordneten Gruppe Γ soll „isolierte Untergruppe" heißen, wenn Δ gleichzeitig mit $\gamma > 0$ stets auch jedes der Ungleichung $\gamma > \delta > 0$ genügende Element δ enthält.*

Satz 3. *Die Primideale von $\mathfrak{B}$ entsprechen eindeutig umkehrbar den isolierten Untergruppen von Γ. Das der isolierten Untergruppe Δ zugeordnete Primideal $\mathfrak{p}$ besteht aus der Null und allen den Elementen von $\mathfrak{B}$, deren Wert nicht zu Δ gehört.*

Zum Beweis beachte man: Eine Untergruppe Δ von Γ ist offenbar dann und nur dann eine isolierte Untergruppe, wenn das System der nicht zu Δ gehörigen positiven Elemente in Γ eine Oberklasse bildet. — Ein Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann Primideal, wenn das System der nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Elemente aus $\mathfrak{B}$ multiplikativ abgeschlossen ist, d. h. gleichzeitig mit a_1 und a_2 stets auch $a_1 \cdot a_2$ enthält. Für den Bewertungsring $\mathfrak{B}$ kann man diese allgemeine Primidealbedingung mit Hilfe von Satz 2 folgendermaßen umformen: Ist Ω die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Oberklasse, so müssen die nicht in Ω vorkommenden positiven Elemente von Γ zusammen mit ihren Reziproken und der Null eine Gruppe bilden.

Aus diesen Überlegungen folgt sofort die Richtigkeit von Satz 3. Wenden wir unsern Satz insbesondere auf den Fall einer archimedischen Wertgruppe an, in der nur die Nullgruppe eine isolierte Untergruppe darstellt, so erhalten wir die bekannte Tatsache, *daß in einem Bewertungsring mit archimedischer Wertgruppe nur ein einziges Primideal existiert, und daß infolgedessen in einem derartigen Ring jedes Ideal Primärideal ist.* Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Wertgruppe Γ nichtarchimedisch ist, und wenn infolgedessen in $\mathfrak{B}$ mindestens zwei Primideale vorkommen.

Satz 4. *Ist in $\mathfrak{B}$ das Hauptideal (a) durch mindestens zwei Primideale teilbar, so ist (a) weder Primärideal noch auch als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Primäridealen darstellbar.*

Es seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ zwei verschiedene Primidealteiler von (a), und zwar sei $\mathfrak{p}'$ Teiler von $\mathfrak{p}$; b bedeute ein durch $\mathfrak{p}'$ aber nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbares Element. Dann gehört $a \cdot b^{-1}$ nicht zu (a), und Satz 4 wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß jeder Primäridealteiler von (a) das Element $a \cdot b^{-1}$ enthalten muß. Da b durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist, ist auch b^{ν} für beliebiges ν durch $\mathfrak{p}$ und damit durch (a) unteilbar. Nach der Grundeigenschaft der Bewertungsringe ist infolgedessen a durch alle Potenzen von b teilbar, d. h. es gehört $a \cdot b^{-\nu}$ für jedes ν zu $\mathfrak{B}$. Ist nun $\mathfrak{q}$ irgendein Primäridealteiler von (a), so enthält er entweder eine Potenz von b, etwa b^{ν}, und damit auch $(a \cdot b^{-(\nu+1)}) \cdot b^{\nu} = a \cdot b^{-1}$, oder aber er enthält keine Potenz von b, dann folgt aus $(a \cdot b^{-1}) \cdot b = a \equiv 0(\mathfrak{q})$ sofort $a \cdot b^{-1} \equiv 0(\mathfrak{q})$.

Satz 2 und 3 zeigen, daß man die Gesamtheit der Ideale des Bewertungsringes $\mathfrak{B}$ vollständig übersieht, wenn man nur die Struktur der zugehörigen Wertgruppe Γ kennt. Aus Satz 4 dagegen ist zu ersehen, daß die Methoden, die das Hauptthilfsmittel zur Untersuchung der Ringe mit Teilerkettensatz bilden, bei den Bewertungsringen völlig versagen. Man könnte in dieser Richtung noch weiter gehen; man könnte nämlich am Beispiel der Bewertungsringe die Tragweite und Grenzen von solchen Methoden untersuchen, die zwar auf Ringe ohne Endlichkeitsvoraussetzung anwendbar sind, die sich aber im wesentlichen nach dem Vorbild der bekannten Theorie der Ringe mit Teilerkettensatz richten. Indessen gehen wir im folgenden auf die hier auftauchenden Fragen nicht näher ein. Nur die Unterschiede zwischen den verschiedenen, bei Ringen mit Teilerkettensatz gleichwertigen Definitionen des Begriffes „ganz abgeschlossen" werden in § 4 mit Hilfe der Bewertungsringe in allgemeinerem Rahmen scharf herausgearbeitet.

§ 3. Kennzeichnung der ganz abgeschlossenen Ringe.

Das Element p soll wie üblich *vom Ringe* $\mathfrak{R}$ *ganz abhängig* heißen, wenn es einer Gleichung $p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{R}$ genügt; $\mathfrak{R}$ wird *ganz abgeschlossen* genannt, wenn jedes von $\mathfrak{R}$ ganz abhängige Element aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ bereits zu $\mathfrak{R}$ selbst gehört. Bezeichnen wir für beliebiges a mit $\mathfrak{R}[a]$ stets den Ring aller Polynome in a mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, so können wir die von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente auch folgendermaßen charakterisieren:

Das Element p hängt von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann ganz ab, wenn p^{-1} in $\mathfrak{R}[p^{-1}]$ Einheit ist.

In der Tat, $p^n - a_1 p^{n-1} - \cdots - a_n = 0$ ist vollkommen gleichwertig mit $1 = p^{-1} \cdot (a_1 + a_2 p^{-1} + \cdots + a_n (p^{-1})^{n-1})$ und das Bestehen einer Gleichung der letzteren Form mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{R}$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß p^{-1} in $\mathfrak{R}[p^{-1}]$ Einheit. — Aus unserm Kriterium für ganz abhängige Elemente folgt sofort:

Ist a Nichteinheit in $\mathfrak{R}$, so kann a^{-1} niemals von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen.

Wäre nämlich a^{-1} von $\mathfrak{R}$ ganz abhängig, so müßte $a = (a^{-1})^{-1}$ in $\mathfrak{R}[a] = \mathfrak{R}$ gegen Voraussetzung Einheit sein.

Satz 5. *Ein echter Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn in $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der Nichteinheiten ein Ideal bildet, und wenn in $\mathfrak{K}$ jeder echte Oberring von $\mathfrak{B}$ mindestens ein Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{B}$ enthält* [20a]).

Daß jeder Bewertungsring die in Satz 5 angegebenen Eigenschaften besitzt, ist klar nach § 1. — Ist umgekehrt $\mathfrak{B}$ irgendein Ring mit diesen Eigenschaften, so muß zunächst $\mathfrak{B}$ ganz abgeschlossen sein. Denn der Ring $\mathfrak{B}^*$ aller von $\mathfrak{B}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$ muß mit $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, weil er sicher kein einziges Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{B}$ enthält. Es seien ferner a_1 und a_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{B}$, und es sei etwa a_2 nicht in $\mathfrak{B}$ durch a_1 teilbar, also $a_2 \cdot a_1^{-1} = p$ nicht Element von $\mathfrak{B}$. Bilden wir dann $\mathfrak{B}[p]$, so muß in $\mathfrak{B}[p]$ das Reziproke a^{-1} einer gewissen Nichteinheit a aus $\mathfrak{B}$ auftreten, es muß also eine Gleichung $a^{-1} = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{B}$ gelten. Diese Gleichung kann aber in die Form $(a_0 \cdot a - 1) \cdot (p^{-1})^n + a_1 \cdot a \cdot (p^{-1})^{n-1} + \cdots + a_n \cdot a = 0$ gebracht werden, und hier muß wegen der besonderen Eigenschaften von $\mathfrak{B}$ der Koeffizient $a_0 \cdot a - 1$ als Differenz einer Nichteinheit und einer Einheit selbst Einheit sein. Es ist also p von $\mathfrak{B}$ ganz abhängig und somit nach dem bereits Bewiesenen Element von $\mathfrak{B}$. — Wir haben jetzt gezeigt: Sind a_1 und a_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{B}$, so ist in $\mathfrak{B}$ entweder a_1 durch a_2 oder a_2 durch a_1 teilbar. Nach Satz 1 muß $\mathfrak{B}$ daher Bewertungsring sein. — Mit Hilfe von Satz 5 bewiesen wir weiter:

Satz 6. *Zu jedem echten Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ gibt es (mindestens) einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, der $\mathfrak{R}$ enthält.*

Es sei a eine beliebige Nichteinheit aus $\mathfrak{R}$. Dann existiert, wie aus trivialen Wohlordnungsschlüssen zu ersehen, in $\mathfrak{K}$ mindestens ein Ring $\mathfrak{B}$, der $\mathfrak{R}$, aber nicht a^{-1} enthält, und der außerdem die Eigenschaft hat, daß a^{-1} in jedem echten Oberring von $\mathfrak{B}$ vorkommt. $\mathfrak{B}$ wird nach Satz 5 Bewertungsring sein, wenn die Gesamtheit der Nichteinheiten in $\mathfrak{B}$ ein Ideal bildet. Es sei nun $\mathfrak{p}$ irgendein Primidealteiler von a in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ bedeute den Ring aller der Elemente, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ mit durch $\mathfrak{p}$ unteilbarem Nenner schreiben lassen. Dann enthält $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ das Element a^{-1} nicht, und es muß daher $\mathfrak{B}_\mathfrak{p} = \mathfrak{B}$ sein. Das ist aber nur möglich, wenn $\mathfrak{p}$ gerade aus *allen* Nichteinheiten von $\mathfrak{B}$ besteht.

[20a]) In Satz 5—8 bedeutet $\mathfrak{K}$ stets den gemeinsamen Quotientenkörper aller betrachteten Ringe.

Satz 7. *Ein echter Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ läßt sich dann und nur dann als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Bewertungsringen darstellen, wenn er ganz abgeschlossen ist.*

Daß alle Bewertungsringe und damit auch alle Durchschnitte von Bewertungsringen ganz abgeschlossen sind, wurde beim Beweise von Satz 5 mitbewiesen. Es sei jetzt umgekehrt $\mathfrak{R}$ irgendein ganz abgeschlossener Ring, a ein nicht in $\mathfrak{R}$ vorkommendes Element aus $\mathfrak{K}$. Dann haben wir nur zu zeigen, daß mindestens ein Bewertungsring $\mathfrak{B}$ existiert, der zwar $\mathfrak{R}$, aber nicht a enthält. Wir bilden $\mathfrak{R}[a^{-1}]$; in diesem Ringe kann a nicht vorkommen, denn andernfalls wäre a^{-1} in $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ Einheit, und es müßte daher a von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen und damit gegen Voraussetzung in $\mathfrak{R}$ enthalten sein. Da also a^{-1} in $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ Nichteinheit ist, gibt es nach dem Beweise von Satz 6 einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, der Obermenge von $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ also erst recht auch von $\mathfrak{R}$ ist, in dem aber a nicht vorkommt. Damit ist schon alles bewiesen. — Um die Bedeutung von Satz 7 noch klarer hervortreten zu lassen, führen wir den Begriff der *Hauptordnung* ein. Der Ring $\mathfrak{R}$ soll Hauptordnung heißen, wenn in $\mathfrak{R}$ über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente durch Einführung von Bewertungen entschieden werden kann, d. h. wenn sich (endlich oder unendlich viele) Bewertungen B_τ des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ so definieren lassen, daß der folgende Satz gilt: In $\mathfrak{R}$ ist das Element a dann und nur dann durch das Element b teilbar, wenn a in keiner der Bewertungen B_τ einen kleineren Wert besitzt als b [21]).

Man sieht ohne Schwierigkeit, daß der Ring $\mathfrak{R}$ dann und nur dann Hauptordnung ist, wenn er als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\tau$ dargestellt werden kann. Aus Satz 7 ergibt sich daher:

Satz 7*. *Ein echter Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Hauptordnung, wenn er ganz abgeschlossen ist.*

Wie man in plausibler und naheliegender Weise zu dem Begriff der Hauptordnung gelangt, habe ich bereits früher ausführlich auseinandergesetzt [21]). Doch konnte ich dort die Hauptordnungen nicht so einfach und befriedigend charakterisieren, wie es hier durch Satz 7* geschehen ist. Der Grund für diesen Mangel meiner früheren Arbeit lag einfach darin, daß ich damals nur Bewertungen mit archimedischer Wertgruppe in den Kreis der Betrachtung zog. Satz 7* zeigt also, daß die Einführung der allgemeinen Bewertungen nicht nur naheliegend, sondern auch für die naturgemäße Behandlung mancher arithmetischer Probleme schlechtweg notwendig ist.

§ 4. „Ganz" und „fast ganz" abgeschlossen.

Ein Element p ist offenbar vom Ringe $\mathfrak{R}$ dann und nur dann ganz abhängig, wenn der Ring $\mathfrak{R}[p]$ über $\mathfrak{R}$ eine endliche Modulbasis besitzt, d. h. wenn sich alle Elemente aus $\mathfrak{R}[p]$ als Linearformen in endlich vielen festen Elementen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ darstellen lassen. Im Anschluß an diese Bemerkung definieren wir jetzt weiter:

Das Element p aus $\mathfrak{K}$ soll von $\mathfrak{R}$ „fast ganz abhängig" heißen, wenn $\mathfrak{R}[p]$ zwar nicht notwendig über $\mathfrak{R}$ eine endliche Modulbasis besitzt, wenn sich aber wenigstens alle Elemente aus $\mathfrak{R}[p]$ als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{R}$ mit festem Nenner darstellen lassen, d. h. wenn in $\mathfrak{R}$ ein festes Element $n \neq 0$ existiert, für das die Produkte $n \cdot p^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sämtlich zu $\mathfrak{R}$ gehören. Der Ring $\mathfrak{R}$ soll „voll und ganz abgeschlossen" heißen, wenn alle von $\mathfrak{R}$ fast ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$ bereits in $\mathfrak{R}$ vorkommen.

Alle von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$ hängen von $\mathfrak{R}$ auch fast ganz ab, und es ist daher jeder voll und ganz abgeschlossene Ring stets auch ganz abgeschlossen.

21) Vgl. die analoge Definition in K., § 1.

Gilt in $\mathfrak{R}$ der Noethersche Teilerkettensatz, so ist auch die Umkehrung richtig; die Begriffe „ganz abhängig“ und „fast ganz abhängig“, „ganz abgeschlossen“ und „voll und ganz abgeschlossen“ fallen dann zusammen [22]). Daß aber die Verhältnisse nicht bei allen Ringen so einfach liegen, zeigt das Beispiel der Bewertungsringe. Daß alle Bewertungsringe ganz abgeschlossen sind, wurde bereits in § 3 gezeigt. Andrerseits aber gilt:

Satz 8. *Ein Bewertungsring $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann voll und ganz abgeschlossen, wenn er eine archimedische Wertgruppe besitzt.*

In der Tat, ist die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Wertgruppe Γ nichtarchimedisch, und bedeutet B die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Bewertung, so können wir zwei Elemente p und n so bestimmen, daß p in B einen negativen Wert $-\alpha$ besitzt, während der positive Wert β von n „gegenüber α unendlich groß“ ist, d. h. für jedes ganzzahlige i der Ungleichung $\beta > i\,\alpha$ genügt. Dann ist p kein Element von $\mathfrak{B}$, es hängt aber p von $\mathfrak{B}$ fast ganz ab, weil die sämtlichen Produkte $n \cdot p^i (i = 1, 2, \ldots)$ zu $\mathfrak{B}$ gehören.

Ist umgekehrt die Wertgruppe Γ archimedisch, und sind p und n zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{K}$ von negativem bzw. positivem Werte in B, so wird für hinreichend großes i der Wert von $n \cdot p^i$ stets negativ. Es muß also diesmal jedes von $\mathfrak{B}$ fast ganz abhängige Element in B einen nichtnegativen Wert besitzen und somit selbst Element von $\mathfrak{B}$ sein. — Satz 8 legt die Vermutung nahe, daß Satz 7 in folgender Weise ergänzt werden kann:

Der Ring $\mathfrak{R}$ läßt sich dann und nur dann als Durchschnitt von Bewertungsringen mit archimedischen Wertgruppen darstellen, wenn er voll und ganz abgeschlossen ist.

Ist diese Vermutung richtig, so sind damit die speziellen Hauptordnungen, mit denen ich mich in meiner früheren Arbeit beschäftigte, in befriedigender Weise charakterisiert. Indessen macht der Beweis Schwierigkeiten, die ich bisher nicht überwinden konnte, und zwar wesentlich deshalb, weil die Betrachtungen des ersten Abschnittes von § 3 für fast ganz abhängige Elemente und voll und ganz abgeschlossene Ringe nicht mehr allgemein gelten. So kann es ja — wie das Beispiel der Bewertungsringe mit nichtarchimedischer Wertgruppe zeigt — vorkommen, daß der zum Ringe $\mathfrak{R}$ gehörige voll und ganz abgeschlossene Ring $\mathfrak{R}^*$ Reziproke von Nichteinheiten aus $\mathfrak{R}$ enthält.

Es ist in diesem Zusammenhange bemerkenswert, *daß wir sogar einen Bewertungsring $\mathfrak{B}_\omega$ angeben können, dessen zugehöriger voll und ganz abgeschlossener Ring mit dem Körper $\mathfrak{K}$ zusammenfällt.*

Es sei nämlich Γ_ω eine linear geordnete Gruppe, in der es zu jedem $\alpha > 0$ ein gegenüber α unendlich großes Element β gibt [23]). Dann existiert nach § 1 in einem geeigneten Körper $\mathfrak{K}$ ein Bewertungsring $\mathfrak{B}_\omega$ mit der Wertgruppe Γ_ω. Wenden wir nun auf $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{B}_\omega$ die beim Beweise von Satz 8 benutzten Schlüsse an, so sehen wir, daß tatsächlich alle Elemente von $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{B}_\omega$ fast ganz abhängen müssen. — Nennen wir ferner einen echten Unterring $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ Maximalring, falls in $\mathfrak{K}$ außer $\mathfrak{K}$ selbst kein echter Oberring von $\mathfrak{M}$ existiert, so können wir feststellen, *daß es in $\mathfrak{K}$ keinen Maximalring gibt, der $\mathfrak{B}_\omega$ als Untermenge enthält.* Denn die Maximalringe sind, wie ich früher gezeigt habe [24]), gerade mit den Bewertungsringen mit archimedischer Wertgruppe identisch, und somit nach Satz 8 voll und ganz abgeschlossen. Ein $\mathfrak{B}_\omega$ enthaltender Maximalring müßte daher im Widerspruch zur Definition der Maximalringe mit dem Körper $\mathfrak{K}$ identisch

[22]) Bei der Behandlung der Ringe mit Teilerkettensatz werden dementsprechend auch die beiden Definitionen als gleichwertig gebraucht, ja es wird sogar die Definition, durch die wir die „fast ganz“ abhängigen Elemente festgelegt haben, vielfach bevorzugt. — Vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. Math. Annalen **96** (1926), S. 31/32. — W. Krull, Theorie der Zahlringe. Math. Annalen **99** (1928). — v. d. Waerden, Moderne Algebra II (1931), § 38.

[23]) Zur Existenz solcher Gruppen vgl. die erste Hälfte von § 5.

[24]) K., § 2.

sein. Das zuletzt gewonnene Ergebnis ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil es sozusagen eine negative Ergänzung des Satzes 6 von § 3 darstellt.

Es soll jetzt noch mit Hilfe von Satz 8 die Tragweite des „*Artinschen Äquivalenzbegriffes*“ [25]) genauer untersucht werden. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus dem Ringe $\mathfrak{R}$, so bezeichne wie üblich $\mathfrak{a}^{-1}$ das „gebrochene Ideal“ aller der Elemente aus $\mathfrak{K}$, deren Produkte mit den Elementen aus $\mathfrak{a}$ sämtlich zu $\mathfrak{R}$ gehören. Artin nennt dann zwei Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ aus $\mathfrak{R}$ äquivalent, wenn $\mathfrak{a}_1^{-1} = \mathfrak{a}_2^{-1}$ ist, und beweist den wichtigen Satz:

Ist $\mathfrak{R}$ voll und ganz abgeschlossen, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ für beliebige $\mathfrak{a}$ stets zu $\mathfrak{R}$ äquivalent (also $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{R}$).

Mit Hilfe von Satz 8 können wir nun das Artinsche Ergebnis folgendermaßen ergänzen:

Die Äquivalenz von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ und $\mathfrak{R}$ gilt allgemein nur für voll und ganz abgeschlossene Ringe, dagegen nicht für beliebige ganz abgeschlossene Ringe.

Es sei nämlich $\mathfrak{B}$ ein Bewertungsring mit der zugehörigen Bewertung B und der nichtarchimedischen Wertgruppe Γ, α und β seien positive Elemente aus Γ, und zwar sei α unendlich groß gegenüber β. Dann bildet die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{B}$, deren Werte gegenüber β unendlich groß sind, zusammen mit der Null ein Ideal und zwar nach Satz 3 von § 2 ein Primideal $\mathfrak{p}$. Wir behaupten nun:

Es ist $\mathfrak{p}^{-1} \neq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}$; $\mathfrak{p}$ ist also nicht zu $\mathfrak{B}$ äquivalent.

In der Tat, es sei a bzw. b eine durch $\mathfrak{p}$ teilbare bzw. eine durch $\mathfrak{p}$ unteilbare Nichteinheit aus $\mathfrak{B}$. Dann gehört einerseits b^{-1} zu $\mathfrak{p}^{-1}$, und es ist sogar $a \cdot b^{-1}$ stets Element von $\mathfrak{p}$. Andrerseits kann a^{-1} niemals zu $\mathfrak{p}^{-1}$ gehören, weil $a \cdot b^{-1}$ Element von $\mathfrak{p}$, aber $b^{-1} = a^{-1} \cdot (a \cdot b^{-1})$ kein Element von $\mathfrak{B}$ ist. Daraus folgt bereits die zu beweisende Behauptung, denn es ist ja jedes Element von $\mathfrak{K}$ entweder Element von $\mathfrak{B}$ oder Reziprokes einer Nichteinheit aus $\mathfrak{B}$.

§ 5. Zusammensetzung und Aufspaltung allgemeiner und spezieller Bewertungen.

Daß zu einer beliebigen linear geordneten Gruppe Γ stets Körper existieren, die eine Bewertung mit der Wertgruppe Γ besitzen, wurde bereits in § 1 gezeigt. Dagegen haben wir noch nicht untersucht, wie man feststellen kann, welche Bewertungstypen bei einem gegebenen Körper $\mathfrak{K}$ vorkommen. Wir werden diese Frage für einen einfachen und wichtigen Spezialfall in § 6 ausführlich behandeln. Als Hilfsmittel brauchen wir dabei einige allgemeine Sätze über den Aufbau von linear geordneten Gruppen und Bewertungen, die jetzt kurz abgeleitet werden sollen.

Bereits in § 2 wurde der Begriff der isolierten Untergruppen Δ einer linear geordneten Gruppe Γ eingeführt. Nennen wir die isolierte Untergruppe Δ_1 größer als die isolierte Untergruppe Δ_2, falls Δ_1 Obermenge von Δ_2 ist, *so bilden die isolierten Untergruppen von Γ eine linear geordnete Menge, deren Ordnungstypus O_Γ eine charakteristische Invariante von Γ dargestellt.* Die einfachsten Fälle liegen vor, wenn Γ nur endlich viele, etwa n, isolierte Untergruppen enthält. Wir sagen dann, Γ habe den *Rang n.* Zu jeder Rangzahl n gehört eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte einfachste Gruppe Γ_n^*, die „*diskrete*“ [26]) *Gruppe des Ranges n.* Γ_n^* besteht aus der Gesamtheit der ganzzahligen

[25]) Vgl. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, § 103, wo übrigens von „quasigleichen“ anstatt von „äquivalenten“ Idealen gesprochen wird.

[26]) Das Wort „diskret“ wurde gewählt, weil nach unserer Definition eine archimedische Gruppe dann und nur dann diskret ist, wenn sie zyklisch ist, und weil die speziellen Bewertungen mit zyklischer Wertgruppe diskret genannt werden.

Linearformen in n linear unabhängigen Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mit der Ordnungsdefinition: „$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n > l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n$ dann und nur dann, wenn $m_i > l_i$, falls $m_n = l_n, m_{n-1} = l_{n-1}, \ldots, m_{n-i+1} = l_{n-i+1}, m_i \neq l_i$". — Betrachtet man alle Linearformen in abzählbar unendlich vielen linear unabhängigen Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und benützt man die gleiche Ordnungsdefinition wie bei Γ_n^*, so erhält man eine linear geordnete Gruppe Γ_ω^*, bei der die isolierten Untergruppen eine abzählbare Menge vom Ordnungstypus ω bilden. Γ_ω^* kann zur Konstruktion des Bewertungsringes $\mathfrak{B}_\omega$ von § 4 benutzt werden. —

Ist Δ isolierte Untergruppe der linear geordneten Gruppe Γ, so können wir die Quotientengruppe Γ/Δ dadurch zu einer gleichfalls linear geordneten Gruppe machen, daß wir die Restklasse $\bar{\alpha}$ aus Γ/Δ für größer erklären als die Restklasse $\bar{\beta}$, falls irgendein Repräsentant von $\bar{\alpha}$ in Γ größer ist als irgendein Repräsentant von $\bar{\beta}$.

Die verschiedenen isolierten Untergruppen von Γ/Δ entstehen dann durch Quotientenbildung nach Δ aus denjenigen isolierten Untergruppen von Γ, die Δ als Untermenge enthalten. Daraus folgt:

Der Ordnungstypus O_Γ ist (in einem leicht zu präzisierenden Sinn) gleich der Summe der Ordnungstypen O_Δ und $O_{\Gamma/\Delta}$ [27]). Hat Γ endlichen Rang n, so besitzen auch Δ und Γ/Δ endliche Rangzahlen n_1 und n_2, und es ist $n = n_1 + n_2$.

Ferner erhalten wir folgende Charakterisierung der diskreten Gruppen endlichen Ranges:

Die Gruppe $\Gamma_n = \Delta_n$ vom Range n mit den nach absteigender Größe geordneten isolierten Untergruppen $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \ldots, \Delta_0$ ist dann und nur dann diskret, wenn die Gruppen Δ_i/Δ_{i-1} $(i = n, n-1, \ldots, 1)$ sämtlich zur Additionsgruppe der ganzen Zahlen isomorph sind.

Ist nämlich einerseits $\Delta_n = \Gamma_n^*$ eine diskrete Gruppe in der Normalform, so besteht Δ_i gerade aus allen ganzzahligen linearen Verbindungen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$, und es ist Δ_i/Δ_{i-1} zur Gruppe der ganzzahligen Vielfachen von α_i und damit zur Additionsgruppe der ganzen Zahlen isomorph. — Genügen andrerseits die Gruppen Δ_i/Δ_{i-1} alle dieser Isomorphiebedingung, und bedeutet α_i jeweils einen Repräsentanten einer erzeugenden Restklasse von Δ_i/Δ_{i-1}, so sieht man leicht, daß Γ_n gerade aus allen ganzzahligen linearen Verbindungen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ besteht, und daß die Ordnungszbeziehung in Γ_n gerade diejenige ist, die wir oben bei den diskreten Gruppen eingeführt haben. — Aus unsrer Charakterisierung der diskreten Gruppen ergibt sich noch die für spätere Anwendungen wichtige Tatsache:

Sind Γ/Δ und Δ diskret, so ist stets auch Γ selbst diskret und umgekehrt.

Wir wenden uns jetzt von den rein gruppentheoretischen wieder zu körpertheoretischen Betrachtungen: Es sei B eine Bewertung von $\mathfrak{K}$ mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ und der Wertgruppe Γ, $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal aus $\mathfrak{B}$, Δ die zugehörige isolierte Untergruppe von Γ. Ferner bedeute $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ den Ring aller der Elemente aus $\mathfrak{K}$, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ mit durch $\mathfrak{p}$ unteilbarem Nenner darstellen lassen, $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ sei der Restklassenkörper $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ nach dem Primideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ [28]). Definieren wir dann in $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ den Wert der Restklasse $\bar{a}$ als den gemeinsamen Wert, den die Repräsentanten von $\bar{a}$ in B besitzen, so erhalten wir eine Bewertung $\bar{B}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ mit dem Be-

[27]) Wir gehen auf diesen Punkt nicht näher ein, weil wir die Summenzerlegung nur im trivialen Fall der Gruppen endlichen Ranges, insbesondere der diskreten Gruppen, brauchen.

[28]) Sind a und p Elemente aus $\mathfrak{B}$, und ist $a \not\equiv 0(\mathfrak{p})$, $p \equiv 0(\mathfrak{p})$ so gehört $b = p \cdot a^{-1}$ nach Satz 1 jedenfalls zu $\mathfrak{B}$, und aus $b \cdot a \equiv 0(\mathfrak{p})$ folgt weiter $p \cdot a^{-1} = b \equiv 0(\mathfrak{p})$. Damit ist die für das Arbeiten mit $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ grundlegende Gleichung $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ bewiesen.

wertungsring $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}$ und der Wertgruppe Δ. Setzen wir ferner fest, daß als Wert des Elementes a aus $\mathfrak{K}$ in $B_\mathfrak{p}$ diejenige Restklasse aus Γ/Δ angesehen werden soll, die durch den zu a in B gehörigen Wert dargestellt wird, so kommen wir zu einer Bewertung $B_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ und der Wertgruppe Γ/Δ.

Mit Hilfe des Primideals $\mathfrak{p}$ kann also die Bewertung B von $\mathfrak{K}$ aufgespalten werden in eine Bewertung $B_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ mit der Wertgruppe Γ/Δ und in eine Bewertung $\overline{B}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ mit Wertgruppe Δ [29]).

Es sei insbesondere $\Gamma = \Delta_n$ vom endlichen Range n, $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \ldots, \Delta_0$ seien die nach abnehmender Größe geordneten isolierten Untergruppen von Γ, $\mathfrak{p}_i$ bzw. $\mathfrak{K}_i$ $(i = n-1, n-2, \ldots, 0)$ bedeute das zu Δ_i gehörige Primideal aus $\mathfrak{B}$ bzw. den Restklassenkörper $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i$. Wenden wir dann den Aufspaltungsprozeß der Reihe nach auf $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_n, \mathfrak{K}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{K}_1$ an und fassen wir dabei jeweils $\mathfrak{K}_{i-1}$ als Restklassenkörper von $\mathfrak{K}_i$ auf, so erhalten wir für $i = n, n-1, \ldots, 1$ eine Bewertung B_i von $\mathfrak{K}_i$ mit der einrangigen Wertgruppe Δ_i / Δ_{i-1}.

Eine Bewertung mit n-rangiger Wertgruppe läßt sich also stets aufspalten in n Bewertungen mit einrangigen, h. d. archimedischen Wertgruppen.

Der Aufspaltungsprozeß kann umgekehrt werden: Es sei nämlich B_1 eine Bewertung von $\mathfrak{K}$ mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}_1$ und der Wertgruppe Γ_1, $\mathfrak{p}_1$ sei das aus allen Nichteinheiten bestehende „niederste" Primideal aus $\mathfrak{B}_1$; ferner bedeute $\overline{B}_1$ eine Bewertung des Restklassenkörpers $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{B}_1 / \mathfrak{p}_1$ mit dem Bewertungsring $\overline{\mathfrak{B}}$ und der Wertgruppe $\overline{\Gamma}_1$. *Verstehen wir dann unter $\mathfrak{B}$ den Ring aller der in den Restklassen von $\overline{\mathfrak{B}}$ auftretenden Elemente aus $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{B}$ Bewertungsring, und es stellt $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ in $\mathfrak{B}$ ein Primideal dar. Bedeutet weiter Γ die Wertgruppe von $\mathfrak{B}$, Δ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Untergruppe von Γ, und benutzen wir die oben bei der Beschreibung des Aufspaltungsprozesses eingeführten Bezeichnungen, so wird $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{B}_\mathfrak{p} / \mathfrak{p}$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_\mathfrak{p}$, $B_1 = B_\mathfrak{p}$, $\overline{B}_1 \doteq \overline{B}_\mathfrak{p}$, und wir können Γ_1 mit Γ / Δ, $\overline{\Gamma}_1$ mit Δ identifizieren* [29]).

Der Beweis unsrer Behauptung ergibt sich mühelos durch Anwendung des Aufspaltungsprozesses, sobald einmal gezeigt ist, daß $\mathfrak{B}$ Bewertungsring sein muß, und diese letztere Tatsache folgt aus Satz 1. Sind nämlich a und b zwei von 0 verschiedene Elemente aus $\mathfrak{K}$, so gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder es sind $a \cdot b^{-1}$ und $b \cdot a^{-1}$ beide Einheiten in $\mathfrak{B}_1$, dann definiert mindestens einer dieser Quotienten eine von der Nullklasse verschiedene Restklasse aus $\overline{\mathfrak{B}}$; oder es ist etwa $a \cdot b^{-1}$ durch $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ teilbar, und damit in $\overline{\mathfrak{B}}$ Repräsentant der Nullklasse. In beiden Fällen muß also $\mathfrak{B}$ nach Definition einen der Quotienten $a \cdot b^{-1}$ und $b \cdot a^{-1}$ enthalten.

§ 6. Körper von endlichen Transzendenzgrad. [30])

Es sei der Körper $\mathfrak{K}$ endlich-transzendente und nachfolgend endlich-algebraische Erweiterung eines „Grundkörpers" $\mathfrak{K}_0$, $n \gtrless 0$ bedeute den Transzendenzgrad (kurz „Tr.-Gr.") von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$. Alle zu betrachtenden Unterringe von $\mathfrak{K}$ sollen $\mathfrak{K}$ selbst als Quotientenkörper besitzen und $\mathfrak{K}_0$ als Untermenge enthalten, und es sollen nur solche Bewertungen von $\mathfrak{K}$ untersucht werden, in denen alle Elemente aus $\mathfrak{K}_0$ den Wert 0 besitzen. Ist $\mathfrak{R}$ irgendein echter Unterring von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{R}$ und definieren wir $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ genau so wie früher

---

[29]) Vgl. hierzu die Untersuchungen von B., § 4.

[30]) Zu den in aller Kürze zusammengestellten, rein körpertheoretischen Sätzen dieses Paragraphen vgl. B. L. v. d. Waerden, Zur Nullstellentheorie der Polynomideale. Math. Annalen **96** (1926), S. 183-208, § 2 und § 3 sowie: Moderne Algebra II, Kap. XIII, insbesondere § 30.

$\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$, so stellt $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ einen Körper dar, den wir kurz als einen *Restklassenkörper von* $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen. Bedeutet $\mathfrak{U}$ irgendeinen in $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ enthaltenen Körper (z. B. den Grundkörper $\mathfrak{K}_0$), so bildet die Gesamtheit derjenigen Restklassen aus $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$, die Elemente aus $\mathfrak{U}$ enthalten, einen zu $\mathfrak{U}$ isomorphen Körper $\overline{\mathfrak{U}}$; wo es uns zweckmäßig erscheint, können wir $\overline{\mathfrak{U}}$ mit $\mathfrak{U}$ identifizieren und somit $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ als Erweiterung von $\mathfrak{U}$ auffassen. Bei dieser Auffassung ist vor allem der Tr.-Gr. von $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{K}_0$ von Interesse. Soll $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{K}_0$ den Tr.-Gr. m haben, so muß es in $\mathfrak{R}$ genau m Elemente a_i $(i = 1, \ldots, m)$ geben, die die Eigenschaft besitzen, daß kein Polynom $p(a_i)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_0$ in $\mathfrak{p}$ vorkommt. $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ enthält dann den ganzen Körper $\mathfrak{K}_0(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, der über $\mathfrak{K}_0$ den Tr.-Gr. m hat. Daraus folgt sofort:

Der Tr.-Gr. m des Restklassenkörpers $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{K}_0$ ist stets kleiner als der Tr.-Gr. n von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$.

Wäre nämlich $m = n$, so wäre $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ algebraische Erweiterung des Körpers $\mathfrak{K}_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und somit selbst ein Körper. Das ist aber unmöglich, weil $\mathfrak{R}$ echter Unterring von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{p}$ vom Nullideal verschieden. — Den Tr.-Gr. von $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{K}_0$ wollen wir kurz auch als den *Tr.-Gr. des Primideals* $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Dann folgt aus dem bisher bewiesenen:

Es sei $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ eine Kette von Primidealen aus dem Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$, bei der $\mathfrak{p}_{i+1}$ jeweils einen echten Teiler von $\mathfrak{p}_i$ darstellt. Dann ist der Tr.-Gr. von $\mathfrak{p}_{i+1}$ stets kleiner als der von $\mathfrak{p}_i$. Es muß daher die Ungleichung $m \leqq n$ gelten; ist $m = n$, so ist für jedes i der Tr.-Gr. von $\mathfrak{p}_i$ genau gleich $n - i$.

Zum Beweis hat man nur zu bedenken, daß $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_{i+1}}/\mathfrak{p}_{i+1}\cdot\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_{i+1}}$ als Restklassenkörper von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i\cdot\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_i}$ aufgefaßt werden kann. — Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, sämtliche Bewertungsringe von $\mathfrak{K}$ zu bestimmen, die archimedische Wertgruppen haben, und deren einziges Primideal $\mathfrak{p}$ den Tr.-Gr. $n - 1$ besitzt. Für $n = 1$ fordern wir damit einfach die Bestimmung aller Bewertungsringe von $\mathfrak{K}$. Die Lösung der Aufgabe lautet in diesem Falle:

Alle Bewertungsringe von $\mathfrak{K}$ besitzen als Wertgruppe die diskrete Gruppe des Ranges 1. *Ist a ein über $\mathfrak{K}_0$ transzendentes Element aus $\mathfrak{K}$, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets mindestens einen, immer aber nur endlich viele Bewertungsringe, in denen a Nichteinheit ist.*

Zum Beweis bedenke man: Für $n = 1$ stellt $\mathfrak{K}$ einen Körper von „algebraischen Funktionen einer Veränderlichen" über $\mathfrak{K}_0$ dar. Die Bewertungen von $\mathfrak{K}$ entsprechen hier eindeutig umkehrbar den „Punkten" der zu $\mathfrak{K}$ gehörigen „Riemannschen Fläche" im arithmetischen Sinne von Dedekind-Weber. (Der Aufbau dieser Fläche ist in dem für unsre Zwecke nötigen Umfang auch bei algebraisch nicht abgeschlossenem Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}_0$ möglich.) — Die Tatsache, daß zu jeder Bewertung von $\mathfrak{K}$ als Wertgruppe die diskrete Gruppe des Ranges 1 gehört, besagt einfach, daß jedes Element von $\mathfrak{K}$ in jedem Punkt der Riemannschen Fläche eine bestimmte ganzzahlige „Ordnung" besitzt [31]). — Wir beweisen jetzt leicht für beliebigen Tr.-Gr. n:

Satz 9. *Ist $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ein System von n über $\mathfrak{K}_0$ algebraisch unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{K}$, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets mindestens einen, immer aber nur endlich viele Bewertungsringe, die den Körper $\mathfrak{K}_0(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ enthalten, und in denen a_1 Nichteinheit ist. Zu all' diesen Bewertungen gehört als Wertgruppe die diskrete Gruppe des Ranges* 1.

In der Tat, bei der Bestimmung der zu dem System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehörigen Bewertungsringe kann man $\mathfrak{K}$ als Erweiterung des Tr.-Gr. 1 von $\mathfrak{K}_0(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ auffassen

[31]) Vgl. hierzu die Lehrbuchliteratur über arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen (Hensel-Landsberg, Jung), sowie § 3 der in Anm. 7 zitierten Arbeit von v. d. Waerden.

und so den allgemeinen Satz 10 auf den bereits erledigten Spezialfall zurückführen. — Bedeutet $\mathfrak{B}_1^{n-1}$ irgendeinen Bewertungsring aus $\mathfrak{K}$, der eine archimedische Wertgruppe und ein Primideal des Tr.-Gr. $n-1$ besitzt, so kann man offenbar stets ein System von n über $\mathfrak{K}_0$ algebraisch unabhängigen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so bestimmen, daß $\mathfrak{B}_1^{n-1}$ den Körper $\mathfrak{K}_0(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ enthält, während a_1 in $\mathfrak{B}_1^{n-1}$ Nichteinheit ist. Durch Satz 9 ist daher das Problem der Bestimmung aller $\mathfrak{B}_1^{n-1}$ in gewissem Umfange gelöst. — *Wir fragen weiter nach Bewertungsringen von $\mathfrak{K}$, deren Wertgruppen möglichst großen Rang haben.*

Satz 10. *Die Wertgruppe Γ einer Bewertung B von $\mathfrak{K}$ besitzt höchstens den Rang n.*

Zum Beweis beachte man unsre Sätze über Primidealketten in Unterringen von $\mathfrak{K}$, sowie die Tatsache, daß die Primideale eines Bewertungsringes $\mathfrak{B}$ eindeutig umkehrbar den isolierten Untergruppen der zugehörigen Wertgruppe entsprechen. — Einen Überblick über die Gesamtheit derjenigen Bewertungsringe von $\mathfrak{K}$, die n-rangige Wertgruppen besitzen, liefert uns:

Satz 11. *Ist $a_1, a_2, \ldots, a_n$ irgendein System von n über $\mathfrak{K}_0$ algebraisch unabhängigen Elementen, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets mindestens einen, immer aber nur endlich viele Bewertungsringe, die n-rangige Wertgruppen, also n Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ besitzen, und die außerdem die Eigenschaft haben, daß a_i jeweils in $\mathfrak{p}_i$, aber (für $i > 1$) nicht in $\mathfrak{p}_{i-1}$ enthalten ist.*

Die Wertgruppen dieser Bewertungsringe sind stets diskret.

Satz 11 ist für $n = 1$ ein Spezialfall von Satz 9, für $n > 1$ beweist man ihn durch Induktion. Es sei $\mathfrak{B}$ ein zu dem System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ im Sinne von Satz 11 gehöriger Bewertungsring mit der Bewertung B und der Wertgruppe Γ, Δ sei die zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige isolierte Untergruppe von Γ. Dann können wir nach § 5 die Bewertung B aufspalten in eine Bewertung B_1 von $\mathfrak{K}$ mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ und der Wertgruppe Γ/Δ und in eine Bewertung $\overline{B}_1$ von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_1$ mit dem Bewertungsring $\overline{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{B}/\mathfrak{p}_1$ und der Wertgruppe Δ. Dabei muß einerseits $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ den Körper $\mathfrak{K}_0(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ enthalten, während a_1 in $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ Nichteinheit ist; und es muß andrerseits $\overline{\mathfrak{B}}_1$ als Bewertungsring aus $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}$ im Sinne von Satz 11 zu dem System $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n$ der durch $a_2, a_3, \ldots, a_n$ in $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}$ definierten Restklassen gehören. — Wir können daher zunächst durch Anwendung von Satz 9 auf $\mathfrak{K}$ schließen, daß in $\mathfrak{K}$ endlich viele Bewertungsringe $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ der von uns gesuchten Art existieren. Wenden wir dann weiter auf den zu einem solchen $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ gehörigen Restklassenkörper $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}$ den Satz 11 selbst an — wegen der Induktionsvoraussetzung ist das ja erlaubt — so zeigt sich, daß es in jedem $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_1}$ endlich viele der gesuchten Bewertungsringe $\overline{\mathfrak{B}}_1$ gibt. Schließlich kann man jeden unsrer $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ mit einem beliebigen seiner zugehörigen $\overline{\mathfrak{B}}_1$ nach der Methode von § 5 zu einem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ zusammensetzen, der zu dem System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerade in dem in Satz 11 geforderten Verhältnis steht und nach § 5 gleichzeitig mit $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1$ eine diskrete Wertgruppe besitzt. — Durch Satz 11 ist ein befriedigender Überblick über die Gesamtheit der Bewertungsringe von $\mathfrak{K}$ mit n-rangiger Wertgruppe gewonnen. Denn es ist klar, daß man zu jedem derartigen Bewertungsring ein im Sinne von Satz 11 zugehöriges System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ finden kann. Wollte man einen Überblick über die sämtlichen möglichen Bewertungen von $\mathfrak{K}$ ohne Nebenbedingung für den Rang der Wertgruppe gewinnen, so hätte man — wie leicht aus den beim Beweise von Satz 11 benutzten Schlüssen zu ersehen —, im wesentlichen nur für $\mathfrak{K}$ und seine Restklassenkörper alle Bewertungsringe mit archimedischer Wertgruppe ohne Nebenbedingung für den Tr.-Gr. des Primideals zu bestimmen. Diese Frage fällt etwas aus dem Rahmen der vorliegenden Arbeit. Wir gehen daher nicht näher auf sie ein, zumal da anscheinend in der Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlicher bzw. in der mehrdimensionalen Geometrie nur die hier näher untersuchten Bewertungen eine Rolle spielen.

§ 7. Einführung des Perfektheitsbegriffs.

Ist $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\tau, \ldots$ eine wohlgeordnete unendliche Menge von Idealen aus dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$, bei der $\mathfrak{a}_\tau$ für $\sigma < \tau$ stets ein Vielfaches von $\mathfrak{a}_\sigma$ darstellt, so soll das unendliche Kongruenzensystem $x \equiv a_\tau(\mathfrak{a}_\tau)$ nach sämtlichen Idealen $\mathfrak{a}_\tau$ *verträglich* heißen, wenn für $\sigma < \tau$ stets die Kongruenz $a_\tau \equiv a_\sigma(\mathfrak{a}_\sigma)$ erfüllt ist. Mit Hilfe dieser Ausdrucksweise können wir die im üblichen Sinne perfekten Körper folgendermaßen charakterisieren:

Der Körper $\mathfrak{K}$ ist hinsichtlich der Bewertung B mit der archimedischen Wertgruppe Γ dann und nur dann perfekt, wenn im zugehörigen Bewertungsring $\mathfrak{B}$ ein verträgliches Kongruenzensystem nach sämtlichen Potenzen eines beliebigen Hauptideals (a) stets eindeutig lösbar ist [32].

Unser Ziel ist die Übertragung des Perfektheitsbegriffes auf Bewertungen mit beliebigen Wertgruppen. Dazu brauchen wir einige Bemerkungen über die Menge der Primideale eines vorgegebenen Bewertungsringes, unter die wir diesmal ausnahmsweise auch das Nullideal (aber nicht den Ring $\mathfrak{B}$ selbst) rechnen wollen. Das Primideal $\mathfrak{p}_1$ möge kurz „Vorgänger" („Nachfolger") des Primideals $\mathfrak{p}_2$ genannt werden, wenn es echter Teiler (echtes Vielfaches) von $\mathfrak{p}_2$ ist. Es ist dann klar, was man unter „unmittelbarem" Vorgänger bzw. Nachfolger, sowie unter „benachbarten" Primidealen zu verstehen hat. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ soll *Grenzprimideal* heißen, wenn es zwar Vorgänger, aber keinen unmittelbaren Vorgänger besitzt. Für diejenigen Primideale, die zwar Nachfolger, aber keine unmittelbaren Nachfolger haben, führen wir trotz der Möglichkeit ihres Vorkommens keinen besonderen Namen ein, da wir sie im folgenden nicht weiter brauchen. — Wann in einem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ Grenzprimideale auftreten, zeigt das folgende *Kriterium:*

Das Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann Grenzprimideal, wenn es als Durchschnitt von echten Primidealteilern darstellbar ist.

Verstehen wir nämlich unter $\mathfrak{p}_1$ den Durchschnitt aller echten Primidealteiler von $\mathfrak{p}$, so muß $\mathfrak{p}_1$ wegen des besonderen Baus der Bewertungsringe selbst ein Primideal sein, und zwar wird $\mathfrak{p}_1$ gleich $\mathfrak{p}$ oder gleich dem unmittelbaren Vorgänger von $\mathfrak{p}$, je nachdem ob dieser unmittelbare Vorgänger nicht existiert oder existiert. — Aus dem Grenzprimidealkriterium folgt insbesondere:

In $\mathfrak{B}$ gibt es dann und nur dann (mindestens) ein Grenzprimideal, wenn man aus $\mathfrak{B}$ eine unendliche Primidealfolge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$, herausgreifen kann, bei der $\mathfrak{p}_{i+1}$ jeweils einen Nachfolger von $\mathfrak{p}_i$ darstellt.

Wir beweisen jetzt noch ein *Kriterium für die Existenz von unmittelbaren Nachfolgern*: Es sei (a) irgendein Hauptideal aus $\mathfrak{B}$. Dann bildet die Gesamtheit der Ringelemente, von denen eine endliche Potenz durch a teilbar ist ein Primideal $\mathfrak{p}_1$, das als *höchstes Primideal von* (a) [33]) zu bezeichnen ist, weil zwar $\mathfrak{p}_1$ selbst, aber kein Nachfolger von $\mathfrak{p}_1$ Teiler von (a) ist. Wir behaupten nun:

---

[32]) Das Arbeiten mit verträglichen Kongruenzensystemen geht letzten Endes auf H. Prüfer zurück. Vgl. z. B.: Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie. Math. Annalen **94** (1925), S. 198-243.

[33]) Von dem Begriff des höchsten Primideals werden wir im folgenden öfters Gebrauch machen.

Das höchste Primideal $\mathfrak{p}_1$ eines Hauptideals (a) besitzt für $a \neq 0$ stets einen unmittelbaren Nachfolger.

Es sei nämlich $\mathfrak{p}_2$ die Gesamtheit derjenigen Ringelemente, die Teiler keiner einzigen Potenz von a sind; dann bildet das System $\mathfrak{p}_2$ wegen Satz 1 ein Ideal, und zwar ein Primideal. $\mathfrak{p}_2$ ist Nachfolger von $\mathfrak{p}_1$, da a zu $\mathfrak{p}_1$, aber nicht zu $\mathfrak{p}_2$ gehört; bedeutet ferner $\mathfrak{p}$ irgendeinen Vorgänger von $\mathfrak{p}_2$, so muß $\mathfrak{p}$ eine Potenz von a und damit das ganze Primideal $\mathfrak{p}$ als Untermenge enthalten. Es ist also $\mathfrak{p}_1$ der unmittelbare Vorgänger von $\mathfrak{p}_2$.

Aus unserm Ergebnis folgt, *daß es zwischen zwei beliebigen Primidealen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ von $\mathfrak{B}$ stets mindestens ein Paar unmittelbar benachbarter Primideale $\mathfrak{p}_1^*$ und $\mathfrak{p}_2^*$ gibt.* Ist nämlich etwa $\mathfrak{p}_1$ Vorgänger von $\mathfrak{p}_2$ und bedeutet a irgendein durch $\mathfrak{p}_1$, aber nicht durch $\mathfrak{p}_2$ teilbares Element, so braucht man für $\mathfrak{p}_1^*$ nur das höchste Primideal von (a), für $\mathfrak{p}_2^*$ seinen unmittelbaren Nachfolger zu wählen.

Es sei jetzt $\mathfrak{p}_1$ irgendein Primideal aus $\mathfrak{B}$ mit dem unmittelbaren Nachfolger $\mathfrak{p}_2$, Δ_1 und Δ_2 seien die zu $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ gehörigen isolierten Untergruppen der Wertgruppe Γ. Dann ist die Quotientengruppe Δ_2/Δ_1 archimedisch. Zeichnen wir ferner in dem Restklassenkörper $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_2$ den Bewertungsring $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_2}/\mathfrak{p}_2$ aus, so erhalten wir nach § 5 eine Bewertung von $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_2}/\mathfrak{p}_2$ mit der archimedischen Wertgruppe Δ_2/Δ_1.

Wir wollen nun den Körper $\mathfrak{K}$ hinsichtlich der Bewertung B mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ „stufenweise perfekt" nennen, wenn für irgend zwei benachbarte Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ aus $\mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_2}/\mathfrak{p}_2$ im gewöhnlichen Sinne perfekt ist hinsichtlich der durch $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_2$ definierten Bewertung $B_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}$.

„Total perfekt" oder „perfekt" schlechtweg soll der Körper $\mathfrak{K}$ heißen, wenn er stufenweise perfekt ist und außerdem noch der folgenden Bedingung genügt: Ist $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\sigma, \ldots$ $(\sigma < \tau)$ irgendeine wohlgeordnete Menge von Primidealen aus $\mathfrak{B}$, bei der $\mathfrak{p}_{\sigma_1}$ für $\sigma_1 > \sigma_2$ stets einen Nachfolger von $\mathfrak{p}_{\sigma_2}$ darstellt, so besitzt jedes verträgliche Kongruenzensystem $x \equiv a_\sigma(\mathfrak{p}_\sigma)$ nach allen $\mathfrak{p}_\sigma$ in $\mathfrak{B}$ mindestens eine Lösung.

Die Primidealkettenbedingung ist immer dann trivialerweise erfüllt, wenn τ keine Limeszahl ist, also $\mathfrak{p}_{\tau-1}$ existiert. Ist aber τ Limeszahl, so stellt der Durchschnitt aller $\mathfrak{p}_\sigma$ ein Primideal, und zwar nach unserm Kriterium ein Grenzprimideal dar. Die Primidealkettenbedingung ist also nur für Bewertungsringe mit Grenzprimidealen von Bedeutung, d. h.: Gibt es in dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ keine Grenzprimideale, so ist der Körper $\mathfrak{K}$ hinsichtlich der Bewertung B immer dann total perfekt, wenn er hinsichtlich B stufenweise perfekt ist.

In § 14 werden wir beweisen, daß sich jeder mit Hilfe einer gegebenen Wertgruppe Γ bewertete Körper $\mathfrak{K}$ ohne Änderung seiner eigenen Bewertung zu einem gleichfalls mit Hilfe von Γ perfekt bewerteten Körper $\mathfrak{K}^*$ erweitern läßt. Zunächst soll in § 8 und § 9 gezeigt werden, daß die Theorie der algebraischen Erweiterungen perfekter Körper bei allgemeinen Wertgruppen genau so aufgebaut werden kann wie in dem bekannten Spezialfall archimedischer Wertgruppen.

§ 8. Polynome in bewerteten, insbesondere perfekt bewerteten Körpern.

Wir betrachten zunächst in dem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$ irgendeine Bewertung B mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}$ und der Wertgruppe Γ. Unter $\mathfrak{B}[x]$ bzw. $\mathfrak{K}[x]$ verstehen wir den Ring aller Polynome einer Variabeln x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{K}$. Ein Polynom $p(x)$ aus $\mathfrak{B}[x]$ soll *primitiv* heißen, wenn mindestens einer seiner Koeffizienten eine Einheit ist und *eigentlich primitiv*, wenn gerade der Koeffizient der höchsten Potenz von x eine Einheit darstellt. Es gelten dann die Sätze:

Das Produkt zweier (eigentlich) primitiver Polynome und jeder nichttriviale Faktor eines (eigentlich) primitiven Polynoms ist selbst (eigentlich) primitiv. — Jedes primitive Polynom aus $\mathfrak{B}[x]$ *läßt sich eindeutig als Produkt von primitiven Primpolynomen darstellen. — Ein primitives Polynom aus* $\mathfrak{B}[x]$ *ist dann und nur dann in* $\mathfrak{B}[x]$ *Primpolynom, wenn es auch in* $\mathfrak{K}[x]$ *Primpolynom ist.*

Der Beweis unsrer Behauptungen darf übergangen werden; denn er kann grundsätzlich genau so, in Einzelheiten sogar etwas einfacher geführt werden wie der Beweis der entsprechenden Behauptungen für ganzzahlige Polynome einer Variabeln. — Zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ aus $\mathfrak{B}[x]$ sollen wie üblich *teilerfremd* heißen, wenn in $\mathfrak{B}[x]$ eine Gleichung $p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot s(x) = 1$ gilt; gilt für irgendein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}[x]$ eine Kongruenz $p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot s(x) \equiv 1(\mathfrak{p})$, so wollen wir $p(x)$ und $q(x)$ *modulo* $\mathfrak{p}$ *teilerfremd* nennen.

Ist $p(x)$ *ein eigentlich primitives,* $q(x)$ *irgendein Polynom aus* $\mathfrak{B}[x]$, *und sind* $p(x)$ *und* $q(x)$ *modulo jedes vom Nullideal verschiedenen Primideals aus* $\mathfrak{B}$ *teilerfremd, so sind* $p(x)$ *und* $q(x)$ *auch absolut teilerfremd.*

Zunächst nämlich dürfen $p(x)$ und $q(x)$ keinen nichttrivialen Faktor gemein haben. Denn ein solcher müßte eigentlich primitiv sein, und es könnte dann für kein $\mathfrak{p}$ eine Kongruenz $p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot s(x) \equiv 1(\mathfrak{p})$ gelten. Aus der Faktorfremdheit von $p(x)$ und $q(x)$ folgt die Gültigkeit einer Gleichung $p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot s(x) = a \neq 0$ (a aus $\mathfrak{B}$.) Bedeutet ferner $\mathfrak{p}$ das höchste Primideal des Hauptideals (a), so besteht nach Voraussetzung eine weitere Gleichung $p(x) \cdot r_1(x) + q(x) \cdot r_2(x) = 1 + t(x)$, bei der das Polynom $t(x)$ ausschließlich durch $\mathfrak{p}$ teilbare Koeffizienten besitzt. Es sind dann die Koeffizienten einer endlichen Potenz von $t(x)$ sämtlich durch a teilbar, und mit Hilfe dieser Bemerkung zeigt man leicht, daß aus den beiden für $p(x)$ und $q(x)$ bereits bekannten Gleichungen eine dritte Gleichung $p(x) \cdot r_2(x) + q(x) \cdot s_2(x) = 1$ abgeleitet werden kann.

Es sei von jetzt ab $\mathfrak{K}$ *hinsichtlich der Bewertung* B *perfekt*, $\mathfrak{p}_0$ sei das Primideal aller Nichteinheiten aus $\mathfrak{B}$. Dann behaupten wir:

Satz 12. *Ist das Polynom* $p(x)$ *aus* $\mathfrak{B}[x]$ *modulo* $\mathfrak{p}_0$ *in zwei teilerfremde Faktoren zerlegbar, von denen mindestens einer eigentlich primitiv und von kleinerem Grade als* $p(x)$ *ist, so ist* $p(x)$ *auch in* $\mathfrak{B}[x]$ *als Produkt von teilerfremden echten Teilern darstellbar.*

Für den Fall, daß B archimedisch ist, ist die Richtigkeit der Behauptung bekannt [34]), und zwar kann man sie da folgendermaßen präzisieren: Ist $p(x) \equiv r_0(x) \cdot s_0(x)(\mathfrak{p}_0)$, wobei $r_0(x)$ eigentlich primitiv, so existiert in $\mathfrak{B}[x]$ eine Zerlegung $p(x) = r(x) \cdot q(x)$, bei der $r(x) \equiv r_0(x)(\mathfrak{p}_0)$, $s(x) \equiv s_0(x)(\mathfrak{p}_0)$ und $r(x)$ eigentlich primitiv. — Mit Benützung dieser Bemerkung beweisen wir jetzt die folgende *Hilfsbehauptung*:

Es sei $\mathfrak{M}_\tau = \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_\sigma, \ldots\}$ $(\sigma < \tau)$ *eine wohlgeordnete Primidealkette, in der jedes folgende Primideal echtes Vielfaches des vorangehenden ist. Ferner sei modulo jedes* $\mathfrak{p}_\sigma$ *das Polynom* $p(x)$ *in zwei modulo* $\mathfrak{p}_\sigma$ *teilerfremde Faktoren zerlegbar,* $p(x) \equiv r_\sigma(x) \cdot s_\sigma(x)(\mathfrak{p}_\sigma)$, *und es sei insbesondere* $r_\sigma(x)$ *stets eigentlich primitiv. Schließlich seien die beiden Kongruenzensysteme* $R(x) \equiv r_\sigma(x)(\mathfrak{p}_\sigma)$ *und* $S(x) \equiv s_\sigma(x)(\mathfrak{p}_\sigma)$ *verträglich. — Kommt dann in* $\mathfrak{M}_\tau$ *das Nullideal nicht vor, so kann man ein Primideal* $\mathfrak{p}_\tau$ *und zwei zugehörige Polynome* $r_\tau(x)$ *und* $s_\tau(x)$ *so bestimmen, daß die Primidealkette* $\mathfrak{M}_{\tau+1} = \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_\sigma, \ldots \mathfrak{p}_\tau\}$ *genau die gleichen charakteristischen Eigenschaften besitzt wie die Ausgangskette* $\mathfrak{M}_\tau$.

---

[34]) Vgl. K. Rychlík, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper. J. f. Math. **153** (1923), S. 94-107 (zitiert mit „R."); § 7.

Aus der Richtigkeit der Hilfsbehauptung folgt die Gültigkeit von Satz 12 durch transfinite Induktion. Existiert nämlich eine Kette $\mathfrak{M}_\tau$, die das Nullideal enthält ($\mathfrak{p}_{\tau-1} = (0)$), so heißt das, daß $p(x)$ modulo des Nullideals, d. h. in $\mathfrak{B}[x]$ selbst als Produkt von teilerfremden echten Teilern darstellbar ist. Unsre Hilfsbehauptung zeigt aber, daß jede Kette $\mathfrak{M}_\tau$, in der das Nullideal nicht vorkommt, „verlängerbar" ist, und „beliebig lange" Ketten $\mathfrak{M}_\tau$ können nicht existieren, da die Ordnungszahl τ immer höchstens der Zahlklasse angehören kann, die durch die Mächtigkeit der Menge aller Primideale von $\mathfrak{B}$ bestimmt ist. — Beim Beweis der Hilfsbehauptung unterscheiden wir zwei Fälle:

a) τ sei Limeszahl. Dann ist nach § 7 der Durchschnitt aller $\mathfrak{p}_\sigma$ ein Grenzprimideal $\mathfrak{p}_\tau$, und es existieren zwei modulo aller $\mathfrak{p}_\sigma$ und damit modulo $\mathfrak{p}_\tau$ eindeutig bestimmte Lösungen $r_\tau(x)$ und $s_\tau(x)$ der verträglichen Kongruenzensysteme $R(x) \equiv r_\sigma(x)$ ($\mathfrak{p}_\sigma$) und $S(x) \equiv s_\sigma(x)$ ($\mathfrak{p}_\sigma$). Nehmen wir dabei, was ohne weiteres möglich ist, $r_\tau(x)$ eigentlich primitiv an, so müssen $r_\tau(x)$ und $s_\tau(x)$ modulo $\mathfrak{p}_\tau$ teilerfremd sein, weil man ja unsre oben über teilerfremde Polynome abgeleiteten Sätze auf den Bewertungsring $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}_\tau$ im Körper $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_\tau}/\mathfrak{p}_\tau$ anwenden kann. Bilden wir schließlich $t(x) = p(x) - r_\tau(x) \cdot s_\tau(x)$, so sind die Koeffizienten von $t(x)$ durch alle $\mathfrak{p}_\sigma$ und damit auch durch $\mathfrak{p}_\tau$ teilbar, d. h. es ist $p(x) \equiv r_\tau(x) \cdot s_\tau(x)$ ($\mathfrak{p}_\tau$). — Stellt also τ eine Limeszahl dar, so ist die Kette $\mathfrak{M}_\tau$ stets zu einer Kette $\mathfrak{M}_{\tau+1}$ verlängerbar.

b) Es sei $\tau - 1$ und damit in der Kette $\mathfrak{M}_\tau$ ein „kleinstes" Primideal $\mathfrak{p}_{\tau-1}$ vorhanden. In diesem Falle gelten zwei Gleichungen $a(x) \cdot r_{\tau-1}(x) + b(x) \cdot s_{\tau-1}(x) = 1 + t_1(x)$ und $p(x) = r_{\tau-1}(x) \cdot s_{\tau-1}(x) + t_2(x)$, bei denen die Koeffizienten von $t_1(x)$ und $t_2(x)$ alle durch $\mathfrak{p}_{\tau-1}$ teilbar sind. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{a}$ das aus den Koeffizienten von $t_1(x)$ und $t_2(x)$ abgeleitete Hauptideal, mit $\mathfrak{p}$ das höchste Primideal von $\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{p}$ sicher ein Vielfaches von $\mathfrak{p}_{\tau-1}$. Ist es ein echtes Vielfaches, so können wir sofort $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\tau$, $r_{\tau-1}(x) = r_\tau(x)$, $s_{\tau-1}(x) = s_\tau(x)$ setzen. Ist aber $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\tau-1}$, so sei $\mathfrak{p}_\tau$ der nach § 7 existierende unmittelbare Nachfolger von $\mathfrak{p}_{\tau-1}$. Dann definiert nach § 7 der Bewertungsring $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_{\tau-1}}/\mathfrak{p}_\tau$ im Körper $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_\tau}/\mathfrak{p}_\tau$ eine Bewertung $\mathfrak{B}^{\mathfrak{p}_\tau}_{\mathfrak{p}_{\tau-1}}$, mit archimedischer Wertgruppe und es ist $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_\tau}/\mathfrak{p}_\tau$ hinsichtlich $B^{\mathfrak{p}_\tau}_{\mathfrak{p}_{\tau-1}}$ wegen der stufenweisen Perfektheit von $\mathfrak{K}$ perfekt. Wir können daher auf den Bewertungsring $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_{\tau-1}}/\mathfrak{p}_\tau$ im Körper $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_\tau}/\mathfrak{p}_\tau$ den Satz 12 in der oben präzisierten Fassung anwenden, und daraus folgt sofort: Es existieren in $\mathfrak{B}[x]$ zwei Polynome $r_\tau(x)$ und $s_\tau(x)$, die modulo $\mathfrak{p}_\tau$ teilerfremd sind und den Kongruenzen $r_\tau(x) \equiv r_{\tau-1}(x)$ ($\mathfrak{p}_{\tau-1}$), $s_\tau(x) \equiv s_{\tau-1}(x)$ ($\mathfrak{p}_{\tau-1}$), sowie $p(x) \equiv r_\tau(x) \cdot s_\tau(x)(\mathfrak{p}_\tau)$ genügen; dabei darf noch $r_\tau(x)$ eigentlich primitiv angenommen werden. — Es können also auch im Falle der Existenz von $\tau - 1$ das Primideal $\mathfrak{p}_\tau$ und die Polynome $r_\tau(x)$ und $s_\tau(x)$ in gewünschter Weise bestimmt werden. Die Hilfsbehauptung und damit der Satz 12 selbst ist nunmehr voll bewiesen. Der Beweisgang zeigt, welche Bedeutung die beiden Grundeigenschaften der perfekten Körper für die Gültigkeit unsres fundamentalen Satzes haben. Die „stufenweise Perfektheit" ermöglicht bei der Konstruktion der Primidealketten den Aufstieg von $\tau - 1$ zu τ, während die Ergänzungsbedingung für den Übergang von $\sigma < \tau$ zur Limeszahl τ nötig ist.

§ 9. Normale Erweiterungen perfekt bewerteter Körper [35]).

In Zukunft benützen wir zur Vereinfachung der Ausdrucksweise ausnahmslos die folgenden Bezeichnungen: Ist $B_{..}$ mit gewissen Indizes irgendeine Bewertung, so

---

[35]) Vgl. hierzu: K. Hensel, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen. Math. Zeitschrift **2** (1918), S. 431-452, sowie W. Krull, Galoissche Theorie bewerteter Körper. Sitz.-Ber. d. Bayerischen Akademie, Math.-nat. Abteilung 1930, S. 225-238 (zitiert mit „Kr."). — Vgl. ferner: M. Deuring, Verzweigungstheorie bewerteter Körper. Math. Annalen **105** (1931), S. 277—307 (Zitiert mit „D.").

bedeutet $\mathfrak{B}_{..}$ bzw. $\Gamma_{..}$ bzw. $\mathfrak{p}^{(0)}_{..}$ mit den gleichen Indizes stets den zu $B_{..}$ gehörigen Bewertungsring bzw. die zu $B_{..}$ gehörige Wertgruppe bzw. das Primideal aller Nichteinheiten aus $\mathfrak{B}_{..}$.

Es sei nun B eine feste Bewertung des Körpers $\mathfrak{K}$, $\tilde{\mathfrak{K}}$ sei ein Oberkörper von $\mathfrak{K}$ mit der Bewertung $\tilde{B}$. Dann wollen wir $\tilde{B}$ eine „Erweiterung von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$", B dagegen die „durch $\tilde{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}$" nennen, wenn B aus $\tilde{B}$ einfach dadurch erhalten werden kann, daß man für beliebiges a aus $\mathfrak{K}$ stets den Wert von a in B gleich dem Werte von a in $\tilde{B}$ setzt. $\tilde{B}$ stellt offenbar dann und nur dann eine Erweiterung von B dar, wenn $\tilde{\mathfrak{B}}$ der Gleichung $\tilde{\mathfrak{B}} \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{B}$ [36]) genügt. Ist $\tilde{B}$ Erweiterung von B, so können wir $\tilde{\Gamma}$ als Obergruppe von Γ auffassen, und wir können außerdem den Restklassenkörper $\tilde{\mathfrak{B}}/\tilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$ zu einem Oberkörper des Restklassenkörpers $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ machen, indem wir alle diejenigen Restklassen aus $\tilde{\mathfrak{B}}/\tilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$, die Elemente aus $\mathfrak{B}$ enthalten, mit den durch diese Elemente definierten Restklassen von $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ identifizieren.

Von jetzt ab werde vorausgesetzt, daß $\mathfrak{K}$ hinsichtlich der Bewertung B perfekt ist, und daß $\tilde{\mathfrak{K}}$ eine endliche normale Erweiterung von $\mathfrak{K}$ darstellt. Es gilt dann:

Satz 13. *Es gibt nur eine einzige Erweiterung $\tilde{B}$ von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$. Ihr Bewertungsring $\tilde{\mathfrak{B}}$ besteht aus allen von $\mathfrak{B}$ ganz abhängigen Elementen aus $\tilde{\mathfrak{K}}$.*

a) Auf Grund von Satz 12 zeigt man wörtlich so wie in dem bekannten Spezialfall archimedischer Wertgruppen: *$\tilde{a}$ hängt dann und nur dann von $\mathfrak{B}$ ganz ab, wenn $N(\tilde{a})$, d. h. die Relativnorm von $\tilde{a}$ über $\mathfrak{K}$, zu $\mathfrak{B}$ gehört* [37]). Sind nun $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ irgend zwei von $\mathfrak{B}$ ganz abhängige Elemente aus $\tilde{\mathfrak{K}}$, so können wir die Numerierung so gewählt denken, daß $N(\tilde{a}_1)$ in $\mathfrak{B}$ durch $N(\tilde{a}_2)$ teilbar ist, und es muß dann nach unsrer Hilfsbemerkung auch $\tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2^{-1}$ von $\mathfrak{B}$ ganz abhängen. Daraus folgt nach Satz 1, daß der Ring $\tilde{\mathfrak{B}}$ aller von $\mathfrak{B}$ ganz abhängiger Elemente aus $\tilde{\mathfrak{K}}$ ein Bewertungsring ist, und da er offenbar der Gleichung $\tilde{\mathfrak{B}} \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{B}$ genügt, definiert er eine Erweiterung $\tilde{B}$ von B.

b) Ist $\tilde{a}$ irgendein Element aus $\tilde{\mathfrak{K}}$ vom Werte $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{B}$, so müssen auch alle relativkonjugierten von $\tilde{a}$ über $\mathfrak{K}$ in $\tilde{B}$ den Wert $\tilde{\gamma}$ besitzen, weil $\tilde{\mathfrak{B}}$ und damit $\tilde{B}$ bei allen Automorphismen von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ in sich selbst übergeht. Bedeutet daher n den Relativgrad von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$, so haben $\tilde{a}^n$ und $N(\tilde{a})$ in $\tilde{B}$ den gleichen Wert $n\,\tilde{\gamma}$ und unterscheiden sich somit nur um einen Einheitsfaktor aus $\tilde{\mathfrak{B}}$. — Es sei nun $\tilde{\mathfrak{C}}$ irgendein echter Oberring von $\tilde{\mathfrak{B}}$ in $\tilde{\mathfrak{K}}$. Dann gibt es in $\tilde{\mathfrak{B}}$ mindestens eine Nichteinheit $\tilde{a}$, für die $\tilde{a}^{-1}$ in $\mathfrak{C}$ vorkommt. Gleichzeitig mit $\tilde{a}^{-1}$ enthält aber $\tilde{\mathfrak{C}}$ auch $\tilde{a}^{-n}$ und damit auch $N(\tilde{a}^{-1}) = (N(\tilde{a}))^{-1}$. Es ist also $\tilde{\mathfrak{C}} \frown \mathfrak{K}$ sicher echte Obermenge von $\mathfrak{B}$.

Aus unserm Ergebnis folgt sofort, daß $\tilde{B}$ die einzige Erweiterung von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$ darstellt. Ist nämlich $\tilde{B}_1$ irgendeine Erweiterung von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$, so muß $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ einerseits als ganz abgeschlossener Oberring von $\mathfrak{B}$ den ganzen Ring $\tilde{\mathfrak{B}}$ enthalten, und andrerseits der Gleichung $\tilde{\mathfrak{B}}_1 \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{B}$ genügen. Es ist also notwendig $\tilde{\mathfrak{B}}_1 = \tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{B}_1 = \tilde{B}$.

Es soll jetzt der Aufbau von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ mit Hilfe von $\tilde{B}$ und B genauer untersucht werden, und zwar der Einfachheit halber unter der einschränkenden Voraussetzung, daß nicht nur $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$, sondern auch $\tilde{\mathfrak{B}}/\tilde{\mathfrak{p}}_0^{(0)}$ über $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ algebraisch von erster Art ist [38]).

---

[36]) $\frown$ bedeutet den mengentheoretischen Durchschnitt.

[37]) Vgl. R., § 7.

[38]) Über die Bedeutung dieser vereinfachenden Voraussetzung vgl. Kr., S. 231 Anm. 1. — Vgl. ferner D., S. 294.

Dabei darf ich mich damit begnügen, die nötigen Begriffe und die wichtigsten Sätze einfach zu formulieren. Denn die Beweise können so gut wie wörtlich der Note „Galoissche Theorie bewerteter Körper" entnommen werden. Dort ist die Theorie dem Wortlaut nach zwar nur für den Sonderfall archimedischer Wertgruppen entwickelt, aber es wird in Wirklichkeit von dieser einschränkenden Annahme an den für uns wichtigen Stellen nirgends Gebrauch gemacht.

Es sei Θ die Galoissche Gruppe von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$, ϑ bedeute einen Automorphismus aus Θ, mit $\vartheta \times \tilde{a}$ werde dasjenige Körperelement bezeichnet, das aus $\tilde{a}$ durch Anwendung von ϑ entsteht. Wie bereits oben beim Beweise von Satz 13 bemerkt, haben dann $\vartheta \times \tilde{a}$ und $\tilde{a}$ in $\tilde{B}$ stets den gleichen Wert, setzen wir also $\vartheta \times \tilde{a} = \tilde{e} \cdot \tilde{a}$, so ist $\tilde{e}$ eine Einheit aus $\tilde{\mathfrak{B}}$. Genügt $\tilde{e}$ insbesondere der Kongruenz $\tilde{e} \equiv 1\ (\tilde{\mathfrak{p}}^{(0)})$, so soll $\tilde{a}$ „*halbinvariant gegenüber* ϑ" heißen. Ist H eine Untergruppe von Θ und ist $\tilde{a}$ halbinvariant gegenüber jedem ϑ aus H, so nennen wir $\tilde{a}$ halbinvariant gegenüber H. Die Gruppe Θ_t aller derjenigen Automorphismen, denen gegenüber sämtliche Einheiten aus $\tilde{\mathfrak{B}}$ halbinvariant sind, werde als *Trägheitsgruppe* (von $\tilde{B}$ über $\mathfrak{K}$) bezeichnet, *Trägheitskörper* heiße der Θ_t im Sinne der Galoisschen Theorie zugeordnete Unterkörper $\mathfrak{K}_t$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$, B_t bedeute die durch $\tilde{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}_t$. Dann gilt:

Satz 14a [39]**.** *Es ist* $\Gamma_t = \Gamma$, $\mathfrak{B}_t/\mathfrak{p}_t^{(0)} = \tilde{\mathfrak{B}}/\tilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$. $\mathfrak{K}_t$ *ist Normalkörper über* $\mathfrak{K}$, *und seine Galoissche Gruppe über* $\mathfrak{K}$ *ist isomorph zur Galoisschen Gruppe von* $\tilde{\mathfrak{B}}/\tilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$ *über* $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$.

Der Trägheitskörper besitzt also die üblichen Eigenschaften. Wir definieren weiter: Die (erste) *Verzweigungsgruppe* Θ_v (von $\tilde{B}$ über $\mathfrak{K}$) besteht aus allen und nur den Automorphismen, denen gegenüber sämtliche Elemente aus $\tilde{\mathfrak{K}}$ halbinvariant sind. Der Θ_v im Sinne der Galoisschen Theorie zugeordnete Unterkörper $\mathfrak{K}_v$ heißt (erster) *Verzweigungskörper*. B_v bedeutet die durch $\tilde{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}_v$. Für den Aufbau von $\mathfrak{K}_v$ über $\mathfrak{K}_t$ sowie von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_v$ gelten dann die folgenden Sätze:

Satz 14b [40]**.** $\mathfrak{K}_v$ *ist Abelscher Normalkörper über* $\mathfrak{K}_t$. *Die Galoissche Gruppe* Θ_t/Θ_v *von* $\mathfrak{K}_v$ *über* $\mathfrak{K}_t$ *ist isomorph zur Quotientengruppe der Wertgruppen von* B_v *und* B_t, *also zu* $\Gamma_v/\Gamma_t = \Gamma_v/\Gamma$. *Die Zwischengruppen* Γ' *zwischen* Γ *und* Γ_v *entsprechen eindeutig umkehrbar den Zwischenkörpern* $\mathfrak{K}'$ *zwischen* $\mathfrak{K}_t$ *und* $\mathfrak{K}_v$, *und zwar in folgender Weise: Die Wertgruppe der durch* $\tilde{B}$ *induzierten Bewertung* B' *des Zwischenkörpers* $\mathfrak{K}'$ *ist gerade gleich der* $\mathfrak{K}'$ *zugeordneten Zwischengruppe* Γ', *und es besteht die zu* $\mathfrak{K}'$ *im Sinne der Galoisschen Theorie gehörige Untergruppe von* Θ_t/Θ_v *aus allen und nur den Automorphismen von* $\mathfrak{K}_v$ *über* $\mathfrak{K}_t$, *denen gegenüber alle die Elemente von* $\mathfrak{K}_v$, *deren Werte in* Γ' *liegen, halbinvariant sind.*

Ist die Charakteristik von $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ *gleich* $p \neq 0$, *so ist der Relativgrad von* $\mathfrak{K}_v$ *über* $\mathfrak{K}_t$ *zu* p *teilerfremd.*

Satz 14c [41]**.** *Ist* $\tilde{\mathfrak{K}}$ *echter Oberkörper von* $\mathfrak{K}_v$, *so ist* $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ *von Primzahlcharakteristik* p, *es ist* $\tilde{\mathfrak{K}}$ *über* $\mathfrak{K}_v$ *auflösbar, und es stellt der Grad von* $\tilde{\mathfrak{K}}$ *über* $\mathfrak{K}_v$ *eine Potenz von* p *und ein (echtes oder unechtes) Vielfaches der endlichen Ordnung von* $\tilde{\Gamma}/\Gamma_v$ *dar.*

Durch Satz 14 b ist der Aufbau von $\mathfrak{K}_v$ über $\mathfrak{K}_t$ vollständig klargelegt. Eine genauere Untersuchung verdient noch der Aufbau von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_v$, doch soll darauf hier weiter nicht eingegangen werden.

[39]) Vgl. Kr., § 2, Satz 2, sowie D., § 3 und § 4.

[40]) Vgl. Kr., § 3, Satz 3, sowie D., § 3 und § 4.

[41]) Vgl. Kr., § 3, Satz 4. — Für den Fall spezieller Bewertungen finden sich genauere Sätze über den Aufbau von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_v$ bei D., § 5 (Einschaltung von „höheren Verzweigungskörpern".)

§ 10. Endlich viele Bewertungsringe.

Um die Theorie der endlichen normalen Erweiterungen bewerteter Körper ohne Perfektheitsvoraussetzungen zu entwickeln, braucht man einige Untersuchungen über die folgende Frage: Gegeben seien endlich viele Bewertungen $B_0 = B, B_1, \ldots, B_{n-1}$ des Körpers $\mathfrak{K}$. *Was kann man aussagen über den Zusammenhang des Bewertungsringes* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ *mit den Bewertungsringen* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$? Dabei dürfen wir zur Vermeidung von trivialen Ausnahmefällen voraussetzen, daß für $i \neq k$ niemals $\mathfrak{B}_i$ Obermenge von $\mathfrak{B}_k$ ist. $(i, k = 0, 1, \ldots, n-1)$. — Es sei $\mathfrak{p}$ irgendein Primideal aus $\mathfrak{B}$; für das Verhalten von $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{B}_i$ $(i \geqq 1)$ gibt es dann zwei Möglichkeiten:

a) $\mathfrak{p}$ ist keine Untermenge von $\mathfrak{B}_i$ — das wird bei den weiteren Untersuchungen sozusagen der normale Fall sein.

b) $\mathfrak{p}$ ist Untermenge von $\mathfrak{B}_i$. Dann kann $\mathfrak{B}_i$ zu keinem Element aus $\mathfrak{p}$ das Reziproke enthalten, weil sonst gegen die Voraussetzung $\mathfrak{B}_i$ Obermenge von $\mathfrak{B}$ wäre, und aus der Gleichung $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ folgt weiter daß $\mathfrak{p}$ auch in $\mathfrak{B}_i$ Primideal sein muß. Wir wollen daher $\mathfrak{p}$ ein *gemeinsames Primideal von* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{B}_i$ nennen.

Haben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_i$ nur das Nullideal [42]) gemeinsam, so wollen wir $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_i$ (und ebenso B und B_i) *völlig verschieden* nennen. Ist $\mathfrak{p}$ ein vom Nullideal verschiedenes gemeinsames Primideal von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_i$, so sind die Quotientenringe $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ und $(\mathfrak{B}_i)_\mathfrak{p}$ identisch, $\mathfrak{B}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{B}_i)_\mathfrak{p}$. Es entstehen dann B und B_i aus der zu $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ gehörigen Bewertung $B_\mathfrak{p}$ dadurch, daß man zwei bestimmte Bewertungen $\bar{B}$ und $\bar{B}_i$ des Restklassenkörpers $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ nach den Regeln von § 5 mit $B_\mathfrak{p}$ zusammensetzt. Es sind, wie man anschaulich sagen kann, B und B_i „Verfeinerungen der gemeinsamen Stammbewertung $B_\mathfrak{p}$".

Eine genauere Übersicht über das Verhalten der verschiedenen Primideale von $\mathfrak{B}$ zu der Gesamtheit der $\mathfrak{B}_i$ erhalten wir durch die folgende Überlegung: Ist $\mathfrak{p}$ gemeinsames Primideal von genau s Ringen aus der Reihe der $\mathfrak{B}_i$, so ist jedes Primidealvielfache von $\mathfrak{p}$ gemeinsames Primideal von mindestens diesen s Bewertungsringen. Ist ferner $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\tau, \ldots$ irgendeine Menge von Primidealen, die alle gewissen Ringen $\mathfrak{B}_i$ gemeinsam sind, so ist auch der größte gemeinschaftliche Teiler $\mathfrak{p}$ aller $\mathfrak{p}_\tau$ ein Primideal und zwar ein gemeinsames Primideal derselben $\mathfrak{B}_i$. Wir können daher in $\mathfrak{B}$ eine mit $\mathfrak{p}^{(0)}$ endigende Kette von echten Primidealteilern $\mathfrak{p}^{(\nu)}, \mathfrak{p}^{(\nu-1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(1)}, \mathfrak{p}^{(0)}$ so bestimmen [42]), daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Bedeutet $M_\mathfrak{p}$ die Menge aller derjenigen $\mathfrak{B}_i$, die das Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{B}$ gemeinsam haben, so ist stets $M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$, falls $\mathfrak{p}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ und (für $\varkappa \neq \nu$) einen echten Teiler von $\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}$ darstellt; ist dagegen $\mathfrak{p}$ echter Teiler von $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$, so ist $M_\mathfrak{p}$ immer echte Untermenge von $M_\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$. Die Kette der $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ soll die (zur Menge $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$ gehörige) *charakteristische Primidealkette* von $\mathfrak{B}$ heißen. Ist $\mathfrak{B}$ von allen $\mathfrak{B}_i$ $(i \geqq 1)$ völlig verschieden, so reduziert sich die charakteristische Primidealkette auf die beiden Ideale $\mathfrak{p}^{(1)} = (0), \mathfrak{p}^{(0)}$.

Wir geben jetzt die unsymmetrische Bevorzugung von $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ auf und untersuchen den Durchschnittsring $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}_0 \frown \mathfrak{B}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{B}_{n-1}$, mit α_i bezeichnen wir ein Element aus der Wertgruppe Γ_i von B_i, unter $w_i(a)$ verstehen wir den Wert des Körperelementes a in B_i. Zunächst untersuchen wir ausführlich den Fall, daß die Ringe $\mathfrak{B}_i$ paarweise völlig verschieden sind.

Satz 15. *Sind die B_i paarweise völlig verschieden, und bedeuten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ beliebige Werte aus $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets ein Element a, das den Gleichungen $w_i(a) = \alpha_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ genügt* [43]).

[42]) Hier wird wieder einmal das Nullideal unter die Primideale mitgerechnet.

[43]) Vgl. hierzu: W. Krull, Ein Satz über primäre Integritätsbereiche Math. Annalen **103** (1930), S. 450-465,

Zum Beweise von Satz 15 brauchen wir offenbar nur zu zeigen: *Ist* $\alpha_i > 0$ *aus* Γ_i *gegeben, so existiert in* $\mathfrak{D}$ *stets ein Element* $r_i = r_i(\alpha_i)$, *für das* $w_i(r_i) = \alpha_i$, $w_k(r_i) = 0$ $(k \neq i)$. — Wir bemerken zunächst: Sind $i, k \neq i$ und $\alpha_i > 0$ vorgegeben, so kann man in $\mathfrak{K}$ stets ein Element s finden, für das $w_i(s) \geqq \alpha_i$, $w_k(s) = 0$. In der Tat, es sei a irgendwie so gewählt, daß $w_i(a) = \alpha_i$, $\mathfrak{p}_i$ sei das höchste Primideal von (a) in $\mathfrak{B}_i$. Dann muß wegen der völligen Verschiedenheit von B_i und B_k in $\mathfrak{p}_i$ ein nicht zu B_k gehöriges Element p existieren, und für genügend großes l muß p^l in $\mathfrak{B}_i$ durch a teilbar sein. Es wird dann $w_i(p^l) \geqq \alpha_i$, $w_k(p^l) < 0$, und für $s = (1 + p^{-l})^{-1}$ ergibt sich: $w_i(s) \geqq \alpha_i$, $w_k(s) = 0$. — Wir beweisen weiter: *Sind* $i, k \neq i$ *und* $\alpha_i > 0$ *vorgegeben, so gibt es in* $\mathfrak{D}$ *stets ein Element* $s_{ik} = s_{ik}(\alpha_i)$, für *das* $w_i(s_{ik}) = \alpha_i$, $w_k(s_{ik}) = 0$.

Es sei nämlich zunächst a irgendein Element aus $\mathfrak{K}$, für das $w_i(a) = \alpha_i$, s_l bedeute für $l \neq i$, $l \neq k$ ein Element, für das $w_i(s) = 0$, $w_l(s) > 0$. Bilden wir dann ein Produkt $b = a \cdot \prod_{\substack{l \neq i \\ l \neq k}} s_l^{m_l}$, so ist sicher $w_i(b) = \alpha_i$, und wir können außerdem durch geeignete Wahl der Exponenten m_l erreichen, daß $w_l(b) \neq 0$ für jedes $l \neq i, \neq k$. Es sei ferner $w_k(b) = \beta_k$, s_k sei ein Element aus $\mathfrak{K}$, für das $w_i(s_k) = 0$, $w_k(s_k) > \max(0, \beta_k)$. Dann genügt für geeignetes $m \geqq 1$ das Produkt $c = b \cdot s_k^{-m}$ den Relationen $w_i(c) = \alpha_i$, $w_k(c) < 0$, $w_l(c) \neq 0$ $(l \neq i, \neq k)$, und wir können $s_{ik} = (1 + c^{-1})^{-1}$ setzen. — Aus der Existenz der Elemente s_{ik} schließt man leicht weiter: Ist $\alpha_i > 0$ vorgegeben, so kann man in $\mathfrak{D}$ die Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ so wählen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $w_i(a_i) = \alpha_i$, $w_k(a_i) > 0$ $(k \neq i)$; $w_i(a_l) > \alpha_i$, $w_k(a_l) > 0$ $(k \neq l)$, $w_l(a_l) = 0$ $(l \neq i)$. Bilden wir nun $r_i = r_i(\alpha_i) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$, so wird $w_i(r_i) = \alpha_i$, $w_k(r_i) = 0$ $(i \neq k)$, die Existenz der Elemente r_i und damit die Richtigkeit von Satz 15 ist also gesichert. — Wir beweisen jetzt leicht weiter:

Satz 16. *Sind (unter den gleichen Voraussetzungen wie bei Satz* 15) $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$ *irgendwelche Ideale*[44]) *aus den Ringen* $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$, *und bedeutet* $\mathfrak{a}$ *das Ideal* $\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{a}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{a}_{n-1}$ *aus* $\mathfrak{D}$, *so gelten die Gleichungen* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_i$. *Ist umgekehrt ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{D}$ *vorgegeben, und setzen wir* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_i$, *so wird stets* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{a}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{a}_{n-1}$.

a) Es ist sicher $\mathfrak{a}_i' = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_i$ Untermenge von $\mathfrak{a}_i$, falls $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{a}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{a}_{n-1}$. Sind ferner $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ irgendwelche Elemente aus $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$, und ist $w_i(a_i) = \alpha_i$, so gibt es nach Satz 15 in $\mathfrak{D}$ ein Element a, für das $w_i(a) = \alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. a gehört dann zu $\mathfrak{a}$ und unterscheidet sich von a_i jeweils nur durch einen Einheitsfaktor aus $\mathfrak{B}_i$. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{a}_i' = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_i$ sämtliche Elemente aus $\mathfrak{a}_i$ enthalten muß, es ist also, wie behauptet, $\mathfrak{a}_i' = \mathfrak{a}_i$.

b) Es ist für $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_i$ sicher stets $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{a}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{a}_{n-1}$ Obermenge von $\mathfrak{a}$. Es sei ferner a irgendein Element aus $\mathfrak{a}'$, und es sei $w_i(a) = \alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Dann gibt es nach Definition von $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}'$ für jedes i in $\mathfrak{a}$ mindestens ein der Gleichung $w_i(b_i) = \alpha_i$ genügendes Element b_i, des weiteren können wir nach Satz 15 in $\mathfrak{D}$ für jedes i ein Element c_i so bestimmen, daß $w_i(c_i) = 0$, $w_k(c_i) > \alpha_k$ $(k \neq i)$. Bilden wir nun $b = b_0 c_0 + b_1 c_1 + \cdots + b_{n-1} c_{n-1}$, so gehört b zu $\mathfrak{a}$ und es ist $w_i(b) = \alpha_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$, es unterscheidet sich also b von dem vorgegebenen Element a aus $\mathfrak{a}'$ nur um einen Ein-

---

§ 1, Hilfssatz 1. Dort ist der Satz 15 des Textes für diskrete spezielle Bewertungen formuliert, es sind auch einige Nebenrechnungen, die im Text beim Beweise von Satz 15 nur angedeutet werden, etwas breiter ausgeführt. — Vgl. ferner D., § 1,

[44]) Hier ist ausnahmsweise die Möglichkeit zuzulassen, daß eines (aber nicht jedes) der Ideale $\mathfrak{a}_i$ gleich $\mathfrak{B}_i$ ist, dagegen können wir das Nullideal hier von der Betrachtung ausschließen. Sind alle Bewertungen B_i speziell, so liefert Satz 16 die Zerlegung der Ideale von $\mathfrak{D}$ in Primärkomponenten.

heitsfaktor aus $\mathfrak{D}$. Es muß also $\mathfrak{a}$ alle Elemente aus $\mathfrak{a}'$ enthalten, d. h. es muß die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ gelten.

Durch Satz 16 ist die Idealtheorie von $\mathfrak{D}$ vollständig auf die Idealtheorie der einzelnen Ringe $\mathfrak{B}_i$ zurückgeführt. Bezeichnen wir insbesondere mit $\mathfrak{p}_i'^{(0)}$ jeweils das Ideal $\mathfrak{p}_i^{(0)} \frown \mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{D}$, so ergibt sich aus Satz 16: *Die Ideale* $\mathfrak{p}_i'^{(0)}$ *sind alle untereinander verschieden, und sie stellen gerade die sämtlichen niedersten Primideale von* $\mathfrak{D}$ *dar*, d. h. es ist jedes Ideal aus $\mathfrak{D}$ durch mindestens ein $\mathfrak{p}_i'^{(0)}$ teilbar, während andrerseits kein $\mathfrak{p}_i'^{(0)}$ in $\mathfrak{D}$ einen echten Teiler besitzt.

Der Quotientenring $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_i'^{(0)}} = \mathfrak{B}_i'$ ist sicher ein Unterring von $\mathfrak{B}_i$. Es sei nun a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{B}_i$, k bzw. l durchlaufe alle diejenigen Indizes, für die $w_k(a) = \alpha_k \geqq 0$ bzw. $w_l(a) = -\beta_l < 0$. Dann gibt es nach Satz 15 in $\mathfrak{D}$ zwei Elemente c und d, die den Gleichungen $w_k(c) = \alpha_k$, $w_l(c) = 0$; $w_k(d) = 0$, $w_l(d) = \beta_l$ genügen, und es ist dabei d durch $\mathfrak{p}_i'^{(0)}$ unteilbar, weil i unter der Reihe der Indizes k vorkommt, und somit $w_i(d) = 0$ ist. Das Element $\frac{c}{d}$ gehört also zu $\mathfrak{B}_i'$, und da sich $\frac{c}{d}$ von dem vorgegebenen Elemente a aus B_i nur durch einen Einheitsfaktor aus $\mathfrak{D}$ unterscheidet, sehen wir, daß $\mathfrak{B}_i'$ alle Elemente aus $\mathfrak{B}_i$ enthalten und mithin gleich $\mathfrak{B}_i$ sein muß. Aus $\mathfrak{B}_i' = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_i'^{(0)}} = \mathfrak{B}_i$ und aus der Tatsache, daß $\mathfrak{p}_i'^{(0)}$ in $\mathfrak{D}$ keinen echten Teiler besitzt, ergibt sich weiter, daß jede Restklasse aus $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{p}_i^{(0)}$ durch ein Element aus $\mathfrak{D}$ repräsentiert werden kann, und diese Bemerkung ermöglicht den Beweis von

Satz 17. *Sind (unter den Voraussetzungen von Satz 15)* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *irgendwelche Elemente aus* $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$, *so gibt es in* $\mathfrak{D}$ *stets ein Element* a, *das dem Kongruenzensystem* $a \equiv a_i(\mathfrak{p}_i^{(0)})$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *genügt.*

In der Tat, wir dürfen annehmen, daß die Elemente a_i von vornherein alle zu $\mathfrak{D}$ gehören. Unter dieser Voraussetzung haben wir es aber einfach mit dem Kongruenzensystem $x \equiv a_i(\mathfrak{p}_i'^{(0)})$ in $\mathfrak{D}$ zu tun, das sicher auflösbar ist, weil die Primideale $\mathfrak{p}_i'^{(0)}$ in $\mathfrak{D}$ paarweise teilerfremd sind. — Für die Untersuchungen von § 11 brauchen wir jetzt noch:

Satz 18. *Sind* $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}$ *irgendwelche Bewertungsringe, und ist* $\mathfrak{B}$ *Obermenge von* $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}_1 \frown \mathfrak{B}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{B}_{n-1}$, *so ist* $\mathfrak{B}$ *auch Oberring mindestens eines* $\mathfrak{B}_i$.

Beweis indirekt! Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann kann $\mathfrak{B}$ das Primideal $\mathfrak{p}^{(0)}$ mit keinem einzigen $\mathfrak{B}_i$ gemeinsam haben, es muß daher auch in $\mathfrak{B}$ ein Hauptideal (a) geben, dessen höchstes Primideal $\mathfrak{p}$ in keinem $\mathfrak{B}_i$ als Untermenge enthalten ist [45]). Wir behaupten nun: Gilt für irgendein b aus $\mathfrak{K}$ (bei festem i) $w(b) = w(a)\,(> 0)$, $w_i(b) = \beta_i > 0$, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets ein Element s, für das $w(s) = 0$, $w_i(s) \geqq \beta_i$ wird. Es sei nämlich $\mathfrak{p}_i$ das höchste Primideal des Hauptideals (b) in $\mathfrak{B}_i$; dann kann $\mathfrak{p}_i$ wegen $w(b) = w(a)$ und der Auswahl von a kein gemeinsames Primideal der Ringe $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}$ darstellen. Daraus erschließt man aber die Existenz von s mit genau den gleichen Überlegungen, wie sie beim Beweise von Satz 15 benützt wurden. Ebenfalls nach den Methoden von Satz 15 zeigt man dann weiter mit Hilfe der Elemente s: Es existiert in $\mathfrak{K}$ ein r, für das $w(r) = w(a) > 0$, $w_i(r) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. r ist dann in allen $\mathfrak{B}_i$ Einheit, in $\mathfrak{B}$ dagegen Nichteinheit. — Ein solches Element r kann aber unmöglich existieren, wenn die Gleichung $\mathfrak{B}_1 \frown \mathfrak{B}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{B}_{n-1} = \mathfrak{B} \frown \mathfrak{B}_1 \frown \mathfrak{B}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{B}_{n-1}$ gelten soll, und damit ist Satz 18 bewiesen.

[45]) Es seien nämlich $a_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ so bestimmt, daß a_i zu $\mathfrak{B}$, aber nicht zu $\mathfrak{B}_i$ gehört. Dann muß für ein gewisses i^* die Gleichung $(a_{i^*}) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ gelten, und wir können $a = a_{i^*}$ setzen.

§ 11. Normale Erweiterungen beliebig bewerteter Körper.

Es sei B eine beliebige Bewertung von $\mathfrak{K}$, $\tilde{\mathfrak{K}}$ bedeute wie in § 9 eine normale Erweiterung von $\mathfrak{K}$ vom Grade n mit der Galoisschen Gruppe Θ, $\tilde{\mathfrak{D}}$ sei der Ring aller von $\mathfrak{B}$ ganz abhängiger Elemente aus $\tilde{\mathfrak{K}}$. Sind $\tilde{B}_1$ und $\tilde{B}_2$ irgendwelche Bewertungen von $\tilde{\mathfrak{K}}$, so sollen $\tilde{B}_1$ und $\tilde{B}_2$ (über $\mathfrak{K}$)[46]) konjugiert heißen, wenn $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ konjugiert sind, wenn also in Θ ein Automorphismus Θ existiert, der $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ in $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ überführt, $\tilde{\mathfrak{B}}_2 = \vartheta \times \tilde{\mathfrak{B}}_1$. Sind $\tilde{B}_1$ und $\tilde{B}_2$ konjugiert, so induzieren sie stets dieselbe Bewertung von $\mathfrak{K}$.

Satz 19. *Es gibt stets mindestens eine, immer aber nur endlich viele Erweiterungen $\tilde{B}_i$ von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$. Die $\tilde{B}_i$ sind alle untereinander konjugiert, ihr Durchschnitt ist gleich $\tilde{\mathfrak{D}}$.*

a) Durch triviale Wohlordnungsschlüsse zeigt man: Es gibt in $\tilde{\mathfrak{K}}$ mindestens einen „größten" Ring $\tilde{\mathfrak{B}}$, der zwar $\mathfrak{B}$, aber kein Reziprokes eines Elementes aus $\mathfrak{B}$ enthält. $\tilde{\mathfrak{B}}$ muß dann nach Satz 5 Bewertungsring sein und nach Satz 1 der Gleichung $\tilde{\mathfrak{B}} \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{B}$ genügen, also eine Erweiterung von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$ definieren.

b) Es sei jetzt $\tilde{B} = \tilde{B}_0$ irgendeine Erweiterung von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$, $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_{n-1}$ seien die — nicht notwendig alle verschiedenen — konjugierten von $\tilde{B}$, $\tilde{\mathfrak{D}}'$ sei der Durchschnittsring $\tilde{\mathfrak{B}}_0 \frown \tilde{\mathfrak{B}}_1 \frown \ldots \frown \tilde{\mathfrak{B}}_{n-1}$. Dann gilt die Gleichung $\tilde{\mathfrak{D}}' \frown \mathfrak{K} = \mathfrak{B}$, und es ist $\tilde{\mathfrak{D}}'$ gegenüber allen Automorphismen von Θ invariant und sicher Obermenge von $\mathfrak{D}$. Ist ferner $\tilde{a} = \tilde{a}_0$ ein beliebiges Element aus $\tilde{\mathfrak{D}}'$ mit den konjugierten $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_{n-1}$, so gehören wegen der Invarianz von $\tilde{\mathfrak{D}}'$ auch diese konjugierten alle zu $\tilde{\mathfrak{D}}'$. Die elementarsymmetrischen Funktionen der $\tilde{a}_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ sind also sämtlich Elemente von $\mathfrak{B}$, d. h. $\tilde{a} = \tilde{a}_0$ hängt von $\mathfrak{B}$ ganz ab. Es gehören somit alle Elemente von $\tilde{\mathfrak{D}}'$ zu $\tilde{\mathfrak{D}}$, d. h. es ist $\tilde{\mathfrak{D}}' = \tilde{\mathfrak{D}}$.

c) Es seien $\tilde{B}_0$ und $\tilde{B}'_0$ irgend zwei Erweiterungen von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$, $\tilde{B}_i$ bzw. $\tilde{B}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ seien die konjugierten von $\tilde{B}_0$ bzw. $\tilde{B}'_0$. Nach b) gilt dann die Gleichung $\tilde{\mathfrak{B}}_0 \frown \tilde{\mathfrak{B}}_1 \frown \ldots \frown \tilde{\mathfrak{B}}_{n-1} = \tilde{\mathfrak{B}}'_0 \frown \tilde{\mathfrak{B}}'_1 \frown \ldots \frown \tilde{\mathfrak{B}}'_{n-1} = \tilde{\mathfrak{D}}$, und daraus folgt nach Satz 18, daß jeder $\tilde{\mathfrak{B}}_i$ Oberring eines $\tilde{\mathfrak{B}}'_k$, jeder $\tilde{\mathfrak{B}}'_k$ Oberring eines $\tilde{\mathfrak{B}}_i$ ist. Wegen der endlichen Ordnung der Automorphismengruppe Θ kann ferner für $i \neq k$ niemals $\mathfrak{B}_i$ echter Oberring von $\mathfrak{B}_k$ oder $\mathfrak{B}'_i$ echter Oberring von $\mathfrak{B}'_k$ sein. Die Reihen $\tilde{\mathfrak{B}}_0, \tilde{\mathfrak{B}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{B}}_{n-1}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}'_0, \tilde{\mathfrak{B}}'_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{B}}'_{n-r}$ müssen daher notwendig bis auf die Numerierung übereinstimmen.

Es seien jetzt $\tilde{B}_0 = \tilde{B}, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_{s-1}$ die sämtlichen verschiedenen nach Satz 19 untereinander konjugierten Erweiterungen von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$. *Wir behandeln zunächst den Fall, daß die B_i $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$ paarweise völlig verschieden sind.* Unter dieser Voraussetzung bezeichnen wir als *Zerlegungsgruppe* Θ_z (von $\tilde{B}$ über $\mathfrak{K}$) die Gruppe aller derjenigen Automorphismen ϑ, die $\tilde{B}$ in sich selbst überführen, also der Gleichung $\vartheta \times \tilde{B} = \tilde{B}$ genügen; unter dem *Zerlegungskörper* $\mathfrak{K}_z$ verstehen wir den zu Θ_z im Sinne der Galoisschen Theorie gehörigen Unterkörper von $\tilde{\mathfrak{K}}$, unter B_z die durch B induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}_z$.

Satz 20. *Jede von $\tilde{B}$ verschiedene Erweiterung von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$ induziert eine von B_z verschiedene Bewertung von $\mathfrak{K}_z$. Die Wertgruppe Γ_z ist gleich der Wertgruppe Γ, der Rest-*

---

[46]) „Konjugiert" bedeutet im folgenden immer „konjugiert über $\mathfrak{K}$". — Zu dem Beweise von Satz 19 vgl. auch D., § 1.

klassenkörper $\mathfrak{B}_z/\mathfrak{p}_z^{(0)}$ *ist gleich dem Restklassenkörper* $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$. *Der Index von* Θ_z *in* Θ *ist gleich der Anzahl s der verschiedenen Erweiterungen von* B *auf* $\tilde{\mathfrak{K}}$.

Der Beweis von Satz 20 kann meiner in § 9 mehrfach zitierten Note Kr. entnommen werden. Denn der „Hilfssatz 1", der dort zum Beweise von „Satz 1" benutzt wurde, ist unter den Voraussetzungen von Satz 20 gerade mit den Sätzen 15 und 17 von § 10 identisch, und im übrigen gelten meine früheren Schlüsse unmittelbar für allgemeine Bewertungen. Da nach Satz 20 die Bewertung $\tilde{B}$ die einzige mögliche Erweiterung von B_z auf $\tilde{\mathfrak{K}}$ darstellt, kann man den Aufbau von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_z$ nach den in § 9 entwickelten Methoden untersuchen. Man kommt so zur Definition des Trägheitskörpers $\mathfrak{K}_t$ und des (ersten) Verzweigungskörpers $\mathfrak{K}_v$ (von $\tilde{B}$ über $\mathfrak{K}$) und es gelten dann für $\mathfrak{K}_t$, $\mathfrak{K}_v$, $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_z$ die Sätze 14 a, b, c. Im einzelnen braucht das nicht näher ausgeführt zu werden, dagegen müssen wir jetzt noch den Aufbau von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ untersuchen für den Fall, daß die Bewertungen $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_{s-1}$ nicht völlig verschieden sind.

Wir bestimmen zu diesem Zweck nach § 10 in $\tilde{\mathfrak{B}} = \tilde{\mathfrak{B}}_0$ die zur Menge $\tilde{\mathfrak{B}}_1, \tilde{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{B}}_{s-1}$ gehörige charakteristische Primidealkette $\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}, \tilde{\mathfrak{p}}^{(r-1)}, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$, und arbeiten zunächst mit den Ringen $\tilde{\mathfrak{B}}^{(r)} = \tilde{\mathfrak{B}}_{\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}}$, $\mathfrak{B}^{(r)} = \tilde{\mathfrak{B}}^{(r)} \frown \mathfrak{K}$ und mit den zugehörigen Bewertungen $\tilde{B}^{(r)}, B^{(r)}$. $\tilde{B}^{(r)} = \tilde{B}_0^{(r)}$ ist eine Erweiterung von $B^{(r)}$ auf $\tilde{\mathfrak{K}}$, und wir behaupten: *Die (nach Satz 13 untereinander konjugierten) Erweiterungen* $\tilde{B}_i^{(r)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *von* $B^{(r)}$ *auf* $\tilde{\mathfrak{K}}$ *sind paarweise entweder identisch oder völlig verschieden.*

In der Tat, ist etwa $\tilde{B}_i^{(r)} = \vartheta \times \tilde{B}^{(r)}$, $\tilde{B}_i = \vartheta \times \tilde{B}_i$ für irgendein festes ϑ aus Θ, so muß $\tilde{B}_i$ Obermenge von $\tilde{B}_i^{(r)}$ sein, weil $\tilde{B}$ Obermenge von $\tilde{B}^{(r)}$. Ist nun $\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$ gemeinsames Primideal von $\tilde{B}$ und $\tilde{B}_i$, so ist notwendig $\vartheta \times \tilde{\mathfrak{p}}^{(r)} = \tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$, $\tilde{\mathfrak{B}}_{\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}} = \tilde{\mathfrak{B}}^{(r)} = (\tilde{\mathfrak{B}}_i)_{\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}} = \tilde{\mathfrak{B}}_i^{(r)}$. Ist aber $\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$ kein gemeinsames Primideal von $\tilde{\mathfrak{B}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_i$, so sind nach Definition von $\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$ die Ringe $\tilde{\mathfrak{B}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_i$ und damit auch die Ringe $\tilde{\mathfrak{B}}^{(r)}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_i^{(r)}$ völlig verschieden [47]).

Wir wenden jetzt auf $\tilde{B}^{(r)}$ und $B^{(r)}$ den Satz 20 samt seinen Folgerungen an und definieren zu $\tilde{B}^{(r)}$ über $\mathfrak{K}$ den Zerlegungskörper $\tilde{\mathfrak{K}}_z^{(r)}$ und den Trägheitskörper $\tilde{\mathfrak{K}}_t^{(r)}$. Über den Aufbau von $\tilde{\mathfrak{K}}_z^{(r)}$ über $\mathfrak{K}$ können wir, wie immer, keine näheren Angaben machen. Der Aufbau von $\tilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}_t^{(r)}$ vollzieht sich nach den Richtlinien von Satz 14 b und Satz 14 c, d. h. wie wir kurz sagen wollen, nach den Methoden der Verzweigungstheorie. Um den Aufbau von $\mathfrak{K}_t^{(r)} = \tilde{\mathfrak{K}}^{(r)}$ über $\mathfrak{K}_z^{(r)} = \mathfrak{K}^{(r)}$ genauer zu untersuehen, ziehen wir das Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}^{(r-1)}$ aus dem Bewertungsring $\tilde{\mathfrak{B}}$ heran, und zwar ergibt sich die Verwendungsmöglichkeit von $\tilde{\mathfrak{p}}^{(r-1)}$ aus folgender Überlegung: $\tilde{\mathfrak{K}}^{(r)}$ baut sich über $\mathfrak{K}^{(r)}$ nach § 9 genau so auf wie der Restklassenkörper $\tilde{\mathfrak{B}}^{(r)}/\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)} = \tilde{\mathfrak{L}}$ über dem Restklassenkörper $\mathfrak{B}^{(r)}/\mathfrak{p}^{(r)} = \mathfrak{L}$ $(\mathfrak{p}^{(r)} = \tilde{\mathfrak{p}}^{(r)} \frown \mathfrak{K})$. Nach § 5 können wir ferner die Bewertung B von $\mathfrak{K}$ zerlegen in die Bewertung $B^{(r)}$ von $\mathfrak{K}$ mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}^{(r)}$ und in eine Bewertung C von $\mathfrak{L}$ mit dem Bewertungsring $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(r)} = \mathfrak{C}$. Um die sämtlichen Ausdehnungen $\tilde{C}$ von C auf $\tilde{\mathfrak{L}}$ zu bestimmen, überlegen wir uns: Es sei $\tilde{C}$ irgendeine Erweiterung von C auf $\tilde{\mathfrak{L}}$. Setzen wir dann $\tilde{C}$ nach § 5 mit der Bewertung $\tilde{B}^{(r)}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$ zusammen, so entsteht offenbar eine bestimmte Erweiterung $\tilde{B}_i$ von B auf $\tilde{\mathfrak{K}}$, und es muß dabei der Bewertungsring $\tilde{\mathfrak{B}}_i$ das Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$ enthalten. Genügt umgekehrt der vor-

[47]) **Daß auch allgemein $\mathfrak{B}_i^{(r)}$ und $\mathfrak{B}_k^{(r)}$ für $i \neq k$ stets entweder identisch oder völlig verschieden sind, folgt nun sofort aus Symmetriegründen.**

gelegte Bewertungsring $\widetilde{\mathfrak{B}}$ dieser letzteren Bedingung, so können wir $\widetilde{B}_i$ zerlegen in die Bewertung $\widetilde{B}^{(r)}$ von $\widetilde{\mathfrak{K}}$ und in die Bewertung $\widetilde{C}$ von $\widetilde{\mathfrak{L}}$ mit dem Bewertungsring $\widetilde{\mathfrak{B}}_i/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$; dabei ist offenbar $\widetilde{C}$ eine Erweiterung von C auf $\widetilde{\mathfrak{L}}$. Zusammenfassend können wir also feststellen:

Es seien $\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{B}}_0, \widetilde{\mathfrak{B}}_1, \ldots, \widetilde{\mathfrak{B}}_{q-1}$ bei geeigneter Numerierung die sämtlichen verschiedenen $\widetilde{\mathfrak{B}}_i$, die das Primideal $\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$ gemeinsam haben. Dann definieren die Bewertungsringe $\widetilde{\mathfrak{C}}_i = \widetilde{\mathfrak{B}}_i/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$ $(i = 0, 1, \ldots, q-1)$ gerade die sämtlichen verschiedenen Erweiterungen $\widetilde{C}_i$ von C auf $\widetilde{\mathfrak{L}}$. Die charakteristische Primidealkette des Bewertungsrings $\widetilde{\mathfrak{C}} = \widetilde{\mathfrak{C}}_0$ in bezug auf die Menge $\widetilde{\mathfrak{C}}_1, \widetilde{\mathfrak{C}}_2, \ldots, \widetilde{\mathfrak{C}}_{q-1}$ wird offenbar gerade durch $\widetilde{\mathfrak{q}}^{(r-1)} = \widetilde{\mathfrak{p}}^{(r-1)}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$, $\widetilde{\mathfrak{q}}^{(r-2)} = \widetilde{\mathfrak{p}}^{(r-2)}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r)}, \ldots, \widetilde{\mathfrak{q}}^{(0)} = \widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$ gebildet. Man kann daher mit Hilfe von $\widetilde{\mathfrak{q}}^{(r-1)}$, d. h. mit Hilfe von $\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r-1)}$ (und $\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r)}$), zwischen $\widetilde{\mathfrak{L}}$ und $\mathfrak{L}$ einen zu $\widetilde{C}$ gehörigen Zerlegungskörper $\mathfrak{L}_z^{(r-1)}$ und einen ebensolchen Trägheitskörper $\mathfrak{L}_t^{(r-1)}$ einschalten, und die Körper $\mathfrak{L}_z^{(r-1)}$ und $\mathfrak{L}_t^{(r-1)}$ definieren ihrerseits weiter zwei ausgezeichnete Zwischenkörper $\mathfrak{K}_z^{(r-1)}$ und $\mathfrak{K}_t^{(r-1)}$ zwischen $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(r)}$ und $\mathfrak{K}^{(r)}$. Über den Aufbau von $\mathfrak{K}_z^{(r-1)} = \mathfrak{K}^{(r-1)}$ über $\mathfrak{K}^{(r)}$ läßt sich nichts Näheres aussagen. Der Aufbau von $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(r)}$ über $\mathfrak{K}_t^{(r-1)} = \widetilde{\mathfrak{K}}^{(r-1)}$ entspricht genau dem Aufbau von $\widetilde{\mathfrak{L}}$ über $\mathfrak{L}_t^{(r-1)}$, er vollzieht sich also gewissermaßen nach den Methoden der reinen Verzweigungstheorie. Schließlich baut sich $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(r-1)}$ über $\mathfrak{K}^{(r-1)}$ genau so auf, wie $\mathfrak{L}_t^{(r-1)}$ über $\mathfrak{L}_z^{(r-1)}$, zur weiteren Untersuchung werden wir daher das Primideal $\widetilde{\mathfrak{q}}^{(r-2)}$ aus $\widetilde{\mathfrak{C}}$, d. h. das Primideal $\widetilde{\mathfrak{p}}^{(r-2)}$ aus $\mathfrak{B}$ heranziehen. Es ist dann klar, auf welche Weise die Einschaltung von Zwischenkörpern zwischen $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(r-1)}$ und $\mathfrak{K}^{(r-1)}$ weiter fortgesetzt werden kann. Der Einschaltungsprozeß bricht erst ab, nachdem wir eine doppelte Körperkette $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{K}^{(r)} \leqq \mathfrak{K}^{(r-1)} \leqq \cdots \leqq \mathfrak{K}^{(0)} \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}^{(0)} \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}^{(1)} \leqq \cdots \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}^{(r)} \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}$ konstruiert haben. Denn der Aufbau von $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(0)}$ über $\mathfrak{K}^{(0)}$ entspricht genau dem Aufbau des Restklassenkörpers $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$ über dem Restklassenkörper $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$, und über $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ ist nichts Besonderes vorausgesetzt. — Da wir über die Struktur der Körper $\mathfrak{K}^{(i)}$ $(i = r, r-1, \ldots, 0)$ keine näheren Aussagen machen können, ist es zweckmäßig, bei der Formulierung des Endergebnisses die Körper $\mathfrak{K}^{(i)}$ $(i > 0)$ überhaupt wegzulassen, und nur den Körper $\mathfrak{K}^{(0)} = \mathfrak{K}_z$ beizubehalten. Es ergibt sich dann:

Satz 21. *Zu $\widetilde{B}$ gehört im allgemeinen Fall eine endliche Kette*

$$\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{K}_z \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}^{(0)} \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}^{(1)} \leqq \cdots \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}^{(r)} \leqq \widetilde{\mathfrak{K}}$$

von Zwischenkörpern zwischen $\mathfrak{K}$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}$, die durch die folgenden Eigenschaften ausgezeichnet ist:

$\mathfrak{K}_z$ besitzt hinsichtlich $\widetilde{B}$ die in Satz 20 zusammengestellten Eigenschaften des Zerlegungskörpers, ebenso hat $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(0)} = \mathfrak{K}_t$ die in Satz 14a formulierten Eigenschaften des Trägheitskörpers. Der Aufbau des Körpers $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i)}$ über $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i-1)}$ erfolgt (für $i = 1, 2, \ldots, r+1$, $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(r+1)} = \widetilde{\mathfrak{K}}$) jeweils nach dem Schema von Satz 14b und Satz 14c, d. h. nach den Methoden der Verzweigungstheorie.

Die Behauptungen von Satz 21 ergeben sich mühelos aus der Art und Weise, wie die Körper $\mathfrak{K}_z$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ schrittweise konstruiert wurden. Um insbesondere die Eigenschaften von $\mathfrak{K}_z$ zu erhalten, muß man Satz 20 der Reihe nach auf die Körper $\mathfrak{K}^{(r)}, \mathfrak{K}^{(r-1)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(0)} = \mathfrak{K}_z$ bzw. auf die diesen Körpern zugeordneten Restklassenkörper anwenden. Bezeichnen wir wie früher mit B_z bzw. B_t die durch $\widetilde{B}$ induzierte Bewertung von $\mathfrak{K}_z$ bzw. $\mathfrak{K}_t = \widetilde{\mathfrak{K}}^{(0)}$, so folgen aus Satz 21 insbesondere die Gleichungen: $\Gamma_z = \Gamma$, $\mathfrak{B}_z/\mathfrak{p}_z^{(0)} = \mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$; $\Gamma_t = \Gamma$, $\mathfrak{B}_t/\mathfrak{p}_t^{(0)} = \widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$. — Dem Übergang von $\mathfrak{K}_t = \widetilde{\mathfrak{K}}^{(0)}$ zu $\widetilde{\mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{K}}^{(r+1)}$ entspricht also wieder der Übergang von Γ zu $\widetilde{\Gamma}$, und zwar können wir diesmal über die Art des Aufbaus von $\widetilde{\Gamma}$ über Γ noch genauere Aussagen machen. Wir bezeichnen mit $\widetilde{\Delta}^{(i)}$ bzw. $\Delta^{(i)}$ die dem Primideal $\widetilde{\mathfrak{p}}^{(i)}$ bzw. $\mathfrak{p}^{(i)}$ zugeordnete isolierte Untergruppe aus $\widetilde{\Gamma}$ bzw. Γ, und setzen für den Augenblick $\widetilde{\Delta}^{(r+1)} = \widetilde{\Gamma}$, $\Delta^{(r+1)} = \Gamma$. Dann folgt sofort aus der Art der Konstruktion der Körper $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i)}$: *Dem Übergang von* $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i)}$ *zu* $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i+1)}$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ *entspricht jeweils gerade der Übergang von* $\Delta^{(i+1)}$ *zu* $\widetilde{\Delta}^{(i+1)}$ (oder, in gewissem Sinne noch genauer ausgedrückt: „der Übergang von $\Delta^{(i+1)}/\Delta^{(i)}$ zu $\widetilde{\Delta}^{(i+1)}/\widetilde{\Delta}^{(i)}$“). — Es sei schließlich noch der folgende Punkt besonders hervorgehoben: Der Körper $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ braucht über dem Körper $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i-1)}$ keineswegs die Rolle des (ersten) Verzweigungskörpers zu spielen. Es wird vielmehr im allgemeinen bei der Untersuchung des Aufbaus von $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i)}$ über $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r + 1)$ für jedes i nötig sein, zwischen $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i-1)}$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}^{(i)}$ einen (ersten) Verzweigungskörper $\widetilde{\mathfrak{K}}_v^{(i)}$ und — bei genauerem Studium — auch noch einen oder mehrere „höhere“ Verzweigungskörper $\mathfrak{K}_{vr}^{(i)}$ $(r = 1, 2, \ldots, m_i)$ einzuschieben. Das heißt also: *Haben wir es mit einer beliebigen normalen Erweiterung* $\widetilde{\mathfrak{K}}$ *des beliebig bewerteten Körpers* $\mathfrak{K}$ *zu tun, so treten beim Aufbau von* $\widetilde{\mathfrak{K}}$ *über* $\mathfrak{K}$ *im allgemeinen mehrere Serien von Verzweigungskörpern auf.* Das ist in gewissem Sinne das merkwürdigste Ergebnis, zu dem uns die Theorie der normalen Erweiterungen beliebig bewerteter Körper geführt hat.

§ 12. Geordnete Körper.

Schon in § 1 wurde gezeigt, daß jede nichtarchimedische Ordnung O des Körpers $\mathfrak{K}$ eine Bewertung B_l von $\mathfrak{K}$ definiert, deren Bewertungsring $\mathfrak{B}_l$ alle und nur die Elemente umfaßt, die in O gegenüber der 1 nicht unendlich groß sind. Es sei jetzt $\mathfrak{p}$ irgendein Primideal aus $\mathfrak{B}_l$, und es werde der Kürze halber $(\mathfrak{B}_l)_\mathfrak{p} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{K}}$ gesetzt. Dann können wir aus der Ordnung O des Körpers $\mathfrak{K}$ eine Ordnung $\overline{O}$ des Restklassenkörpers $\overline{\mathfrak{K}}$ ableiten durch die Festsetzung: Die Restklasse $\bar{a}$ aus $\overline{\mathfrak{K}}$ soll dann und nur dann als positiv in $\overline{O}$ angesehen werden, wenn einer (und damit jeder) ihrer Repräsentanten in O positiv ist. $\overline{O}$ soll als *die durch O erzeugte Ordnung von* $\overline{\mathfrak{K}}$, O dagegen als eine *Verfeinerung von $\overline{O}$ auf* $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden. $\overline{O}$ ist archimedisch, wenn $\mathfrak{p}$ das niederste Primideal von $\mathfrak{B}_l$ darstellt, sonst ist O stets nicht archimedisch. Wir zeigen jetzt, daß unsere bisherigen Betrachtungen sich umkehren lassen.

Satz 22. *Ist eine Bewertung B von $\mathfrak{K}$ und eine Ordnung $\overline{O}$ des zu B gehörigen Restklassenkörpers $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ vorgelegt, so gibt es stets mindestens eine Verfeinerung O von $\overline{O}$ auf $\mathfrak{K}$. Der zu O gehörige Bewertungsring $\mathfrak{B}_l$ ist gleich $\mathfrak{B}$, wenn $\overline{O}$ archimedisch ist; sonst ist $\mathfrak{B}_l$ echter Unterring von $\mathfrak{B}$, und es gilt die Gleichung $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_l)_\mathfrak{p}$.*

Satz 22 findet sich schon in einer Note von R. Baer, allerdings in anderer Formulierung, da Baer nicht mit dem Bewertungsbegriff arbeitet [48]). Da die Übersetzung der Baerschen Ausdrucksweise in die des Textes etwas umständlich ist, dürfte es zweckmäßig sein, den Beweis von Satz 22 wenigstens kurz zu skizzieren. Dabei handelt es sich nur um die Konstruktion von O, denn es ist mühelos einzusehen, daß der Bewertungs-

[48]) Vgl. die schon öfters zitierte, zuerst in Anm. [11]) erwähnte Arbeit „B.“, insbesondere § 3, Satz 4.

ring $\mathfrak{B}_l$ einer Verfeinerung O von $\bar{O}$ sicher den in Satz 22 angegebenen Bedingungen genügt. Um nun O aus B und $\bar{O}$ aufzubauen, führen wir die folgenden Begriffe ein:

Die Elemente eines Teilsystems $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ sollen (hinsichtlich $\mathfrak{B}$) „quadratisch unabhängig" heißen, wenn kein Produkt aus endlich vielen Elementen von $\mathfrak{S}$ einem Quadrate aus $\mathfrak{K}$ (hinsichtlich $\mathfrak{B}$) assoziiert ist. Ist das Produkt von a mit endlich vielen Elementen aus $\mathfrak{S}$ einem Quadrate aus $\mathfrak{K}$ assoziiert, so möge a „von $\mathfrak{S}$ quadratisch abhängig" genannt werden [49]). — Durch triviale Wohlordnungsschlüsse zeigt man:

Es gibt in $\mathfrak{K}$ (mindestens) ein System $\mathfrak{S}^* = (a_1, a_2, \ldots, a_\tau, \ldots)$ von quadratisch unabhängigen Elementen, von denen jedes weitere Element a aus $\mathfrak{K}$ quadratisch abhängt [50]).

Um nun mit Hilfe eines solchen Systems $\mathfrak{S}^*$ die Ordnung O zu konstruieren, setzen wir allgemein $a_\tau^* = \pm a_\tau$, wobei das Vorzeichen für jedes einzelne τ beliebig, aber fest zu wählen ist, und erklären die a_τ^* sämtlich für positiv in O. Dann müssen auch alle Elemente der Form $b^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} a_{\tau_i}^* = a^*$ in O positiv sein. Bedeutet ferner a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{K}$, so gibt es nach Definition von $\mathfrak{S}^*$ sicher ein zu a assoziiertes a^*, und wir müssen, damit O als Verfeinerung von $\bar{O}$ erscheint, das Vorzeichen von a in O gleich dem Vorzeichen von $\overline{a \cdot a^{*-1}}$ [51]) in $\bar{O}$ setzen. Daß bei dieser Festsetzung kein Widerspruch entsteht und außerdem das Produkt zweier positiver Elemente stets selbst wieder positiv wird, ergibt sich leicht aus folgender Überlegung:

Es seien $a^* = b^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} a_{\tau_i}^{*\prime}$ und $a_1^* = b_1^2 \cdot \prod_{i=1}^{s'} a_{\tau_i}^*$, beide zu a und damit untereinander assoziiert. Dann sind wegen der quadratischen Unabhängigkeit der a_τ^* die Produkte $\prod a_{\tau_i}^*$ und $\prod a_{\tau_i'}^*$ faktorweise einander gleich, und es haben $\overline{a \cdot a^{*-1}}$ und $\overline{a \cdot a_1^{*-1}}$ sicher in $\bar{O}$ das gleiche Vorzeichen, weil $\overline{a \cdot a^{*-1}} \cdot \overline{a^{-1} \cdot a_1^*} = (\overline{b_1 \cdot b^{-1}})^2$ in $\bar{O}$ sicher positiv ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß bei unsern Festsetzungen auch die Summe zweier positiver Elemente stets positiv wird. Dazu müssen wir die Tatsache heranziehen, daß der Ring $\mathfrak{B}$, hinsichtlich dessen wir die Klassen assoziierter Elemente gebildet haben, ein Bewertungsring ist. Es seien a und b zwei für positiv erklärte Elemente, und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, daß $a^{-1} \cdot b$ zu $\mathfrak{B}$ gehört; ferner sei $a^* = b^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} a_{\tau_i}^*$ zu a assoziiert. Dann ist $\overline{a \cdot a^{*-1}}$ in $\bar{O}$ positiv, $\overline{b \cdot a^{*-1}}$ ist in $\bar{O}$ positiv oder Null, es muß daher $\overline{(a+b) \cdot a^{*-1}} = \overline{a \cdot a^{*-1}} + \overline{b \cdot a^{*-1}}$ in $\bar{O}$ positiv sein. Damit ist endgültig bewiesen, daß unsere Positivdefinition tatsächlich zu einer Ordnung O von $\mathfrak{K}$ führt; daß diese Ordnung eine Verfeinerung von $\bar{O}$ darstellt, folgt unmittelbar aus der Art ihrer Konstruktion.

Unser Beweis hat noch den Vorteil, daß er einen genauen Überblick über alle Verfeinerungen von $\bar{O}$ auf $\mathfrak{K}$ liefert. Die Vorzeichenwahl bei den Elementen von $\mathfrak{S}^*$ war völlig willkürlich, alles weitere ging zwangsläufig. *Die sämtlichen möglichen Verfeinerungen von $\bar{O}$ entsprechen daher eindeutig umkehrbar den sämtlichen für die Elemente von $\mathfrak{S}^*$ möglichen Vorzeichenkombinationen.* Insbesondere gibt es nur eine einzige Verfeinerung von $\bar{O}$, wenn S^* überhaupt kein Element enthält, d. h. wenn jedes Element aus $\mathfrak{K}$ einem Quadrate assoziiert ist.

---

[49]) Natürlich müssen wir a auch dann als quadratisch abhängig von $\mathfrak{S}$ ansehen, wenn a selbst einem Quadrate assoziiert ist; ebenso darf in einem System von quadratisch unabhängigen Elementen kein einziges Element einem Quadrate assoziiert sein.

[50]) Sind alle Elemente von $\mathfrak{K}$ zu Quadraten assoziiert, so ist für $\mathfrak{S}^*$ die leere Menge zu wählen.

[51]) Die Restklassen aus $\mathfrak{K}$ kennzeichnen wir im folgenden immer durch Querstriche.

Um die Bedeutung des Bewertungsbegriffs für die Theorie der geordneten Körper noch deutlicher zu zeigen, wollen wir jetzt die Definitionen und Sätze von § 7 heranziehen. Es soll dementsprechend ein geordneter Körper $\mathfrak{K}$ *perfekt geordnet* heißen, wenn er im Sinne von § 7 perfekt ist hinsichtlich der durch die gegebene Ordnung O definierten Bewertung B_l. Ferner sei der Begriff des reell abgeschlossenen Körpers wie üblich definiert. Dann gilt:

Satz 23. *Ein perfekt geordneter Körper $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann reell abgeschlossen, wenn der zu der vorgelegten Ordnung gehörige Restklassenkörper $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B}_l/\mathfrak{p}_l^{(0)}$ zum Körper aller gewöhnlichen reellen Zahlen isomorph ist, und wenn außerdem die Wertgruppe Γ_l eine Wurzelgruppe darstellt, d. h. gleichzeitig mit einem Element α stets auch ein der Gleichung $n\,\beta = \alpha$ genügendes Element $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$ enthält.*

Die algebraische Theorie der reell abgeschlossenen Körper zeigt bereits, daß die Bedingungen von Satz 23 notwendig sind, und zwar unabhängig davon, ob $\mathfrak{K}$ perfekt oder beliebig geordnet ist [52]). Um zu zeigen, daß unsre Bedingungen bei perfekt geordneten Körpern auch hinreichend sind, verwenden wir den für die Theorie der reell abgeschlossenen Körper bekanntlich grundlegenden Satz: Der geordnete Körper $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann reell abgeschlossen, wenn $\mathfrak{K}(i)$ algebraisch abgeschlossen ist. — Wir behaupten also: Genügt der perfekt geordnete Körper $\mathfrak{K}$ den Bedingungen von Satz 23, so ist $\widetilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(i)$ algebraisch abgeschlossen.

Zum Beweis nehmen wir an, es sei $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ eine endliche normale Erweiterung von $\widetilde{\mathfrak{K}}$, $\widetilde{B}$ bzw. $\widetilde{B}'$ bedeute die — wegen der Perfektheit von $\mathfrak{K}$ einzige — Ausdehnung von B_l auf $\widetilde{\mathfrak{K}}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{K}}'$. Dann ist zunächst $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)} = \widetilde{\mathfrak{B}}'/\widetilde{\mathfrak{p}}'^{(0)}$, weil $\widetilde{\mathfrak{B}}'/\widetilde{\mathfrak{p}}'^{(0)}$ eine algebraische Erweiterung von $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$ darstellt, und weil $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$ offenbar zum Körper aller gewöhnlichen komplexen Zahlen isomorph und somit algebraisch abgeschlossen ist. Des weiteren muß die Gleichung $\widetilde{\Gamma}' = \widetilde{\Gamma} = \Gamma$ gelten, weil nach § 9 ein ganzzahliges Vielfaches jedes Elements von $\widetilde{\Gamma}'$ zur Wurzelgruppe Γ gehört. Wir bezeichnen nun mit $\widetilde{\mathfrak{K}}_z$, $\widetilde{\mathfrak{K}}_t$, $\widetilde{\mathfrak{K}}_v$ den Zerlegungs-, Trägheits-, Verzweigungskörper von $\widetilde{B}'$ über $\widetilde{\mathfrak{K}}$. Dann wird $\widetilde{\mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{K}}_z$, weil $\widetilde{B}'$ die einzige Erweiterung von $\widetilde{B}$ auf $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ ist. Aus den Gleichungen $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)} = \widetilde{\mathfrak{B}}'/\widetilde{\mathfrak{p}}'^{(0)}$, $\widetilde{\Gamma}' = \widetilde{\Gamma}$ folgt weiter $\widetilde{\mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{K}}_t = \widetilde{\mathfrak{K}}_v$, und aus der Tatsache, daß der Körper $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)}$ die Charakteristik 0 besitzt, ergibt sich schließlich $\widetilde{\mathfrak{K}}_v = \widetilde{\mathfrak{K}}'$. $\widetilde{\mathfrak{K}}'$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}$ sind also unbedingt identisch, d. h. $\widetilde{\mathfrak{K}}$ ist algebraisch abgeschlossen [53]).

Ein einfaches Beispiel für perfekt geordnete Körper liefert eine von H. Hahn [54]) zuerst untersuchte Körperklasse, die wir — im einzelnen von Hahn etwas abweichend [55]) —

---

[52]) Vgl. z. B. die in Anm. [3]) zuerst erwähnte Arbeit „A. S.“, S. 87/88 sowie S. 94, Satz 9. Vgl. ferner zu den weiteren Betrachtungen des Textes A. S., S. 90.

[53]) Natürlich kann man mit den beim Beweise von Satz 23 benutzten Schlüssen ganz allgemein zeigen: Ein perfekt bewerteter Körper der Charakteristik 0 ist dann und nur dann algebraisch abgeschlossen, wenn der Restklassenkörper $\mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ der gegebenen Bewertung B algebraisch abgeschlossen ist, und wenn außerdem die Wertgruppe Γ eine Wurzelgruppe darstellt.

[54]) Vgl. die bereits in Anm. [10]) zitierte Arbeit „H“.

[55]) Hahn konstruiert zunächst „vollständige“ (d. h. in einem naheliegenden Sinne „maximale“) linear geordnete Gruppen Γ^*, und zeigt dann, daß man diese Gruppen Γ^* durch Einführung einer geeigneten Multiplikation zu „Linearformenkörpern“ machen kann. — Die allgemeinen Potenzreihenkörper, mit denen wir in § 12 und § 13 arbeiten, wurden zuerst von F. K. Schmidt eingeführt und untersucht, allerdings nur für den Fall reeller Exponenten, was aber an ihren charakteristischen Eigenschaften weiter nichts ändert. Die Schmidtschen Untersuchungen sind leider noch nicht veröffentlicht, so daß wir uns im folgenden hinsichtlich der genaueren Ausführung unsrer Skizze nur auf die Hahnsche Darstellung berufen können.

folgendermaßen einführen: Es sei Γ irgendeine linear geordnete Gruppe. Dann bilden wir mit dem Symbol u formal alle „Potenzreihen"

$$p(u) = e_1 \cdot u^{\alpha_1} + e_2 \cdot u^{\alpha_2} + \cdots + e_\tau \cdot u^{\alpha_\tau} + \cdots,$$

bei denen die e_i beliebige reelle Zahlen bedeuten, während die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau, \ldots$ irgendeine wohlgeordnete, echt monoton wachsende Untermenge von Γ darstellen. Mit diesen Reihen kann man nun ebenso rechnen wie mit gewöhnlichen Potenzreihen, insbesondere kann die Multiplikation nach üblichem Schema vollzogen werden, weil wie leicht einzusehen, zur Bildung jedes einzelnen Gliedes der Produktreihe stets nur endlich viel Glieder der einzelnen Faktoren herangezogen werden müssen. Die Reihe $u^0 = 1$ genügt für jedes $p(u)$ der Gleichung $u^0 \cdot p(u) = p(u)$, und es existiert zu $p(u) \neq 0$ stets eine in üblicher Weise formal zu berechnende Reihe $q(u) = p(u)^{-1}$, die der Gleichung $p(u) \cdot q(u) = 1$ genügt [56]). Das System aller Reihen $p(u)$ stellt also einen Körper dar, den wir mit $\mathfrak{K}_\Gamma$ bezeichnen wollen, da er offenbar durch Γ allein eindeutig bestimmt ist.

$\mathfrak{K}_\Gamma$ enthält vermöge der Festsetzung $u^0 = 1$ den Körper $\mathfrak{K}_0$ aller gewöhnlichen reellen Zahlen als Unterkörper. Erklären wir $p(u) = e_1 \cdot u^{\alpha_1} + \cdots$ $(e_1 \neq 0)$ immer dann für positiv, falls $e_1 > 0$, so erhalten wir eine Ordnung O von $\mathfrak{K}_\Gamma$, deren zugehöriger Bewertungsring $\mathfrak{B}_l$ aus allen und nur den Reihen $p(u) = e_1 \cdot u^{\alpha_1} + \cdots$ besteht, bei denen $\alpha_1 \geqq 0$. Jede Klasse $\overline{p}$ des Restklassenkörpers $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B}_l/\mathfrak{p}_l^{(0)}$ enthält eine und nur eine reelle Zahl e, und es ist $\overline{p}$ dann und nur dann positiv in der durch O erzeugten Ordnung $\overline{O}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$, wenn e als reelle Zahl positiv ist. Man kann daher, wo es zweckmäßig erscheint, $\overline{\mathfrak{K}}$ geradezu mit dem Körper $\mathfrak{K}_0$ identifizieren.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß $\mathfrak{K}_\Gamma$ perfekt geordnet ist, und daraus folgt nach Satz 23 weiter:

$\mathfrak{K}_\Gamma$ ist dann und nur dann reell abgeschlossen, wenn Γ eine Wurzelgruppe ist.

Unser Ergebnis zeigt, daß die von Hahn unter vorwiegend analytischen Gesichtspunkten eingeführten $\mathfrak{K}_\Gamma$ auch in der algebraischen Theorie der geordneten Körper eine ausgezeichnete Rolle spielen. Die Hauptbedeutung der allgemeinen „Potenzreihenkörper" ergibt sich indessen erst aus rein bewertungstheoretischen Untersuchungen, die wir im folgenden Paragraphen durchführen wollen, und bei denen wir auch die Perfektheit der $\mathfrak{K}_\Gamma$ als Nebenresultat erhalten werden.

§ 13. Maximal bewertete Körper.

Ist $\widetilde{B}$ eine Erweiterung der Bewertung B von $\mathfrak{K}$ auf den Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$, so wollen wir $\widetilde{B}$ eine *unmittelbare Erweiterung* von B nennen, wenn beim Übergang von B zu $\widetilde{B}$ weder die Wertgruppe noch der Restklassenkörper vergrößert wird, d. h. wenn die Gleichungen $\widetilde{\Gamma} = \Gamma$, $\widetilde{\mathfrak{B}}/\widetilde{\mathfrak{p}}^{(0)} = \mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ gelten. Gibt es zu keinem einzigen echten Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ eine unmittelbare Erweiterung von B, so wollen wir $\mathfrak{K}$ *hinsichtlich B maximal* nennen [57]). Ist ferner der Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ hinsichtlich einer unmittelbaren Erweiterung $\widetilde{B}$ von B maximal, so soll $\widetilde{\mathfrak{K}}$ kurz als ein *hinsichtlich B maximaler Oberkörper* bezeichnet werden.

Satz 24. *Der Körper $\mathfrak{K}$ ist hinsichtlich der Bewertung B entweder selbst maximal, oder er kann in einen hinsichtlich B maximalen Oberkörper eingebettet werden.*

---

[56]) Vgl. H., § 4, insbesondere S. 650ff.

[57]) Der Begriff des „maximal" bewerteten Körpers stammt von F. K. Schmidt, der ihn als erster bei speziellen Bewertungen eingeführt, und zur erfolgreichen Behandlung des am Schlusse der Einleitung erwähnten „Strukturproblems" benutzt hat. (Alles noch unveröffentlicht.)

Der Beweis von Satz 24 kann durch einen trivialen transfiniten Induktionsschluß erbracht werden, sobald gezeigt ist, daß die Mächtigkeit eines beliebigen bewerteten Körpers $\mathfrak{K}$ unterhalb einer Schranke liegt, die nur von der Wertgruppe Γ und dem Restklassenkörper $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B}/\mathfrak{p}^{(0)}$ der gegebenen Bewertung B abhängt. Um nun die Richtigkeit dieser letzteren Tatsache nachzuweisen, konstruieren wir mit Hilfe von Γ und $\overline{\mathfrak{K}}$ einen *allgemeinen Potenzreihenkörper* $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}_{\Gamma, \overline{\mathfrak{K}}}$, der sich von dem Körper $\mathfrak{K}_\Gamma$ des letzten Paragraphen nur dadurch unterscheidet, daß als Koeffizienten an Stelle der gewöhnlichen reellen Zahlen die Elemente von $\overline{\mathfrak{K}}$ benutzt werden. Wir behaupten dann:

Satz 25. *Der Körper $\mathfrak{K}$ mit der Bewertung B läßt sich eindeutig umkehrbar (wenn auch nicht notwendig hinsichtlich der Körperoperationen isomorph) auf eine Untermenge $\mathfrak{M}$ des Potenzreihenkörpers $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}_{\Gamma, \overline{\mathfrak{K}}}$ abbilden.*

Zum Beweis wählen wir zu jeder Klasse $\bar{a}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ einen festen Repräsentanten a aus $\mathfrak{K}$ und bestimmen zu jedem Wert α aus Γ in $\mathfrak{K}$ ein Element x_α vom Werte α in Γ. Bezeichnen wir dann mit $\mathfrak{N}_0$ bzw. $\mathfrak{M}_0$ die Menge aller Elemente der Form $a \cdot x_\alpha$ bzw. $\bar{a} \cdot u^\alpha$ aus $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}^*$, so kann und soll $\mathfrak{N}_0$ dadurch eindeutig umkehrbar auf $\mathfrak{M}_0$ abgebildet werden, daß wir dem Element $a \cdot x_\alpha$ aus $\mathfrak{K}$ jeweils das Element $\bar{a} \cdot u^\alpha$ aus $\mathfrak{K}^*$ zuordnen. Wir denken uns nun weiter die nicht zu $\mathfrak{N}_0$ gehörigen Elemente von $\mathfrak{K}$ in irgendeiner Wohlordnung $a_1, a_2, \ldots, a_\tau, \ldots$ gegeben, und haben dann zum Beweise von Satz 25 nur zu zeigen, daß man der Folge der a_τ Element für Element eine Folge von lauter verschiedenen nicht zu $\mathfrak{M}_0$ gehörigen Elementen $b_1, b_2, \ldots b_\tau, \ldots$ aus $\mathfrak{K}^*$ gegenüberstellen kann.

Bei der Konstruktion der Menge der b_τ benützen wir die folgenden Begriffe: Ist $p(u) = \bar{c}_1 u^{\alpha_1} + \bar{c}_2 u^{\alpha_2} + \cdots + \bar{c}_\varrho u^{\alpha_\varrho} + \cdots$ eine Reihe aus $\mathfrak{K}^*$, so nennen wir die Reihe $p_\sigma(u)$ einen *Abschnitt* von $p(u)$, wenn $p_\sigma(u)$ aus allen und nur den Gliedern $\bar{c}_\varrho u^{\alpha_\varrho}$ von $p(u)$ besteht, deren Index ϱ der Ungleichung $\varrho < \sigma$ bei fest vorgegebenem σ genügt. Es sei nun eine *Abschnittsfolge* $p_1, p_2, \ldots p_\tau, \ldots$ aus $\mathfrak{K}^*$ vorgelegt, d. h. eine wohlgeordnete Menge von Reihen $p_\tau(u)$, bei der für $\tau_1 < \tau_2$ stets $p_{\tau_1}(u)$ einen Abschnitt von $p_{\tau_2}(u)$ darstellt, so daß wir allgemein $p_\tau(u) = \sum_{\lambda < \sigma_\tau} \bar{c}_\lambda u^{\alpha_\lambda}$ ($\sigma_{\tau_1} < \sigma_{\tau_2}$ für $\tau_1 < \tau_2$) setzen können; bezeichnen wir dann mit σ die obere Schranke [58]) der σ_τ, so stellt $p(u) = \sum_{\lambda < \sigma} \bar{c}_\lambda u^{\alpha_\lambda}$ eine Reihe aus $\mathfrak{K}^*$ dar, und zwar die „kürzeste" Reihe, die alle $p_\tau(u)$ zu Abschnitten besitzt. Wir wollen p die zur Abschnittsfolge $p_1, p_2, \ldots p_\tau, \ldots$ gehörige *Grenzreihe* nennen. Bedeutet ferner p irgendeine Reihe von $\mathfrak{K}^*$, so wollen wir unter $\chi(p)$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus Γ verstehen, die größer sind als sämtliche in $p(u) = \sum_\lambda \bar{c}_\lambda u^{\alpha_\lambda}$ ($\bar{c}_\lambda \neq 0$) wirklich auftretenden Exponenten α_λ. (Dabei kann $\chi(p)$ in die leere Menge χ_0 entarten.) Wir können jetzt die Konstruktion der Menge der b_τ in Angriff nehmen; dazu setzen wir voraus, es seien für $\sigma < \tau$ alle b_σ bereits bestimmt, und setzen $\mathfrak{N}_\tau = (\mathfrak{N}_0, a_1, \ldots a_\sigma, \ldots)$ $\mathfrak{M}_\tau = (\mathfrak{M}_0, b_1, \ldots b_\sigma, \ldots)$ $(\sigma < \tau)$. Außerdem machen wir die folgenden (für $\mathfrak{M}_0$ trivialerweise zutreffenden) Annahmen: 1. $\mathfrak{M}_\tau$ enthält gleichzeitig mit einer Reihe p stets auch jeden Abschnitt von p. 2. Bedeuten q und q' irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{N}_\tau$, p und p' die zugeordneten Elemente von $\mathfrak{M}_\tau$ und ist $p(u) - p'(u) = \bar{e} \cdot u^\alpha + \cdots$ $(\bar{e} \neq 0)$, so stellt $e \cdot x_\alpha$ eine Approximation von $q - q'$ dar, d. h. es ist (in B) der Wert von $q - q' - e \cdot x_\alpha$ größer als der Wert von $q - q'$. — Es ist nun zu zeigen:

Ist $\mathfrak{N}_\tau \neq \mathfrak{K}$, existiert also das Element a_τ, so kann man a_τ ein nicht zu $\mathfrak{M}_\tau$ gehöriges Element b_τ aus $\mathfrak{K}^*$ so zuordnen, daß die Menge $\mathfrak{M}_{\tau+1} = (\mathfrak{M}_\tau, b_\tau)$ die gleichen charakteristischen Eigenschaften 1 und 2 besitzt wie $\mathfrak{M}_\tau$.

---

[58]) D. h. die kleinste Ordnungszahl, die größer ist als alle σ_τ.

Zur Konstruktion von b_τ approximieren wir a_τ durch eine wohlgeordnete Menge aus $\mathfrak{N}_\tau$ und zwar nach folgendem Schema: Es gibt in $\mathfrak{M}_\tau$ sicher ein Element $p_0 = \bar{a}\,u^\alpha$, dessen zugeordnetes Element $q_0 = a \cdot x_\alpha$ aus $\mathfrak{N}_\tau$ eine Approximation von a_τ darstellt, also die Eigenschaft besitzt, daß der Wert von $a_\tau - q_0$ zu χ_{p_0} gehört. Wir nehmen jetzt an, es sei für irgendein festes σ in $\mathfrak{M}_\tau$ eine wohlgeordnete Abschnittsfolge $p_0, p_1, \ldots p_\varrho \ldots$ $(\varrho < \sigma)$ so bestimmt, daß der Wert von $a_\tau - q_\varrho$ stets zu $\chi(p_\varrho)$ gehört, falls q_ϱ das der Reihe p_ϱ zugeordnete Element aus $\mathfrak{N}_\tau$ bedeutet. Ist dann σ eine Limeszahl, so bezeichnen wir mit p die durch die Abschnittsfolge der p_ϱ bestimmte Grenzreihe; ist aber σ keine Limeszahl, also $p_{\sigma-1}$ vorhanden, so wählen wir in $\mathfrak{K}$ das Element $a \cdot x_\alpha$ so, daß es eine Approximation von $a_\tau - q_{\sigma-1}$ darstellt, und setzen $p = p_{\sigma-1} + \bar{a} \cdot u^\alpha$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: a) p gehört zu $\mathfrak{M}_\tau$, es existiert also zu p in $\mathfrak{N}_\tau$ ein zugeordnetes Element q. Dann muß, wie aus den für $\mathfrak{M}_\tau$ vorausgesetzten Eigenschaften 1 und 2 zu ersehen, der Wert von $a_\tau - q$ zu $\chi(p)$ gehören. Wir können also $p = p_\sigma, q = q_\sigma$ setzen, und die Folge der p_ϱ durch Anfügung des Gliedes p_σ verlängern. b) p gehört nicht zu $\mathfrak{M}_\tau$. Setzen wir dann $b_{\tau+1} = p$, $\mathfrak{M}_{\tau+1} = (\mathfrak{M}_\tau, p)$, so besitzt, wie sofort nachzuprüfen, die Menge $\mathfrak{M}_{\tau+1}$ die gleichen charakteristischen Eigenschaften wie $\mathfrak{M}_\tau$, wir haben also in p das gesuchte Element $b_{\tau+1}$ gefunden.

Unser Konstruktionsverfahren führt uns nun entweder schon früher zum Falle b), oder wir kommen schließlich zu einer Reihe p, für die $\chi(p)$ gleich der leeren Menge χ_0 wird. Dann aber muß für dieses p notwendig der Fall b) eintreten. Gäbe es nämlich zu p in $\mathfrak{N}_\tau$ ein zugeordnetes Element q, so könnte $a_\tau - q$ überhaupt keinen endlichen Wert besitzen. Es müßte daher $a_\tau - q = 0$ sein, d. h. es wäre $a_\tau = q$ gegen die Voraussetzung schon in $\mathfrak{N}_\tau$ enthalten.

Wir können also von der gegebenen Menge $\mathfrak{M}_\tau$ stets unter Erhaltung der Eigenschaften 1 und 2 zur Menge $\mathfrak{M}_{\tau+1}$ aufsteigen. Ist ferner τ^* eine Limeszahl, und sind für alle $\tau < \tau^*$ die Mengen $\mathfrak{M}_\tau$ bereits bekannt, so brauchen wir nur $\mathfrak{M}_{\tau^*}$ gleich der Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{M}_\tau$ $(\tau < \tau^*)$ zu setzen, und es besitzt dann auch $\mathfrak{M}_{\tau^*}$ trivialerweise die Eigenschaften 1 und 2. — Damit ist nach dem Schema der transfiniten Induktion bewiesen, daß tatsächlich in $\mathfrak{K}^*$ eine Folge $b_1, b_2, \ldots b_\tau, \ldots$ der von uns gesuchten Art existiert. Die Richtigkeit von Satz 25 ist also gesichert, und dadurch ergibt sich nach den zu Beginn des Paragraphen skizzierten Schlüssen nachträglich auch noch die Richtigkeit von Satz 24. — Wir untersuchen jetzt noch näher den in Satz 25 benützten allgemeinen Potenzreihenkörper $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}_{\Gamma,\bar{\mathfrak{K}}}$.

$\mathfrak{K}^*$ besitzt eine ausgezeichnete Bewertung B^* mit der Wertgruppe Γ und dem Restklassenkörper $\bar{\mathfrak{K}}$, und zwar besteht der Bewertungsring $\mathfrak{B}^*$ von B^*, aus allen und nur den von negativen Exponenten freien Potenzreihen, und es ist allgemein der Wert der Potenzreihe $p(u) = \bar{c} \cdot u^\alpha + \cdots$ $(\bar{c} \neq 0)$ in B^* gleich α. Wir behaupten nun:

Satz 26. *$\mathfrak{K}^*$ ist hinsichtlich der Bewertung B^* maximal.*

Es sei $\mathfrak{K}$ ein Oberkörper von $\mathfrak{K}^*$, B eine unmittelbare Erweiterung von B^* auf $\mathfrak{K}$, a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{K}$. Zum Beweise von Satz 26 haben wir dann zu zeigen, daß a in $\mathfrak{K}^*$ enthalten sein muß. Wir approximieren zu diesem Zweck a durch eine Abschnittsfolge $p_1, p_2, \ldots p_\varrho, \ldots$ aus $\mathfrak{K}^*$, und zwar nach dem gleichen Schema, nach dem wir beim Beweise von Satz 25 das Element a_τ aus $\mathfrak{K}$ unter Zwischenschaltung der Abschnittsfolge $p_1, p_2, \ldots p_\varrho, \ldots$ durch die Folge $q_1, q_2, \ldots q_\varrho, \ldots$ approximiert haben. Bei genauerer Verfolgung der Approximation zeigt sich nun sofort, daß diesmal das Endergebnis gerade umgekehrt lautet wie beim Beweise von Satz 25. Damals mußte die Konstruktion abbrechen, bevor wir auf eine Gleichung $q_\sigma = q = a_\tau$ stießen. Diesmal muß unsre Konstruktion notwendig schließlich auf eine Gleichung $p_\sigma = p = a$ führen. Um das einzusehen, braucht man nur zu bedenken, daß der Körper $\mathfrak{K}^*$ einerseits gleichzeitig mit jeder Abschnittsfolge stets auch die zugehörige Grenzreihe enthält, und daß andrerseits in $\mathfrak{K}^*$ jede Reihe p_σ durch Anfügung eines beliebigen Gliedes $\bar{a} \cdot u^\alpha$ mit zu $\chi(p)$ gehörigem α zu einer neuen Reihe $p_{\sigma+1} = p_\sigma + \bar{a} \cdot u^\alpha$ „verlängert" werden kann. — Das skizzierte Konstruktionsverfahren zeigt also, daß tatsächlich jedes Element a aus $\mathfrak{K}$ bereits dem Körper $\mathfrak{K}^*$ angehören muß.

Die Sätze 24, 25, 26 legen die folgenden Fragen nahe:

Es sei der Körper $\mathfrak{K}$ mit der Bewertung B auf zwei verschiedene Weisen zu zwei Oberkörpern $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}_2$ erweitert, die hinsichtllich B oder, genauer ausgedrückt, hinsichtlich den unmittelbaren Erweiterungen $\widetilde{B}_1$ und $\widetilde{B}_2$ von B maximal sind. Lassen sich dann $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ und $\widetilde{\mathfrak{K}}_2$ stets isomorph so aufeinander abbilden, daß $\mathfrak{K}$ in sich selbst übergeht, und daß jedes Element $\tilde{a}_1$ aus $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ in $\widetilde{B}_1$ den gleichen Wert besitzt wie das zugeordnete Element $\tilde{a}_2$ aus $\widetilde{\mathfrak{K}}_2$ in $\widetilde{B}_2$? — Unter welchen Bedingungen muß jeder hinsichtlich B maximale Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ einen allgemeinen Potenzreihenkörper $\mathfrak{K}^*$ darstellen?

Wir wollen diese schwierigen Fragen, die für den Fall archimedischer Wertgruppen zuerst von F. K. Schmidt [57]) allgemein formuliert und erfolgreich angegriffen worden sind, hier nur erwähnen. Dagegen soll noch in § 14 als Abschluß unsrer Untersuchungen über perfekte Körper bewiesen werden, daß jeder maximale Körper notwendig perfekt ist.

§ 14. Perfektheit der maximal bewerteten Körper.

Satz 27. *Ist der Körper $\mathfrak{K}$ hinsichtlich der Bewertung B maximal, so ist er auch hinsichtlich B perfekt.*

Beweis indirekt! Genügt $\mathfrak{K}$ nicht den beiden Perfektheitsbedingungen von § 7, so gibt es im Bewertungsring $\mathfrak{B}$ ein unendliches Kongruenzensystem $x \equiv a_\tau$ $(\mathfrak{a}_\tau)$ $(\tau = 1, 2, \ldots)$, das in $\mathfrak{B}$ keine Lösung besitzt, obwohl die Elemente a_τ der Verträglichkeitsbedingung $a_{\tau_1} \equiv a_{\tau_2}$ $(\mathfrak{a}_{\tau_1})$ für jedes Indexpaar $\tau_2 > \tau_1$ genügen. Dabei sind die $\mathfrak{a}_\tau$ entweder die sämtlichen Potenzen eines Hauptideals (a) oder die Glieder einer wohlgeordneten Primidealvielfachenkette; auf jeden Fall ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{a}_\tau$ ein Primideal, das mit $\mathfrak{p}^*$ bezeichnet werden möge.

Wir wollen jetzt mit Hilfe des gegebenen Kongruenzensystems einen echten Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(u)$ von $\mathfrak{K}$ konstruieren, auf den eine unmittelbare Erweiterung $\widetilde{B}$ von B möglich ist. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Ist $p(x)$ irgendein primitives Polynom aus $\mathfrak{B}[x]$, so kommt es niemals vor, daß für alle τ die Kongruenzen $p(a_\tau) \equiv 0$ $(\mathfrak{a}_\tau)$ gelten. — In diesem Falle wählen wir $\widetilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(u)$ als einfache transzendente Erweiterung von $\mathfrak{K}$ und konstruieren $\widetilde{B}$ mit Hilfe der folgenden Überlegung: Nach der gemachten Voraussetzung und wegen der für die a_τ gültigen Verträglichkeitsbedingung gibt es zu jedem primitiven Polynom $p(x)$ aus $\mathfrak{B}[x]$ einen Index τ_0 derart, daß die Kongruenzen $p(a_\tau) \equiv p(a_{\tau_0}) \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a}_{\tau_0})$ für alle $\tau > \tau_0$ gelten. Es haben also „für hinreichend großes τ" die Elemente $p(a_\tau)$ aus $\mathfrak{K}$ alle in B den gleichen Wert, und das gilt auch dann noch, wenn $p(x)$ kein primitives Polynom aus $\mathfrak{B}[x]$, sondern ein beliebiges (von 0 verschiedenes) Polynom aus $\mathfrak{K}[x]$ darstellt; denn es kann ja jedes Polynom aus $\mathfrak{K}[x]$ durch Multiplikation mit einem Element aus $\mathfrak{K}$ in ein primitives Polynom aus $\mathfrak{B}[x]$ verwandelt werden. — Wir definieren jetzt $\widetilde{B}$ durch die Festsetzungen:

Der Wert von $p(u)$ in $\widetilde{\mathfrak{B}}$ sei gleich dem gemeinsamen Wert, den für hinreichend großes τ die Elemente $p(a_\tau)$ in B besitzen. Der Wert von $\frac{p(u)}{q(u)}$ in $\widetilde{B}$ sei gleich der Differenz der bereits definierten Werte von $p(u)$ und $q(u)$. Man verifiziert mühelos, daß man so tatsächlich zu einer Bewertung $\widetilde{B}$, und zwar zu einer unmittelbaren Erweiterung von B, kommt.

2. Wir nehmen jetzt an, es gebe in $\mathfrak{B}[x]$ mindestens ein primitives Polynom $p(x)$, das den Kongruenzen $p(a_\tau) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_\tau)$ für alle τ genügt, und verstehen unter $p^*(x) = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i} x^i$ ein Polynom niedrigsten Grades von dieser Art. Sind dann $q_1(x)$ und $q_2(x)$ irgend zwei primitive Polynome aus $\mathfrak{B}[x]$ von niedrigerem als n-tem Grade, so ist $q_i(a_\tau) \equiv q_i(a_{\tau_0}) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}_{\tau_0}) \ (\tau > \tau_0, i = 1, 2)$ für hinreichend großes τ_0, und daraus folgt weiter in Anbetracht der besonderen Natur der $\mathfrak{a}_\tau$, daß auch $q_1(a_\tau) \cdot q_2(a_\tau) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}_{\tau_1}) \ (\tau > \tau_1)$ für hinreichend großes $\tau_1 \geqq \tau_0$. Es kann daher unmöglich in $\mathfrak{B}[x]$ eine Kongruenz $p^*(x) \equiv q_1(x) \cdot q_2(x) \ (\mathfrak{p}^*)$ gelten, d. h. es muß $p^*(x)$ in $\mathfrak{B}[x]$ nicht nur absolut, sondern auch modulo $\mathfrak{p}^*$ irreduzibel sein.

Wir verstehen nun unter $\widetilde{\mathfrak{K}}$ eine einfache algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}$ durch eine Nullstelle u des Polynoms $p^*(x)$, stellen alle Elemente von $\widetilde{\mathfrak{K}}$ als Polynome $q(u)$ von höchstens n-tem Grade in u mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ dar, und definieren dann für die Polynome $q(u)$ die Werte in $\widetilde{B}$ nach genau dem gleichen Schema, wie wir es unter 1. benutzt haben. — Man verifiziert dann fast ebenso mühelos wie im Falle 1., daß tatsächlich eine unmittelbare Erweiterung $\widetilde{B}$ von B auf $\widetilde{\mathfrak{K}}$ entsteht. Nur ein Punkt bedarf diesmal einer etwas genaueren Untersuchung, und zwar der Nachweis, daß bei unsrer Wertdefinition stets der Wert des Produktes gleich der Summe der Werte der einzelnen Faktoren wird.

Es seien $q_1(u)$ und $q_2(u)$ zwei Elemente aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$. Um die Polynomdarstellung von $q_1(u) \cdot q_2(u)$ zu finden, hat man $r(x)$ und $q(x)$ in $\mathfrak{K}[x]$ so zu bestimmen, daß $q(x)$ höchstens den Grad $n-1$ besitzt und der Gleichung $q(x) + r(x) \cdot p^*(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$ genügt; es wird dann $q(u) = q_1(u) \cdot q_2(u)$. Für jedes a_τ ist nun in B der Wert von $q(a_\tau) + r(a_\tau) \cdot p^*(a_\tau)$ gleich der Summe der Werte von $q_1(a_\tau)$ und $q_2(a_\tau)$; wollen wir daher beweisen, daß in $\widetilde{B}$ der Wert von $q_1(u) \cdot q_2(u)$ der Summe der Werte von $q_1(u)$ und $q_2(u)$ gleich wird, so haben wir nur zu zeigen: *In B besitzen für hinreichend großes τ die Elemente $q(a_\tau) + r(a_\tau) \cdot p^*(a_\tau)$ und $q(a_\tau)$ stets denselben Wert.* Dabei dürfen wir uns, wie leicht einzusehen, beim Beweise noch auf den Fall beschränken, daß $q_1(x)$ und $q_2(x)$ primitive Polynome aus $\mathfrak{B}[x]$ sind.

Wegen der Irreduzibilitätseigenschaft von $p^*(x)$ ist unter dieser Voraussetzung $q(x)$ gleich dem Produkt eines primitiven Polynoms $q'(x)$ aus $\mathfrak{B}[x]$ mit einem nicht zu $\mathfrak{p}^*$ gehörigen Element aus $\mathfrak{K}$, und daraus erschließt man weiter mit Hilfe der Minimaleigenschaft von $p^*(x)$ und der speziellen Natur der Ideale $\mathfrak{a}_\tau$ die Existenz eines τ_0 derart, daß $q(a_\tau) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}_{\tau_0})$ für $\tau > \tau_0$. Andrerseits ist, wie die Art der Berechnung zeigt, das in der Gleichung $q(x) + r(x) \cdot p^*(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$ auftretende Polynom $r(x)$ gleich dem Produkt einer Potenz von c_0^{-1} mit einem Polynom $r'(x)$ aus $\mathfrak{B}[x]$, und wegen der Minimaleigenschaft von $p^*(x)$ kann c_0 als Koeffizient von x^n in $p^*(x)$ unmöglich durch $\mathfrak{p}^*$ teilbar sein. Aus den Kongruenzen $p^*(a_\tau) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_\tau) \ (\tau = 1, 2, \ldots)$ folgt daher für hinreichend großes $\tau > \tau_1 \geqq \tau_0$ sicher $r(a_\tau) \cdot p^*(a_\tau) = c_0^{-s} \cdot r'(a_\tau) \cdot p^*(a_\tau) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_{\tau_0})$, und dieses Ergebnis zeigt, daß für $\tau > \tau_1$ tatsächlich der Wert von $q(a_\tau) + r(a_\tau) \cdot p^*(a_\tau)$ stets gleich dem Wert von $q(a_\tau)$ wird.

Durch dieses Ergebnis ist auch im Falle 2. die Existenz der Bewertung $\widetilde{B}$ gesichert, wir haben also allgemein gezeigt: Ist $\mathfrak{K}$ hinsichtlich B nicht perfekt, so ist $\mathfrak{K}$ hinsichtlich B auch nicht maximal — und das ist gerade die Behauptung von Satz 27 in negativer Fassung. — Nach Satz 27 sind insbesondere die allgemeinen Potenzreihenkörper $\mathfrak{K}_{\Gamma,\mathfrak{K}}$, also auch die geordneten Körper $\mathfrak{K}_\Gamma$ hinsichtlich ihrer ausgezeichneten Bewertung perfekt. Damit ist die Lücke, die wir in § 12 noch gelassen hatten, ausgefüllt. — Satz 27 leistet aber noch wesentlich mehr als den Nachweis spezieller perfekt bewerteter Körper. Kombinieren wir nämlich Satz 27 und Satz 24, so ergibt sich:

Satz 28. *Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper mit der beliebigen Bewertung B, so gibt es stets mindestens einen Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$, der hinsichtlich einer unmittelbaren Erweiterung $\widetilde{B}$ von B perfekt ist.*

Satz 28 liefert meines Erachtens die Rechtfertigung für die ausführlichen Untersuchungen, die wir über perfekt bewertete Körper angestellt haben. Er bildet daher einen passenden Abschluß der vorliegenden Arbeit.

Eingegangen 27. August 1931.