

Werk

Titel: Untersuchungen über die Eigenschaften erster Ordnung von reellen Strahlensystemen...

Autor: Herzberger, M.

Jahr: 1928

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0159|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Untersuchungen über die Eigenschaften erster Ordnung von reellen Strahlensystemen.

1. Analytische Darstellung der Theorie.

Von *M. Herzberger* in Wetzlar.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	36
I. Einfach unendliche Strahlensysteme (Regelflächen)	37
II. Zweifach unendliche Strahlensysteme (Kongruenzen)	40
III. Dreifach unendliche Strahlensysteme (Komplexe)	47

Einleitung.

Ausgangspunkt für diese Untersuchungen bildeten Probleme der geometrischen Optik, bei denen es darauf ankam, die charakteristischen Eigenschaften erster Ordnung eines Lichtstrahlenbündels zu suchen, und ihre Änderung bei Brechung und Reflexion zu studieren.

Die schönen Untersuchungen von *Hamilton* und *Kummer* reichten nicht voll zu einer einfachen geometrischen Deutung aus. Dagegen gab hier ein verallgemeinerter Windungs- und Krümmungsbegriff erschöpfende Auskunft über die geometrischen Verhältnisse und ließ die geometrische Bedeutung der schon von *Charles Sturm* (1) abgeleiteten Formeln über Brechung und Reflexion an beliebigen Flächen klar erkennen. Die Betrachtung gab auch Auskunft über die Verhältnisse, die vorlagen, wenn die *Sturmschen* Formeln versagten.

Die Untersuchungen waren zunächst auf solche zweifach unendliche Strahlensysteme beschränkt, die die Eigenschaft haben, Normalensysteme zu sein, d. h. auf einer Schar paralleler Flächen senkrecht zu stehen. Später dehnte ich meine Untersuchungen auf allgemeinere Systeme aus. Hier ergab sich die Bedeutung eines bestimmten Winkels, den ich Rotationswinkel nennen möchte; er verschwindet nur für Normalsysteme.

Mit Hilfe dieses Winkels, auf dem das Schwergewicht der nachfolgenden Untersuchungen ruht, gelingt es auch, Licht zu bringen in das bisher ziemlich dunkle Gebiet der Linienkomplexe. Es soll im folgenden nur das rein Mathematische dargestellt werden. Die Veröffentlichung der Anwendungen auf die geometrische Optik sei einem kleinen Buch überlassen, das demnächst in der Sammlung „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“ erscheinen wird.

Die Rechnungen werden im nachfolgenden vektoriell durchgeführt (siehe zur Bezeichnungsweise: *Blaschke* (1)). Vektoren werden mit deutschen Buchstaben be-

zeichnet. Das skalare Produkt durch Nebeneinanderschreiben oder durch einen Punkt: $a \cdot b$ oder $a \cdot b$, das vektorielle Produkt durch $\times$: $a \times b$ bezeichnet.

Für das dreifache Produkt $(a \times b) \cdot c$ schreiben wir (a, b, c) .

I. Einfach unendliche Strahlensysteme (Regelflächen).

Ein Strahl ist bestimmt durch Punkt a und Richtung (Einheitsvektor $\hat{s}$). $x = a + \lambda \hat{s}$ ist die Gleichung der zugehörigen Geraden.

Eine eindimensionale Geradenmannigfaltigkeit ist gegeben durch $a(u) + \lambda \hat{s}(u)$. Also: gegeben ist eine Kurve $a(u)$ und durch jeden ihrer Punkte eine Gerade in der Richtung $\hat{s}(u)$ oder: gegeben ist eine Regelfläche, d. h. eine zweifach unendliche Punktmannigfaltigkeit $b(u, \lambda)$, die mit jedem ihrer Punkte auch eine durch ihn gehende Gerade enthält. Beide Betrachtungsweisen sind nützlich.

Betrachten wir zwei Geraden. Charakteristisch ist für diese Konfiguration der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes und die Länge und Richtung dieses gemeinsamen Lotes. Seien die beiden Geraden gegeben durch:

$$\begin{aligned} & a + \lambda \hat{s} \\ & (a + \Delta a) + \mu(\hat{s} + \Delta \hat{s}), \end{aligned}$$

so wird der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes durch $a + r\hat{s}$ mit

$$(1) \quad r = \frac{(\Delta a \times \hat{s})(\hat{s} \times \Delta \hat{s})}{(\hat{s} \times \Delta \hat{s})^2}$$

gegeben, die Länge des gemeinsamen Lotes ist proportional

$$(2) \quad v = \frac{(\Delta a, \hat{s}, \Delta \hat{s})}{(\hat{s} \times \Delta \hat{s})^2}.$$

Betrachten wir eine eindimensionale Strahlenmannigfaltigkeit

$$a(u) + \lambda \hat{s}(u),$$

$$\text{so hat } (3) \quad r = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(\Delta a \times \hat{s})(\hat{s} \times \Delta \hat{s})}{(\hat{s} \times \Delta \hat{s})^2} = - \frac{(\hat{s}' \times \hat{s})(\hat{s}' \times \hat{s})}{(\hat{s}' \times \hat{s})^2}$$

eine leicht erkennbare geometrische Bedeutung. — Ferner ist gegeben:

$$(4) \quad v = \frac{(\hat{s}' \times \hat{s}) \hat{s}'}{\hat{s}'^2},$$

ein Ausdruck, den *Hamilton* als „coefficient of undevelopability“ bezeichnet; wir werden ihn noch geometrisch deuten. Beide Größen haben eine geometrische Bedeutung und sind unabhängig von der Wahl des Parameters (u).

Der Punkt $a + r\hat{s}$ heißt der zu dem Strahl gehörende virtuelle kaustische Punkt auch Kehlpunkt (s. *Blaschke*). Auf der Fläche wird, wenn wir (u) variieren, durch (3) eine Kurve bestimmt, die wir die zugehörige virtuelle kaustische Kurve nennen wollen.

In der Literatur kommen die Namen Gratlinie, Striktionslinie (*Study, Zindler*) vor.

Ist $v = 0$, so ist die betrachtete Regelfläche abwickelbar. Dann ist die Striktionslinie die Rückkehrkante (arête de rebroussement) dieser Regelfläche. Wir wollen dann den durch (3) bestimmten Punkt kaustischen Punkt bzw. eine solche Linie kaustische Linie nennen (ohne virtuell) in Anlehnung an *Hamilton*.

Allgemein ist v für den betrachteten Strahl charakteristisch; gehen wir zu einem andern Punkt auf dem Strahl über, so ändert sich „ v “ nicht. Man bezeichnet v mit dem Ausdruck *Drall* (*Blaschke*), paramètre de distribution (*Charles, Mannheim*).

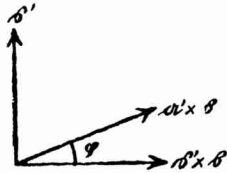
Neben r und v ist es noch nützlich, die Ausdrücke

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= - \frac{(\alpha' \times \beta)(\beta' \times \beta)}{(\alpha' \times \beta)^2} \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{(\alpha' \times \beta) \beta'}{(\alpha' \times \beta)^2} \end{aligned} \quad \text{zu betrachten.}$$

Besteht unser Geradensystem aus den Hauptnormalen der Ausgangskurve, so ist $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung, $\frac{1}{\tau}$ die Windung derselben. Auch sonst lassen sich diese Größen ähnlich geometrisch deuten.

Man hat bisher bei Strahlensystemen sich vorwiegend mit r , bei der Untersuchung der Flächennormalen vorwiegend mit $\frac{1}{\varrho}$ beschäftigt. Die auffällige Symmetrie der vier Formeln

$$(A) \quad \begin{aligned} r &= - \frac{(\alpha' \times \beta)(\beta' \times \beta)}{(\beta' \times \beta)^2} & \nu &= + \frac{(\alpha' \times \beta) \beta'}{\beta'^2} \\ \frac{1}{\varrho} &= - \frac{(\alpha' \times \beta)(\beta' \times \beta)}{(\alpha' \times \beta)^2} & \frac{1}{\tau} &= + \frac{(\alpha' \times \beta) \beta'}{(\alpha' \times \beta)^2} \end{aligned}$$



Figur 1. Bedeutung d. „Drehungswinkels“ φ .

reizt, sie zusammen zu behandeln. Die drei hier vorkommenden Vektoren $(\alpha' \times \beta)$, $(\beta' \times \beta)$, β' stehen alle auf β senkrecht. Außerdem steht $\beta' \times \beta$ senkrecht auf β' und hat dieselbe Länge wie β' . Wenn wir die drei Vektoren von einem Punkt aus abtragen, erhalten wir folgende Figur (s. Fig. 1).

Wir führen den Winkel φ zwischen $\beta' \times \beta$ und $\alpha' \times \beta$ ein. Es ist

$$(6) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= - \frac{(\alpha' \times \beta) \beta'}{(\alpha' \times \beta)(\beta' \times \beta)} \\ \cos^2 \varphi &= \left[\frac{(\alpha' \times \beta)(\beta' \times \beta)^2}{(\alpha' \times \beta)^2 \beta'^2} \right] = \frac{[(\alpha' \times \beta)(\beta' \times \beta)]^2}{(\alpha' \times \beta)^2 (\beta' \times \beta)^2} . \end{aligned}$$

„ φ “ wollen wir den Drehungswinkel nennen. Es ist, wie man leicht erkennt, der Winkel, den die Flächennormale an der Regelfläche im betrachteten Punkt mit der Normale im unendlich fernen Punkt bildet, also der Winkel, um den sich die Tangentialebene längs des Strahls gedreht hat auf dem Wege vom unendlich fernen Punkt bis zum Ausgangspunkt. Aus (A) und (6) folgt:

$$(7) \quad \begin{aligned} \nu &= r \operatorname{tg} \varphi & r \cdot \frac{1}{\varrho} &= \cos^2 \varphi \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\varrho} \operatorname{tg} \varphi & \nu \cdot \frac{1}{\tau} &= \sin^2 \varphi . \end{aligned}$$

Aus $\nu = r \operatorname{tg} \varphi$ folgt, daß $r \operatorname{tg} \varphi$ längs des ganzen Strahls konstant bleibt. Ist $\nu = 0$, so heißt das $\varphi \equiv 0$, d. h. die Tangentialebene an der Regelfläche ist längs des betrachteten Strahls konstant. Die Fläche ist dann, wie bekannt, längs des Strahls abwickelbar.

Ist $\nu \neq 0$, so folgt aus $\nu = r \operatorname{tg} \varphi$, daß die Tangentialebene sich einmal um den Strahl dreht; gleichen Abständen vom kaustischen Punkt r und $-r$ entsprechen gleiche Drehungswinkel: φ und $-\varphi$. Dadurch sind eigentlich die Eigenschaften erster Ordnung eines Strahlenbündels längs eines Strahls erschöpfend gekennzeichnet.

Wir wollen die Formeln (A) noch ein wenig umformen mit Hilfe von (7). Drücken wir alle Größen durch r und φ , bzw. $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\tau}$ aus.

$$\begin{aligned}
 (8) \quad r &= \frac{\cos^2 \varphi}{\frac{1}{\varrho}} = \varrho \cos^2 \varphi \\
 \nu &= r \operatorname{tg} \varphi & \nu &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\frac{1}{\varrho}} = \varrho \sin \varphi \cos \varphi \\
 \frac{1}{\varrho} &= \frac{\cos^2 \varphi}{r} & \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\varrho} \operatorname{tg} \varphi \\
 \frac{1}{\tau} &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}
 \end{aligned}$$

Nur für die abwickelbaren Flächen wird $\nu = 0$, also $\varphi \equiv 0$, d. h.

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \varrho &= r \\
 \nu &= \frac{1}{\tau} = 0.
 \end{aligned}$$

Interessant ist noch, alle Größen durch r und ν bzw. $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\tau}$ auszudrücken.

$$\begin{aligned}
 (10) \quad r &= \frac{\frac{1}{\varrho}}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} = \frac{\varrho \tau^2}{\varrho^2 + \tau^2} \\
 \nu &= \frac{\frac{1}{\tau}}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} = \frac{\varrho^2 \tau}{\varrho^2 + \tau^2} \\
 \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\nu}{r} = \frac{\varrho}{\tau} \\
 \frac{1}{\varrho} &= \frac{r}{r^2 + \nu^2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{r^2}{r^2 + \nu^2} = \frac{r^2}{\varrho^2 + \tau^2}; \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\nu}{r^2 + \nu^2} = \frac{1}{\tau}.
 \end{aligned}$$

Auch hier ist die Symmetrie äußerst auffällig.

Bei allen diesen Betrachtungen war vorausgesetzt, daß sowohl $\mathfrak{s}'^2 \neq 0$, als auch $(\alpha' \times \mathfrak{s})^2 \neq 0$. Diese Ausnahmefälle müssen besonders betrachtet werden.

Wir wollen hierbei jedoch wie im vorigen Fall auch voraussetzen, daß unsere Ausgangskurve vernünftig gewählt sei, d. h. daß jedem benachbarten Punkt u der Kurve ein und nur ein Strahl und jedem benachbarten Strahl ein und nur ein Punkt der Kurve zugeordnet sei.

Fall I. $\mathfrak{s}'^2 = 0$. Dann nennen wir die Fläche längs des betrachteten Strahles zylindrisch. Sei $(\alpha' \times \mathfrak{s}) \neq 0$; dann gibt $\alpha' \times \mathfrak{s}$ die Richtung der Normalen an der Regelfläche längs des Strahls an. Die Fläche ist längs des Strahls abwickelbar. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} = 0$; der kaustische Punkt liegt im Unendlichen. Es ist $\varphi = 0$.

Fall II. $(\alpha' \times \mathfrak{s})^2 = 0$. Sei $\mathfrak{s}'^2 \neq 0$, dann ist die betrachtete Fläche abwickelbar, $\nu = \frac{1}{\tau} = 0$, $\varphi = 0$, und der Ausgangspunkt liegt auf der Gratlinie. Es ist $r = \varrho = 0$, und $\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}$ gibt die Richtung der Normalen längs des Strahls an.

Fall III. $(\alpha' \times \mathfrak{s})^2 = \mathfrak{s}'^2 = 0$. Der betrachtete Strahl ist isoliert.

II. Zweifach unendliche Strahlensysteme (Kongruenzen).

Gegeben sei ein zweifach unendliches Strahlensystem $a(u, v) + \lambda \bar{s}(u, v)$. Man kann das auch so lesen: Gegeben sei eine Fläche $a(u, v)$ und jedem Punkt der Fläche u, v eineindeutig zugeordnet ein Strahl in der Richtung $\bar{s}(u, v)$. Wir betrachten wieder

die vier Größen

$$r = -\frac{(\alpha' \times \bar{s})(\bar{s}' \times \bar{s})}{(\bar{s}' \times \bar{s})^2} \quad v = \frac{(\alpha' \times \bar{s})\bar{s}'}{\bar{s}'^2}$$

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{(\alpha' \times \bar{s})(\bar{s}' \times \bar{s})}{(\alpha' \times \bar{s})^2} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\alpha' \times \bar{s})\bar{s}'}{(\alpha' \times \bar{s})^2}.$$

Die vier darin vorkommenden quadratischen Formen wollen wir nach u' und v' entwickeln und wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \bar{s}'^2 = (\bar{s}' \times \bar{s})^2 = E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2 \\ \text{II.} \quad & (\alpha' \times \bar{s})^2 = \mathfrak{E} u'^2 + 2 \mathfrak{F} u' v' + \mathfrak{G} v'^2 \\ \text{III.} \quad & (\alpha' \times \bar{s})(\bar{s}' \times \bar{s}) = e u'^2 + (f + f') u' v' + g v'^2 \\ \text{IV.} \quad & (\alpha' \times \bar{s})\bar{s}' = \epsilon u'^2 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{f}') u' v' + g v'^2. \end{aligned}$$

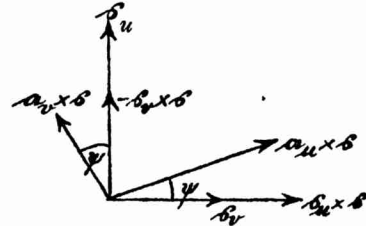
Durch eine reelle Transformation in u und v , d. h. durch eine andere Koordinatenwahl auf der Ausgangsfläche kann man erreichen, daß zwei von den quadratischen Formen als Summe von Quadraten erscheinen. Es liegt nahe, im Gegensatz zu dem bisher geübten Brauch (s. Kummer) statt der Formen I und III die Formen I und II simultan in Quadratsummen zu verwandeln. Die so entstehenden Koordinaten nennen wir Normalkoordinaten, die Darstellung Normaldarstellung.

Sei also unser System in der Normalform gegeben, d. h.

$$F = (\bar{s}_u \cdot \bar{s}_v) = (\bar{s}_u \times \bar{s})(\bar{s}_v \times \bar{s}) = 0$$

$$\mathfrak{F} = (\alpha_u \times \bar{s})(\alpha_v \times \bar{s}) = 0.$$

Betrachten wir nun die Vektoren $\bar{s}_u, \bar{s}_v, \bar{s}_u \times \bar{s}, \bar{s}_v \times \bar{s}, \alpha_u \times \bar{s}, \alpha_v \times \bar{s}$. Sie stehen paarweise aufeinander senkrecht und sind insgesamt senkrecht zu $\bar{s}$, d. h. komplanar. Tragen wir sie von einem Punkt aus ab (s. Fig. 2).



Figur 2.

Bedeutung des Rotationswinkels ψ .

Durch Figur 2 wird der Winkel ψ definiert, den wir den Rotationswinkel der Kongruenz nennen wollen. Seine Bedeutung wird in der Zukunft klarer hervortreten. Aus Figur 2 folgt:

$$(11) \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{(\alpha_u, \bar{s}, \bar{s}_u)}{(\alpha_u \times \bar{s})(\bar{s}_u \times \bar{s})} = -\frac{(\alpha_v, \bar{s}, \bar{s}_v)}{(\alpha_v \times \bar{s})(\bar{s}_v \times \bar{s})} = \frac{(\alpha_u \times \bar{s})(\bar{s}_v \times \bar{s})}{(\alpha_u, \bar{s}, \bar{s}_v)} = \frac{(\alpha_v \times \bar{s})(\bar{s}_u \times \bar{s})}{(\alpha_v, \bar{s}, \bar{s}_u)}$$

oder

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{e}{e} = -\frac{g}{g} = \frac{f}{f} = \frac{f'}{f'}.$$

Mit Hilfe dieser Formel wird man nun leicht instandgesetzt, die Verhältnisse zu überblicken. Setzen wir in (A): $v' = 0$, so erhalten wir eine in unserer Kongruenz enthaltene Regelfläche $v = \text{const}$; analog $u = \text{const}$ für $u' = 0$. Die zugehörigen Werte sind:

$$(12) \quad \begin{array}{ll} \text{für } v = \text{const} & \text{analog für } u = \text{const} \\ r_1 = -\frac{e}{E} & r_2 = -\frac{g}{G} \\ v_1 = r_1 \operatorname{tg} \psi = \frac{e}{E} & v_2 = r_2 \operatorname{tg} \psi = \frac{g}{G} \\ \frac{1}{\varrho_1} = -\frac{e}{\mathfrak{E}} = \frac{\cos^2 \psi}{r_1} & \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{g}{\mathfrak{G}} = \frac{\cos^2 \psi}{r_2} \\ \frac{1}{\tau_1} = \frac{e}{\mathfrak{E}} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\varrho_1} = \frac{\cos \psi \sin \psi}{r_1} & \frac{1}{\tau_2} = \frac{g}{\mathfrak{G}} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\varrho_2} = \frac{\cos \psi \sin \psi}{r_2}. \end{array}$$

Es ist nun nur noch notwendig, die $f, f', \mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ durch die entsprechenden Größen auszudrücken.

Sei

$$\begin{aligned} \alpha_u \times \mathfrak{s} &= \alpha_1 \mathfrak{s}_u + \beta_1 \mathfrak{s}_v \\ \alpha_v \times \mathfrak{s} &= \alpha_2 \mathfrak{s}_u + \beta_2 \mathfrak{s}_v. \end{aligned}$$

Wir finden:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{e}{E} & \beta_1 &= \frac{\mathfrak{f}}{G} \\ a_2 &= \frac{\mathfrak{f}'}{E} & \beta_2 &= \frac{g}{G}, & \text{also} \\ \alpha_u \times \mathfrak{s} &= \frac{e}{E} \mathfrak{s}_u + \frac{\mathfrak{f}}{G} \mathfrak{s}_v \\ \alpha_v \times \mathfrak{s} &= \frac{\mathfrak{f}'}{E} \mathfrak{s}_u + \frac{g}{G} \mathfrak{s}_v, \end{aligned} \quad (13)$$

daraus durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{s}_v \times \mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{s}_u \times \mathfrak{s}$

$$f = \frac{e}{E} (\mathfrak{s}_u, \mathfrak{s}_v, \mathfrak{s}) = \frac{e}{E} D, \text{ wenn } \mathfrak{s}_u \times \mathfrak{s}_v = D \mathfrak{s} \text{ ist,}$$

$$f' = -\frac{g}{G} D,$$

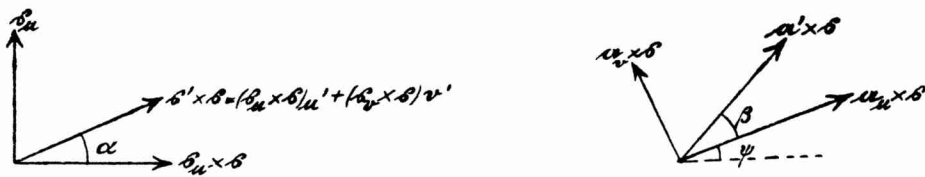
also nach (11) und (12)

$$\begin{aligned} \frac{f}{D} &= r_1 \operatorname{tg} \psi, & \frac{\mathfrak{f}}{D} &= r_1 \\ \frac{f'}{D} &= -r_2 \operatorname{tg} \psi, & \frac{\mathfrak{f}'}{D} &= -r_2, \end{aligned} \quad (14)$$

analog, wenn wir $(\alpha_u \times \mathfrak{s}) \times (\alpha_v \times \mathfrak{s}) = \mathfrak{D} \mathfrak{s}$ setzen,

$$\begin{aligned} \frac{f}{\mathfrak{D}} &= \frac{1}{e_1} \operatorname{tg} \psi & \frac{f'}{\mathfrak{D}} &= -\frac{1}{e_2} \operatorname{tg} \psi \\ \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{D}} &= \frac{1}{e_1} & \frac{\mathfrak{f}'}{\mathfrak{D}} &= -\frac{1}{e_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Wir führen jetzt noch zwei Hilfswinkel ein: den Winkel α , den eine beliebige Richtung $\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{s}_u \times \mathfrak{s}$ bildet, und den Winkel β , den die zugehörige Richtung ($\alpha' \times \mathfrak{s}$) mit $\alpha_u \times \mathfrak{s}$ bildet (s. Fig. 3).



Figur 3. Bedeutung der Winkel α und β .

Aus Figur 3 folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{(\mathfrak{s}', \mathfrak{s}_u, \mathfrak{s})}{\mathfrak{s}' \cdot \mathfrak{s}_u} = \frac{(\mathfrak{s}_u, \mathfrak{s}_v, \mathfrak{s}) v'}{\mathfrak{s}_u^2 u'} = \frac{D v'}{E u'} = \frac{\sqrt{G} v'}{\sqrt{E} u'}, & \text{ähnlich} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\mathfrak{D} v'}{\mathfrak{E} u'} = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}} v'}{\sqrt{\mathfrak{E}} u'}. \end{aligned} \quad (16)$$

Aus (16) und (12) folgt:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{e_2}{e_1}. \quad (17)$$

Aus (16) findet man:

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= \lambda \sqrt{G} v' & \sin \beta &= \mu \sqrt{\mathfrak{G}} v' \\
 \cos \alpha &= \lambda \sqrt{E} u' & \cos \beta &= \mu \sqrt{\mathfrak{E}} u', & \text{also} \\
 \lambda^2 u'^2 &= \frac{\cos^2 \alpha}{E} & \mu^2 u'^2 &= \frac{\cos^2 \beta}{\mathfrak{E}} \\
 (18) \quad \lambda^2 u' v' &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha}{D} & \mu^2 u' v' &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta}{\mathfrak{D}} \\
 \lambda^2 v'^2 &= \frac{\sin^2 \alpha}{G} & \mu^2 v'^2 &= \frac{\sin^2 \beta}{\mathfrak{G}}.
 \end{aligned}$$

Unter Benutzung von (18), (15), (14) und (12) folgt nun aus (A):

$$\begin{aligned}
 (19) \quad r &= r_1 \cos^2 \alpha + r_2 \sin^2 \alpha + \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \sin 2\alpha \operatorname{tg} \psi \\
 v &= (r_1 \cos^2 \alpha + r_2 \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \psi - \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \sin 2\alpha \\
 \frac{1}{\varrho} &= \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \sin 2\beta \operatorname{tg} \psi \\
 \frac{1}{\tau} &= \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_2} \right) \operatorname{tg} \psi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \sin 2\beta.
 \end{aligned}$$

Diese Formeln wollen wir noch etwas diskutieren. Wir drücken alles durch r_1, r_2 und ψ bzw. $\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}$ und ψ aus. Eine kleine Rechnung gibt:

$$\begin{aligned}
 (B) \quad \frac{r}{v} &= \text{s. (19)} \\
 \frac{1}{\varrho} &= \frac{r \cos^2 \psi}{r_1^2 \cos^2 \alpha + r_2^2 \sin^2 \alpha} \\
 \frac{1}{\tau} &= \frac{v \cos^2 \psi}{r_1^2 \cos^2 \alpha + r_2^2 \sin^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

Der zu α gehörige Drehungswinkel ergibt sich zu:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{r}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{r^2 \cos^2 \psi}{r_1^2 \cos^2 \alpha + r_2^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{\cos^2 \psi}{\varrho}}{\frac{\cos^2 \beta}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\varrho_2^2}},$$

analog

$$\begin{aligned}
 (B') \quad r &= \frac{\frac{\cos^2 \psi}{\varrho}}{\frac{\cos^2 \beta}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\varrho_2^2}} \\
 v &= \frac{\frac{\cos^2 \psi}{\tau}}{\frac{\cos^2 \beta}{\varrho_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\varrho_2^2}} \\
 \left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \\ \frac{1}{\tau} \end{aligned} \right\} &\text{ s. o.}
 \end{aligned}$$

Wir wollen (19) noch etwas umformen, indem wir die Größen

$$\begin{aligned}
 2m &= r_2 + r_1, & 2\mathfrak{m} &= \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, & \left(\mathfrak{m} &= \frac{m \cos^2 \psi}{r_1 r_2}, \quad m = \varrho_1 \varrho_2 \mathfrak{m} \cos^2 \psi \right) \\
 2d &= r_2 - r_1, & 2\mathfrak{d} &= \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}, & \left(\mathfrak{d} &= \frac{d \cos^2 \psi}{r_1 r_2}, \quad d = \varrho_1 \varrho_2 \mathfrak{d} \cos^2 \psi \right)
 \end{aligned}$$

eingeführen. Dann erhalten wir:

$$(C) \quad \begin{aligned} r &= m - \frac{d}{\cos \psi} \cos (2\alpha - \psi) \\ v &= m \operatorname{tg} \psi - \frac{d}{\cos \psi} \sin (2\alpha - \psi) \\ \frac{1}{\varrho} &= m + \frac{d}{\cos \psi} \cos (2\beta + \psi) \\ \frac{1}{\tau} &= m \operatorname{tg} \psi + \frac{d}{\cos \psi} \sin (2\beta + \psi). \end{aligned}$$

Extremwerte von r .

Betrachten wir zuerst r . Welches ist sein Maximum und Minimum?

Wir finden durch Differenzieren von (C):

$$\sin (2\alpha - \psi) = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{\psi}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Die zu den Extremwerten gehörigen Richtungen β stehen also aufeinander senkrecht. Die charakteristischen Größen für die Extremwerte sind nach (B) bzw. (C):

$$\begin{aligned} r_1^* &= r_1 + r_2 = m - \frac{d}{\cos \psi} & m^* &= \frac{r_1^* + r_2^*}{2} = m \\ r_2^* &= r_1 + r_2 = m + \frac{d}{\cos \psi} & d^* &= \frac{r_2^* - r_1^*}{2} = \frac{d}{\cos \psi} \\ v_1^* &= v_2^* = m \operatorname{tg} \psi, \end{aligned}$$

die Drehungswinkel φ_1^* bzw. φ_2^* :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1^* &= \frac{m \sin \psi}{m \cos \psi - d} & \operatorname{tg} \varphi_2^* &= \frac{m \sin \psi}{m \cos \psi + d} \\ \cos^2 \varphi_1^* &= \frac{(m \cos \psi - d)^2}{m^2 + d^2 + 2md \cos \psi} = \frac{r_1^{*2} \cos^2 \psi}{r_1 \cos^2 \psi + r_2 \sin^2 \psi} \\ \cos^2 \varphi_2^* &= \frac{r_2^{*2} \cos^2 \psi}{r_1 \cos^2 \psi + r_2 \sin^2 \psi} = \frac{(m \cos \psi + d)^2}{m^2 + d^2 + 2md \cos \psi}, & \text{also} \\ \frac{1}{\varrho_1^*} &= \frac{\cos^2 \varphi_1^*}{r_1^*} = \frac{(m \cos \psi - d) \cos \psi}{m^2 + d^2 + 2md \cos \psi}, & \frac{1}{\varrho_2^*} &= \frac{\cos^2 \varphi_2^*}{r_2^*} = \frac{(m \cos \psi + d) \cos \psi}{m^2 + d^2 + 2md \cos \psi} \\ \frac{1}{\tau_1} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_1^*}{\varrho_1^*} = \frac{m \sin \psi \cos \psi}{m^2 + d^2 + 2md \cos \psi}, & \frac{1}{\tau_2} &= \frac{m \sin \psi \cos \psi}{m^2 + d^2 + 2md \cos \psi}. \end{aligned} \quad (20)$$

r und v drücken sich durch diese Werte folgendermaßen aus: Wir führen statt α den Winkel $\alpha^* = \alpha - \frac{\varphi}{2}$ ein und finden aus (C):

$$(21) \quad \begin{aligned} r_1 &= r_1^* \cos^2 \alpha^* + r_2^* \sin^2 \alpha^* = m^* - d^* \cos 2\alpha^* \\ v &= m^* \operatorname{tg} \psi - d^* \sin 2\alpha^*, \end{aligned}$$

siehe *Hamilton*; die beiden Winkel β_1^* und β_2^* erhält man aus (17):

$$(22) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_1^* &= \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \\ \operatorname{tg} \beta_2^* &= \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \left(\frac{\psi + \pi}{2} \right) = -\frac{r_2}{r_1} \cot \frac{\psi}{2} \end{aligned}$$

$$(22a) \quad \operatorname{tg}(\beta_1^* - \beta_2^*) = \frac{1}{\sin \psi} \frac{2r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Aus (22) folgt, daß $\beta_1^* - \beta_2^*$ nur dann gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, wenn $r_1 = \pm r_2$ ist, oder $\psi = 0$. Die zu Grenzradien gehörigen Regelflächen schneiden sich also im allgemeinen *nicht* senkrecht ¹⁾.

Extremwerte von $\frac{1}{\varrho}$.

Analog kann man die Extremwerte von $\frac{1}{\varrho}$ suchen. Man findet:

$$(23) \quad \begin{aligned} \beta_1^{**} &= -\frac{\psi}{2} & \beta_2^{**} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \\ \left(\frac{1}{\varrho_1}\right)^{**} &= m + \frac{b}{\cos \psi} & \left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^{**} &= m - \frac{b}{\cos \psi} \\ \left(\frac{1}{\tau_1}\right)^{**} &= m \operatorname{tg} \psi & \left(\frac{1}{\tau_2}\right)^{**} &= m \operatorname{tg} \psi, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad m^{**} = m \quad d^{**} = \frac{b}{\cos \psi},$$

analog der Drehungswinkel

$$(24) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi^{**} &= \frac{m \sin \psi}{m \cos \psi + b} = \operatorname{tg} \varphi^* \\ r_1^{**} &= \frac{(m \cos \psi + b) \cos \psi}{m^2 + b^2 + 2m b \cos \psi} & \nu_1^{**} = \nu_2^{**} &= \frac{m \sin \psi \cos \psi}{m^2 + b^2 + 2m b \cos \psi} \\ r_2^{**} &= \frac{(m \cos \psi - b) \cos \psi}{m^2 + b^2 + 2m b \cos \psi}. \end{aligned}$$

$\frac{1}{\varrho}$ kann man durch diese Werte schreiben unter Einführung von $\beta^{**} = \beta + \frac{\psi}{2}$.

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{\cos^2 \beta^{**}}{\varrho_1^{**}} + \frac{\sin^2 \beta^{**}}{\varrho_2^{**}} = m^{**} + b^{**} \cos 2\beta^{**} \\ \frac{1}{\tau} &= m \operatorname{tg} \psi + b^{**} \sin 2\beta^{**}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Außerdem wird} \quad \operatorname{tg} \alpha_1^{**} &= \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha_2^{**} &= -\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cot \frac{\psi}{2} \\ \operatorname{tg}(\alpha_1^{**} - \alpha_2^{**}) &= \frac{1}{\sin \psi} \frac{2\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2} = \frac{1}{\sin \psi} \frac{2r_1 r_2}{(r_1^2 - r_2^2)} = \operatorname{tg}(\beta_1^* - \beta_2^*). \end{aligned}$$

Zum Schluß wollen wir noch $\frac{1}{\varrho^{**}}$ durch r^* ausdrücken.

Aus (23) und (12) folgt

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1^{**}} &= \frac{\cos^2 \psi}{r_1 r_2} r_1^* \\ \frac{1}{\varrho_2^{**}} &= \frac{\cos^2 \psi}{r_1 r_2} r_1^*. \end{aligned}$$

¹⁾ Ich möchte an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, daß ψ von dem betrachteten Punkt abhängt, also keine Invariante des Strahls ist. Eine solche Invariante hat man in $d^* = \frac{d}{\cos \psi}$. Darüber in einer weiteren Arbeit.

Brennpunkte.

Nun ist noch von Interesse, für welche Werte von a bzw. β ν bzw. $\frac{1}{\tau}$ verschwindet. Die zu diesen Werten gehörigen kaustischen Punkte nennt man die Brennpunkte; für sie ist $r_F = \varrho_F$, $\varphi_F = 0$.

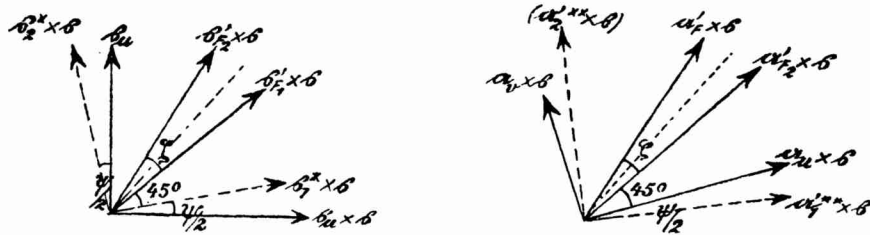
Wir finden aus (C), da für diese Punkte gleichzeitig „ ν “ und $\frac{1}{\tau}$ verschwinden:

$$(27) \quad \begin{aligned} \sin(2\alpha - \psi) &= \frac{m \sin \psi}{d} \\ \sin(2\beta + \psi) &= \frac{m \sin \psi}{d} = \frac{m \sin \psi}{d} \\ 2\alpha - \psi &= 2\beta + \psi; \end{aligned}$$

es folgt daraus $\alpha = \beta + \psi$, d. h. $\alpha' \times \bar{s}$ und $\bar{s}' \times \bar{s}$ haben dieselbe Richtung (s. Fig. 4).

$$(28) \quad \begin{aligned} \text{Sei} \quad 2\alpha_1 - \psi &= \kappa & 2\beta_1 + \psi &= \mu, \\ \text{dann ist} \quad 2\alpha_2 - \psi &= \pi - \kappa & 2\beta_2 + \psi &= \pi - \mu, \\ \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} &= \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2} & \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}. \end{aligned} \quad \text{also}$$

Das bedeutet, daß die zugehörigen Flächennormalen etwa so liegen, wenn sie reell sind (d. h. $\left| \frac{m \sin \psi}{d} \right| \leq 1$) (s. Fig. 4):



Figur 4. Lage der Vektoren $\bar{s}' \times \bar{s}$, $\bar{s}'' \times \bar{s}$ bzw. $\alpha' \times \bar{s}$, $\alpha'' \times \bar{s}$.

Aus (27) folgt leicht:

$$(28a) \quad \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \cos \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{m \sin \psi}{d};$$

für r folgt dann:

$$\begin{aligned} r_{F_1} &= m - \frac{d}{\cos \psi} \cos(2\alpha_1 - \psi) = m - \frac{d}{\cos \psi} \sqrt{1 - \frac{m^2 \sin^2 \psi}{d^2}} = m - \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2 \psi} - m^2 \tan^2 \psi} \\ r_{F_2} &= m + \frac{d}{\cos \psi} \cos(2\alpha_1 - \psi) = m + \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2 \psi} - m^2 \tan^2 \psi} \\ \frac{r_{F_1} + r_{F_2}}{2} &= m, \end{aligned}$$

das heißt, die beiden Brennpunkte haben, wenn reell, denselben Mittelpunkt wie die Grenzpunkte, analog $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_{1F}} + \frac{1}{\varrho_{2F}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) = \frac{1}{2} m$.

Normalsysteme. Von besonderem Interesse ist der Fall $\psi = 0$. Ein solches System nennen wir ein Normalsystem. Man beweist leicht, daß dann Flächen existieren, die alle Strahlen senkrecht schneiden. Gehen wir für diesen Fall noch einmal unsere Betrachtungen durch. In diesem Fall folgt aus (11) und $\psi = 0$.

$$(20) \quad c = g = f = f' = 0,$$

also

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_2} = 0$$

$$r_1 = \varrho_1, \quad r_2 = \varrho_2.$$

(17) bleibt bestehen:

$$(31) \quad \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Aus (19) wird

$$(32) \quad \begin{aligned} r &= r_1 \cos^2 \alpha + r_2 \sin^2 \alpha \\ \nu &= \frac{r_1 - r_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \beta}{r_1} + \frac{\sin^2 \beta}{r_2}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{r_2 - r_1}{2r_1 r_2} \sin 2\beta,$$

aus (B) wird

$$(33) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{r_1 \cos^2 \alpha + r_2 \sin^2 \alpha}{r_1^2 \cos^2 \alpha + r_2^2 \sin^2 \alpha} \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{(r_1 - r_2) \sin \alpha \cos \alpha}{r_1^2 \cos^2 \alpha + r_2^2 \sin^2 \alpha}, \end{aligned}$$

bzw. aus (B')

$$(33') \quad \begin{aligned} r &= \frac{\frac{1}{\varrho}}{\frac{\cos^2 \beta}{r_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{r_2^2}} = r_1 r_2 \frac{r_2 \cos^2 \beta + r_1 \sin^2 \beta}{r_2^2 \cos^2 \beta + r_1^2 \sin^2 \beta} \\ \nu &= \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{\cos^2 \beta}{r_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{r_2^2}} = r_1 r_2 \frac{(r_2 - r_1) \sin \beta \cos \beta}{r_1^2 \cos^2 \beta + r_2^2 \sin^2 \beta} \end{aligned}$$

aus (21) und (25) wird

$$(34) \quad \begin{aligned} r &= m - d \cos 2\alpha \\ \nu &= -d \sin 2\alpha \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{d \sin 2\alpha}{m - d \cos 2\alpha} = \frac{b \sin 2\beta}{m + b \cos 2\beta} \\ \frac{1}{\varrho} &= m + b \cos 2\beta \\ \frac{1}{\tau} &= b \sin 2\beta \quad m = \frac{m}{r_1 r_2} \quad b = \frac{d}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

Die Grenzpunkte fallen mit den Brennpunkten zusammen.

$$(35) \quad \begin{aligned} r_1 &= r_1^* = \varrho_1^{**} = r_{F_1} = \varrho_{F_1} = \varrho_1 \\ r_2 &= r_2^* = \varrho_2^{**} = r_{F_2} = \varrho_{F_2} = \varrho_2. \end{aligned}$$

Die ausgearteten Strahlenkongruenzen.

Wir betrachten jetzt den bisher noch recht unvollständig untersuchten Fall einer ausgearteten Strahlenkongruenz, d. h. einer Kongruenz, in der $\mathfrak{s}'^2$ bzw. $(\alpha' \times \mathfrak{s})^2$ einen Rang kleiner als Zwei haben.

1.) Die halbzyklindrischen Systeme: $(\alpha' \times \mathfrak{s})^2$ habe den Rang Zwei; $\mathfrak{s}'^2$ habe den Rang Eins. Dann sind alle $\mathfrak{s}'$ parallel. Die auch hier mögliche reelle Transformation habe gebracht $E \neq 0$, $G = 0$, $\mathfrak{E} \neq 0$, $\mathfrak{G} \neq 0$. Dann verliert $\mathfrak{X} \alpha$ seine Bedeutung. Aus $G = \mathfrak{s}_v^2 = 0$ folgt $\mathfrak{s}_v = 0$, also

$$(36) \quad G = f' = f'' = g = \mathfrak{g} = 0,$$

daraus folgt nach (12)

$$\begin{aligned}
 (37) \quad r_1 &= -\frac{e}{E} & \frac{1}{\varrho_2} &= 0 \quad r_2 = \infty \\
 v_1 &= r_1 \operatorname{tg} \psi & \frac{1}{\tau_2} &= v_2 = 0 \\
 \frac{1}{\varrho_1} &= \frac{\cos^2 \psi}{r_1} \\
 \frac{1}{\tau_1} &= \frac{\sin 2\psi}{2r_1}
 \end{aligned}$$

Setzen wir die Größen (37) in (B') ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (38) \quad \frac{1}{\varrho} &= \frac{\cos^2 \beta}{\varrho_1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho_1} \operatorname{tg} \psi \sin 2\beta = \frac{1}{\varrho_1} \frac{\cos \beta \cos(\beta + \psi)}{\cos \psi} \\
 \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\varrho_1} \frac{\cos \beta}{\cos \psi} \sin(\beta + \psi) \\
 r &= \varrho_1 \frac{\cos \psi}{\cos \beta} \cos(\beta + \psi) \\
 \varphi &= \varrho_1 \frac{\cos \psi}{\cos \beta} \sin(\beta + \psi)
 \end{aligned}$$

$$\varphi = (\beta + \psi).$$

Interessant sind diese Ausdrücke für halbzylindrische Normalensysteme

$$\begin{aligned}
 (39) \quad r &= \varrho_1 \\
 v &= \varrho_1 \operatorname{tg} \beta \\
 \frac{1}{\varrho} &= \frac{\cos^2 \beta}{G_1} & \varphi &= \beta. \\
 \frac{1}{\tau} &= \frac{\cos \beta \sin \beta}{\varrho_1}
 \end{aligned}$$

2.) Das zylindrische System $\mathfrak{s}'^2$ hat den Rang Null. Alle benachbarten Strahlen sind parallel: $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\tau} = v = \frac{1}{r} = \psi = \varphi = 0$.

3.) $(\alpha' \times \mathfrak{s})^2$ hat den Rang Eins, $\mathfrak{s}'^2$ hat den Rang Zwei. Man kommt zu analogen Formeln wie oben, wenn man statt ϱ_1 und β r_1 und α einführt.

Durch die symmetrische Betrachtung kann man also auch leicht alle Ausnahmefälle mit erledigen.

III. Dreifach unendliche Strahlensysteme (Komplexe.)

Gegeben eine dreifach unendliche Strahlenmannigfaltigkeit $\alpha(u, v, w) + \lambda \mathfrak{s}(u, v, w)$. Wir betrachten wieder die Formen:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad \mathfrak{s}'^2 &= (\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2 = E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 + 2H u' w' + 2K v' w' + L w'^2 \\
 \text{II.} \quad (\alpha' \times \mathfrak{s})^2 &= \mathfrak{E} u'^2 + 2\mathfrak{F} u' v' + \mathfrak{G} v'^2 + 2\mathfrak{H} u' w' + 2\mathfrak{K} v' w' + \mathfrak{L} w'^2 \\
 \text{III.} \quad (\alpha' \times \mathfrak{s})(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}) &= e u'^2 + (f + f') u' v' + g v'^2 + (h + h') u' w' + (k + k') v' w' + l w'^2 \\
 \text{IV.} \quad (\alpha' \times \mathfrak{s})\mathfrak{s}' &= e u'^2 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{f}') u' v' + g v'^2 + (\mathfrak{h} + \mathfrak{h}') u' w' + (\mathfrak{k} + \mathfrak{k}') v' w' + \mathfrak{l} w'^2.
 \end{aligned}$$

Wir können auch hier I und II auf die Normalform reell transformieren. Dann müssen die je drei Vektoren $\mathfrak{s}_u \times \mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_v \times \mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_w \times \mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{s}_u$, $\mathfrak{s}_v$, $\mathfrak{s}_w$, $\alpha_u \times \mathfrak{s}$, $\alpha_v \times \mathfrak{s}$, $\alpha_w \times \mathfrak{s}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen. Da sie in einer Ebene liegen, muß je einer verschwinden. Man kann im allgemeinen erreichen, daß $\mathfrak{s}_w^2 = (\alpha_w \times \mathfrak{s})^2 = 0$ ist.

Dann hat man:

$$(40) \quad F = H = K = \mathfrak{F} = \mathfrak{H} = \mathfrak{K} = 0$$

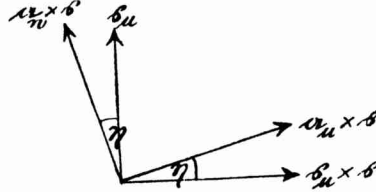
$$(41) \quad L = \mathfrak{L} = 0$$

$$(42) \quad f' = \mathfrak{f}' = g = \mathfrak{g} = h = \mathfrak{h} = k = \mathfrak{k} = l = \mathfrak{l} = 0.$$

Wir haben also:

$$(43) \quad \begin{aligned} \mathfrak{s}'^2 &= E u'^2 + G v'^2 \\ (\alpha' \times \mathfrak{s})^2 &= \mathfrak{E} u'^2 + \mathfrak{L} v'^2 \\ (\alpha' \times \mathfrak{s})(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}) &= e u'^2 + f u' v' + h' u' w' + k' v' w' \\ (\alpha' \times \mathfrak{s}) \mathfrak{s}' &= e u'^2 + \mathfrak{f} u' v' + \mathfrak{h}' u' w' + \mathfrak{k}' v' w'. \end{aligned}$$

Wir können nun wieder einen Winkel η einführen durch folgende Figur:



Figur 5. Bedeutung des Winkels η .

Wir finden:

$$(44) \quad \operatorname{tg} \eta = -\frac{e}{e} = -\frac{\mathfrak{f}'}{k'} = \frac{h'}{\mathfrak{h}'} = \frac{\mathfrak{f}}{f},$$

Betrachten wir den Winkel, den $\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{s}_u \times \mathfrak{s}$ bildet und nennen ihn α , so finden wir:

$$(45) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{G} v'}{\sqrt{E} u'} = \frac{G v'}{D u'}, \quad \text{wenn } D = \sqrt{EG} = (\mathfrak{s}_u, \mathfrak{s}_v, \mathfrak{s}) \text{ ist.}$$

Betrachten wir den Winkel, den $\alpha' \times \mathfrak{s}$ mit $\alpha_u \times \mathfrak{s}$ bildet und nennen ihn β , so haben wir:

$$(46) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{\mathfrak{L}} w'}{\sqrt{\mathfrak{E}} u'} = \frac{\mathfrak{L} w'}{\mathfrak{D} u'}, \quad \text{wenn } \mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{L}} = (\alpha_u \times \mathfrak{s}, \alpha_w \times \mathfrak{s}, \mathfrak{s}) \text{ ist.}$$

Also

$$(47) \quad \begin{aligned} v' &= \frac{D}{G} \operatorname{tg} \alpha u' \\ w' &= \frac{\mathfrak{D}}{L} \operatorname{tg} \beta u'. \end{aligned}$$

Es ist

$$(48) \quad \begin{aligned} \alpha_u \times \mathfrak{s} &= \frac{e}{E} (\mathfrak{s}_u \times \mathfrak{s}) + \frac{f}{G} (\mathfrak{s}_v \times \mathfrak{s}) \\ \alpha_w \times \mathfrak{s} &= \frac{h'}{E} (\mathfrak{s}_u \times \mathfrak{s}) + \frac{k'}{G} (\mathfrak{s}_v \times \mathfrak{s}), \end{aligned}$$

daraus, wenn wir $\frac{e}{E} = -r_1$, $\frac{k'}{G} = -r_2$ setzen und (44) benutzen:

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{e}{E} &= -r_1 & \frac{e}{E} &= r_1 \operatorname{tg} \eta \\ \frac{f}{D} &= r_1 \operatorname{tg} \eta & \frac{\mathfrak{f}}{D} &= r_1 \\ \frac{h'}{D} &= -r_2 \operatorname{tg} \eta & \frac{\mathfrak{h}'}{D} &= -r_2 \\ \frac{k'}{G} &= -r_2 & \frac{\mathfrak{k}'}{G} &= r_2 \operatorname{tg} \eta. \end{aligned}$$

Aus (48) folgt auch:

$$(50) \quad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}}{E} &= \frac{r_1^2}{\cos^2 \eta} & \frac{\mathfrak{L}}{G} &= \frac{r_2^2}{\cos^2 \eta} & \frac{\mathfrak{D}}{D} &= \frac{r_1 r_2}{\cos^2 \eta} \\ \frac{E}{\mathfrak{E}} &= \frac{\cos^2 \eta}{r_1^2} & \frac{G}{\mathfrak{L}} &= \frac{\cos^2 \eta}{r_2^2} & \frac{D}{\mathfrak{D}} &= \frac{\cos^2 \eta}{r_1 r_2}, \end{aligned}$$

$$(51) \quad \begin{array}{ll} \text{daher} & \frac{e}{\mathfrak{E}} = -\frac{\cos^2 \eta}{r_1} \quad \frac{e}{\mathfrak{E}} = \frac{\sin \eta \cos \eta}{r_1} \\ & \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} = \frac{\sin \eta \cos \eta}{r_2} \quad \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} = \frac{\cos^2 \eta}{r_2} \\ & \frac{h'}{\mathfrak{D}} = -\frac{\sin \eta \cos \eta}{r_1} \quad \frac{h'}{\mathfrak{D}} = -\frac{\cos^2 \eta}{r_1} \\ & \frac{k'}{\mathfrak{G}} = -\frac{\cos^2 \eta}{r_2} \quad \frac{k'}{\mathfrak{G}} = \frac{\sin \eta \cos \eta}{r_2} \end{array}$$

Aus Formel (47) und (50) folgt nun

$$(52) \quad \begin{aligned} u'^2 &= u'^2 \\ u'v' &= \frac{D}{G} \operatorname{tg} \alpha u'^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{G}} \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg} \alpha u'^2 \\ u'w' &= \frac{D}{G} \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \beta u'^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{G}} \operatorname{tg} \beta u'^2 \\ v'w' &= \frac{E}{G} \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta u'^2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}} \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta u'^2 \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad v'^2 = \frac{E}{G} \operatorname{tg}^2 \alpha u'^2 \quad w'^2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}} \operatorname{tg}^2 \beta u'^2.$$

Setzen wir (49), (51) und (52) in die Formeln für $r, v, \frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\tau}$ ein, so ergibt eine leichte Umformung die Schlußformeln

$$(53) \quad \begin{aligned} r &= r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \eta} \cos (\alpha - \beta + \eta) \\ v &= r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \eta} \sin (\alpha - \beta + \eta) \\ \frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{r_1} \frac{\cos \beta \cos \eta}{\cos \alpha} \cos (\alpha - \beta + \eta) \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{r_1} \frac{\cos \beta \cos \eta}{\cos \alpha} \sin (\alpha - \beta + \eta) \end{aligned}$$

und als Drehungswinkel

$$(54) \quad \varphi = \alpha - \beta + \eta.$$

Die Diskussion dieser überraschend einfachen Formeln soll im zweiten Teil dieser Arbeit gegeben werden.

Wetzlar, 18. August 1926.

Literatur.

- Blaschke, W.*: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. J. Springer, Berlin 1921.
Chasles, M.: Sur les surfaces engendrées par une ligne droite etc. Correspondances math. et phys. éd. Quetelet (3) III, Tome XI, 1839.
Hamilton, W. R.: Theorie of systems of rays. Trans. R. Irish Akad. 15 (1828), S. 69—174.
Hensel: Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel. Crelles Journal 102 (1888).
Kummer, E. E.: Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme. Crelles Journal 57 (1860), S. 189—230.
Mannheim, A.: Mémoire sur les pinces de droites et les normales etc. Journal de Math. pures et appliquées 2 (1872) XVII, S. 109—166.
Sturm, Ch.: Mémoire sur l'optique. Journal de Liouville 3 (1838), S. 357—384.
Zindler, K.: (1) Liniengeometrie mit Anwendungen II. Leipzig 1906, Sammlung Schubert LI.
Zindler, K.: (2) Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie, Jahresbericht der Dtsch. Math.-Ver. 1906, S. 185—213.