Werk

Titel: Neue Begründung der komplexen Multiplikation. Zweiter Teil: Aufbau ohne Benutzung...

Autor: Hasse, Helmut

Jahr: 1931

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0165|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Neue Begründung der komplexen Multiplikation.

Zweiter Teil: Aufbau ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie.

Von *Helmut Hasse* in Marburg.

Inhalt.

Seite

Einleitung 64

I. Der absolute Klassenkörper K zu Ω 66

§ 1. Die absolute Klassengleichung von Ω 66

§ 2. Die Galoissche Gruppe des absoluten Klassenkörpers zu Ω 71

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale von Ω im absoluten Klassenkörper zu Ω 75

II. Der Strahlklassenkörper $K_{\mathfrak{m}}$ mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω 78

§ 1. Die Strahlklassengleichung mod. $\mathfrak{m}$ von Ω 78

§ 2. Die Galoissche Gruppe des Strahlklassenkörpers mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω 85

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale von Ω im Strahlklassenkörper mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω 87

Einleitung.

Die folgenden Ausführungen bilden den zweiten Teil eines vollständigen Abrisses, der unter dem Namen: *Komplexe Multiplikation* bekannten Theorie, dessen erster Teil vor vier Jahren im ersten Jubiläumsband dieses Journals erschienen ist [1]). Während ich dort den in der dortigen Einleitung mit a) bezeichneten, im dortigen Untertitel näher gekennzeichneten Gesichtspunkt zugrunde legte, füge ich hier diejenigen Ergänzungen hinzu, die unter dem ebenfalls dort schon angeführten, im jetzigen Untertitel gekennzeichneten Gesichtspunkt b) erforderlich werden. Es handelt sich im wesentlichen um die Herleitung der Sätze über Grad und Gruppe der fraglichen Klassenkörper auf direktem Wege, d. h. ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie.

Wie im ersten Teil zerfällt der Aufbau in zwei Abschnitte, von denen der erste die Theorie des absoluten Klassenkörpers zu dem gegebenen imaginär-quadratischen Grundkörper Ω (kurz: *Theorie I*), der zweite die Theorie des Strahlklassenkörpers mod. $\mathfrak{m}$ (kurz: *Theorie II*) behandelt.

In der Theorie I führe ich keine wesentlichen Abweichungen gegenüber dem bereits bekannten Aufbau ein, wie er in den im ersten Teil zitierten Darstellungen in den Büchern von Weber und Fueter vorliegt. Ich darf mir dennoch erlauben, eine Darstellung der Theorie I voranzustellen, damit nachher wieder die Analogie mit der Theorie II möglichst deutlich hervortritt, und damit auch der zweite Teil meiner Abhandlung im Anschluß an den ersten Teil als Abriß eines systematischen Aufbaus der ganzen Theorie dienen kann.

---

[1]) H. Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation. Erster Teil: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie. Dieses Journal **157** (1927). — Im folgenden zitiert mit 1.

In der Theorie II führe ich, wie im ersten Teil, so auch hier, die gegenüber allem bisherigen grundlegende Abweichung ein, daß ich mich lediglich der Modulfunktionen und elliptischen Funktionen erster Stufe bediene.

Was die dabei verwendete Methode betrifft, so handelt es sich um eine Verallgemeinerung des Prinzips der komplexen Multiplikation, die darin besteht, daß man an Stelle der Multiplikation des Arguments u der elliptischen Funktionen mit einem ganzen Hauptideal (ν) aus Ω oder also — was auf Grund der Homogenität 0. Dimension dasselbe bedeutet — Division des Periodenideals $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ aus Ω durch (ν) die Division durch ein beliebiges ganzes Ideal $\mathfrak{n}$ aus Ω treten läßt.

Dazu seien mir noch die folgenden Bemerkungen gestattet: In zwei inzwischen erschienenen Mitteilungen hat auch Herr Fueter [2]) diese Verallgemeinerung des Prinzips der komplexen Multiplikation angegeben, sie auf die Herleitung von Teilaussagen des Reziprozitätsgesetzes über Ω angewendet, sowie auf die Anwendbarkeit für die Bestimmung von Grad und Gruppe der Strahlklassenkörper hingewiesen. Wenn Herr Fueter dort behauptet, diese allgemeine Formulierung der komplexen Multiplikation sei seines Wissens bisher noch nicht beachtet worden, so darf ich mir erlauben, auf meine ausdrückliche Angabe der in Rede stehenden Verallgemeinerung und ihrer Anwendung auf die Bestimmung von Grad und Gruppe der Strahlklassenkörper zu Ω im ersten Teil meines Berichts über algebraische Zahlkörper [3]) hinzuweisen. Ferner möchte ich bemerken, daß auch die grundlegende Kongruenz

$$\tau(\mathfrak{k}^*)^p \equiv \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*) \bmod^*. \mathfrak{p},$$

die ich in **1**, Satz 23 hergeleitet und auf den Beweis des Zerlegungsgesetzes in den Strahlklassenkörpern zu Ω angewendet habe, ein Ausfluß jenes verallgemeinerten Prinzips der komplexen Multiplikation ist. Sie entsteht ja, wie aus dem Beweise ersichtlich, indem man die beiden durch die Multiplikation mit der Strahlklasse $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^*$ von $\mathfrak{p}$ verbundenen Strahlklasseninvarianten

$$\tau(\mathfrak{k}^*) \quad \text{und} \quad \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*)$$

als singuläre Werte der beiden Funktionen

$$\tau(u, \mathfrak{a}) \text{ und } \tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}\right) = \tau(pu, \bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a})$$

darstellt, wo $p = N(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ ist, die eben durch das angeführte verallgemeinerte Prinzip der komplexen Multiplikation zusammenhängen.

Bei jenem Beweise konnte ich — anders als Herr Fueter beim Beweise der analogen grundlegenden Kongruenz für seine Funktion zweiter Stufe — die nachher herzuleitende eigentliche Formel der verallgemeinerten komplexen Multiplikation

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_\mathfrak{n}(\tau(u, \mathfrak{a}))$$

vermeiden und mußte das sogar, weil sich hier für Zähler und Nenner der für den Primidealfall $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$ gebildeten rationalen Funktion $R_\mathfrak{p}(t)$ nicht die entsprechenden erforderlichen Kongruenzeigenschaften nachweisen lassen, wie bei Herrn Fueter im Fall der zweiten Stufe. Ich kam vielmehr direkt dadurch zum Ziel, daß ich anstatt die Abhängigkeit von der Variablen u bei singulär gewähltem Periodenmodul $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ zu studieren, u von vornherein auf den Teilpunkt $\varrho = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} = \frac{r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2}{m}$ spezialisierte, ferner $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}} = \frac{1}{p}\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}$

[2]) R. Fueter, Reziprozitätsgesetze in quadratisch-imaginären Körpern. Göttinger Nachrichten 1927.

[3]) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil I: Klassenkörpertheorie. Jahresbericht der D. M.-V. **35** (1926). — Siehe dort Erläuterung 49, S. 55.

in der Form $\frac{1}{p}\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2)$ durch eine Transformation p-ten Grades $\overline{P}$ herleitete, und dann

$$\tau\left(\frac{r_1 w_1 + r_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right) \text{ und } \tau\left(\frac{r_1 w_1 + r_2 w_2}{m};\ \frac{1}{p}\overline{P}(w_1, w_2)\right) = \tau\left(\frac{p(r_1 w_1 + r_2 w_2)}{m};\ \overline{P}(w_1, w_2)\right)$$

als Funktionen von w_1, w_2 studierte. Die für $(w_1, w_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$ gelieferten singulären Werte dieser Funktionen sind gerade die zu untersuchenden beiden Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ und $\tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*)$.

Übrigens habe ich auch die eben genannte eigentliche Formel der verallgemeinerten komplexen Multiplikation bereits früher angegeben und ihre Anwendung auf die Herleitung der Sätze über Grad und Gruppe der Strahlklassenkörper zu Ω hervorgehoben, nämlich in zwei Vorträgen [4]), von denen allerdings Herr Fueter wohl keine Kenntnis haben konnte.

I. Der absolute Klassenkörper K zu Ω.

§ 1. Die absolute Klassengleichung von Ω.

In **1**, Satz 8 wurde gezeigt, daß die absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω ganze algebraische Zahlen sind. Wir wollen jetzt darüber hinaus zeigen, daß die *absolute Klassengleichung* von Ω, d. i. das Polynom

$$H(t) = \prod_{\mathfrak{k}} (t - j(\mathfrak{k})),$$

ganze rationale Zahlkoeffizienten hat.

Dazu knüpfen wir an die bereits in **1** im Beweise zu Satz 8 erhaltene genauere Feststellung an, wonach die $j(\mathfrak{k})$ für jedes $m = N(\mu)$ mit ganzem μ ohne ganz-rationalen Teiler aus Ω Wurzeln des Polynoms $J_m(t, t)$ sind, und bestimmen jetzt die sämtlichen Wurzeln von $J_m(t, t)$ inkl. ihrer Vielfachheiten. Wegen $J_1(t, t) = 0$ sei dabei $m > 1$ vorausgesetzt.

Satz 1. *Eine komplexe Zahl $\xi = j(\alpha_1, \alpha_2)$ ist dann und nur dann Wurzel von $J_m(t, t)$, wenn eine ganzzahlige primitive Transformation m-ten Grades M existiert, so daß*

$$M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$$ [5])

ist.

Die Vielfachheit der Wurzel ξ ist gleich der Anzahl der nicht äquivalenten solchen Transformationen M.

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich ohne weiteres aus der gemäß **1**, S. 120 gültigen Produktzerlegung

$$J_m(j(w_1, w_2),\ j(w_1, w_2)) = \prod_{\nu=1}^{\varphi(m)} (j(w_1, w_2) - j(M_\nu(w_1, w_2)))$$

und den in **1**, Satz 3 zusammengestellten Eigenschaften der Funktion $j(w_1, w_2)$.

Es sei nun n die Anzahl der nicht äquivalenten ganzzahligen primitiven Transformationen m-ten Grades M mit $M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$, so daß also genau n Faktoren der eben angeführten Produktzerlegung für $(w_1, w_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$ verschwinden.

Es sei ferner v die Vielfachheit einer Wurzel $\xi = j(\alpha_1, \alpha_2)$ von $J_m(t, t)$. Dann ist v der höchste Exponent, für den die rationale Funktion

---

[4]) Marburg, November 1926, im mathematischen Kolloquium der Universitäten Marburg, Gießen, Frankfurt. Kissingen, September 1927, auf der Jahresversammlung der D. M.-V.

[5]) Das Zeichen $\approx$ soll *proportional* bedeuten.

$$\frac{J_m(t, t)}{(t - \xi)^v}$$

bei $t \to \xi$ noch endlich bleibt. Daher ist v auch der höchste Exponent, für den die analytische Funktion

$$\frac{J_m(j(w_1, w_2), j(w_1, w_2))}{(j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2))^v} = \frac{\prod_{\nu=1}^{\psi(m)} (j(w_1, w_2) - j(M_\nu(w_1, w_2)))}{(j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2))^v}$$

bei $(w_1, w_2) \to (\alpha_1, \alpha_2)$ noch endlich bleibt.

Wenn also gezeigt werden kann, daß

$$\lim_{(w_1, w_2) \to (\alpha_1, \alpha_2)} \frac{j(w_1, w_2) - j(M(w_1, w_2))}{j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2)} \quad \text{endlich und} \neq 0$$

ist, wenn $M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$, so folgt ersichtlich die Behauptung $v = n$.

In inhomogener Schreibweise, d. h. wenn

$$w = \frac{w_1}{w_2}, \quad j(w) = j(w_1, w_2), \quad M(w) = M(w_1, w_2), \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

gesetzt wird, bestimmt sich nun der fragliche Grenzwert zu

$$\begin{aligned}
&\lim_{(w_1, w_2) \to (\alpha_1, \alpha_2)} \frac{j(w_1, w_2) - j(M(w_1, w_2))}{j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2)} \\
&\qquad = \lim_{w \to \alpha} \frac{j(w) - j(M(w))}{j(w) - j(\alpha)} \\
&\qquad = \lim_{w \to \alpha} \frac{j'(w) - j'(M(w))\, M'(w)}{j'(w)} \\
&\qquad = 1 - M'(\alpha) \lim_{w \to \alpha} \frac{j'(M(w))}{j'(w)},
\end{aligned}$$

also

$$= 1 - M'(\alpha), \quad \text{falls } j'(\alpha) \neq 0,$$

und andernfalls durch weitere Differentiation

$$\begin{aligned}
&= 1 - (M'(\alpha))^2, && \text{falls } j'(\alpha) = 0, && j''(\alpha) \neq 0, \\
&= 1 - (M'(\alpha))^3, && \text{falls } j'(\alpha) = 0, && j''(\alpha) = 0, \\
& && && j'''(\alpha) \neq 0.
\end{aligned}$$

Wäre nun $1 - M'(\alpha) = 0$, so wäre α zweifache Nullstelle von $w - M(w)$, also auch zweifache Nullstelle des Zählers dieser rationalen Funktion. Ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so lautet dieser Zähler $cw^2 + (d - a)\, w - b$. Wäre er nicht identisch Null, so wäre also α rational, was für ein j-Argument nicht der Fall ist. Also müßte der fragliche Zähler identisch Null sein; dann wäre aber $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, also nicht primitiv.

Daher ist $1 - M'(\alpha) \neq 0$, wie im Falle $j'(\alpha) \neq 0$ zu beweisen war.

Für $j'(\alpha) = 0$ ist α nach **1**, S. 118 zu i oder ϱ nach der Modulgruppe γ äquivalent und sicherlich $j''(\alpha) \neq 0$ bzw. $j'''(\alpha) \neq 0$; man kann dann ohne Einschränkung $\alpha = i$ bzw. $\alpha = \varrho$ annehmen und rechnet leicht aus, daß auch in diesen Fällen aus $1 - (M'(\alpha))^2 = 0$ bzw. $1 - (M'(\alpha))^3 = 0$ folgen würde, daß M nicht primitiv wäre.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wir wenden Satz 1 zunächst auf den speziellen Fall an, daß α_1, α_2 eine Ideal-

basis aus Ω, also $j(\alpha_1, \alpha_2)$ eine absolute Klasseninvariante von Ω ist. Dann gilt in Ergänzung zu Satz 1

Satz 2. *Ist α_1, α_2 eine Idealbasis aus Ω, so ist die Anzahl der nicht äquivalenten ganzzahligen primitiven Transformationen m-ten Grades M mit $M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$ gleich der Anzahl der nicht assoziierten ganzen Zahlen μ ohne ganz-rationalen Teiler aus Ω mit $N(\mu) = m$.*

Beweis: Jene Transformationen M und diese Zahlen μ entsprechen sich gegenseitig eindeutig auf Grund der Beziehung

$$M(\alpha_1, \alpha_2) = \mu(\alpha_1, \alpha_2),$$

und dabei entsprechen sich überdies äquivalente M und assoziierte μ.

Mittels der Sätze 1 und 2 lassen sich die Vielfachheiten bestimmen, mit denen die absoluten Klasseninvarianten von Ω in gewissen speziellen $J_m(t, t)$ als Wurzeln stecken. Es sei d die Diskriminante von Ω und d_0 ihr quadratfreier Kern, also $d = d_0$ oder $d = 4\,d_0$, je nachdem $d_0 \equiv 1 \bmod 4$ oder $d_0 \equiv 2, 3 \bmod 4$. Dann gilt

Satz 3. *Für $d_0 \neq -1$ sind alle absoluten Klasseninvarianten von Ω genau einfache Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$.*

Für $d_0 \equiv 1$ mod. 4, $d_0 \neq -3$ sind außerdem alle absoluten Klasseninvarianten von Ω (genau zweifache) Wurzeln von $J_{\frac{1-d_0}{4}}(t, t)$.

Beweis: $-d_0 = N(\sqrt{d_0})$ und $\dfrac{1-d_0}{4} = N\left(\dfrac{1+\sqrt{d_0}}{2}\right)$ erweisen sich leicht als einzige im Sinne von Satz 2 zu zählende Normdarstellungen von $-d_0$ und $\dfrac{1-d_0}{4}$.[6])

Wir wenden jetzt Satz 1 auf den allgemeinen Fall eines beliebigen j-Argumentpaars α_1, α_2 (nicht notwendig Idealbasis, nicht notwendig aus Ω) an, um die übrigen Wurzeln der eben behandelten speziellen $J_m(t, t)$ von den von den uns interessierenden abtrennen zu können.

Satz 4. *Für $d_0 \equiv 2, 3$ mod. 4, $d_0 \neq -1, -2$ sind die absoluten Klasseninvarianten von Ω genau die einfachen Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$.*

Für $d_0 \equiv 1$ mod. 4, $d_0 \neq -3$ sind die absoluten Klasseninvarianten von Ω genau diejenigen einfachen Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$, die auch Wurzeln von $J_{\frac{1-d_0}{4}}(t, t)$ sind.

Beweis: Es ist über Satz 3 hinaus zu zeigen, daß jede Wurzel von $J_{-d_0}(t, t)$ mit der in Satz 4 angegebenen Beschaffenheit absolute Klasseninvariante von Ω ist.

Sei also $m = -d_0$ gesetzt, und sei $j(\alpha_1, \alpha_2)$ zunächst irgendeine Wurzel von $J_m(t, t)$. Dann ist nach Satz 1 jedenfalls

$$(\alpha_1, \alpha_2) \approx M(\alpha_1, \alpha_2),$$

also

$$\mu(\alpha_1, \alpha_2) = M(\alpha_1, \alpha_2)$$

mit einer ganzzahligen primitiven Transformation m-ten Grades M und einem gewissen Proportionalitätsfaktor μ. Für den letzteren folgt daraus

$$|M - \mu E| = 0.$$

μ genügt also einer quadratischen Gleichung im rationalen Zahlkörper P, und α_1, α_2 sind in $\mathsf{P}(\mu)$ wählbar. Daher ist μ eine echte imaginär-quadratische Irrationalität, und zwar eine ganze Zahl, mit

[6]) Die Einschränkungen $d_0 \neq -1$, $d_0 \neq -3$ sind durch die für Satz 1 notwendige Annahme $m > 1$ bedingt.

$$N(\mu) = m.$$

Wird nun $j(\alpha_1, \alpha_2)$ als genau einfache Wurzel von $J_m(t, t)$ vorausgesetzt, so muß wegen

$$mM^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = m\,\mu(\alpha_1, \alpha_2),$$

wo auch mM^{-1} ganzzahlig primitiv vom Grade m ist, nach Satz 1 notwendig

$$mM^{-1} \sim M,$$

d. h.

$$M^2 = mS$$

mit einer Modulsubstitution S sein. Daraus folgt weiter

$$M^2(\alpha_1, \alpha_2) = mS(\alpha_1, \alpha_2) = \mu^2(\alpha_1, \alpha_2)$$
$$|mS - \mu^2 E| = 0$$
$$\left|S - \frac{\mu^2}{m} E\right| = 0.$$

$\frac{\mu^2}{m}$ ist also eine Einheit aus $\mathsf{P}(\mu)$.

Die Annahme, es sei $\frac{\mu^2}{m}$ eine der nicht-trivialen imaginär-quadratischen Einheiten $\pm i$ bzw. $\pm \varrho$, $\pm \varrho^2$ führt leicht auf die im Satz ausgeschlossenen Fälle $m = 2$ bzw. $m = 3$. Also folgt $\frac{\mu^2}{m} = \pm 1$. Weil ferner μ echte imaginär-quadratische Irrationalzahl ist, kommt $\frac{\mu^2}{m} = +1$ nicht in Frage. Also gilt

$$\frac{\mu^2}{m} = -1,$$
$$\mu = \pm\sqrt{-m} = \pm\sqrt{d_0}, \qquad \mathsf{P}(\mu) = \Omega,$$
$$\alpha_1, \alpha_2 \text{ in } \Omega,$$
$$\pm\sqrt{d_0}\,(\alpha_1, \alpha_2) = M(\alpha_1, \alpha_2).$$

Ist nun zunächst $d_0 \equiv 2, 3 \bmod 4$, also $1, \pm\sqrt{d_0}$ Basen der ganzen Zahlen von Ω, so besagt die letztere Relation, daß α_1, α_2 Idealbasis aus Ω ist. Dann ist also $j(\alpha_1, \alpha_2)$ absolute Klasseninvariante von Ω, wie in diesem Falle zu zeigen war.

Ist ferner $d_0 \equiv 1 \bmod 4$, also $1, \pm\frac{1 \pm \sqrt{d_0}}{2}$ Basen der ganzen Zahlen von Ω, so kann nicht allgemein so geschlossen werden[7]). Vielmehr läßt sich dann ein analoger Schluß nur für diejenigen einfachen Wurzeln $j(\alpha_1, \alpha_2)$ von $J_{-d_0}(t, t)$ durchführen, die zugleich Wurzeln von $J_{\frac{1-d_0}{4}}(t, t)$ sind. Ist nämlich auch das der Fall, so gilt zufolge Satz 1 für das nach dem bisherigen sicher zu Ω gehörige System α_1, α_2 überdies

$$M_0(\alpha_1, \alpha_2) = \mu_0(\alpha_1, \alpha_2)$$

mit einer ganzzahligen primitiven Transformation M_0 vom Grade $\frac{1 - d_0}{4}$ und einem gewissen Proportionalitätsfaktor μ_0. Aus dieser Relation folgt ähnlich wie vorher, daß μ_0

[7]) Das hat Herr Fueter im ersten Bande seines in 1 zitierten Buches auf S. 66 übersehen und kommt so zu der falschen Behauptung, daß stets die absoluten Klasseninvarianten allein die einfachen Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$ wären.

eine zu Ω gehörige ganze Zahl mit $N(\mu_0) = \frac{1-d_0}{4}$ ist. Das leisten nur $\mu_0 = \pm \frac{1 \pm \sqrt{d_0}}{2}$.

Die Relation

$$\pm \frac{1 \pm \sqrt{d_0}}{2} (\alpha_1, \alpha_2) = M_0(\alpha_1, \alpha_2)$$

besagt aber im jetzigen Falle, daß α_1, α_2 Idealbasis aus Ω, also $j(\alpha_1, \alpha_2)$ absolute Klasseninvariante von Ω ist.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Für $d_0 = -2$ gilt Satz 4 tatsächlich nicht mehr; man hat vielmehr

Zusatz. *$J_2(t, t)$ hat neben der (einzigen) absoluten Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-2})$ noch die (einzige) absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ und nur sie zur einfachen Wurzel.*

Beweis: Die Notwendigkeit, den Fall $d_0 = -2$ auszuschließen, kam in den vorhergehenden Schlüssen nur an einer Stelle in Betracht, nämlich bei Ausschluß der Annahme, $\frac{\mu^2}{m} = \pm i$ im Beweise von Satz 4, S. 69. Läßt man auch $d_0 = -2$, also $m = 2$ zu, so bleibt dort die Möglichkeit

$$\mu^2 = \pm 2i, \quad \mu = \pm (1 \pm i), \quad \mathsf{P}(\mu) = \mathsf{P}(\sqrt{-1}), \quad \alpha_1, \alpha_2 \text{ in } \mathsf{P}(\sqrt{-1}),$$
$$\pm (1 \pm i)\,(\alpha_1, \alpha_2) = M(\alpha_1, \alpha_2).$$

Da $1, \pm (1 \pm i)$ Basen der ganzen Zahlen von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ sind, liegt dabei in α_1, α_2 eine Idealbasis aus $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$, also in $j(\alpha_1, \alpha_2)$ die absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ vor. Daß diese in der Tat einfache Wurzel von $J_2(t, t)$ ist, sieht man sofort mittels der Sätze 1, 2 ein.

Jetzt können wir feststellen

Satz 5. *Die absolute Klassengleichung von Ω*

$$H(t) = \prod_{\mathfrak{k}} (t - j(\mathfrak{k}))$$

ist ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Beweis: Für $d_0 \neq -1, -2, -3$ folgt aus Satz 4 und der Rationalität der Koeffizienten der $J_m(t, t)$ (**1**, Satz 7), daß $H(t)$ rationale Koeffizienten hat. Nach **1**, Satz 8 sind diese ganz.

Für $d_0 = -2$ folgt Entsprechendes aus dem Zusatz, wenn man bedenkt, daß die absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ rational ist, nämlich $j(i, 1) = 2^6 3^3$.

Ebenso ist die (einzige) absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-3})$ rational, nämlich $j(\varrho, 1) = 0$. Für $d_0 = -1$ und $d_0 = -3$ hat man also ohne weiteres $H(t) = t - 2^6 3^3$ bzw. $H(t) = t$.

Satz 6. *Die absolute Klassengleichung $H(t)$ von Ω ist irreduzibel in Ω.*

Beweis: Wir stützen uns auf die in **1**, Satz 11 für jede absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ von Ω bewiesene Kongruenz

$$j(\mathfrak{k})^p \equiv j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{k}) \bmod \mathfrak{p},$$

wo $\mathfrak{p}$ ein nicht in der Diskriminante d von Ω aufgehendes Primideal 1. Grades aus Ω und $p = N(\mathfrak{p})$ ist.

Es sei $F(t)$ der zu $j(\mathfrak{k})$ gehörige in Ω irreduzible Teiler von $H(t)$. Ferner sei $j(\mathfrak{k}_1)$ irgendeine andere absolute Klasseninvariante von Ω. Wir setzen dann $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_0^{-1} \mathfrak{k}$ und bestimmen in der Klasse $\mathfrak{k}_0$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$, das nur aus nicht in der

Diskriminante d von Ω nicht aufgehenden Primidealen 1. Grades $\mathfrak{p}_i$ von Ω zusammengesetzt ist, so daß obige Kongruenz für die $\mathfrak{p}_i$ anwendbar ist.

Ein solches Ideal $\mathfrak{a}_0$ gibt es sicher in $\mathfrak{k}_0$. Man braucht ja nur ein zu d primes ganzes Ideal $\mathfrak{a}_0'$ in $\mathfrak{k}_0$ zu wählen, und aus ihm alle Primfaktoren 2. Grades (die ja durchweg zur Hauptklasse gehören) wegzulassen. Es kann und soll ferner auch noch $\mathfrak{a}_0$ prim zur Diskriminante D von $H(t)$ — diese ist nach **1**, Satz 6 von Null verschieden — gewählt werden.

Weil nun $\mathfrak{p}_1$ vom 1. Grade und $F(t)$ ein ganzzahliges Polynom in Ω ist, folgt aus

$$F(j(\mathfrak{k})) = 0$$

durch Potenzierung mit $p_1 = N(\mathfrak{p}_1)$ in bekannter Weise zunächst

$$F(j(\mathfrak{k})^{p_1}) \equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}_1 .$$

Wendet man dann die obige Kongruenz

$$j(\mathfrak{k})^{p_1} \equiv j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k}) \bmod. \mathfrak{p}_1$$

an, so ergibt sich ferner

$$F(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k})) \equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}_1 .$$

Da schließlich $\mathfrak{p}_1$ prim zur Diskriminante D von $H(t)$ gewählt ist, so hat die letztere Kongruenz die Gleichung

$$F(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k})) = 0$$

zur Folge.

So mit $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ fortfahrend erhält man schließlich

$$F(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r}^{-1}\mathfrak{k})) = 0 .$$

Es ist aber nach Wahl von $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$

$$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1} \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{a}_0} = \mathfrak{k}_0 .$$

Daher hat sich ergeben

$$F(j(\mathfrak{k}_0^{-1}\mathfrak{k})) = 0 ,$$

d. h. nach Wahl von $\mathfrak{k}_0$

$$F(j(\mathfrak{k}_1)) = 0 .$$

Das besagt aber die Irreduzibilität von $H(t)$ in Ω.

Beiläufig ist durch Satz 6 erkannt, daß in dem in **1**, Satz 12 ausgesprochenen Zerlegungsgesetz die Forderungen 2 und 3 und in dem in **1**, Satz 24 ausgesprochenen Zerlegungsgesetz die Forderungen 3 und 5 je dasselbe besagen.

§ 2. Die Galoissche Gruppe des absoluten Klassenkörpers zu Ω.

Die in den Sätzen 5, 6 enthaltenen Hauptresultate von § 1 besagen, daß die den absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω zugeordneten Körper $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ein volles System zueinander in bezug auf Ω konjugierter sind. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Körper alle identisch sind, daß also die absolute Klassengleichung $H(t)$ Galoissch in bezug auf Ω ist.

Dazu zeigen wir, daß durch eine absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ jede andere $j(\mathfrak{k}_1)$ rational über Ω darstellbar ist. Ähnlich wie im Beweis von Satz 6 geschieht das wieder, indem wir $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_0\mathfrak{k}$ setzen, ein $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$ in $\mathfrak{k}_0$ wählen und von $\mathfrak{k}$ schrittweise durch Multiplikation mit den $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_i}$ zu $\mathfrak{k}_1$ vordringen. Es kommt also zunächst darauf an, für ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus Ω die Beziehung zwischen $j(\mathfrak{k})$ und $j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k})$ zu studieren. In dieser Hinsicht beweisen wir

Satz 7. *Es sei $j(\mathfrak{k})$ eine absolute Klasseninvariante von Ω und p eine Primzahl. Die singuläre Invariantengleichung $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$ für den Grad p hat mit der absoluten Klassengleichung $H(t)$ von Ω alle und nur diejenigen absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k}_0\mathfrak{k})$ als gemeinsame Wurzeln, für die $\mathfrak{k}_0$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) = p$ enthält.*

Beweis: Sei die Klasse $\mathfrak{k}$ durch das Ideal $\mathfrak{a}$ mit der Idealbasis α_1, α_2 repräsentiert, also $j(\mathfrak{k}) = j(\alpha_1, \alpha_2)$. Dann ist

$$J_p(t, j(\mathfrak{k})) = \prod_{\nu=1}^{p+1} (t - j(P_\nu(\alpha_1, \alpha_2))),$$

wo die P_ν ein volles Repräsentantensystem der $\psi(p) = p + 1$ Transformationsklassen p-ten Grades (siehe **1**, S. 123) bedeuten. Eine absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k}_1)$ ist also dann und nur dann auch Wurzel von $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$, wenn

$$j(\mathfrak{k}_1) = j(P(\alpha_1, \alpha_2))$$

mit einer geeigneten Transformation p-ten Grades P ist. Das bedeutet die Existenz eines Ideals $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{k}_1$ mit einer Basis β_1, β_2, für die

$$(\beta_1, \beta_2) = P(\alpha_1, \alpha_2)$$

ist, d. h. daß $\mathfrak{a}_1$ ein ganzes Vielfaches $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}$ mit $N(\mathfrak{p}) = |P| = p$ ist, was die Behauptung ergibt.

Mittels Satz 7 folgt jetzt leicht weiter

Satz 8. *Ist $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so gilt für jede absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ von Ω*

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) = R(j(\mathfrak{k})).$$

Ist aber $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \nsim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so gilt für jede absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ von Ω

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) + j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = R_1(j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})\, j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = R_2(j(\mathfrak{k})).$$

Dabei bedeuten $R_1(t)$ und $R_2(t)$ nur von p und Ω, nicht von $\mathfrak{k}$ abhängige Polynome mit rationalen Koeffizienten.

Beweis: Ist $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so hat einzig die Klasse $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_\mathfrak{p} = \mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die in Satz 7 genannte Eigenschaft. Nach Satz 7 ist dann also der größte gemeinsame Teiler von $H(t)$ und $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$ gleich $t - j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})$.

Ist aber $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \nsim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so haben einzig die beiden Klassen $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die in Satz 7 genannte Eigenschaft. Nach Satz 7 ist dann also der größte gemeinsame Teiler von $H(t)$ und $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$ gleich $(t - j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}))\,(t - j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}))$. Dieser größte gemeinsame Teiler gehört zum Rationalitätsbereich der Koeffizienten von $H(t)$ und $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$, also gemäß Satz 5 und **1**, Satz 7 zum Bereich der rationalzahligen rationalen Funktionen von $j(\mathfrak{k})$. Er berechnet sich, soweit sein Grad ungeändert bleibt, nach ein- und demselben rationalen Verfahren aus jenen Koeffizienten[8]), so daß also die Koeffizienten der rationalen Darstellungen durch $j(\mathfrak{k})$ von $\mathfrak{k}$ unabhängig sind. So ergibt sich die Behauptung, wenn man noch bedenkt, daß Nenner in den rationalen Darstellungen durch $j(\mathfrak{k})$ mittels der nach Satz 6 irreduziblen Gleichung $H(j(\mathfrak{k})) = 0$ beseitigt werden können.

Aus Satz 8 leiten wir nun weiter den folgenden grundlegenden Satz her:

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus Ω und $\bar{\mathfrak{p}}$ das zu $\mathfrak{p}$ konjugierte Primideal.*

---

[8]) Siehe H. Weber, Kleines Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1912, S. 106, XVI. — Oder auch O. Perron, Über den größten gemeinsamen Teiler von zwei Polynomen, Bayer. Akad. Ber. 1928.

Es existiert ein nur von $\mathfrak{p}$ *und* Ω, *nicht von* $\mathfrak{k}$ *abhängiges Polynom* $R_{\mathfrak{p}}(t)$ *mit Koeffizienten aus* Ω, *dessen konjugiertes mit* $\overline{R}_{\mathfrak{p}}(t)$ *bezeichnet sei, derart, daß für jede absolute Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *aus* Ω *gilt*

$$j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}) = R_{\mathfrak{p}}(j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = \overline{R}_{\mathfrak{p}}(j(\mathfrak{k})).$$

Beweis: Im Falle $p = \mathfrak{p}$ ist das trivial ($j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}) = j(\mathfrak{k})$), im Falle $p = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \sim \overline{\mathfrak{p}}$ schon nach Satz 8 richtig ($R_{\mathfrak{p}}(t)$ rational).

Sei jetzt also $p = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \nsim \overline{\mathfrak{p}}$. Nach Satz 8 haben wir dann ein Relationenpaar

$$j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}{}^{-1}\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}{}^{-1}\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}))$$

für alle Klassen $\mathfrak{k}$. Durch Iteration dieser Relationen folgt

$$j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}{}^2\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k})) = G_2(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}{}^2\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})) = G_2(j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}{}^i\mathfrak{k}) = G_i(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}{}^i\mathfrak{k}) = G_i(j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})),$$

wo die $G_i(t, u)$ rationalzahlige Polynome sind, die nur von i, p, Ω, nicht von $\mathfrak{k}$ abhängen.

Wir ziehen nunmehr die Wurzeln $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$ der Multiplikatorgleichung $\Phi_p(t, j(w_1, w_2))$ heran (siehe **1**, S. 122 f.). Diese besitzen nach analogen Schlüssen wie in **1**, S. 123 u. S. 125 Darstellungen der Form

$$\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2) = \frac{G_p(j(P_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))}{J'_p(j(P_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))},$$

wo $G_p(t, u)$ ein ganzzahliges Polynom und $J'_p(t, u)$ die Ableitung der Invariantengleichung $J_p(t, u)$ nach t bedeutet.

Diese Darstellungen wenden wir in den folgenden beiden singulären Fällen an:

w_1, w_2 sei die Basis α_1, α_2 eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{k}$, also

$$j(w_1, w_2) = j(\alpha_1, \alpha_2) = j(\mathfrak{k}).$$

P und $\overline{P}$ seien diejenigen Transformationen p-ten Grades für die Basis α_1, α_2, die den Multiplikationen $\mathfrak{p}a$ und $\overline{\mathfrak{p}}a$ entsprechen (siehe **1**, in Satz 10), also

$$j(P(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}), \qquad j(\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})).$$

In diesen singulären Fällen verschwindet der Nenner in jenen Darstellungen nicht, denn etwa im ersten Falle ist er gleich

$$\prod_{P_\nu \nsim P} (j(P(\alpha_1, \alpha_2)) - j(P_\nu(\alpha_1, \alpha_2)).$$

Hier ist aber von den $j(P_\nu(\alpha_1, \alpha_2))$ nur noch $j(\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$ absolute Klasseninvariante, und auch diese ist von $j(P(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k})$ verschieden, da $\mathfrak{p} \nsim \overline{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ vorausgesetzt ist.

Somit gelten die Darstellungen

$$\varphi_P(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{G_p(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))}{J'_p(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))} = S_p(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$\varphi_{\overline{P}}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{G_p(j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))}{J'_p(j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))} = S_p(j(\mathfrak{k}_{\overline{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})).$$

Dabei sind die Polynome $G_p(t, u)$ und $J'_p(t, u)$ von $\mathfrak{k}$ unabhängig, also die $S_p(t, u)$ von $\mathfrak{k}$ unabhängige rationalzahlige rationale Funktionen.

Auch diese Darstellungen iterieren wir, und zwar f-mal, wo f die Ordnung der

Klassen $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ ist und demgemäß

$$\mathfrak{p}^f = (\varpi), \quad \bar{\mathfrak{p}}^f = (\bar{\varpi}), \quad \varpi\bar{\varpi} = p^f$$

gesetzt werde. So ergibt sich, ähnlich wie in **1**, S. 124

$$\varphi_{P^{(1)}} \cdots \varphi_{P^{(f)}} = \bar{\varpi}^{12} = \prod_{i=1}^{f} S_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}{}^i\mathfrak{k}),\ j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}{}^{i-1}\mathfrak{k}))$$

$$\varphi_{\bar{P}^{(1)}} \cdots \varphi_{\bar{P}^{(f)}} = \varpi^{12} = \prod_{i=1}^{f} S_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}{}^i\mathfrak{k}),\ j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}{}^{i-1}\mathfrak{k})),$$

wo die $P^{(1)} = P, \ldots, P^{(f)}$ die a. a. O. erklärte Bedeutung haben, und die $\bar{P}^{(1)} = \bar{P}, \ldots, \bar{P}^{(f)}$ entsprechend für $\bar{\mathfrak{p}}$ statt $\mathfrak{p}$ erklärt sind. Durch Heraufmultiplizieren der Nenner erhalten wir dann zwei Relationen

$$\bar{\varpi}^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^f\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = P_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^f\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$

$$\varpi^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}^f\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = P_p(j(\mathfrak{k}^f\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$

mit rationalzahligen von $\mathfrak{k}$ unabhängigen Polynomen $P_p(t_f, \ldots, t_1, t_0)$, $Q_p(t_f, \ldots, t_1, t_0)$. Indem darin die oben gewonnenen Darstellungen der $j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}{}^i\mathfrak{k})$ und $j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}{}^i\mathfrak{k})$ eingeführt werden, können sie in die Form

$$\bar{\varpi}^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) - P_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = 0$$
$$\varpi^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) - P_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = 0$$

gebracht werden, wo $P_p(t, u)$, $Q_p(t, u)$; wieder rationalzahlige von $\mathfrak{k}$ unabhängige Polynome bedeuten.

Wir betrachten nun die beiden konjugierten Polynome

$$F_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k})) = \bar{\varpi}^{12} Q_p(t, j(\mathfrak{k})) - P_p(t, j(\mathfrak{k}))$$
$$\bar{F}_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k})) = \varpi^{12} Q_p(t, j(\mathfrak{k})) - P_p(t, j(\mathfrak{k}))$$

mit Koeffizienten aus Ω. Das erste verschwindet für $t = j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})$. Dagegen verschwindet es nicht für $t = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$; denn für $t = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$ verschwindet das zweite, und nach der Konstruktion ist $Q_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) \neq 0$ und $\bar{\varpi}^{12} \neq \varpi^{12}$. Daher hat $F_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k}))$ mit

$$L(t, j(\mathfrak{k})) = (t - j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}))(t - j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})) = t^2 - R_1(j(\mathfrak{k}))t + R_2(j(\mathfrak{k}))$$

(siehe Satz 8) lediglich die eine Wurzel $t = j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})$ gemeinsam. Somit ist

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) = R_\mathfrak{p}(j(\mathfrak{k}))$$

mit einem Polynom $R_\mathfrak{p}(t)$ aus Ω, dessen Koeffizienten nach dem oben a. S. 72 zitierten Weber-Perronschen Satz nicht von $\mathfrak{k}$ abhängen.

Entsprechend folgt, daß $\bar{F}_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k}))$ mit $L(t, j(\mathfrak{k}))$ lediglich die eine Wurzel $t = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$ gemeinsam hat, und daher ergibt sich unter nochmaliger Anwendung des Weber-Perronschen Satzes

$$j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = \bar{R}_\mathfrak{p}(j(\mathfrak{k}))$$

mit dem zu $R_\mathfrak{p}(t)$ konjugierten Polynom $\bar{R}_\mathfrak{p}(t)$.

Damit ist Satz 9 bewiesen.

Nach den zu Beginn dieses Paragraphen bereits gemachten Bemerkungen ergibt sich daraus sofort

Satz 10. *Zu jeder absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}_0$ von Ω existiert ein nur von $\mathfrak{k}_0$ abhängiges Polynom $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ mit Koeffizienten aus Ω derart, daß für jede absolute Idealklasse $\mathfrak{k}$ von Ω gilt*

$$j(\mathfrak{k}_0\mathfrak{k}) = R_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k})),$$

und wenn $\bar{\mathfrak{k}}_0$ und $\bar{R}_{\mathfrak{k}_0}(t)$ die konjugierten zu $\mathfrak{k}_0$ und $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ bedeuten, auch

$$j(\bar{\mathfrak{k}}_0\mathfrak{k}) = \bar{R}_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k})).$$

Die Existenz der $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ in Satz 10 zunächst besagt nun

Satz 11. *Die absolute Klassengleichung $H(t)$ ist Galoissch in bezug auf Ω.*

Der Körper $\mathsf{K} = \Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist also von der Wahl der Klasse $\mathfrak{k}$ unabhängig und Galoissch in bezug auf Ω.

Da $H(t)$ rationale Koeffizienten hat, gilt dann sogar

Zusatz. *Der Körper K ist Galoissch in bezug auf P.*

Die Unabhängigkeit der $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ in Satz 10 von $\mathfrak{k}$ ferner besagt, wie man leicht sieht,

Satz 12. *Der Körper K ist Abelsch in bezug auf Ω, und seine Relativgruppe H ist isomorph zur Gruppe der absoluten Idealklassen in Ω, indem jeder absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}_0$ von Ω die Substitution*

$$\sigma_{\mathfrak{k}_0} = (j(\mathfrak{k}) \to R_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k}))) = (j(\mathfrak{k}) \to j(\mathfrak{k}_0\mathfrak{k})),$$

wo $\mathfrak{k}$ alle absoluten Idealklassen von Ω durchläuft, zugeordnet wird.

Aus der Relation für die konjugierte (reziproke) Klasse in Satz 10 folgt schließlich leicht noch

Zusatz. *Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K in bezug auf P entstcht aus der Relativgruppe $\mathfrak{H}$ in bezug auf Ω durch Erweiterung mit der Substitution*

$$\tau = (\sqrt{d} \to -\sqrt{d}, \quad j(\mathfrak{k}) \to j(\mathfrak{k})),$$

mit den Relationen

$$\tau^2 = 1, \quad \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \quad \text{für jedes } \sigma \text{ aus } H.$$

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale aus Ω im absoluten Klassenkörper zu Ω.

In **1**, Satz 12 wurde bereits das Zerlegungsgesetz für die nicht in der Diskriminante d von Ω aufgehenden Primideale 1. Grades aus Ω hergeleitet, soweit sie nicht in der (unbekannten) Diskriminante D von $H(t)$ aufgehen. Im folgenden soll das entsprechende Zerlegungsgesetz für die übrigen Primideale aus Ω, soweit sie nicht in D aufgehen, hergeleitet werden.

Der Hauptpunkt dafür ist der Beweis der folgenden Ergänzung von **1**, Satz 11:

Satz 13. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal 2. Grades oder ein in der Diskriminante d von Ω aufgehendes Primideal von Ω, das beidenfalls nicht in der Diskriminante D von $H(t)$ aufgeht*[9]*, so gilt für jede absolute Idealklasse $\mathfrak{k}$ von Ω die Kongruenz*

$$j(\mathfrak{k})^{N(\mathfrak{p})} \equiv j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{k}) \text{ mod. } \mathfrak{p}.$$

Beweis: Wir stützen uns auf die Frobeniussche Zuordnung zwischen Primidealen und Substitutionen. Ist $\mathfrak{K}$ ein Galoisscher Körper in bezug auf den algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$ ein nicht in der Relativdiskriminante von $\mathfrak{K}$ aufgehendes Primideal aus $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal in $\mathfrak{R}$, so existiert eine durch $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmte Substitution $\sigma_{\mathfrak{P}}$ aus der Relativgruppe von $\mathfrak{K}$ derart, daß für jede für $\mathfrak{P}$ ganze Zahl A aus $\mathfrak{K}$ gilt

$$\mathsf{A}^{N(\mathfrak{p})} \equiv \sigma_{\mathfrak{P}}\mathsf{A} \text{ mod.* } \mathfrak{P}$$

(betr. mod.* siehe **1**, S. 130, Fußnote).

$\sigma_{\mathfrak{P}}$ ist Erzeugende der Zerlegungsgruppe zu $\mathfrak{P}$; insbesondere ist die Ordnung von $\sigma_{\mathfrak{P}}$ gleich dem Relativgrad von $\mathfrak{P}$. Ferner entspricht einem konjugierten $\tau\mathfrak{P}$ die konjugierte Substitution $\tau\sigma\tau^{-1}$. Im Falle, daß $\mathfrak{K}$ Abelsch in bezug auf $\mathfrak{R}$ ist, ist also so jedem nicht in der Relativdiskriminante von $\mathfrak{K}$ aufgehenden Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ eindeutig eine Substitution $\sigma_{\mathfrak{p}}$ zugeordnet, und die $\sigma_{\mathfrak{p}}$ definierende Kongruenz gilt dann, sofern A für $\mathfrak{p}$ ganz ist, sogar mod*. $\mathfrak{p}$:

$$\mathsf{A}^{N(\mathfrak{p})} \equiv \sigma_{\mathfrak{p}}\mathsf{A} \text{ mod.* } \mathfrak{p}.$$

[9]) Diese Einschränkung war in **1**, Satz 11 unnötig.

Es sei nun zunächst $\mathfrak{p}$ ein Primideal 2. Grades aus Ω, also $p = \mathfrak{p}$, $N(\mathfrak{p}) = p^2$. Dann geht $\mathfrak{p}$ nicht in der Diskriminante d von Ω und nach der Voraussetzung auch nicht in der Relativdiskriminante von K in bezug auf Ω auf, also auch nicht in der Diskriminante von K. Die Frobeniussche Kongruenz ist also auf $\mathfrak{K} = \mathsf{K}$, $\mathfrak{R} = \mathsf{P}$ für einen Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K anwendbar und liefert

$$j(\mathfrak{k})^p \equiv j(\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k}) \bmod \mathfrak{P}$$

mit einer gewissen (möglicherweise von $\mathfrak{k}$ abhängigen) Klasse $\mathfrak{k}_0$. Daraus folgt weiter unter Anwendung von Satz 10

$$j(\mathfrak{k})^{p^2} \equiv j(\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k})^p = R_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k}))^p \bmod \mathfrak{P}\,.$$

Nach der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$ hat nun $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ (bei geeigneter Normierung) für $\mathfrak{p}$ ganze Koeffizienten. Da aber nach der Frobeniusschen Kongruenz für $\mathfrak{K} = \Omega$, $\mathfrak{R} = \mathsf{P}$ im betrachteten Falle für jedes für $\mathfrak{p}$ ganze α aus Ω gilt

$$\alpha^p \equiv \bar{\alpha} \text{ mod.* } \mathfrak{p},$$

wo $\bar{\alpha}$ die konjugierte zu α bezeichnet, so ergibt sich weiter

$$j(\mathfrak{k})^{p^2} \equiv \bar{R}_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k})^p) = R_{\bar{\mathfrak{k}}_0}(j(\mathfrak{k})^p) \text{ mod.* } \mathfrak{P}\,,$$

letzteres nach Satz 10, also durch Einsetzen der Ausgangskongruenz und nach Satz 10

$$j(\mathfrak{k})^{p^2} \equiv R_{\bar{\mathfrak{k}}_0}(j(\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k})) = j(\bar{\mathfrak{k}}_0\,\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k}) = j(\mathfrak{k}) \bmod \mathfrak{P}, \text{ also auch mod. } \mathfrak{p},$$

und das ist im Falle $p = \mathfrak{p}$ die Behauptung, weil ja dann $\mathfrak{k}_\mathfrak{p} = \mathfrak{k}_p$ die Hauptklasse ist.

Es sei ferner $\mathfrak{p}$ ein in der Diskriminante d von Ω aufgehendendes Primideal aus Ω, also $p = \mathfrak{p}^2$, $N(\mathfrak{p}) = p$.

In diesem Falle beruht der Beweis auf der identischen Kongruenz

$$J_p(t, u) \equiv (t^p - u)\,(t - u^p) \bmod p$$

für die Invariantengleichung von beliebigem Primzahltransformationsgrad p. Der Beweis dieser Kongruenz verläuft, ähnlich wie in **1**, S. 123, mittels des q-Entwicklungsprinzips. Es ist

$$J_p(t, j(w_1, w_2)) = \prod_{\nu=1}^{p+1}(t - j\,(P_\nu(w_1, w_2)))\,,$$

und ähnlich wie a. a. O. gilt identisch in q

$$j(P_1(w_1, w_2)) \equiv \cdots \equiv j(P_p(w_1, w_2)) \bmod (1 - \zeta_p)\,,$$

also

$$J_p(t, j\,(w_1, w_2)) \equiv (t - j(P_1(w_1, w_2)))^p\,(t - j(P_{p+1}(w_1, w_2)))$$
$$\equiv (t^p - j(P_1(w_1, w_2))^p)\,(t - j(P_{p+1}(w_1, w_2))) \bmod (1 - \zeta_p), \text{ also auch mod. } p.$$

Ist nun

$$j(w_1, w_2) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^n$$

die q-Entwicklung von $j(w_1, w_2)$, so ist einerseits

$$j(P_1(w_1, w_2)) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{p}}$$

$$j(P_1(w_1, w_2))^p \equiv \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^n = j(w_1, w_2) \bmod p\,,$$

andrerseits

$$j(P_{p+1}(w_1, w_2)) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^{np} \equiv j(w_1, w_2)^p \qquad \bmod p\,,$$

identisch in q. Damit ergibt sich

$$J_p(t, j(w_1, w_2)) \equiv (t^p - j(w_1, w_2))\,(t - j(w_1, w_2)^p) \mod p,$$

zunächst identisch in q, also nach dem q-Entwicklungsprinzip auch identisch in $j(w_1, w_2)$.

Aus der damit bewiesenen identischen Kongruenz folgt nun, weil für $p = N(\mathfrak{p})$ $J_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = 0$ ist,

$$(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})^p - j(\mathfrak{k}))\,(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) - j(\mathfrak{k})^p) \equiv 0 \mod p.$$

Ist also $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K, so gilt entweder

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})^p \equiv j(\mathfrak{k}) \mod \mathfrak{P}$$

oder

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) \equiv j(\mathfrak{k})^p \mod \mathfrak{P},$$

wobei diese Alternative möglicherweise von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{k}$ abhängt.

Die Frobeniussche Kongruenz für $\mathfrak{R} = \mathsf{K}$, $\mathfrak{R} = \Omega$, die nach der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}$ anwendbar ist, stellt nun auf Grund von Satz 12 die Existenz einer von $\mathfrak{k}$ unabhängigen Klasse $\mathfrak{k}_0$ fest mit

$$j(\mathfrak{k})^p \equiv j(\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k}) \mod \mathfrak{p}.$$

Da nach der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$ die absoluten Klasseninvarianten mod. $\mathfrak{P}$ inkongruent sind, so folgt durch Vergleich mit den beiden alternativen Kongruenzen entweder $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-1}$, was die Behauptung ergibt, oder $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_\mathfrak{p}$, was dasselbe besagt, weil aus $p = \mathfrak{p}^2$ folgt $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}^{-1}$.

Damit ist Satz 13 bewiesen.

Durch Satz 13 wird für die dort genannten Primideale $\mathfrak{p}$ aus Ω auf Grund von Satz 12 die nach Frobenius für den Körper K zugeordnete Substitution $\sigma_\mathfrak{p}$ festgelegt. Da deren Ordnung gleich dem Relativgrad der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K ist, so ergibt sich unmittelbar das zu **1**, Satz 12 analoge Zerlegungsgesetz für die in Satz 13 genannten Primideale $\mathfrak{p}$ aus Ω in K. Mit **1**, Satz 12 zusammengefaßt hat man also das folgende allgemeine Zerlegungsgesetz für den Körper K:

Satz 14. *Ein nicht in der Diskriminante D der absoluten Klassengleichung $H(t)$ von Ω aufgehendes Primideal $\mathfrak{p}$ aus Ω zerfällt in K in verschiedene Primideale f-ten Relativgrades, wenn f die Ordnung der absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ ist.*

Darüber hinaus besagen Satz 13 und **1**, Satz 11 auf Grund von Satz 12 die Gültigkeit des *Artinschen Reziprozitätsgesetzes* für K und die nicht in D aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ aus Ω, nämlich die Tatsache, daß die nach Frobenius zugeordnete Substitution $\sigma_\mathfrak{p}$ nur von der absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}$ abhängt, der $\mathfrak{p}$ angehört, und die isomorphe Abbildung der absoluten Idealklassengruppen von Ω auf die Galoissche Relativgruppe von K vermittelt.

Damit ist für den Körper K ein umfassender Teil derjenigen Tatsachen festgestellt, die die allgemeine Klassenkörpertheorie für den absoluten Klassenkörper zu Ω aussagt.

Es fehlt lediglich noch die Tatsache, daß die Relativdiskriminante von K gleich 1 ist, und (möglicherweise darüber hinaus [10])), daß das Zerlegungsgesetz von Satz 14 auch für die in D aufgehenden Primideale gilt. Beweise für diese letzteren Tatsachen ohne Verwendung transzendenter Hilfsmittel (Dirichletscher Reihen usw.) sind bisher nicht bekannt.

---

[10]) Wenn nämlich die Diskriminante von $H(t)$ nicht 1 ist.

II. Der Strahlklassenkörper $K_{\mathfrak{m}}$ mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω.

§ 1. Die Strahlklassengleichung mod. $\mathfrak{m}$ von Ω.

In **1**, Satz 22 wurde gezeigt, daß die Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{f}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω algebraische Zahlen sind. Wir wollen jetzt darüber hinaus zeigen, daß *die zu einer absoluten Idealklasse* $\mathfrak{f}$ im Sinne von **1**, S. 130 *gehörige Strahlklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ von Ω, d. i. das Polynom

$$T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{f}) = \prod_{\mathfrak{f}^* \text{ zu } \mathfrak{f}} (t - \tau(\mathfrak{f}^*)),$$

ein Polynom $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{f}))$ in t und $j(\mathfrak{f})$ mit von $\mathfrak{f}$ unabhängigen Koeffizienten aus Ω ist, so daß also die *volle Strahlklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ von Ω, d. i. das Polynom

$$T_{\mathfrak{m}}(t) = \prod_{\mathfrak{f}^*} (t - \tau(\mathfrak{f}^*)) = \prod_{\mathfrak{f}} T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{f})),$$

Koeffizienten aus Ω hat.

Zur Abkürzung nennen wir im folgenden einen Ausdruck *vom Typus* $\mathsf{P}(j(\mathfrak{f}))$ *bzw.* $\Omega(j(\mathfrak{f}))$, wenn er als rationale Funktion (und folglich auch als Polynom) in $j(\mathfrak{f})$ mit von $\mathfrak{f}$ unabhängigen Koeffizienten aus P bzw. Ω darstellbar ist; eine rationale Funktion oder eine Potenreihe mit Koeffizienten vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{f}))$ bzw. $\Omega(j(\mathfrak{f}))$ nennen wir ihrerseits von diesem Typus.

Zum Beweis der ausgesprochenen Behauptungen leiten wir zunächst das bereits in der Einleitung erwähnte **verallgemeinerte Prinzip der komplexen Multiplikation** her.

Satz 15. *Es sei* $\mathfrak{n}$ *ein ganzes Ideal* $\neq 1$ *aus* Ω, $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* Ω *und* $\mathfrak{f}$ *die absolute Idealklasse von* $\mathfrak{a}$. *Dann existiert eine nur von* $\mathfrak{n}$, *nicht von* $\mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{f}$ *abhängige rationale Funktion* $R_{\mathfrak{n}}(t, v)$ *mit Koeffizienten aus* Ω *derart, daß*

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), j(\mathfrak{f}))$$

ist.

Oder also kürzer:

$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ *ist eine rationale Funktion von* $\tau(u, \mathfrak{a})$ *vom Typus* $\Omega(j(\mathfrak{f}))$.

Beweis: a) Die Funktion $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ ist bei der **1**, S. 128 erklärten Gruppe $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$ invariant; denn sie ist bei $\mathfrak{U}_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}$ invariant, und $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{U}_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}$, weil $\mathfrak{a}$ Teilmenge von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$ ist, weil also aus $\mathfrak{u}' \equiv \mathfrak{u}$ mod. $\mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{u}' \equiv \mathfrak{u}$ mod. $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$.

Nach **1**, Satz 17 folgt daraus die Existenz einer (von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{a}$ abhängigen) in t rationalen Funktion $R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{a})$ derart, daß

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{a})$$

ist. Wegen der Homogenität 0. Dimension von $\tau(u, \mathfrak{w})$ hängt übrigens $R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{a})$ nur von $\mathfrak{f}$ ab, so daß wir also

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{f})$$

schreiben können.

Wir setzen nun die rationale Funktion $R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{f})$ in die Gestalt

$$R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{f}) = \frac{Z_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{f})}{N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{f})}$$

mit Polynomen $Z_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ und $N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ in t, die eindeutig dadurch festgelegt seien, daß sie teilerfremd sind und daß $N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ den höchsten Koeffizienten 1 hat.

b) Wir beweisen jetzt zunächst, daß der so normierte Nenner die Produktzerlegung

$$N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k}) = \prod'_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho)=\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a}))$$

hat, wo ϱ ein volles System von mod. $\mathfrak{a}$ inkongruenten Zahlen durchläuft, für die $(\varrho) = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$ mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{g}$ ist, exkl. $\varrho \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{g} \equiv 0 \bmod \mathfrak{n}$.

Um das zu beweisen, entnehmen wir aus

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = \frac{Z_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})}{N_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})}$$

in einer gewissen Analogie zu Satz 1, daß bei der angegebenen Normierung der Nenner $N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ für alle und nur die Werte $t = \xi$ verschwindet, für die, wenn $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ gesetzt wird, die Funktion $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ bei $u = \varrho$ unendlich wird, während dem Ansatz gemäß $\tau(u, \mathfrak{a})$ bei $u = \varrho$ endlich $(= \xi)$ ist. Die Ordnung der Unendlichkeitsstellen von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ ist gemäß **1**, S. 127 durchweg e. Bezeichnet dann k_ϱ die zu untersuchende Ordnung des Verschwindens von $N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ bei $t = \xi$, und n_ϱ die Ordnung, mit der der Wert $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ angenommen wird, so hat man aus obiger Relation überdies $k_\varrho n_\varrho = e$, also $k_\varrho = \frac{e}{n_\varrho}$.

Daß $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ für $u = \varrho$ unendlich wird, während $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ endlich bleibt, trifft nun nach **1**, Satz 16 genau für alle

$$\varrho \equiv 0 \bmod \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}, \qquad \varrho \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}$$

zu, d. h. also für alle ϱ, für die $(\varrho) = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$ mit ganzem $\mathfrak{g} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{n}$ ist. Da mod. $\mathfrak{a}$ kongruenten ϱ sowie assoziierten ϱ derselbe Wert $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ entspricht, so ist also zunächst bewiesen, daß

$$N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k}) = \prod'_{\substack{(\varrho) \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho)=\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a}))^{k_\varrho}$$

mit gewissen Exponenten k_ϱ ist, für die bisher $k_\varrho = \frac{e}{n_\varrho}$ feststeht.

Die Ordnung n_ϱ, mit der ein Wert $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ angenommen wird, ist nun nach **1**, S. 128 gleich der Ordnung des zu ϱ als Punkt des Diskontinuitätsbereiches $D_{\mathfrak{a}}$ gehörigen Fixpunktzyklus der Gruppe $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$. Ist also ε eine primitive e-te Einheitswurzel, so wird der Fixpunktzyklus um ϱ durch

$$u' - \varrho = \varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i}(u - \varrho), \text{ d. h. } u' = \varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i} u + \varrho - \varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i} \varrho \quad (i = 0, \ldots, n_\varrho - 1)$$

gegeben; es ist also $\frac{e}{n_\varrho}$ der früheste Exponent, für den die mit $i = 1$ gebildete dieser Substitutionen zur Gruppe $U_{\mathfrak{a}}$ gehört, d. h. für den

$$\varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i} \varrho \equiv \varrho \bmod \mathfrak{a}$$

ist. Daher sind unter den zu ϱ assoziierten $\varepsilon^i\varrho$ genau $k_\varrho = \frac{e}{n_\varrho}$ mod. $\mathfrak{a}$ inkongruente vorhanden. Es kommen somit die obigen Exponenten k_ϱ gerade dadurch zum Fortfall, daß man das Produkt über alle Zahlen ϱ mod. $\mathfrak{a}$ mit der angegebenen Beschaffenheit statt nur über alle derartigen Hauptideale (ϱ) mod. $\mathfrak{a}$ erstreckt.

Damit ist zunächst die über $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ ausgesprochene Behauptung bewiesen.

c) Es sei nun n das kleinste positive ganze Multiplum von $\mathfrak{n}$ und α_1, α_2 eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$. Dann besitzen die Zahlen ϱ wie in **1**, S. 133 Darstellungen

$$\varrho = \frac{g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2}{n}$$

mit ganzrationalen $g_1, g_2 \not\equiv 0, 0 \bmod. n$, und mod. $\mathfrak{a}$ inkongruenten ϱ entsprechen mod. n inkongruente Paare g_1, g_2. Daher ist $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ Teiler des Polynoms

$$\overline{T}_n(t, \mathfrak{k}) = \prod_{x_1, x_2 \bmod. n}{}' \left(t - \tau\left(\frac{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2}{n}, \mathfrak{a}\right)\right),$$

in t, (das aus Homogeneitätsgründen wieder nur von $\mathfrak{k}$ abhängt). Es kann dann also

$$\overline{T}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k}) = N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})\, Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$$

mit einem nur von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ abhängigen Polynom $Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ in t gesetzt, und dann weiter die obige Quotientendarstellung von $R_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ zu

$$R_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k}) = \frac{Z_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})\, Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})}{N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})\, Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})} = \frac{\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})}{\overline{T}(t, \mathfrak{k})}$$

erweitert werden, wo $\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ ein weiteres nur von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ abhängiges Polynom in t ist.

Diese Erweiterung ist für den Beweis deshalb förderlich, weil für den neuen Nenner $\overline{T}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ die für $R_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ zu beweisende Eigenschaft leicht festzustellen ist. In der Tat sieht man unmittelbar, daß die Polynome $\overline{T}_n(t, \mathfrak{k})$ mit den in **1**, Satz 21 behandelten Polynomen $T_n(t, j(\mathfrak{k}))$ durch die Substitution

$$\overline{T}_n(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\substack{n_i \mid n \\ n_i \neq 1}} T_{n_i}(t, j(\mathfrak{k}))$$

zusammenhängen, und daß folglich wie $T_n(t, j(\mathfrak{k}))$ so auch $\overline{T}_n(t, \mathfrak{k})$ ein Polynom $\overline{T}_n(t, j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ ist.

d) Um den Beweis zu vollenden, ist noch zu zeigen, daß der neue Zähler $\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ ein Polynom $\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist.

Dazu schreiben wir die bis jetzt gewonnenen Quotientendarstellung von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ in der Form

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) \overline{T}_n(\tau(u, \mathfrak{a}), j(\mathfrak{k})) = \overline{Z}_\mathfrak{n}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})$$

und entwickeln beide Seiten nach Potenzen von u oder besser gleich nach Potenzen der Größe 0. Dimension

$$v = \frac{u^e}{g^{(e)}(\mathfrak{a})},$$

wo $g^{(e)}(\mathfrak{a})$ den in **1**, S. 127 der Weierstraßschen $\wp$-Funktion angefügten Normierungsfaktor bedeutet. Man hat allgemein eine v-Entwicklung

$$\tau(u, \mathfrak{w}) = \sum_{k=-1}^{\infty} F_k(\mathfrak{w})\, v^k,$$

wo die Koeffizienten $F_k(\mathfrak{w})$ ganze Modulfunktionen, also Polynome $F_k(j(\mathfrak{w}))$ in $j(\mathfrak{w})$ sind, deren Koeffizienten sich etwa mittels des q-Entwicklungsprinzips [11]) als rationale Zahlen erweisen. Im singulären Falle $\mathfrak{w} = \mathfrak{a}$ hat man also eine v-Entwicklung

$$\tau(u, \mathfrak{a}) = \sum_{k=-1}^{\infty} F_k(j(\mathfrak{k}))\, v^k$$

vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$. Es ist dann

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = \sum_{k=-1}^{\infty} F_k\left(j\left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}}}\right)\right)\left(\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}\right)^k v^k.$$

Hierin ist nach Satz 10 $j\left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}}}\right)$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$. Wir werden ferner nachher beweisen, daß auch $\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist. Also ist auch die v-Entwicklung von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ und folglich auch die von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) \overline{T}_n(\tau(u, \mathfrak{a}), j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$. Durch Koeffizientenvergleich folgt jetzt, daß auch die v-Entwicklung von $\overline{Z}_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist.

Die ersten Koeffizienten dieser v-Entwicklung hängen aber mit den Koeffizienten von $\overline{Z}_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ eineindeutig durch ein rekursives lineares Gleichungssystem zusammen, dessen Koeffizientenmatrix aus den Koeffizienten der v-Entwicklung von $\tau(u, \mathfrak{a})$ gebildet ist, also den Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ hat. Daher sind auch die Koeffizienten von $\overline{Z}_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$.

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht, bis auf den zurückgestellten Nachweis, daß $\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist.

e) Um diesen restlichen Nachweis zu erbringen, betrachten wir die Funktionen

$$g_{M_\nu}(w_1, w_2) = \frac{g^{(e)}(w_1, w_2)}{g^{(e)}(M_\nu(w_1, w_2))},$$

wo $n = \mathfrak{n}\mathfrak{m}$ das kleinste ganze positive Multiplum von $\mathfrak{n}$ ist und die M_ν ein Repräsentantensystem der $\psi(m)$ Transformationsklassen vom Grade $m = N(\mathfrak{m}) = N\left(\frac{n}{\mathfrak{n}}\right)$ bedeuten. Die zu untersuchende Größe ist dann der singuläre Wert

$$\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)} = \frac{g^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2)}{g^{(e)}\left(\frac{1}{m} M(\alpha_1, \alpha_2)\right)} = g_M(\alpha_1, \alpha_2),$$

wo α_1, α_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$ ist, und die Transformation $M(\alpha_1, \alpha_2)$ eine Basis von $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \frac{n}{\mathfrak{n}}\mathfrak{a}$ liefert. Nach Wahl von n ist $\mathfrak{m}$ in der Tat ein ganzes Ideal ohne ganzrationalen Teiler, also die Transformation M vom Grade $m = N(\mathfrak{m})$ ganzzahlig primitiv.

Analog zu S. 73 hat man nun Darstellungen

$$g_{M_\nu}(w_1, w_2) = \frac{G_m(j(M_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))}{J'_m(j(M_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))},$$

[11]) Oder auch durch direkte Ausrechnung, indem man die u-Entwicklung von $\wp(u, \mathfrak{w})$ aus der Partialbruchzerlegung herstellt und die Koeffizienten mittels der Differentialgleichung auf $g_2(\mathfrak{w})$ und $g_3(\mathfrak{w})$ zurückgeführt.

wo Zähler und Nenner Polynome in $j(M_\nu(w_1, w_2))$ und $j(w_1, w_2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten sind, insbesondere der Nenner die Ableitung der Invariantengleichung $J_m(t, j(w_1, w_2))$ nach t für $t = j(M_\nu(w_1, w_2))$.

Ist daher $j(M(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{m}\mathfrak{a}) = j\left(\frac{n}{\mathfrak{n}}\mathfrak{a}\right) = j\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ keine Doppelwurzel von $J_m(t, j(\mathfrak{k}))$, so verschwindet der Nenner im oben angegebenen singulären Falle nicht, und jene Darstellung liefert die Behauptung über $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$.

f) Im allgemeinen Falle, daß $j(M(\alpha_1, \alpha_2))$ genau r-fache Wurzel von $J_m(t, j(\mathfrak{k}))$ ist, muß die eben angegebene Schlußweise noch etwas ausgebaut werden. Es ist dann für genau r der Transformationsklassen, die durch $M_1', \ldots, M_r'$ repräsentiert seien, $j(M_\nu'(\alpha_1, \alpha_2)) = j(M(\alpha_1, \alpha_2))$. Dementsprechend bilden wir das Polynom

$$l(w_1, w_2) = \prod_{\nu=1}^{r}(a - j(M_\nu'(w_1, w_2)),$$

in a, bezeichnen ferner mit $l_\mu(w_1, w_2)$ $(\mu = 1, \ldots, s)$ die aus ihm durch Modulsubstitutionen entstehenden $s = \binom{\psi(m)}{r}$ formal verschiedenen Polynome und bestimmen die Zahl a rational so, daß nur eines der $l_\mu(\alpha_1, \alpha_2)$ gleich $l(\alpha_1, \alpha_2)$ wird. Das letztere ist deshalb möglich, weil nach Konstruktion nur eines der $l_\mu(\alpha_1, \alpha_2)$ als Polynom in a mit $l(\alpha_1, \alpha_2)$ identisch ist.

Mit diesen $l_\mu(w_1, w_2)$ haben wir im allgemeinen Falle an Stelle der im Spezialfalle benutzten $j(M_\nu(w_1, w_2))$ zu operieren.

Ganz analog wie in **1**, Sätze 7 und 9 beweist man für sie zunächst, daß das Analogon zur Invariantengleichung, nämlich

$$L(t, j(w_1, w_2)) = \prod_{\mu=1}^{s}(t - l_\mu(w_1, w_2))$$

ein Polynom in t und $j(w_1, w_2)$ mit ganzrationalen Koeffizienten ist.

Bezeichnet ferner $h(w_1, w_2)$ irgendein ganzrationalzahliges symmetrisches Polynom in den $g_{M_\nu'}(w_1, w_2)$ und $h_\mu(w_1, w_2)$ $(\mu = 1, \ldots, s)$ die s aus ihm durch Modulsubstitutionen entstehenden formal verschiedenen Funktionen, so vertauschen sich die $h_\mu(w_1, w_2)$ bei der Modulgruppe genau wie die $l_\mu(w_1, w_2)$, und man hat daher wieder Darstellungen

$$h_\mu(w_1, w_2) = \frac{K(l_\mu(w_1, w_2), j(w_1, w_2))}{L'(l_\mu(w_1, w_2), j(w_1, w_2))},$$

wo der Zähler sich mittels des q-Entwicklungsprinzips als Polynom in $l_\mu(w_1, w_2)$ und $j(w_1, w_2)$ mit ganzrationalen Koeffizienten erweist und der ebenso beschaffene Nenner die Ableitung nach t von $L(t, j(w_1, w_2))$ für $t = l_\mu(w_1, w_2)$ ist. Nach Konstruktion verschwindet dieser Nenner in unserem singulären Falle nicht, und jene Darstellung bleibt also sinnvoll. Weil $l(\alpha_1, \alpha_2) = (a - j(\mathfrak{k}))^r$ vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ist, liefert sie die Tatsache, daß auch $h(\alpha_1, \alpha_2)$ vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ ist.

Das wenden wir jetzt einerseits auf die elementarsymmetrischen Funktionen der $g_{M_\nu'}(\alpha_1, \alpha_2)$, andrerseits auf deren Potenzsummen an. So ergibt sich, daß einerseits das Polynom

$$G(t, j(\mathfrak{k})) = \prod_{\nu=1}^{r}(t - g_{M_\nu'}(\alpha_1, \alpha_2))$$

andrerseits die Zahlen

$$A_k(j(\mathfrak{k})) = \sum_{\nu=1}^{r} g_{M_\nu}(\alpha_1, \alpha_2)^k$$

vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ sind.

Wir können nun die Werte $g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2)$ sämtlich durch den einen $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ ausdrücken. Aus $j(M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2)) = j(M(\alpha_1, \alpha_2))$ folgt nämlich, daß

$$M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\lambda_\nu} S_\nu M(\alpha_1, \alpha_2)$$

mit Modulsubstitutionen S_ν und Zahlen λ_ν aus Ω ist. Da die Multiplikation mit einer Einheit durch eine Modulsubstitution ersetzt werden könnte, können hierbei keine zwei der Zahlen λ_ν zueinander assoziiert sein. Setzen wir diese Darstellungen der $M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2)$ in

$$g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{g^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2)}{g^{(e)}\left(\frac{1}{m} M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2)\right)}$$

ein, so folgt aus der Homogeneität e-ter Dimension von $g(w)$, daß

$$g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda_\nu^e g_M(\alpha_1, \alpha_2)$$

ist. Unsere Formeln für die Potenzsummen gehen damit über in

$$g_M(\alpha_1, \alpha_2)^k \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke} = A_k(j(\mathfrak{k})).$$

Verschwänden nun alle r Summen $\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke} (k = 1, \ldots, r)$, so verschwände die Determinante $|\lambda_\nu^{ke}|$, also das Differenzenprodukt $\prod_{\nu_1<\nu_2} (\lambda_{\nu_1}^e - \lambda_{\nu_2}^e)$; das ist aber nicht der Fall, weil wie festgestellt keine zwei der λ_ν zueinander assoziiert sind. Also existiert ein $k \geqq 1$, für das $\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke}$ nicht verschwindet.

Wir betrachten dann das Polynom

$$G_k(t, j(\mathfrak{k})) = t^k \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke} - A_k(j(\mathfrak{k}))$$

vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$. Es besitzt die Wurzel $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$. Dagegen ist keine weitere der Größen $g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda_\nu^e g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ Wurzel von $G_k(t, j(\mathfrak{k}))$; denn sonst wäre $\lambda_\nu^e = 1$, also gegen unsere Feststellung doch λ_ν zu dem zu M gehörigen Faktor $\lambda = 1$ assoziiert. Somit haben $G_k(t, j(\mathfrak{k}))$ und $G(t, j(\mathfrak{k}))$ nur die (für das letztere Polynom einfache) Wurzel $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ gemeinsam. Daher ist $g_M(\alpha_1, \alpha_2) = g_M(\mathfrak{a}) = \frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}$ nach dem auf S. 72 zitierten Weber-Perronschen Satz ebenfalls vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$.

Das beendet den Beweis von Satz 15.

Wir können nunmehr leicht die zu Beginn dieses Paragraphen ausgesprochenen Behauptungen beweisen.

Satz 16. *Die zu einer absoluten Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *von* Ω *gehörige Strahlklassengleichung*

$$T_\mathfrak{m}(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\mathfrak{k}^* \text{ zu } \mathfrak{k}} (t - \tau(\mathfrak{k}^*))$$

ist ein Polynom $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ *vom Typus* $\Omega(j(\mathfrak{k}))$.

Beweis: Gemäß **1**, S. 130 ist

$$T_\mathfrak{m}(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\substack{(\varrho) \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho) = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} \\ (\mathfrak{r}, \mathfrak{m}) = 1}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a})),$$

wo $\mathfrak{a}$ ein festes Ideal aus $\mathfrak{k}$ bedeutet.

Ist $e_\mathfrak{m}$ die Anzahl der mod. $\mathfrak{m}$ inkongruenten Einheiten aus Ω, so hat man ähnlich wie oben auf S. 79/80

$$T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}} = \prod_{\substack{\varrho \bmod. \mathfrak{a} \\ (\varrho)=\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} \\ (\mathfrak{r},\mathfrak{m})=1}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a})),$$

wo das Produkt nunmehr über die verschiedenen Zahlen ϱ statt Hauptideale (ϱ) mit den angegebenen Bedingungen erstreckt ist.

Diese Polynome $T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}}$ hängen nun mit den im Beweis zu Satz 15 auf S. 79 aufgetretenen Nennerpolynomen

$$N_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k}) = \prod'_{\substack{\varrho \bmod. \mathfrak{a} \\ (\varrho)=\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a}))$$

ähnlich wie oben auf S. 80 durch die Substitution

$$N_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\substack{\mathfrak{m}_i \mid \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m}_i \neq 1}} T_{\mathfrak{m}_i}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}_i}},$$

also mittels der Möbiusschen μ-Funktion umgekehrt

$$T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}} = \prod_{\substack{\mathfrak{m}_i \mid \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m}_i \neq 1}} N_{\mathfrak{m}_i}(t, \mathfrak{k})^{\mu\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}_i}\right)},$$

zusammen.

Da nach Satz 15 der reduzierte Nenner $N_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})$ der dort nachgewiesenen rationalen Funktionen $R_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ebenfalls von diesem Typus ist, so gilt somit dasselbe von $T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}}$ und daher auch von $T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})$ selbst.

Aus Satz 16 ergibt sich ferner gemäß Satz 5 unmittelbar

Satz 17. *Die volle Strahlklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω

$$T_{\mathfrak{m}}(t) = \prod_{\mathfrak{k}^*} (t - \tau(\mathfrak{k}^*)) = \prod_{\mathfrak{k}} T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$$

ist ein Polynom mit Koeffizienten aus Ω.

Wir beweisen schließlich analog zu Satz 6

Satz 18. *Die Strahlenklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ *zu einer absoluten Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *von* Ω *ist irreduzibel im absoluten Klassenkörper* K.

Beweis: Wir stützen uns auf die in **1**, Satz 23 für jede Strahlklasseninvariante $\tau(\mathfrak{k}^*) \bmod. \mathfrak{m}$ von Ω bewiesene Kongruenz

$$\tau(\mathfrak{k}^*) \equiv \tau(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^* \mathfrak{k}^*) \mod.^* \mathfrak{p},$$

wo $\mathfrak{p}$ ein nicht in der Diskriminante d von Ω, nicht in $N(\mathfrak{m})$ und nicht in den Relativdiskriminanten $\mathfrak{d}_{\mathfrak{k}^*}$ der sämtlichen Körper $\Omega(\tau(\mathfrak{k}^*))$ in bezug auf Ω aufgehendes Primideal 1. Grades aus Ω und $p = N(\mathfrak{p})$ ist.

Es sei $\tau(\mathfrak{k}^*)$ irgendeine der zu $\mathfrak{k}$ gehörigen Strahlklasseninvarianten mod. $\mathfrak{m}$ von Ω, und $F(t, j(\mathfrak{k}))$ der zu $\tau(\mathfrak{k}^*)$ gehörige irreduzible Faktor von $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$ in $\mathsf{K} = \Omega(j(\mathfrak{k}))$. Ferner sei $\tau(\mathfrak{k}_1^*)$ irgendeine weitere zu $\mathfrak{k}$ gehörige Strahlklasseninvariante mod. $\mathfrak{m}$ von Ω. Wir setzen dann $\mathfrak{k}_1^* = \mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*$, wo dann also $\mathfrak{k}_0^*$ eine in die absolute Hauptklasse fallende Strahlklasse mod. $\mathfrak{m}$ von Ω ist, und bestimmen in $\mathfrak{k}_0^*$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$, das nur aus zu d, $N(\mathfrak{m})$ und den $\mathfrak{d}_{\mathfrak{k}^*}$ primen Primidealen 1. Grades $\mathfrak{p}_i$ von Ω zusammengesetzt ist, so daß also die obige Kongruenz für die $\mathfrak{p}_i$ anwendbar ist, und ebenso die analoge für $j(\mathfrak{k})$ aus **1**, Satz 11. Außerdem soll $\mathfrak{a}_0$ auch noch prim sein zur Diskriminante D der absoluten Klassengleichung $H(t)$ und den Diskriminanten $\Delta_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{k})}$ der sämtlichen Strahlklassengleichungen $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$, wo $\mathfrak{k}$ alle absoluten Idealklassen von Ω durchläuft — die letzteren sind nach **1**, Satz 20 von Null verschieden.

Ein solches Ideal $\mathfrak{a}_0 = (\alpha_0)$ gibt es sicher in $\mathfrak{k}_0^*$. Sei nämlich g ein ganzes positives Multiplum von d, $\mathfrak{m}$, den $\mathfrak{d}_{\mathfrak{k}^*}$, D und den $\Delta_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{k})}$. Wir wählen dann zunächst ein zu g primes Ideal (α_0') in $\mathfrak{k}_0^*$. Ist

$$\alpha_0' = a_1'\omega_1 + a_2'\omega_2$$

die Darstellung von α_0' durch eine Basis ω_1, ω_2 der ganzen Zahlen von Ω, so bestimmen wir

$$\alpha_0 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$$

so, daß

$$a_1 \equiv a_1' \bmod. g, \quad a_2 \equiv a_2' \bmod. g, \qquad (a_1, a_2) = 1$$

ist; das ist möglich, weil nach Wahl von α_0' der größte gemeinsame Teiler $(a_1', a_2', g) = 1$ ist. Es ist dann auch (α_0) ein zu g primes Ideal aus $\mathfrak{k}_0^*$, und (α_0) ist zudem nur aus Primidealen 1. Grades von Ω zusammengesetzt, denn es enthält nach Konstruktion keinen ganzrationalen Teiler. Somit erfüllt also $\mathfrak{a}_0 = (\alpha_0)$ alle gestellten Bedingungen.

Weil nun $\mathfrak{p}_1$ prim zu $N(\mathfrak{m})$ ist, hat gemäß **1**, Satz 22 $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ und mithin auch $F(t, j(\mathfrak{k}))$ als Polynom in t für $\mathfrak{p}_1$ ganze Koeffizienten aus $\mathsf{K} = \Omega(j(\mathfrak{k}))$, und weil weiter $\mathfrak{p}_1$ prim zu D ist, haben deren Polynomdarstellungen durch $j(\mathfrak{k})$ für $\mathfrak{p}_1$ ganze Koeffizienten aus Ω. Weil $\mathfrak{p}_1$ vom 1. Grade ist, folgt also aus

$$F(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})) = 0$$

durch Potenzierung mit $p_1 = N(\mathfrak{p}_1)$ in bekannter Weise zunächst

$$F(\tau(\mathfrak{k}^*)^{p_1}, \quad j(\mathfrak{k})^{p_1}) \equiv 0 \bmod.^* \mathfrak{p}_1 .$$

Wendet man dann die obige Kongruenz und ihr schon im ersten Abschnitt beim analogen Beweis benutztes Analogon für $j(\mathfrak{k})$ an, ergibt sich ferner

$$F(\tau(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^* \mathfrak{k}^*), \quad j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \mathfrak{k})) \equiv 0 \bmod.^* \mathfrak{p}_1 .$$

Weil schließlich p_1 prim zu den $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{k})}$, also insbesondere zu $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k})}$ gewählt ist, so hat die letztere Kongruenz

$$F(\tau(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^* \mathfrak{k}^*), \quad j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \mathfrak{k})) = 0$$

zur Folge.

So mit $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ fortfahrend ergibt sich unter Beachtung von

$$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^* \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r}^* = \mathfrak{k}_{\mathfrak{a}_0}^* = \mathfrak{k}_0^*, \quad \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1} \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{a}_0} = 1$$

schließlich

$$F(\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})) = 0 ,$$

d. h. nach Wahl von $\mathfrak{k}_0^*$

$$F(\tau(\mathfrak{k}_1^*), j(\mathfrak{k})) = 0 .$$

Das besagt aber die Irreduzibilität von $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ in K.

Es liegt gemäß Satz 17 nahe zu vermuten, daß die volle Strahlklassengleichung $T_\mathfrak{m}(t)$ in Ω irreduzibel ist. Das würde sich nach demselben Schema wie die Irreduzibilität der Strahlklassengleichungen $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ in K beweisen lassen, wenn nur feststände, daß die Diskriminante Δ von $T_\mathfrak{m}(t)$ nicht Null ist, oder also, daß die sämtlichen Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ (nicht nur die zu einer festen absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}$ gehörigen) voneinander verschieden sind. Da die $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ zueinander konjugierte irreduzible Polynome in K sind, käme das weiter darauf hinaus, daß diese Polynome untereinander verschieden sind. Diese Frage ist indessen noch ungelöst.

§ 2. Die Galoissche Gruppe des Strahlklassenkörpers mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω.

Die in den Sätzen 16, 18 enthaltenen Hauptresultate von § 1 besagen, daß die den Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ zu einer festen absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}$ von Ω

zugeordneten Körper $\mathsf{K}(\tau(\mathfrak{k}^*)) = \Omega(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k}))$ ein volles System zueinander in bezug auf K konjugierter sind. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Körper alle identisch sind, daß also die Strahlklassengleichung $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$ Galoissch in bezug auf K ist.

Wir beweisen dazu in Analogie zu Satz 10

Satz 19. *Zu jeder Strahlklasse $\mathfrak{k}_0^*$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω existiert ein nur von $\mathfrak{k}_0^*$ abhängiges Polynom $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ derart, daß für jede Strahlklasse $\mathfrak{k}^*$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω mit zugehöriger absoluter Idealklasse $\mathfrak{k}$ gilt*

$$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*) = R_{\mathfrak{k}_0^*}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})).$$

Beweis: Während wir den analogen Beweis im ersten Abschnitt aus der Theorie der Transformation vom Primzahlgrade p schöpften und die Multiplikation mit zusammengesetzten Idealen $\mathfrak{a}_0$ auf die mit Primidealen $\mathfrak{p}$ zurückführten, sind wir hier in der Lage, gleich die Multiplikation mit zusammengesetzten Idealen $\mathfrak{a}_0$ zur Ausführung zu bringen, weil nämlich das in Satz 15 bewiesene verallgemeinerte Prinzip der komplexen Multiplikation sich nicht nur auf den Primidealfall $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$ sondern auf den allgemeinen Fall eines zusammengesetzten $\mathfrak{n}$ erstreckt.

Ist im Sinne von **1**, S. 130

$$\tau(\mathfrak{k}^*) = \tau\left(\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}, \mathfrak{a}\right)$$

und ist $\mathfrak{a}_0$ ein ganzes Ideal aus $\mathfrak{k}_0^*$, so ist im selben Sinne

$$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*) = \tau\left(\frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{r} \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0}}{\mathfrak{m}}, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0}\right) = \tau\left(\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0}\right).$$

$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*)$ und $\tau(\mathfrak{k}^*)$ hängen also gerade durch die verallgemeinerte komplexe Multiplikation zusammen. Man hat daher gemäß Satz 15

$$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*) = R_{\mathfrak{a}_0}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})).$$

Indem man für jede Strahlklasse $\mathfrak{k}_0^*$ mod. $\mathfrak{m}$ aus Ω einen Repräsentanten $\mathfrak{a}_0$ auswählt und die Nenner der rationalen Funktionen $R_{\mathfrak{a}_0}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k}))$ mittels der nach Satz 18 irreduziblen Gleichung $T_{\mathfrak{m}}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})) = 0$ beseitigt, erhält man Polynome $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ der im Satz angegebenen Art.

Die Existenz der $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ in Satz 19 zunächst besagt nun

Satz 20. *Die volle Strahlklassengleichung $T_{\mathfrak{m}}(t)$ ist Galoissch in bezug auf K.*

Der Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{m}} = \mathsf{K}(\tau(\mathfrak{k}^*)) = \Omega(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k}))$ ist also von der Wahl der Klasse $\mathfrak{k}^*$ unabhängig und Galoissch in bezug auf Ω.

Das letztere folgt daraus, daß nach Satz 17 $T_{\mathfrak{m}}(t)$ Koeffizienten aus Ω hat, und K nach Satz 11 Galoissch in bezug auf Ω ist.

Die Unabhängigkeit der $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ in Satz 19 von $\mathfrak{k}_0^*$ ferner besagt, wie man leicht sieht,

Satz 21. *Der Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{m}}$ ist Abelsch in bezug auf Ω, und seine Relativgruppe ist isomorph zur Gruppe der Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$ in Ω, indem jeder Strahlklasse $\mathfrak{k}_0^*$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω mit sie enthaltender absoluter Idealklasse $\mathfrak{k}_0$ die Substitution*

$$\sigma_{\mathfrak{k}_0^*} = (\tau(\mathfrak{k}^*) \to \tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}), \quad j(\mathfrak{k}) \to j(\mathfrak{k}_0^{-1} \mathfrak{k})),$$

wo $\mathfrak{k}^*$ alle Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$ von Ω durchläuft, zugeordnet wird.

Insbesondere folgt noch

Zusatz. *Die Relativgruppe von $\mathsf{K}_{\mathfrak{m}}$ in bezug auf K ist isomorph zur Gruppe der in der absoluten Hauptklasse von Ω enthaltenen Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$, indem jeder solchen Strahlklasse $\mathfrak{k}_0^*$ die Substitution*

$$\sigma_{\mathfrak{f}_0^*} = (\tau(\mathfrak{f}^*) \to \tau(\mathfrak{f}_0^* \mathfrak{f}^*)),$$

wo $\mathfrak{f}^*$ *alle Strahlklassen mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω *durchläuft, zugeordnet wird.*

Man kann fragen, ob der Körper $\mathsf{K}_\mathfrak{m} = \Omega(\tau(\mathfrak{f}^*), j(\mathfrak{f}))$ schon durch alleinige Adjunktion einer Strahlklasseninvariante $\tau(\mathfrak{f}^*)$ zu Ω, ohne gleichzeitige Adjunktion einer absoluten Klasseninvariante $j(\mathfrak{f})$, gewonnen werden kann. Ersichtlich kommt auch diese Frage auf die Irreduzibilität der von $\tau(\mathfrak{f}^*)$ befriedigten vollen Strahlklassengleichung $T_\mathfrak{m}(t)$ über Ω hinaus, also auf die am Schluß des vorigen Paragraphen als noch ungelöst bezeichneten Fragen.

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale von Ω im Strahlenklassenkörper mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω.

In **1**, Satz 24 wurde das Zerlegungsgesetz für die Primideale 1. Grades aus Ω im Körper K_m mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen hergeleitet. Was diese Ausnahmen betrifft, so sind von den dort gestellten Forderungen 1—7 durch die im vorstehenden gewonnen Resultate einige als von den andern bedingt erkannt. So wurde schon im ersten Abschnitt am Schluß von § 1 festgestellt, daß die Forderungen 3 und 5 dasselbe besagen. Analog folgt aus Satz 18 in § 1 des zweiten Abschnitts, daß die Forderungen 4 und 6 dasselbe besagen. Schließlich zieht Satz 20 in § 2 nach sich, daß die Forderung 7 eine Folge aus den Forderungen 3 und 4 ist.

Zusammenfassend haben wir damit jetzt folgende einfachere Formulierung für **1**, Satz 24:

Satz 22. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal* 1. *Grades von* Ω, *das prim ist zu*

1. *der Diskriminante* d *von* Ω,
2. $N(\mathfrak{m})$,
3. *der Diskriminante* D *der absoluten Klassengleichung von* Ω,
4. *den Diskriminanten* $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{f})}$ *der Strahlklassengleichungen*

$$T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{f})) \text{ mod. } \mathfrak{m} \text{ von } \Omega\ ^{12}),$$

so zerfällt $\mathfrak{p}$ *in* $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ *in Primideale* f*-ten Relativgrades, wenn* f *die Ordnung der Strahlklasse* $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ *mod.* $\mathfrak{m}$ *von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Wieder besagt darüber hinaus die in **1**, Satz 23 bewiesene grundlegende Kongruenz auf Grund von Satz 21 die Gültigkeit des *Artinschen Reziprozitätsgesetzes für die zu* d, $N(\mathfrak{m})$, D *und den* $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{f})}$ *primen Primideale* 1. *Grades* $\mathfrak{p}$ *aus* Ω.

Damit ist für den Körper $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ ein umfassender Teil derjenigen Tatsachen festgestellt, die die allgemeine Klassenkörpertheorie für den Strahlklassenkörper mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω aussagt.

Es fehlen lediglich noch die Tatsachen:

1. daß das in Satz 22 ausgesprochene Zerlegungsgesetz auch für die Primideale zweiten Grades mit den entsprechenden endlich vielen Ausnahmen gilt,

2. daß die Relativdiskriminante von $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ in bezug auf K nur Primteiler von $\mathfrak{m}$ enthält,

3. daß die nicht in $\mathfrak{m}$ aufgehenden bisher ausgenommenen Primideale von Ω sich dem Zerlegungsgesetz von Satz 22 fügen,

4. das Zerlegungsgesetz für die Primteiler von $\mathfrak{m}$.

---

[12]) Natürlich genügt es, das für e i n e der in bezug auf Ω konjugierten $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{f})}$ zu fordern.

Während Punkt 1 sich in der Fueterschen Theorie, die mit Funktionen 2. Stufe arbeitet, erledigen läßt, habe ich bedauerlicherweise bisher keinen Beweis dafür finden können, der mit den in meine Theorie allein eingehenden Funktionen 1. Stufe auskommt. Wenn ein entsprechender Beweis im Falle des absoluten Klassenkörpers K im ersten Abschnitt, Satz 13, gelingt, so ist dafür der besondere Umstand verantwortlich, daß die Primideale 2. Grades $p = \mathfrak{p}$ aus Ω alle in der absoluten Hauptklasse liegen, also $f = 1$ haben.

Auch die Punkte 2 und 4 lassen sich in der Fueterschen Theorie erledigen. Ich hoffe das demnächst in meiner Theorie nachholen zu können.

Dagegen ist ein Beweis für Punkt 3 ohne Verwendung transzendenter Hilfsmittel (Dirichletscher Reihen etc.) auch hier, entsprechend wie im ersten Abschnitt, bisher nicht bekannt.

Eingegangen 1. Januar 1931.