

Werk

Titel: Über rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft.

Autor: Blumenthal, Otto

Jahr: 1931

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0165|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft.

Von *Otto Blumenthal* in Aachen.

Im Anschluß an einen Vortrag, den ich im vorigen Jahre auf dem Allrussischen Mathematiker-Kongress in Charkow gehalten habe, bin ich auf ältere Untersuchungen über eine gewisse Minimumseigenschaft rationaler Polynome zurückgekommen¹⁾.

Es handelt sich um folgende Fragestellung: Wenn ein Polynom n -ten Grades

$$(I) \quad M(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n$$

in einem Kreise vom Radius r um den Nullpunkt mindestens m ($\leq n$) Nullstellen hat, dann ist der Ausdruck

$$(II) \quad s_m = \frac{|\mu_m|^2 + \cdots + |\mu_n|^2}{|\mu_0|^2 + \cdots + |\mu_{m-1}|^2}$$

sicher von Null verschieden. Gesucht werden diejenigen Polynome, welche den Ausdruck zu einem Minimum machen.

Hierüber ist bekannt (Math. Ann. 85): Ein Minimumpolynom hat genau m Nullstellen in dem Kreise, die alle auf dem Rande gelegen sind. Durch diese Nullstellen lassen sich die Koeffizienten des Polynomes ausdrücken. Setzt man nämlich

$$(III, 1) \quad M_k = \begin{cases} -\frac{\mu_k}{|\mu_0|^2 + \cdots + |\mu_{m-1}|^2} & k = 0, \dots, m-1 \\ \frac{\mu_k}{|\mu_m|^2 + \cdots + |\mu_n|^2} & k = m, \dots, n \end{cases}$$

und bezeichnet mit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ die m Nullstellen vom Betrage r und konjugiert-komplexe Größen durch Überstreichen, so ist

$$(III, 2) \quad M_k = A_1 \bar{\alpha}_1^k + \cdots + A_m \bar{\alpha}_m^k.$$

Die Darstellung folgt aus der Tatsache, daß die M_k einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten genügen²⁾. Bei ihrer Formulierung ist vorausgesetzt, daß die Wurzeln α_i untereinander verschieden sind. Bei zusammenfallenden Wurzeln treten die aus der Lehre von den linearen Differenzengleichungen bekannten Modifikationen ein. Ist beispielsweise $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so lautet die Formel

$$(III, 3) \quad M_k = A_1 \bar{\alpha}^k + A_2 k \bar{\alpha}^k + A_3 \bar{\alpha}_3^k + \cdots + A_m \bar{\alpha}_m^k.$$

Die Konstanten $A_1, \dots, A_m$ sind bestimmt durch die Bedingungen

$$(IV) \quad M(\alpha_1) = 0, \dots, M(\alpha_m) = 0$$

oder die bei zusammenfallenden Wurzeln an ihre Stelle tretenden.

Durch die Kenntnis seiner Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ist also das Minimumpolynom festgelegt. Wo aber liegen diese? Diese Frage hat sich mir als schwierig erwiesen, und ich hatte

¹⁾ Math. Ann. 85 (1922), S. 160—171.

²⁾ Math. Ann. 85, Formel (6).

darüber keine allgemeinen Ergebnisse erzielen können. Ich habe deshalb jetzt den einfachsten Sonderfall zweier Wurzeln ($m = 2$) herausgegriffen und bin hier zu klaren Tatsachen gekommen. Das Resultat ist, soweit meine Beweise durchgeführt sind:

Für das Minimumpolynom fallen die beiden Wurzeln zusammen.

Ich vermute, daß dieser Satz auch bei mehr Wurzeln ($m > 2$) besteht. Aber ich habe darüber noch keine Rechnungen angestellt.

§ 1. Zusammenstellung der Formeln für $m = 2$.

Wir schreiben s statt s_m .

Durch eine Drehung der x -Ebene kann immer bewirkt werden, daß eine der beiden Wurzeln positiv reell ist. Wir setzen demnach

$$\alpha_1 = r, \quad \alpha_2 = \alpha = r\varepsilon = re^{i\varphi}$$

und können dabei $0 \leq \varphi \leq \pi$ voraussetzen, weil dem konjugiert-komplexen α das konjugiert-komplexe Polynom mit gleichem s entspricht.

1. $\alpha \neq r$, d. h. $\varphi > 0$. Die Formeln (III, 2) lauten

$$(1, 1) \quad M_k = A_1 r^k + A_2 \bar{\alpha}^k = r^k (A_1 + A_2 \bar{\varepsilon}^k),$$

die Gleichungen (IV) ergeben ³⁾

$$\begin{aligned} -M_0 - M_1 r + s(M_2 r^2 + \dots + M_n r^n) &= 0, \\ -M_0 - M_1 \alpha + s(M_2 \alpha^2 + \dots + M_n \alpha^n) &= 0, \end{aligned}$$

oder mit den Werten (1, 1)

$$\begin{aligned} (2, 1) \quad &(-1 - r^2 + sF) A_1 + (-1 - \bar{\alpha} r + s\bar{\Phi}) A_2 = 0, \\ &(-1 - \alpha r + s\Phi) A_1 + (-1 - r^2 + sF) A_2 = 0, \\ (2, 11) \quad &F = r^4 + r^6 + \dots + r^{2n}, \quad \Phi = \alpha^2 r^2 + \alpha^3 r^3 + \dots + \alpha^n r^n. \end{aligned}$$

2. $\alpha = r$. Dann ist

$$(1, 2) \quad M_k = A_1 r^k + A_2 k r^k = r^k (A_1 + k A_2).$$

Die Gleichungen (IV) werden $M(r) = 0$, $M'(r) = 0$ und lauten

$$\begin{aligned} -M_0 - M_1 r + s(M_2 r^2 + \dots + M_n r^n) &= 0, \\ -M_1 + s(2M_2 r + \dots + nM_n r^{n-1}) &= 0, \end{aligned}$$

oder mit den Werten (1, 2)

$$\begin{aligned} (2, 2) \quad &(-1 - r^2 + sF) A_1 + (-r^2 + sF_1) A_2 = 0, \\ &(-r^2 + sF_1) A_1 + (-r^2 + sF_2) A_2 = 0, \\ (2, 21) \quad &F_1 = 2r^4 + 3r^6 + \dots + n r^{2n}, \quad F_2 = 2^2 r^4 + 3^2 r^6 + \dots + n^2 r^{2n}. \end{aligned}$$

§ 2. Polynome mit reellen Koeffizienten.

Die Realität der Koeffizienten von M zieht die Realität von α nach sich, und damit ergibt sich aus (1, 1), daß auch A_1 und A_2 reell sein müssen.

Wir haben also nur die beiden Möglichkeiten $\alpha = -r$ und $\alpha = +r$, und haben zu zeigen, daß die erste nicht das Minimumpolynom liefert.

Wir entwickeln zuerst den Fall $\alpha = -r$. Die Gleichung für s wird erhalten, indem man A_1, A_2 aus (2, 1) eliminiert. Die Gleichung ist vom 2. Grade und hat zwei positive Wurzeln ⁴⁾, deren kleinste der gesuchte Minimalwert ist.

Weil für $r = 1$ die Rechnung etwas anders und einfacher ist als für $r \neq 1$, behandeln wir $r = 1$ im folgenden gesondert.

³⁾ Math. Ann. 85, Formel (8).

⁴⁾ Math. Ann. 85, S. 166.

Hilfssatz: Die Koeffizienten von A_1, A_2 in den Gleichungen (2, 1) können nicht gleichzeitig verschwinden. Sie sind deshalb, nach (2, 1), beide von Null verschieden.

a) $r = 1$. Dann ist

$$F = n - 1, \quad \Phi = \bar{\Phi} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ 1 & \text{für gerade } n. \end{cases}$$

Das Verschwinden der beiden Koeffizienten ist bei geraden n augenscheinlich unmöglich, weil $-1 - \alpha r = 0$, dagegen s und Φ von Null verschieden sind. Bei ungeraden n ergibt sich $s = s_0 = \frac{2}{n-1}$. Es wird nachher gezeigt werden, daß dies nicht der Minimalwert sein kann.

b) $r \neq 1$. Dann ist

$$F = r^4 \frac{1 - r^{2(n-1)}}{1 - r^2}, \quad \Phi = \bar{\Phi} = r^4 \frac{1 - (-r^2)^{n-1}}{1 + r^2}.$$

Nun müßte sein

$$(3) \quad \frac{1}{s} = \frac{F}{1 + r^2} = \frac{\Phi}{1 - r^2}, \quad \text{d. h.} \quad 1 - r^{2(n-1)} = 1 - (-r^2)^{n-1}.$$

Die Gleichung ist unmöglich bei geraden n , identisch erfüllt bei ungeraden n . Im letzteren Falle ergibt sich

$$(3, 1) \quad s = s_0 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2(n-1)}}.$$

Es wird wieder nachher gezeigt, daß dieser Wert nicht Minimalwert sein kann.

Da die Koeffizienten von A_1 und A_2 in (2, 1) nicht verschwinden, folgt durch Multiplikation der Gleichungen:

$$(4) \quad A_1^2 = A_2^2.$$

Da A_1 und A_2 reell sind, sind nur die beiden Möglichkeiten $A_1 = A_2$ und $A_1 = -A_2$, die einzeln untersucht werden.

1. $A_1 = A_2$. Die beiden Gleichungen (2, 1) reduzieren sich auf die eine

$$(-1 - r^2 + sF) + (-1 + r^2 + s\Phi) = 0,$$

woraus

$$s = \frac{2}{F + \Phi} = \frac{2}{r^4} \frac{1 - r^4}{(1 - r^{2(n-1)})(1 + r^2) + (1 - (-r^2)^{n-1})(1 - r^2)};$$

das ist aber für gerade n

$$(5, 1) \quad s = s_1 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2n}}, \quad \text{für } r = 1: \quad s = \frac{2}{n};$$

für ungerade n

$$s = s_0 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2(n-1)}}.$$

(Dieser Wert kommt aber nicht in Betracht, weil für dieses s die Koeffizienten von (2, 1) einzeln verschwinden.)

2. $A_1 = -A_2$. Die Gleichungen (2, 1) reduzieren sich auf

$$(-1 - r^2 + sF) - (-1 + r^2 + s\Phi) = 0,$$

woraus

$$s = \frac{2r^2}{F - \Phi} = \frac{2}{r^2} \frac{1 - r^4}{(1 - r^{2(n-1)})(1 + r^2) - (1 - (-r^2)^{n-1})(1 - r^2)};$$

das ist aber für gerade n

$$(5, 2) \quad s = s_2 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2(n-2)}}, \quad \text{für } r = 1: s = \frac{2}{n-2};$$

für ungerade n

$$s = s_0 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2(n-1)}},$$

der gleiche Wert wie unter 1.

Von den Werten s_0, s_1, s_2 ist für alle r stets s_1 der kleinste. Wir werden jetzt diejenige Gleichung in s aufstellen, die sich bei der Annahme $\alpha = +r$ ergibt, und zeigen, daß s_1 größer als deren kleinste Wurzel ist. Damit ist dann gezeigt: Unter den reellen Polynomen ist dasjenige mit zusammenfallenden Wurzeln Minimumpolynom.

Zur Aufstellung der Gleichung in s für $\alpha = r$ brauchen wir außer der Formel für F noch die Summationsformeln:

$$F_1 = r^4 \frac{2 - r^2 - (n+1)r^{2(n-1)} + nr^{2n}}{(1-r^2)^2}, \quad \text{für } r = 1: F_1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2},$$

$$F_2 = r^4 \frac{4 - 3r^2 + r^4 - (n+1)^2 r^{2(n-1)} + (2n^2 + 2n - 1)r^{2n} - n^2 r^{2(n+1)}}{(1-r^2)^3},$$

$$\text{für } r = 1: F_2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} - 1 = \frac{(n-1)(2n^2 + 5n + 6)}{6}.$$

Die Gleichung für s ist hiermit $\Delta(s; r) = 0$, wo

$$(6) \quad \Delta(s; r) = \begin{vmatrix} -1 - r^2 + sr^4 \frac{1 - r^{2(n-1)}}{1 - r^2} & -r^2 + sr^4 \frac{2 - r^2 - (n+1)r^{2(n-1)} + nr^{2n}}{(1-r^2)^2} \\ -r^2 + sr^4 \frac{2 - r^2 - (n+1)r^{2(n-1)} + nr^{2n}}{(1-r^2)^2} & -r^2 + sr^4 \frac{4 - 3r^2 + r^4 - (n+1)^2 r^{2(n-1)} + (2n^2 + 2n - 1)r^{2n} - n^2 r^{2(n+1)}}{(1-r^2)^3} \end{vmatrix}.$$

Insbesondere

$$(6,1) \quad \Delta(s; 1) = \begin{vmatrix} -2 + (n-1)s & -1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}s \\ -1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}s & -1 + \left(\frac{(n+1)(2n+1)n}{6} - 1\right)s \end{vmatrix}.$$

Für alle r ist $\Delta(0; r) = r^2(1 - r^2 + r^2) = r^2 > 0$. Daher ist von einem Wert s_1 gezeigt, daß er größer als die kleinste Wurzel von $\Delta(s; r) = 0$ ist, wenn $\Delta(s_1; r) < 0$.

Dies soll jetzt von dem Werte (5, 1) gezeigt werden.

Der Fall $r = 1$ wird vorweggenommen. Hier ist $s_1 = \frac{2}{n}$. Damit wird

$$\Delta\left(\frac{2}{n}; 1\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{n} & n - \frac{2}{n} \\ n - \frac{2}{n} & \frac{2n^2}{3} + n - \frac{2}{3} - \frac{2}{n} \end{vmatrix} = -\left(n^2 + \frac{4n}{3} - 2 - \frac{4}{3n}\right) < 0 \quad (n \geq 2).$$

Für $r \neq 1$ kommt aus (6) und (5, 1), indem wir $\Delta(s_1; r) = D(r)$ setzen, nach einfacher Zwischenrechnung

$$\begin{vmatrix} -(1-r^4)r^{2(n-1)} & 2 - (n+1)r^{2(n-1)} - r^{2n} + (n+1)r^{2(n+1)} - r^{2(n+2)} \\ 2 - (n+1)r^{2(n-1)} - r^{2n} + (n+1)r^{2(n+1)} - r^{2(n+2)} & 4 - (n+1)^2 r^{2(n-1)} + (n^2 - 2)r^{2n} + (n^2 + 2n)r^{2(n+1)} - (n^2 + 2)r^{2(n+2)} + r^{2(n+3)} \end{vmatrix},$$

oder ausgerechnet

$$(7) \quad \begin{aligned} & (1 - r^{2n})^2 (1 - r^2)^2 D(r) = \\ & - \{ 4 - 4n r^{2(n-1)} - 4 r^{2n} + 4n r^{2(n+1)} - 4 r^{2(n+2)} + (n^2 + 2n) r^{2(2n-1)} - 2n^2 r^{2(n+1)} \\ & \quad + 4 r^{2(2n+2)} + (n^2 - 2n) r^{2(2n+3)} \}. \end{aligned}$$

Die Tatsache, daß die Klammer $\{ \}$ für $r = 1$ von 4. Ordnung verschwinden muß, liefert eine empfindliche Probe auf die Richtigkeit der Koeffizienten.

Durch geeignete Zusammenfassung der Glieder läßt sich aus der Klammer der Faktor $(1 - r^2)^3$ wieder herausziehen.

Es ist nämlich zunächst

$$\begin{aligned} \{ \} &= 4(1 - r^{2n} - r^{2(n+2)} + r^{2(2n+2)}) - 2n r^{2(n-1)} (2 - 2r^4 - r^{2n} + r^{2(n+4)}) \\ &\quad + n^2 r^{2(2n-1)} (1 - 2r^4 + r^8) \\ &= 4(1 - r^{2n}) (1 - r^{2(n+2)}) - 2n r^{2(n-1)} (1 - r^4) ((1 - r^{2n}) + (1 - r^{2(n+2)})) \\ &\quad + n^2 r^{2(2n-1)} (1 - r^4)^2. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung

$$(8, 1) \quad s_n = 1 + r^2 + \dots + r^{2(n-1)}$$

wird also

$$\{ \} = (1 - r^2)^2 [4s_n s_{n+2} - 2n r^{2(n-1)} (1 + r^2) (s_n + s_{n+2}) + n^2 r^{2(2n-1)} (1 + r^2)^2].$$

Weiter läßt sich zerlegen

$$\begin{aligned} [] &= (4s_n s_{n+2} - 2n r^{2(n-1)} (1 + r^2) (s_n + s_{n+2}) + n^2 r^{4(n-1)} (1 + r^2)^2) \\ &\quad - (1 - r^2) n^2 r^{4(n-1)} (1 + r^2)^2 \\ &= (2s_n - n r^{2(n-1)} (1 + r^2)) (2s_{n+2} - n r^{2(n-1)} (1 + r^2)) - (1 - r^2) n^2 r^{4(n-1)} (1 + r^2)^2. \end{aligned}$$

Der Faktor $2s_n - n r^{2(n-1)} (1 + r^2)$ ist abermals durch $1 - r^2$ teilbar, und zwar ist

$$(8, 2) \quad s_n = (1 - r^2) s'_n + n r^{2(n-1)}, \quad s'_n = 1 + 2r^2 + 3r^{2 \cdot 2} + \dots + (n-1) r^{2(n-2)},$$

daher

$$2s_n - n r^{2(n-1)} (1 + r^2) = 2(1 - r^2) s'_n + n r^{2(n-1)} (1 - r^2) = (1 - r^2) (2s'_n + n r^{2(n-1)}).$$

Setzen wir dies in $[]$ und weiter in $\{ \}$ und (7) ein, so folgt im ganzen:

$$(9) \quad \begin{aligned} &D(r) s_n (1 - r^{2n}) = \\ &- \{ (2s'_n + n r^{2(n-1)}) (2s_{n+2} - n r^{2(n-1)} (1 + r^2)) - n^2 r^{4(n-1)} (1 + r^2)^2 \}. \end{aligned}$$

Die $\{ \}$ auf der rechten Seite hat, für $n \geq 2$, bei $r = 0$ den Wert 4 und verschwindet bei $r = 1$. Wir entwickeln sie jetzt nach Potenzen von r^2 und zeigen, daß die Reihe ihrer Koeffizienten nur einen Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die rechte Seite außer $r = 1$ keine weitere positive Nullstelle, und daher ist $D(r)$ ständig negativ, w. z. b. w.

Die Berechnung der Koeffizienten ist einfach. Wird die Klammer $= \sum_0^{2n} a_i r^{2i}$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned} \text{für } 0 \leq i \leq n-2 \quad a_i &= 4(1 + 2 + \dots + (i+1)) = 2(i+2)(i+1) \\ a_{n-1} &= 4(1 + 2 + \dots + (n-1)) = 2n(n-1) = a_{n-2} \\ a_n &= 2n(n-1) - 4n \\ \text{für } 1 \leq j \leq n+3 \quad a_{n+j} &= 4(j + \dots + (n-1)) - 4(j+1)n \\ &= 2(n+j-1)(n-j) - 4(j+1)n \\ a_{2n-2} &= -12 + 8n - 4n^2 = a_{2n-3} - 12(n-1) \\ a_{2n-1} &= -4 + 6n - 3n^2 \\ a_{2n} &= 2n - n^2. \end{aligned}$$

Die Zusammenstellung zeigt, daß die Koeffizienten bis zum Index $n-1$ positiv sind und zunehmen, dann bis zum Index $2n-2$ abnehmen, während die beiden letzten Koeffizienten für $n \geq 2$ nicht positiv sind. Dies beweist die Behauptung des einmaligen Zeichenwechsels.

§ 3. Polynome mit komplexen Koeffizienten im Einheitskreis.

Durch Elimination von A_1, A_2 aus den Gleichungen (2, 1) ergibt sich die in s quadratische Gleichung

$$(10) \quad [F^2 - \Phi \bar{\Phi}] s^2 - [2(1 + r^2) F - \{(\Phi + \bar{\Phi}) + r^2(\bar{\varepsilon} \Phi + \varepsilon \bar{\Phi})\} s + [(1 + r^2)^2 - (1 + 2 \cos \varphi r^2 + r^4)] = 0,$$

oder ausgerechnet

a) für $r \neq 1$:

$$(10 \text{ a}) \quad r^2 \left[\left(\frac{1 - r^{2(n-1)}}{1 - r^2} \right)^2 - \frac{1 - 2 \cos(n-1) \varphi r^{2(n-1)} + r^{4(n-1)}}{1 - 2 \cos \varphi r^2 + r^4} \right] s^2 - 2 r^2 \left[(1 + r^2) \frac{1 - r^{2(n-1)}}{1 - r^2} - \frac{\cos 2 \varphi - r^4 - \cos(n+1) \varphi r^{2(n-1)} + \cos(n-1) \varphi r^{2(n+1)}}{1 - 2 \cos \varphi r^2 + r^4} \right] s + 2 [1 - \cos \varphi] = 0;$$

b) für $r = 1$:

$$(10 \text{ b}) \quad \left[(n-1)^2 - \frac{1 - \cos(n-1) \varphi}{1 - \cos \varphi} \right] s^2 - 2 \left[2(n-1) + \frac{(1 - \cos 2 \varphi) - (\cos(n-1) \varphi - \cos(n+1) \varphi)}{2(1 - \cos \varphi)} \right] s + 2(1 - \cos \varphi) = 0.$$

Die Form (10) zeigt, daß alle Klammern [] positiv sind, in Übereinstimmung mit dem oben ausgesprochenen allgemeinen Sachverhalt, daß die Gleichung zwei positive Wurzeln hat.

Wir benutzen im folgenden den Hilfssatz: *Hat die Gleichung*

$$a - b x + c x^2 = 0$$

positive Koeffizienten a, b, c und reelle Wurzeln, so sind diese größer als $x_0 = \frac{a}{b}$.

Denn für $x < x_0$ ist $a - bx$ positiv, daher erst recht die linke Seite der Gleichung.

Betrachten wir jetzt zuerst den Fall $r = 1$, d. h. das *Minimumpolynom*, das im *Einheitskreis* 2 Nullstellen hat.

Nach dem Hilfssatz liefern die Polynome, deren zweite Nullstelle bei $\alpha = e^{i\varphi}$ liegt, Werte s , die größer sind als

$$(11) \quad s_1 = \frac{1 - \cos \varphi}{2(n-1) + \frac{(1 - \cos 2 \varphi) - (\cos(n-1) \varphi - \cos(n+1) \varphi)}{2(1 - \cos \varphi)}} = \frac{1 - \cos \varphi}{2(n-1) + (1 + \cos \varphi) \left(1 - \frac{\sin n \varphi}{\sin \varphi} \right)}.$$

Mit Benutzung der für alle φ und alle positiven ganzen n gültigen Ungleichung

$$\left| \frac{\sin n \varphi}{\sin \varphi} \right| < n^5$$

folgt hieraus für alle φ

$$(12) \quad s_1 > \frac{1 - \cos \varphi}{4n} = \frac{\sigma}{n},$$

indem

⁵⁾ Siehe z. B. Blumenthal, *Fonctions entières d'ordre infini* (Paris, Gauthier-Villars, 1911), S. 133—134.

$$(12, 1) \quad \frac{1 - \cos \varphi}{4} = \sigma$$

gesetzt wird. Wir setzen diesen Wert in $\Delta(s; 1)$ (Gl. (6, 1)) ein und fragen, für welche Werte von σ der Ausdruck $\Delta(s_1; 1) < 0$ wird. Diese Werte φ liefern sicher nicht das Minimum von s .

Es ist

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{\sigma}{n}; 1\right) &= \begin{vmatrix} -2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma & -1 + \left(n + 1 - \frac{2}{n}\right)\frac{\sigma}{2} \\ -1 + \left(n + 1 - \frac{2}{n}\right)\frac{\sigma}{2} & -1 + \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{1}{n}\right)\sigma \end{vmatrix} \\ &= 1 - \left[\frac{2n^2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right]\sigma + \left[\frac{n^2}{12} - \frac{n}{3} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6n}\right]\sigma^2. \end{aligned}$$

Um im folgenden die Rechnung abzukürzen, setzen wir n so groß voraus, daß höhere Potenzen von $\frac{1}{n}$ vernachlässigt werden sollen. Die kleinste Wurzel der Gleichung $\Delta\left(\frac{\sigma}{n}; 1\right) = 0$ ist dann $\sigma = \frac{3}{2n^2}$, und hieraus ergibt sich nach (12, 1) mit der gleichen Genauigkeit

$$(13) \quad \varphi = \frac{\sqrt{12}}{n}.$$

Bei genügend großem n müssen Werte φ , die das Minimum von s liefern, $< \frac{\sqrt{12}}{n}$ sein.

Für diese Werte φ aber läßt sich die Gleichung (10 b) in der Weise diskutieren, daß wir für die eingehenden cos-Funktionen die Reihenentwicklungen einsetzen. Die Koeffizienten dieser Reihen entwickeln wir gleichzeitig nach fallenden Potenzen von n . Wenn ϑ, ϑ_1 positive Größen < 1 bezeichnen, α, β, γ Größen, die mit wachsendem n unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, so ergibt sich für $0 < \varphi \leq \frac{\sqrt{12}}{n}$:

$$\frac{1 - \cos(n-1)\varphi}{1 - \cos \varphi} = (n-1)^2 - \frac{1}{12}(n-1)^2 n(n-2)\varphi^2 + \frac{n^6}{360}\left(\vartheta + \frac{\alpha}{n}\right)\varphi^4$$

und

$$\frac{(n-1)^2 - \frac{1 - \cos(n-1)\varphi}{1 - \cos \varphi}}{2(1 - \cos \varphi)} = \frac{1}{12}(n-1)^2 n(n-2) - \frac{n^6}{360}\left(\vartheta + \frac{\alpha'}{n}\right)\varphi^2.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi &= 2 \sin \varphi \sin n\varphi = 2 \sin \varphi \left[n\varphi - \frac{n^3\varphi^3}{6} + \frac{n^5\varphi^5}{120} - \frac{\vartheta_1 n^7\varphi^7}{56 \cdot 120} \right] \\ &= 2 \left[n\varphi^2 - \left(\frac{n^3}{6} + \frac{n}{6}\right)\varphi^4 + \frac{n^5}{120}\left(1 + \frac{\beta}{n^2}\right)\varphi^6 - \frac{n^7}{56 \cdot 120}\left(\vartheta_1 + \frac{\gamma}{n^2}\right)\varphi^8 \right], \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} &\frac{(1 - \cos 2\varphi) - (\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi)}{2(1 - \cos \varphi)} \\ &= -2(n-1) + \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n}{6} - \frac{1}{2}\right)\varphi^2 - \frac{n^5}{60}\left(1 + \frac{\beta'}{n^2}\right)\varphi^4 + \frac{n^7}{56 \cdot 60}\left(\vartheta_1 + \frac{\gamma'}{n^2}\right)\varphi^6 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
2(n-1) + \frac{(1 - \cos 2\varphi) - (\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi)}{2(1 - \cos \varphi)} \\
= \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n}{6} - \frac{1}{2}\right) - \frac{n^5}{60} \left(1 + \frac{\beta''}{n}\right) \varphi^2 + \frac{n^7}{56 \cdot 60} \left(\vartheta_1 + \frac{\gamma''}{n^2}\right) \varphi^4.
\end{aligned}$$

Damit wird aus (10 b), wenn noch $\frac{n^3}{3} + \frac{n}{6} - \frac{1}{2} = (n-1) \left[\frac{n^2}{3} + \frac{n}{3} + \frac{1}{2}\right]$ eingesetzt wird,

$$(14) \quad As^2 - 2Bs + 1 = 0,$$

wo

$$\begin{aligned}
(14, 1) \quad A &= \frac{1}{12} (n-1)^2 n (n-2) - \frac{n^6}{360} \left(\vartheta + \frac{\alpha'}{n}\right) \varphi^2, \\
B &= (n-1) \left(\frac{n^2}{3} + \frac{n}{3} + \frac{1}{2}\right) - \frac{n^5}{60} \left(1 + \frac{\beta''}{n^2}\right) \varphi^2 + \frac{n^7}{56 \cdot 60} \left(\vartheta_1 + \frac{\gamma''}{n^2}\right) \varphi^4.
\end{aligned}$$

Andererseits sei mit s_m die Wurzel der Gleichung $A(s; 1) = 0$ bezeichnet. Ausrechnung der Determinante ergibt

$$(15) \quad \frac{1}{12} (n-1)^2 n (n-2) s_m^2 - 2(n-1) \left(\frac{n^2}{3} + \frac{n}{3} + \frac{1}{2}\right) s_m + 1 = 0.$$

Zum Schluß setzen wir in (14)

$$(16) \quad s = s_m + t$$

und erhalten wegen (15)

$$(17) \quad At^2 - 2(B - As_m)t + s_m \varphi^2 \left[\frac{n^5}{30} \left(1 + \frac{\beta''}{n^2}\right) - \frac{n^7}{56 \cdot 30} \left(\vartheta_1 + \frac{\gamma''}{n^2}\right) \varphi^2 - \frac{n^6}{360} \left(\vartheta + \frac{\alpha'}{n}\right) s_m \right] = 0.$$

Wir zeigen, daß die Gleichung keine negativen Wurzeln hat. Dazu bemerken wir, daß, wie gelegentlich der Gleichung (13) schon bewiesen,

$$s_m = \frac{3}{2n^3}$$

ist. Nun ist A nach Definition positiv (was sich übrigens auch rechnerisch sofort ergibt), außerdem wegen $\varphi \leq \frac{\sqrt{12}}{n}$ von nicht höherer Ordnung als n^4 , daher As_m von der Ordnung n .

Für B dagegen gilt folgende Abschätzung der Größenordnung:

$$B > \frac{n^3}{3} - \frac{n^5}{60} \varphi^2 > n^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \quad \text{für } \varphi \leq \frac{\sqrt{12}}{n}.$$

Daher ist $B - As_m$ für genügend große n sicher positiv. Schließlich ist auch die Klammer [] positiv, denn der letzte Term ist nur von der Ordnung n^3 , dagegen die Differenz der beiden ersten

$$> \frac{n^5}{30} - \frac{n^7}{56 \cdot 30} \varphi^2 > \frac{n^5}{30} \left(1 - \frac{3}{14}\right) \quad \text{für } \varphi \leq \frac{\sqrt{12}}{n}.$$

Somit ist auch für $\varphi \leq \frac{\sqrt{12}}{n}$ immer $s > s_m$, d. h.: s_m , der Wert bei zusammenfallenden Wurzeln, ist das absolute Minimum der Größe s , w. z. b. w.

§ 4. Polynome mit komplexen Koeffizienten für kleine und große r .

Wenden wir den Hilfssatz von S. 242 auf die Gleichung (10 a) an, so folgt bei genügend kleinem r , daß die kleinste Wurzel von (10 a) größer ist als

$$s_0 = \frac{1}{r^2} \frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Andererseits lautet die Gleichung $\Delta(s; r) = 0$ für kleine r in erster Näherung ($n > 2$)

$$1 - 4r^2 s + r^8 s^2 = 0.$$

Es muß also jedenfalls $\frac{1}{r^2} \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ kleiner als die kleinste Wurzel dieser Gleichung sein,

daher $4r^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ größer als die größere Wurzel der Gleichung $u^2 - 4r^2 u + r^8 = 0$, d. h.

$$(18) \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} > 1 - \frac{r^4}{16}, \quad \varphi < \frac{r^2}{2}.$$

Also können Minimumwerte von s nur bei sehr kleinen Winkeln φ liegen. Daß auch dies nicht möglich ist, zeigt man wieder durch Reihenentwicklung der Gleichung (10 a), wobei $n r$ als klein vorauszusetzen ist.

Ganz entsprechend verläuft die Rechnung für große r .

Die kleinste Wurzel von (10 a) ist größer als

$$s_\infty = \frac{1}{r^{2n}} \frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos (n-1)\varphi} = \frac{1}{r^{2n}} \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 (n-1) \frac{\varphi}{2}}.$$

Die Gleichung $\Delta(s; r) = 0$ lautet für große r in erster Näherung ($n > 2$)

$$1 - (n-1)^2 r^{2n} s + r^{4(n-1)} s^2 = 0.$$

s_∞ muß kleiner als die kleinste Wurzel dieser Gleichung sein, oder $r^{2n} \frac{\sin^2 (n-1) \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

größer als die größte Wurzel der Gleichung $u^2 - (n-1)^2 r^{2n} u + r^{4(n-1)} = 0$. Dies gibt

$$(19, 1) \quad \frac{\sin^2 (n-1) \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} > (n-1)^2 \left(1 - \frac{1}{(n-1)^4} r^{-4} \right),$$

$$\frac{\sin (n-1) \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} > (n-1) \left(1 - \frac{1}{2(n-1)^4} r^{-4} \right).$$

Diese Ungleichung kann nur für sehr kleine Werte von φ erfüllt sein. Denn für $0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$ gilt bekanntlich

$$\sin \frac{\varphi}{2} > \frac{2}{\pi} \frac{\varphi}{2}.$$

Ist daher $(n-1) \frac{\varphi}{2} \geq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, so ist

$$\left| \frac{\sin (n-1) \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right| < \frac{1}{\frac{2}{\pi} \frac{\varphi}{2}} < \frac{n-1}{1 + \frac{2\varepsilon}{\pi}},$$

also kann, nach (19, 1), ε einen sehr kleinen Betrag nicht überschreiten.

Innerhalb des Spielraumes $0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{n-1} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right)$ aber nimmt, wie der Differen-

tialquotient zeigt, die Funktion $\frac{\sin (n-1) \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ monoton ab. Nun ergibt Reihenentwicklung

$$\frac{\sin (n-1) \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = (n-1) \left[1 - \frac{n(n-2)}{6} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2 + \dots \right],$$

und daher liefert (19, 1)

$$(19, 2) \quad \varphi < \frac{\sqrt{12}}{(n-1)^2 \sqrt{n(n-2)}} r^{-2}.$$

Der Rest des Beweises wird wieder durch Reihenentwicklung der Gleichung (10 a) erledigt.

Im vorstehenden ist für reelle Polynome allgemein, für komplexe in drei charakteristischen Sonderfällen bewiesen, daß das Minimumpolynom zwei zusammenfallende Nullstellen hat. Auch der allgemeine Fall läßt sich gewiß mit den hier gebrauchten Methoden behandeln, wenn auch die Rechnungen im einzelnen vielleicht mühsam werden. Mir kam es nicht auf Vollständigkeit an, sondern nur darauf, einen ersten Weg durch die algebraischen Schwierigkeiten der Aufgabe zu finden. Ich hoffe, daß die gewonnenen Einblicke auch für die Behandlung der höheren Fälle ($m > 2$) nützlich sein werden.

Eingegangen 4. April 1931.