

## Werk

**Titel:** Über die geometrische Bedeutung des Rotationswinkels in der Strahlengeometrie.

**Autor:** Herzberger, M.

**Jahr:** 1929

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689\\_0160|log6](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0160|log6)

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Über die geometrische Bedeutung des Rotationswinkels in der Strahlengeometrie.

Von *M. Herzberger* in Jena.

In meiner Arbeit in Band 159, Heft 1 ds. Journals: „Untersuchungen über die Eigenschaften erster Ordnung von reellen Strahlensystemen“ wurde der Begriff des Rotationswinkels bei Strahlenkongruenzen eingeführt, und mit seiner Hilfe die Gleichungen für die Größen erster Ordnung vereinfacht. An dieser Stelle wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieses Winkels einen leichten Überblick über die in einer Kongruenz enthaltenen Regelflächen bekommt.

Um zu zeigen, daß es sich auch hier um eine folgerichtige Weiterentwicklung von Ideen handelt, die für Regelflächen bekannt sind, seien die hierauf bezüglichen Tatsachen kurz angegeben.

Die Eigenschaften erster Ordnung einer Regelfläche längs eines Strahls hängen ab

1. von der Lage des kaustischen Punktes,
2. von der in obiger Arbeit „ $\nu$ “ genannten Größe, dem sogenannten Drall.

Sei  $r$  der Abstand eines Punktes des Ausgangsstrahls vom zugehörigen kaustischen Punkt, dann besteht die Gleichung

$$(1) \quad \nu = r \operatorname{tg} \varphi.$$

Hierbei ist  $\varphi$  (der in obiger Arbeit Drehungswinkel genannt wurde) der Winkel, den die Tangentialebene im Ausgangspunkt gegen ihre Grenzlage im Unendlichen bildet.

Sei  $\nu \neq 0$ , dann nimmt  $\varphi$ , wie aus Gleichung (1) folgt, jeden Wert zwischen  $\mp \frac{\pi}{2}$  ein- und nur einmal ein.  $\varphi$  verschwindet nur im Unendlichen,  $\varphi$  wird  $= \mp \frac{\pi}{2}$  im Punkt  $r = 0$ , d. h. im Striktionspunkt. Je größer  $\nu$  ist, umso schneller dreht sich die Tangentialebene beim Fortschreiten längs unseres Strahls.

Ist  $\nu = 0$ , so wird auch  $\varphi = 0$ , es gibt eine konstante Tangentialebene an die Regelfläche längs dieses Strahls, die Regelfläche ist entlang diesem Strahl abwickelbar.

Ich werde zeigen, daß auch für jede Kongruenz drei charakteristische Größen existieren, die durch eine Gleichung der Form

$$(2) \quad N = M \operatorname{tg} \psi$$

verbunden sind, die zusammen mit der sogenannten astigmatischen Differenz  $D$  ein Strahlensystem vollständig charakterisieren. Hierin ist  $M$  die Entfernung eines beliebigen Strahlenpunktes vom sogenannten Mittelpunkt,  $\psi$  ist gerade der in obiger Arbeit eingeführte Rotationswinkel, und  $N$  können wir, wie später zu zeigen ist, als mittleren Drall der Kongruenz bezeichnen.

Ist nun  $N \neq 0$ , so folgt wie oben, daß  $\psi$  längs des Strahls alle Werte zwischen  $\mp \frac{\pi}{2}$  ein- und nur einmal annimmt, im endlichen nirgends verschwindet, und gerade im sogenannten Mittelpunkt ( $M = 0$ ) den Wert  $\mp \frac{\pi}{2}$  annimmt.

Ist  $N = 0$ , so ist  $\psi \equiv 0$ . Dieser ausgezeichnete Fall tritt dann und nur dann ein, wenn unsere Kongruenz entlang dem herausgegriffenen Strahl die Eigenschaften einer Normalenkongruenz hat.

Wir werden die obigen Behauptungen im Folgenden beweisen.

Zuerst einige Definitionen. Jeder Kongruenz

$$\alpha(u, v) + \lambda \beta(u, v)$$

ist ein Flächenstück auf der Einheitskugel zugeordnet, das man erhält, wenn man alle Vektoren  $\beta(u, v)$  von einem festen Punkte aus abträgt. Man nennt diese Punktmannigfaltigkeit das sphärische Bild der Kongruenz. Einem Strahl entspricht hierbei ein Punkt, einer ihn enthaltenden Regelfläche eine Kurve auf der Einheitskugel.

Wir wollen zwei Regelflächen konjugiert nennen, wenn ihre sphärischen Bilder sich senkrecht schneiden. Die Bedingung dafür lautet

$$(3) \quad \beta_u \cdot \beta_v = (\beta \times \beta_v) \cdot (\beta \times \beta_u) = 0. ^1)$$

Wir wollen zwei Regelflächen orthogonal in einem Punkt nennen, wenn die Tangentialebenen an beide Regelflächen in diesem Punkte aufeinander senkrecht stehen. Die Bedingung dafür lautet

$$(4) \quad (\alpha_u \times \beta) \cdot (\alpha_v \times \beta) = 0.$$

Die Koordinatenwahl in der zitierten Arbeit beruht also darauf, daß die Normalkoordinaten Regelflächen bestimmen, die gleichzeitig konjugiert, als auch in bezug auf den Ausgangspunkt orthogonal sind. Das ist im allgemeinen (der Ausnahmefall muß gesondert behandelt werden) nur auf eine Weise möglich. Es ergab sich, daß bei obiger Wahl die Koordinatenregelflächen im Ausgangspunkt den gleichen Drehungswinkel hatten. Dieser gemeinsame Drehungswinkel  $\psi$  ist nun die von uns zu untersuchende Größe.

Sei nun  $\alpha$  der Winkel, den das sphärische Bild einer beliebigen Regelfläche mit dem Bild der ersten Koordinatenregelfläche bildet, so ergibt sich als Entfernung des Striktionspunktes und als Drall für die erstere nach den ersten beiden Gleichungen aus Formel (6) der zitierten Arbeit:

$$(5) \quad \begin{aligned} r &= M - \frac{d}{\cos \psi} \cos (2\alpha - \psi) \\ \nu &= N - \frac{d}{\cos \psi} \sin (2\alpha - \psi), \end{aligned}$$

wo

$$(6) \quad N = M \operatorname{tg} \psi$$

ist.

Aus Gleichung (5) ergibt sich, wenn wir statt  $\alpha$ :  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  einsetzen, also die Größen für die konjugierte Regelfläche betrachten:

Die Striktionspunkte konjugierter Regelflächen liegen symmetrisch zum Mittelpunkt, dessen Entfernung vom Ausgangspunkt  $M$  sei; also

$$(7) \quad r_{1,2} = M \mp \frac{d}{\cos \psi} \cos (2\alpha - \psi),$$

außerdem: Konjugierte Regelflächen haben denselben mittleren Drall  $N$ :

$$(8) \quad \nu_{1,2} = N \mp \frac{d}{\cos \psi} \sin (2\alpha - \psi).$$

<sup>1)</sup> Das Zeichen  $\times$  zwischen zwei Vektoren soll das Vektorprodukt charakterisieren.

Analog kann man aus den letzten Gleichungen von  $C$  folgern, daß folgender Satz gilt:

Orthogonale Flächen haben stets dieselbe mittlere Krümmung und dieselbe mittlere Windung.

Unter den konjugierten Regelflächen sind besonders ausgezeichnet die Grenzregelflächen. Sie sind gegeben durch

$$(9) \quad \alpha_1 = \frac{\psi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2};$$

für sie gewinnt  $r$  seinen größten bzw. kleinsten Wert

$$(10) \quad \begin{aligned} r_1 &= M - \frac{d}{\cos \psi} = M - D \\ r_2 &= M + \frac{d}{\cos \psi} = M + D. \end{aligned}$$

Den durch (10) eingeführten Wert  $D$  bezeichnet man als die astigmatische Differenz der Regelfläche. Die kaustischen Punkte aller in unserer Kongruenz enthaltenen Regelflächen liegen alle innerhalb einer Strecke von der Länge  $2D$ .

$N$  ist der Drall der beiden Grenzregelflächen, der mittlere Drall aller konjugierten Regelflächen. Wir können nun auch den Winkel  $A$  von dem sphärischen Bilde der Grenzflächen aus zählen. Wir setzen also

$$(11) \quad 2A = 2\alpha - \psi$$

und finden

$$(12) \quad \begin{aligned} r &= M - D \cos 2A \\ \nu &= N - D \sin 2A. \end{aligned}$$

In Gleichung (12) sind alle Größen auf ein Koordinatensystem bezogen, das nicht mehr sich beim Übergang zu einem anderen Punkt ändert.  $A$  ist der Winkel des sphärischen Bildes der untersuchten Regelfläche mit dem sphärischen Bild der Grenzregelfläche.  $D$  ist die Entfernung Grenzpunkt—Mittelpunkt, die sogenannte astigmatische Differenz,  $M$  ist die Entfernung Ausgangspunkt—Mittelpunkt und

$$(12) \quad N = M \operatorname{tg} \psi$$

ist schließlich der Drall der beiden Grenzflächen. Aus Gleichung (11) finden wir für die Normalkoordinatenregelflächen

$$(13) \quad A_1 = -\frac{\psi}{2}, \quad A_2 = -\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Aus der Gleichung (11), (12), (13) können wir nun folgende Schlüsse ziehen:

Betrachten wir ein beliebiges Paar konjugierter Regelflächen, die in bezug auf ihre Eigenschaften erster Ordnung längs unseres Strahls bestimmt sind durch die Winkel ihres sphärischen Bildes gegen das sphärische Bild der Grenzregelflächen,

$$(14) \quad A \text{ bzw. } A + \frac{\pi}{2}.$$

Diese beiden Regelflächen haben den Drall

$$(15) \quad \nu = N \mp D \sin 2A.$$

Ihre Striktionspunkte liegen symmetrisch um den Mittelpunkt in der Entfernung

$$(16) \quad d = \mp D \cos 2A.$$

Sie sind Normalkoordinatenflächen, d. h. sie stehen aufeinander senkrecht im Punkt mit der Entfernung vom Mittelpunkt

$$(17) \quad M = -N \operatorname{ctg} 2A$$

und haben den Rotationswinkel

$$(18) \quad \psi = -2A.$$

Insbesondere folgt daraus für die Grenzflächen  $A = 0$ ,  $A = \frac{\pi}{2}$  aus (16), daß ihre Striktionspunkte vom Mittelpunkt den Maximalabstand  $\pm D$  haben, und aus (17), daß die beiden Grenzregelflächen in keinem endlichen Punkt aufeinander senkrecht stehen.

Für alle übrigen konjugierten Regelflächen gibt es immer einen Punkt in dem sie aufeinander senkrecht stehen und dann dort Normalkoordinatenflächen bilden. Durch (16) und (17) wird übrigens eine interessante Beziehung zwischen den Punkten innerhalb der Grenzpunkte und allen Punkten der Geraden hergestellt.

Von Interesse sind noch die Regelflächen  $A_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $A_2 = \frac{3\pi}{4}$ , deren Striktionspunkt im Mittelpunkt liegt, in dem sie aber gleichzeitig aufeinander senkrecht stehen. Ihr Drall ist der maximal auftretende Drall

$$(15) \quad r_{1,2} = N \mp D.$$

Hier ist in Normalkoordinaten

$$(16) \quad \begin{aligned} r &= -D \sin 2\alpha \\ v &= N - D \cos 2\alpha \end{aligned}$$

und

$$\beta = -\alpha.$$

Die obigen Betrachtungen versagen allerdings für Normalkongruenzen; dort wird  $N = 0$ , d. h. die Grenzregelflächen sind längs unserem Strahl abwickelbar. Dann stehen bekanntlich die Grenzregelflächen längs des ganzen Hauptstrahls aufeinander senkrecht, sie sind also die gegebenen Koordinatenflächen. Zählen wir  $A$  wie oben von ihnen aus, so wird  $d = D$  und aus Gleichung (5)

$$(17) \quad \begin{aligned} r &= M - D \cos 2\alpha \\ v &= -D \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Der Rotationswinkel  $\psi$  verschwindet dann in allen Punkten identisch. Aus Formel (17) der zitierten Arbeit folgt dann

$$(18) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{M + D}{M - D} \operatorname{tg} \alpha.$$

Wann sind zwei konjugierte Regelflächen orthogonal? Wenn aus  $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$  folgt

$\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$ . Das ergibt

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{M - D}{M + D} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \left(\frac{M - D}{M + D}\right)^2 \operatorname{tg} \beta_2,$$

also

$$M + D = \pm (M - D),$$

d. h.

$$(19) \quad M = 0,$$

also: Alle konjugierten Regelflächen stehen bei einem Normalensystem im Mittelpunkt und nur im Mittelpunkt aufeinander senkrecht. Nur die Grenzregelflächen, die zugleich abwickelbar sind, sind längs des ganzen Strahls orthogonal.

Wir sehen also: Im Mittelpunkt eines Strahls führt die Bedingung, daß die Koordinatenregel­flächen orthogonal und konjugiert sind, nicht notwendig, wie in jedem anderen Punkt, auf die Grenzregel­flächen. Die Aufstellung der Normalgleichungen in der zitierten Arbeit müßte für diesen Fall etwas modifiziert werden, was aber ohne Mühe möglich ist.

Der Fall  $D = 0$ , den man auch aus (19) folgern kann, ist der Fall eines Nabelpunktes bei einer Fläche. Hier fallen alle Striktionspunkte zusammen. Ist das System ein Normalensystem, so sind alle Regel­flächen längs des Strahls abwickelbar und alle konjugierten Regel­flächen sind längs des ganzen Strahles orthogonal. Im Fall des Nichtnormalensystems ändert sich nichts, außer daß alle Regel­flächen einen konstanten Drall  $N$  haben, und natürlich alle denselben Striktionspunkt besitzen. Man kann (in bezug auf die Eigenschaften erster Ordnung) hier sagen: Die unendlich dünne Kongruenz entsteht durch Drehen der unendlich dünnen Regel­fläche mit gleichem Mittelpunkt und gleichem Drall um den Hauptstrahl.

---