Werk

Titel: Flächen isotroper Drehungen und Schraubungen.

Autor: Wellstein, Julius

Jahr: 1927

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0156|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Flächen isotroper Drehungen und Schraubungen[1]).

Von *Julius Wellstein* in Karlsruhe.

Literatur.

1. *Beck, H.* Die Gruppe der Minimalgeraden. Leipz. Ber. (Math.-Phys. Kl.) Bd. 64 (1912) S. 35—56.
2. *Lie, S.* Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche Schar von projektiven Transformationen gestatten. Leipz. Ber. (Math.-Phys. Kl.) Bd. 47 (1891) S. 209—260.
3. *Study, E.* Über einige imaginäre Minimalflächen. Leipz. Ber. (Math.-Phys. Kl.) Bd. 63 (1911) S. 14—26.
4. *Study, E.* Minimalkurven und Serretsche Flächen. Amer. Journ. of Math. Bd. 32 (1910) S. 264—278.
5. *Wellstein, J.* Isotrope Drehungen und Schraubungen. Festschrift anläßlich des 100jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Karlsruhe (1925) S. 142—150.

Die vorliegende Untersuchung schließt sich formal wie inhaltlich unmittelbar an des Verfassers Arbeit (Literatur Nr. 5) an, deren wesentliche Ergebnisse hier, der Raumersparnis halber, als bekannt vorausgesetzt werden sollen.

Eine eingliedrige Gruppe isotroper Drehungen $\{D_i\}$ oder isotroper Schraubungen $\{S_i\}$ erzeugt aus einer analytischen Kurve (Kurvenstück), die nicht Bahnkurve der Gruppe ist, eine *Drehfläche* $[D_i]$ oder *Schraubenfläche* $[S_i]$. *Diese Flächen treten im komplexen Gebiet den gewöhnlichen Dreh- und Schraubenflächen völlig gleichberechtigt zur Seite* und teilen mit ihnen zahlreiche wichtige Eigenschaften. Die Existenz dieser Flächen ist bisher vielfach übersehen worden, eine *systematische* Behandlung findet sich in der Literatur nirgends.

Im folgenden soll nun kurz der zur differentialgeometrischen Untersuchung dieser Flächen nötige Formelapparat aufgestellt werden; namentlich aufgeführt werden bei beiden Flächengattungen die geradlinigen, die Flächen fester Krümmung sowie die Minimalflächen, ausführlicher besprochen die Minimalschraubenfläche 6. Ordnung und Klasse.

Die Frage nach gemeinsamen Kennzeichen der hier behandelten und der gewöhnlichen Dreh- und Schraubenflächen sowie das Problem der Isometrie dieser Flächen sei einer besonderen Untersuchung vorbehalten.

[1]) Im Auszug vorgetragen auf der Versammlung der Deutschen Math.-Vereinigung in Marburg, 1923.

§ 1. Die Drehflächen $[D_i]$.

1. *Darstellung in kanonischen Koordinaten.* Führt man an Stelle der gewöhnlichen Euklidischen Koordinaten die *kanonischen Koordinaten der Drehungsgruppe* $\{D_i\}$ ein:

$$(1) \qquad \varrho = \frac{(X/X)}{2(X/\mathfrak{c})}, \quad \sigma = \frac{(X/\mathfrak{b})}{(X/\mathfrak{c})}, \quad \tau = (X/\mathfrak{c}), \qquad \text{oder aufgelöst:}$$

$$(X/\mathfrak{c}) = \tau, \quad (X/\mathfrak{b}) = \sigma\tau, \quad (X/\mathfrak{a}) = -\varrho - \tfrac{1}{2}\sigma^2\tau,$$

so sendet die Gruppe durch den Punkt [1]) $Q(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ die Bahnkurve:

$$(2) \qquad \boxed{\varrho = \varrho_0, \quad \sigma(=p) = \sigma_0 + t, \quad \tau = \tau_0,}$$

einen parabolischen Kreis, dessen Gleichung in gewöhnlichen Koordinaten die Formel:

$$(3) \qquad \boxed{(X/w) = \varrho(\mathfrak{c}/w) - \tau\{-\tfrac{1}{2}p^2\mathfrak{c} + p\mathfrak{b} + \mathfrak{a}/w\}}$$

darstellt. Von dieser Darstellung sind nur die Punkte der Normalebene $[\nu_0]$ $(\tau = 0)$ ausgeschlossen, deren Bahnkurven isotrope, zur Drehachse (g) parallele Geraden sind.

Ist nun Q *irgend ein Punkt einer nicht in* $[\nu_0]$ *gelegenen analytischen Kurve* (Q), $Q_h = Q_h(q)$, $h = 1, 2, 3$, *so sind*:

$$(4) \qquad \varrho = \varrho_0 = \frac{(Q/Q)}{2(Q/\mathfrak{c})}, \quad \tau = \tau_0 = (Q/\mathfrak{c}) \not\equiv 0$$

analytische Funktionen von q; sieht man ein für allemal von dem Fall ab, daß gleichzeitig ϱ und τ konstant sind, also die Kurve (Q) selbst Bahnkurve der Gruppe ist, so *stellt die Gleichung* (2) (oder (3)) *die von* (Q) *erzeugte Drehfläche* $[D_i]$ *dar.*

Die *Profilebenen* $p = \text{const.}$ schneiden die Fläche $[D_i]$ in Kurven, welche zueinander und der *Profilkurve* (P):

$$(5) \qquad (P/w) = \varrho(\mathfrak{c}/w) - \tau(\mathfrak{a}/w)$$

kongruent sind, und es kann die Fläche auch durch Drehung dieser Kurve erhalten werden [2]). *Es dürfen somit* $\varrho = \varrho(q)$, $\tau = \tau(q) \not\equiv 0$ *als beliebige* (nicht gleichzeitig konstante) *analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich angenommen werden*, und *die Gleichung* (2) (oder (3)) *stellt in Parametern* p, q *alle Drehflächen* (die Ebene $[\nu_0]$ ausgeschlossen) *dar* [3]).

Die algebraischen Drehflächen sind durch eine algebraische Abhängigkeit zwischen ϱ *und* τ *charakterisiert.*

2. *Die Fundamentalformen.* Zu der Parameterdarstellung (3) gehört die erste Fundamentalform (der Akzent deute die Ableitung nach q an):

---

[1]) Unter „Punkt", „Gerade", „Ebene" ohne Zusatz seien nur eigentliche Elemente verstanden.

[2]) Mit Ausnahme der isotropen Geraden, welche die Schnittpunkte von (Q) mit $[\nu_0]$ beschreiben.

[3]) Zu derselben Darstellung gelangt, von anderem Ausgangspunkte aus, *H. Beck* [L. 1] S. 50 bis 51; die weiteren Ausführungen dieses §, bei denen sich Wiederholungen (mehr oder weniger) bekannter Dinge nicht vermeiden lassen, sind daher ganz kurz gehalten.

$$(6) \qquad (\mathrm{I}) = ds^2 = -\tau^2 dp^2 + 2\varrho'\tau' dq^2,$$

mit der Diskriminante:

$$(7) \qquad D^2 = -2\tau^2\varrho'\tau'.$$

Von der weiteren differentialgeometrischen Behandlung sind somit die isotropen Ebenen $\tau = \text{const.}$ sowie die isotropen Kegel $\varrho = \text{const.}$ auszuschließen. Die zweite Fundamentalform der Fläche ist alsdann:

$$(8) \quad (\mathrm{II}) = L dp^2 + 2M dp dq + N dq^2 = \frac{1}{D}\{-\tau^2\tau' dp^2 + \tau(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau')dq^2\}.$$

Die Parameterlinien $p = \text{const.}$ (die Profilkurven oder Meridiane) *und* $q = \text{const.}$ (die parabolischen Kreise oder Parallelkreise) *sind* somit *die Krümmungslinien der Fläche. Die Flächennormalen längs eines Parallelkreises bilden einen parabolischen Drehkegel, dessen Spitze auf* (g) *liegt; gleichzeitig ist dieser Punkt Hauptkrümmungsmittelpunkt der Fläche für alle Punkte des Parallelkreises, während der zweite Hauptkrümmungsmittelpunkt eines Flächenpunktes mit dem zu ihm gehörigen Krümmungsmittelpunkt der Profilkurve zusammenfällt.*

*Gauß*sche und mittlere Krümmung K, H der Fläche sind durch die Formeln:

$$(9) \quad K = -\frac{\varrho'\tau'' - \varrho''\tau'}{4\tau\varrho'^2\tau'}, \quad H = \frac{1}{2\varrho'\tau'\cdot D}\{\tau(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') + 2\varrho'\tau'^2\}$$

bestimmt.

3. *Geradlinige Drehflächen. Unterwirft man eine Gerade* (a), die nicht isotrope Gerade der Ebene $[v_0]$ ist, *der Drehungsgruppe* $\{D_i\}$, *so entstehen folgende Typen von geradlinigen Drehflächen*:

A. Liegt (a) in einer der Normalebenen $[v]$ $(\tau = \text{const.})$, so ist diese *Ebene* Drehfläche.

B. Liegt (a) in keiner dieser Normalebenen und:

a) schneidet die Drehachse in einem eigentlichen Punkte S, so entsteht ein *parabolischer oder isotroper Kegel* mit S als Spitze, je nachdem (a) anisotrop oder isotrop ist;

b) ist zur Achse (g) windschief, so entsteht eine *Fläche 2. Ordnung*, deren Gleichung sich, bei passender Wahl der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, auf die Form

$$(10) \qquad (X/X) + \varkappa(X/\mathfrak{c})^2 = l^2$$

bringen läßt; sie ist eine Kugel, falls $\varkappa$ verschwindet, l bedeutet den von Null verschiedenen senkrechten Abstand der Geraden (g), (a).

4. *Drehflächen fester Krümmung* K_0. Zu dem Werte $K_0 = 0$ gehören die *parabolischen Drehkegel*, deren Spitzen auf (g) liegen. Einem Werte $K_0 \neq 0$ entsprechen, außer den *Kugeln* (mit den Mittelpunkten auf (g)), die *Flächen einer* ∞^1*-fachen Schar, die zueinander und der Fläche*:

$$(11) \qquad (X/w) = \frac{1}{\sqrt{K_0}}\left(u(\mathfrak{c}/w) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} u\{-\tfrac{1}{2}v^2\mathfrak{c} + v\mathfrak{b} + \mathfrak{a}/w\}\right)$$

kongruent sind, deren Gleichung auch in der Form geschrieben werden kann:

$$2\,(X/\mathfrak{c})\sqrt{K_0} + \operatorname{tg}\left(\frac{(X/X)\sqrt{K_0}}{2(X/\mathfrak{c})}\right) = 0. \tag{12}$$

Die zu verschiedenen Werten von K_0 gehörenden Flächen sind somit zueinander ähnlich.

5. *Minimalflächen.* Als Lösung der Differentialgleichung (9) kommt das Integral $\varrho + a\tau^3 + \beta = 0$, $a \neq 0$, β Konstante, in Betracht, das sich durch passende Wahl der Koordinaten auf die Form $2\varrho - \tau^3 = 0$ bringen läßt. *Demnach sind alle Rotationsminimalflächen zueinander und der Fläche*

$$(X/X) - (X/\mathfrak{c})^4 = 0 \tag{13}$$

kongruent, die durch Drehung der Profilkurve

$$(P/w) = \tfrac{1}{2}u^3(\mathfrak{c}/w) - u(\mathfrak{a}/w)$$

entsteht [4]).

§ 2. Die Schraubenflächen $[S_i]$.

6. *Kanonische Koordinaten der Gruppe $\{S_i\}$.* Führt man an Stelle gewöhnlicher Euklidischer Koordinaten die Parameter ein:

(1) $\sigma = -(X/\mathfrak{c})$, $\tau = -(X/\mathfrak{c})^2 - 2(X/\mathfrak{b})$, $3\varrho = (X/\mathfrak{c})^3 + 3(X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - 3(X/\mathfrak{a})$,

so folgt durch Auflösung:

(2) $(X/\mathfrak{c}) = -\sigma$, $(X/\mathfrak{b}) = -\tfrac{1}{2}(\sigma^2 + \tau)$, $(X/\mathfrak{a}) = \tfrac{1}{6}\sigma^3 + \tfrac{1}{2}\sigma\tau - \varrho$;

diese Parameter seien als *kanonische Koordinaten der Schraubungsgruppe $\{S_i\}$* verwendet. *Sind $\varrho_0, \sigma_0, \tau_0$ die Koordinaten eines Punktes Q, so sendet die Gruppe durch Q eine Bahnkurve (X), deren Punkte X die Koordinaten:*

$$\boxed{\varrho = \varrho_0, \quad \sigma = \sigma_0 + p, \quad \tau = \tau_0} \tag{3}$$

haben, und (3) *ist die Darstellung der Gruppe in diesen Koordinaten.*

Zu der Gruppe $\{S_i\}$ gehören die *Profilebenen* $[\pi]$ ($\sigma = \text{const.}$), die *Schraubenzylinder* $[C]$ ($\tau = \text{const.}$) (unter denen der *Hauptzylinder* ($\tau = 0$) ausgezeichnet ist), die *Schraubenflächen* $[L]$ ($\varrho = \text{const.}$); ferner die ω^2-fache Schar der *Bahnschraubenlinien* ($\tau = \text{const.}$, $\varrho = \text{const.}$), die *lineare Kongruenz $\{\mathfrak{N}\}$ der Normalen der Schraubenzylinder* [5]) ($\varrho = \text{const.}$, $\sigma = \text{const.}$) sowie der *Parallelstrahlenbündel* $\sigma = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ Die Tangenten aller Bahnschraubenlinien der Gruppe bilden einen quadratischen Komplex; ist (t) die Tangente einer Schraubenlinie im Punkte $Q(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ und $X^*(\varrho^*, \sigma^*, \tau^*)$ ein Punkt von (t), so bestehen die Beziehungen:

$$\sigma^* = \sigma_0 + q, \quad \tau^* = \tau_0 - q^2, \quad \varrho^* = \varrho_0 - \tfrac{1}{3}q^3, \tag{4}$$

die Gleichungen der Tangente (t) (bei variablem q).

---

[4]) Diese Fläche ist von *E. Geiser* gefunden und von *E. Study* als Drehfläche erkannt und eingehend besprochen worden (vgl. [L. 3] S. 19 f.).

[5]) Mit der Gruppe $\{S_i\}$ sind ein Nullsystem sowie ein linearer Komplex verknüpft; die Kongruenz $\{\mathfrak{N}\}$ besteht aus den Komplexstrahlen, welche die Schraubungsachse (f_u), die uneigentliche Gerade der Profilebenen $\sigma = \text{const.}$, treffen; (f_u) ist doppelte Leitgerade der Kongruenz. Die Kongruenzstrahlen durch die Punkte einer Bahnschraubenlinie erfüllen eine Schraubenfläche $\varrho = \text{const.}$

7. *Darstellung der Schraubenflächen* $[S_i]$. Ist $Q(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ ein Punkt einer analytischen Kurve (Q), die etwa durch einen Parameter u analytisch dargestellt sei, so sind nach (1) ϱ_0, σ_0, τ_0 analytische Funktionen von u, und falls nicht ϱ_0 und τ_0 konstant sind, also (Q) selbst eine Bahnschraubenlinie ist, *stellen* nach (3) *die Gleichungen*

$$(5) \qquad \sigma(=v) = \sigma_0 + p, \quad \tau = \tau_0(u), \quad \varrho = \varrho_0(u)$$

die Schraubenlinien sämtlicher Punkte von (Q), also *die von der Kurve* (Q) *erzeugte Schraubenfläche* dar; es ist daher nach (2), wenn X ein Punkt dieser Fläche:

$$(6) \quad (X/\mathfrak{c}) = -v, \quad (X/\mathfrak{b}) = -\tfrac{1}{2}(v^2 + \tau(u)), \quad (X/\mathfrak{a}) = \tfrac{1}{6}v^3 + \tfrac{1}{2}v \cdot \tau(u) - \varrho(u)$$

oder:

$$(7) \quad \boxed{(X/w) = -\{\tfrac{1}{6}v^3 + \tfrac{1}{2}v\tau - \varrho\}\,(\mathfrak{c}/w) + \tfrac{1}{2}(v^2 + \tau)(\mathfrak{b}/w) + v(\mathfrak{a}/w)}$$

die Darstellung der Fläche in Parametern u, v.

Die Profilebenen $v = \text{const.}$ schneiden die Fläche in den zueinander kongruenten Profilkurven, als deren Repräsentant etwa die Kurve $(v = 0)$:

$$(8) \qquad (P/w) = \varrho(\mathfrak{c}/w) + \tfrac{1}{2}\tau(\mathfrak{b}/w)$$

dienen kann, und die Fläche entsteht auch durch Verschraubung einer dieser Kurven. *Daher können in* (7) $\varrho(u)$ *und* $\tau(u)$ *als beliebige*, nicht gleichzeitig konstante *analytische Funktionen* mit gemeinsamem Existenzbereich *angenommen werden*, und nach (1) ist:

$$(9) \quad \tau = -(X/\mathfrak{c})^2 - 2(X/\mathfrak{b}), \quad 3\varrho = (X/\mathfrak{c})^3 + 3(X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - 3(X/\mathfrak{a}).$$

Insbesondere besteht bei algebraischen Schraubenflächen zwischen ϱ *und* τ *eine algebraische Abhängigkeit.*

Die einfachsten algebraischen Schraubenflächen sind die in Nr. 6 eingeführten Schraubenzylinder $[C]$ und Schraubenflächen $[L]$.

8. *Die Fundamentalformen der Flächen* $[S_i]$. Zu der Parameterdarstellung (7) gehört die erste Fundamentalform [die Striche bedeuten die Ableitung nach u]:

$$(10) \qquad (I) = ds^2 = -\tfrac{1}{4}\tau'^2 du^2 - 2\varrho' du\,dv + \tau dv^2$$

mit der Diskriminante

$$(11) \qquad D^2 = -\tfrac{1}{4}\tau\tau'^2 - \varrho'^2.$$

Von der weiteren differentialgeometrischen Behandlung seien, wie üblich, die Flächen $D \equiv 0$ ausgeschlossen, also die durch die Gleichung

$$(12) \qquad \tau^3 + 9(\varrho - \varrho_0)^2 = 0$$

bestimmten Flächen; es sind dies nach (4) die *Tangentenflächen der (isotropen) Schraubenlinien des Hauptzylinders*, also der Kurven $\varrho = \varrho_0$, $\tau = 0$.

Die zweite Fundamentalform ist alsdann:

$$(13) \qquad (II) = L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2$$
$$= \frac{1}{D}\{\tfrac{1}{2}(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau')du^2 + \tfrac{1}{2}\tau'^2 du\,dv + \varrho' dv^2\}.$$

Ferner sind

$$(14) \quad H = \frac{1}{4D^3}\{2\tau(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') + \varrho'\tau'^2\}, \quad K = \frac{1}{16D^4}\{8\varrho'(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') - \tau'^4\}$$

die mittlere und *Gaußsche* Krümmung der Fläche $[S_i]$.

§ 3. Die geradlinigen Schraubenflächen.

9. *Die geschlossenen Regelschraubenflächen. Durch Verschraubung einer Geraden* (a) *entsteht eine Regelschraubenfläche*; von den Schraubenzylindern $[C]$, die durch eine Gerade des Parallelstrahlenbündels $\sigma = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ erzeugt werden, sei im folgenden nicht mehr die Rede. *Je nachdem nun die Gerade* (a) *in einer der Profilebenen* $\sigma = \text{const.}$ *liegt oder nicht, entstehen die geschlossenen bzw. die offenen Regelschraubenflächen.*

Liegt die Gerade (a) in einer der Profilebenen, so trifft sie den Hauptzylinder $\tau = 0$ in einem Punkte O, in den das Tetraeder $O(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ der kanonischen Koordinaten (vgl. Nr. 6) verlegt sei. Gibt der Vektor a die Richtung der Geraden (a) an, so ist alsdann:

$$(a/\mathfrak{c}) = 0, \quad (a/\mathfrak{b}) \neq 0, \tag{1}$$

so daß, bei variablem u,

$$(Q/w) = u(a/w) \tag{2}$$

der Ortsvektor eines beliebigen Punktes Q von (a) ist. Der Punkt Q hat, nach Nr. 6 (1), die kanonischen Koordinaten:

$$\sigma_0 = 0, \quad \tau_0 = -2u(a/\mathfrak{b}), \quad \varrho_0 = -u(a/\mathfrak{a}), \tag{3}$$

und nach Nr. 7 (5) *stellen die Gleichungen*:

$$\sigma = v, \quad \tau = -2u(a/\mathfrak{b}), \quad \varrho = -u(a/\mathfrak{a}) \tag{4}$$

die von der Geraden (a) *erzeugte Regelschraubenfläche in Parametern* u, v *dar*; durch Elimination folgt die Flächengleichung:

$$\tau(a/\mathfrak{a}) - 2\varrho(a/\mathfrak{b}) = 0. \tag{5}$$

Ist nun $(a/\mathfrak{a}) = 0$, also (a) zum Vektor $\mathfrak{b}$ parallel, so *ist die Gerade* (a) *der durch* O *gehende Strahl der Kongruenz* $\{\mathfrak{N}\}$, und erzeugt die *gerade, geschlossene Regelschraubenfläche* $[L]$ (*Liesche Minimaldoppelfläche*):

$$\varrho = \tfrac{1}{3}(X/\mathfrak{c})^3 + (X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - (X/\mathfrak{a}) = 0. \tag{6}$$

Im Falle $(a/\mathfrak{a}) \neq 0$, wenn also (a) *der Kongruenz* $\{\mathfrak{N}\}$ *nicht angehört*, stellt (5) die *schiefe, geschlossene Regelschraubenfläche*:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\tau(a/\mathfrak{a}) + \varrho(a/\mathfrak{b}) &= \{\tfrac{1}{2}(X/\mathfrak{c})^2 + (X/\mathfrak{b})\}(a/\mathfrak{a}) \\ &+ \{\tfrac{1}{3}(X/\mathfrak{c})^3 + (X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - (X/\mathfrak{a})\}(a/\mathfrak{b}) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

dar (die keine Minimalfläche ist, wie sich in § 5 ergeben wird).

Beide Flächentypen sind von der dritten Ordnung und Klasse und gehören zu den *Cayley*schen Regelflächen, ihre Erzeugenden treffen die Schraubungsachse. Der Ort der singulären Flächenpunkte (d. h. der Punkte mit isotroper Tangentialebene) ist nach Nr. 8 (11) die Schraubenlinie $\tau = -\left[\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{b})}\right]^2$, $\varrho = -\frac{1}{2}\left[\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{b})}\right]^3$, also bei den geraden Regelflächen deren (isotrope) Hauptschraubenlinie $\varrho = \tau = 0$, bei den schiefen eine anisotrope Bahnschraubenlinie. Bestimmt man zu den ∞^1 Lagen, die (a) noch annehmen kann, diese singulären Örter, so erfüllen sie die Fläche:

$$4\varrho^2 + \tau^3 = 0\,, \tag{8}$$

eine Minimalschraubenfläche sechster Ordnung und Klasse (vgl. § 6).

10. *Die offenen Regelschraubenflächen.* Liegt die Gerade (a) in keiner der Profilebenen, so gibt es stets einen Schraubenzylinder, der (a) berührt; der Berührungspunkt Q^* heiße der *Kehlpunkt* der Geraden (a). Der durch Q^* gehende Strahl der Kongruenz $\{\mathfrak{R}\}$ trifft den Hauptzylinder in einem Punkte O, in den das Tetraeder $O(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ der kanonischen Koordinaten verlegt sei. Alsdann hat der Punkt Q^* die Koordinaten:

$$\sigma = 0, \quad \tau = \tau^*, \quad \varrho = 0, \tag{9}$$

und der Vektor a, der die Richtung der Geraden (a) angibt, läßt sich in der Form: $(a/w) = -(a/\mathfrak{a})(\mathfrak{c}/w) - (a/\mathfrak{c})(\mathfrak{a}/w)$, $(a/\mathfrak{c}) \neq 0$ schreiben, so daß, bei variablem u:

$$(Q/w) = (Q^*/w) + u\left\{\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{c})}(\mathfrak{c}/w) + (\mathfrak{a}/w)\right\} \tag{10}$$

den Ortsvektor der Punkte Q von (a) darstellt; die kanonischen Koordinaten von Q sind:

$$\sigma_0 = u, \quad \tau_0 = \tau^* - u^2, \quad \varrho_0 = \tfrac{1}{3}u(\tau^* - \bar{\tau} - u^2), \quad \text{wo} \quad -\bar{\tau} = \tfrac{1}{2}\tau^* + 3\frac{(a/\mathfrak{a})}{(a/\mathfrak{c})}. \tag{11}$$

Daher folgt denn nach Nr. 6 (3) für die Punkte $X(\varrho, \sigma, \tau)$ der durch (a) erzeugten Schraubenfläche:

$$\sigma = u + v, \quad \tau = \tau^* - u^2, \quad \varrho = \tfrac{1}{3}u(\tau^* - \bar{\tau} - u^2)\,, \tag{12}$$

und hieraus durch Elimination von u die *Gleichung der offenen Regelschraubenfläche, einer Fläche vierter Ordnung* $[R_4]$:

$$9\varrho^2 + (\tau - \tau^*)(\tau - \bar{\tau})^2 = 0. \tag{13}$$

Da nach (10) $(a/a) = -2(a/\mathfrak{a})(a/\mathfrak{c})^2$, so folgt, *daß je nach dem Verschwinden oder Nichtverschwinden von* $\bar{\tau} + \frac{1}{2}\tau^*$ *die Gerade* (a) *isotrop oder anisotrop ist. Der Schraubenzylinder* $\tau = \bar{\tau}$ *schneidet* $[R_4]$ *in der Schraubenlinie* $\varrho = 0$, $\tau = \bar{\tau}$, *der Doppelkurve der Fläche, die daher auch durch Verschraubung einer Bisekante dieser Schraubenlinie erzeugt werden kann.*

Dieses Resultat soll nun direkt abgeleitet werden. Sind $P^{(1)}\,(\varrho_1, \sigma_1, \tau_1)$ und $P^{(2)}\,(\varrho_2, \sigma_2, \tau_2)$ zwei Punkte, so stellt $(P/w) = \varkappa(P^{(1)}/w) + (1 - \varkappa)(P^{(2)}/w)$ bei veränderlichem $\varkappa$ die Punkte P der Geraden $P^{(1)}P^{(2)}$ dar, und die Koordinaten ϱ, σ, τ von P ergeben sich nach einfacher Rechnung:

$$\sigma = \varkappa\sigma_1 + (1 - \varkappa)\sigma_2, \quad \tau = \varkappa\tau_1 + (1 - \varkappa)\tau_2 + \varkappa(1 - \varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^2, \tag{14}$$
$$\varrho = \varkappa\varrho_1 + (1 - \varkappa)\varrho_2 - \tfrac{1}{6}\varkappa(1 - \varkappa)(1 - 2\varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^3 - \tfrac{1}{2}\varkappa(1 - \varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)(\tau_1 - \tau_2).$$

Hieraus folgt in unserem Falle: Sind $(\sigma_1, \bar{\varrho}, \bar{\tau})$, $(\sigma_2, \bar{\varrho}, \bar{\tau})$ zwei Punkte der Schraubenlinie $(\bar{\varrho}, \bar{\tau})$, so hat jeder Punkt Q der Bisekante die Koordinaten:

$$\sigma_0 = \varkappa\sigma_1 + (1 - \varkappa)\sigma_2, \quad \tau_0 = \bar{\tau} + \varkappa(1 - \varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^2, \tag{15}$$
$$\varrho_0 = \bar{\varrho} - \tfrac{1}{6}\varkappa(1 - \varkappa)(1 - 2\varkappa)(\sigma_1 - \sigma_2)^3,$$

insbesondere der Mittelpunkt Q^* die Koordinaten:

(16) $\sigma^* = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau^* = \overline{\tau} + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2, \quad \varrho^* = \overline{\varrho},$

woraus denn:

(17) $$\tau_0 - \tau^* = -\tfrac{1}{4}(1 - 2\varkappa)^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

folgt. Die Bahnschraubenlinien der Punkte Q sind nun durch die Gleichungen $\varrho = \varrho_0$, $\sigma = \sigma_0 + v$, $\tau = \tau_0$ gegeben, aus denen, nach (15) und (17) durch Elimination von $\varkappa$, die Gleichung der Regelfläche:

(18) $$9(\varrho - \overline{\varrho})^2 + (\tau - \tau^*)(\tau - \overline{\tau})^2 = 0$$

sich ergibt, die durch eine Koordinatentransformation in die Form (13) übergeführt werden kann. Hiermit ist das zuvor ausgesprochene Resultat bestätigt. *Die Doppelkurve der* $[R_4]$ *wird zur Rückkehrkante*, wenn $\overline{\tau} = \tau^*$ ist; dann folgt aber aus (16) $\sigma_1 = \sigma_2$, d. h. *die Bisekante wird zur Tangente der Schraubenlinie* $(\overline{\varrho}, \overline{\tau})$, und $[R_4]$ ist alsdann die *Tangentenfläche einer Bahnschraubenlinie*, deren Gleichung (nach (18)):

(19) $$9(\varrho - \overline{\varrho})^2 + (\tau - \overline{\tau})^3 = 0$$

nun aus (15) nur durch einen Grenzübergang gewonnen werden kann; dieser ist aber in den Formeln Nr. 6 (4) bereits geleistet, durch Elimination von q folgt aus ihnen genau die oben angegebene Gleichungsform (19), welche also die *Torse* einer *anisotropen* $(\overline{\tau} \neq 0)$ *oder isotropen* $(\overline{\tau} = 0)$ *Schraubenlinie darstellt.*

Bei den Regelflächen, die nicht Torsen sind, ist die Bahnschraubenlinie des Kehlpunktes P^*, die *Kehlschraubenlinie*, zugleich Striktionslinie der Fläche, falls deren Erzeugende anisotrop sind $(\overline{\tau} + \frac{1}{2}\tau^* \neq 0)$.

§ 4. Schraubenflächen fester Krümmung.

11. Zur Bestimmung der Flächen fester *Gauß*scher Krümmung K_0 dient nach Nr. 8 (14) die Differentialgleichung:

(1) $$8\varrho'(\varrho'\tau'' - \varrho''\tau') - \tau'^4 - 16\,K_0 D^4 = 0, \quad 4\,D^2 = -\tau\tau'^2 - 4\,\varrho'^2.$$

Sieht man von den Flächen $\tau =$ konst. ab, die als Zylinder zu den Flächen verschwindender Krümmung gehören, so kann man, wenigstens in einem gewissen Bereiche, τ statt u als Variable einführen, und hat alsdann die Gleichungen:

(2) $$4\,D^2 = -\tau - 4\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2, \quad 4\,K_0 + \frac{d}{d\tau}(D^{-2}) = 0.$$

Für die Flächen vom Krümmungsmaße Null ist daher $D^2 = \text{const.} = -\frac{1}{4}\tau_0 \neq 0$, und es folgt:

(3) $$9(\varrho - \varrho_0)^2 + (\tau - \tau_0)^3 = 0$$

als Gleichung der Flächen; es sind dies also, wie zu erwarten war, die Torsen der anisotropen Bahnschraubenlinien.

Im Falle $K_0 \neq 0$ folgt aus (2): $D^{-2} = -4(K_0\tau + a)$, $a =$ const., und:

(4) $$4\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2 = \frac{1 - a\tau - K_0\tau^2}{K_0\tau + a},$$

so daß im allgemeinen τ eine elliptische Funktion von ϱ sein wird. *Es gibt demnach*

transzendente Flächen festen Krümmungsmaßes, die durch elliptische Funktionen dargestellt werden können.

12. *Die Schraubenröhrenfläche.* Das elliptische Differential (4) wird rational, wenn $a^2 + 4K_0 = 0$, $(K_0 \neq 0)$ gewählt ist. Setzt man alsdann:

$$(5) \qquad a = \frac{4}{\tau^*}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\tau^*}{2}\right)^2 = -\frac{1}{K_0},$$

so folgt als Integral von (4):

$$(6) \qquad 9(\varrho - \varrho^*)^2 + (\tau - \tau^*)(\tau + \tfrac{1}{2}\tau^*)^2 = 0, \qquad \varrho^* = \text{const.}$$

Die Fläche besteht aus zwei Mänteln, den beiden Werten von τ^* entsprechend; jeder dieser Mäntel ist aber nach Nr. 3 (13) eine *offene Regelschraubenfläche* $[R_4]$ *mit isotropen Erzeugenden. Daher bilden die beiden Mäntel die Hüllfläche einer Schar von Kugeln mit dem festen Radiusquadrat* $-\frac{1}{4}\tau^{*2}$, *deren Mittelpunkte auf der Hauptschraubenlinie* $(\tau = 0)$ *liegen*, und die man als *Schraubenröhrenfläche* bezeichnen kann [6]).

Dieses Resultat läßt sich leicht direkt bestätigen. Ist $X(\varrho, \sigma, \tau)$ ein Punkt der um den Mittelpunkt $M(\varrho^*, \sigma^*, \tau = 0)$ beschriebenen Kugel:

$$(X - M/X - M) + \tfrac{1}{4}\tau^{*2} = 0 = -(X - M/\mathfrak{b})^2 - 2(X - M/\mathfrak{a})(X - M/\mathfrak{c}) + \tfrac{1}{4}\tau^{*2},$$

so folgt nach Nr. 6 (2) die Kugelgleichung in kanonischen Koordinaten:

$$(7) \qquad -\tfrac{1}{3}(\sigma^* - \sigma)^4 - 2\tau(\sigma^* - \sigma)^2 + 8(\varrho^* - \varrho)(\sigma^* - \sigma) + \tau^2 - \tau^{*2} = 0,$$

die bei veränderlichem σ^* zugleich die Kugelschar darstellt. Leitet man daher (7) nach σ^* ab: $-\frac{1}{3}(\sigma^* - \sigma)^3 - \tau(\sigma^* - \sigma) + 2(\varrho^* - \varrho) = 0$, und eliminiert aus beiden Gleichungen den Parameter $\sigma^* - \sigma$, so erhält man die Gleichung der Hüllfläche in der Form: $9(\varrho - \varrho^*)^2 + (\tau \mp \tau^*)(\tau \pm \frac{1}{2}\tau^*)^2 = 0$, die mit (6) übereinstimmt.

§ 5. Minimalschraubenflächen.

13. Zu den Minimalschraubenflächen gehören nach Nr. 8 (14) zunächst die Schraubenzylinder $\tau = \text{const.}$ sowie die *Lie*schen Schraubenflächen $\varrho = \text{const.}$ [7]). Nach Ausschluß dieser Fälle bleibt als weitere Lösung der Differentialgleichung die folgende:

$$(1) \qquad 9(\varrho - \varrho_0)^2 + (1 - a)\tau^3 = 0, \quad \varrho_0, \; a \neq 1 \text{ const.}$$

Hierbei ist der Wert $a = 0$ auszuschließen, der nach Nr. 8 (11) auf die Torsen isotroper Schraubenlinien führt (vgl. auch Nr. 10); die Gleichung der Fläche in gewöhnlichen Koordinaten lautet, wenn man noch durch eine Koordinatentransformation ϱ_0 zum Verschwinden bringt:

$$(2) \qquad \{(X/\mathfrak{c})^3 + 3(X/\mathfrak{b})(X/\mathfrak{c}) - 3(X/\mathfrak{a})\}^2 - (1 - a)\{(X/\mathfrak{c})^2 + 2(X/\mathfrak{b})\}^3 = 0.$$

Diese *Fläche* 6. *Ordnung* soll nun eingehender untersucht werden.

---

[6]) Diese Serretsche Fläche ist von *E. Study* [L. 4] S. 278 untersucht und als Schraubenfläche bezeichnet worden.

[7]) Vgl. [L. 5] S. 147.

§ 6. Die Minimalschraubenflächen 6. Ordnung und 6. Klasse.

14. *Die isotropen Kurven der Fläche.* Führt man in die Flächengleichung Nr. 13 (1), in der $\varrho_0 = 0$ angenommen werden kann, statt α die neue Konstante

$$(1) \qquad 4\varkappa(1-\varkappa) = \frac{1}{\alpha} \text{ ein, so folgt } \varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa) \neq 0,$$

und die Gleichung geht über in:

$$(2) \qquad 36\,\varkappa(1-\varkappa)\,\varrho^2 - (1-2\varkappa)^2\,\tau^3 = 0.$$

Erklärt man ϱ in der Umgebung einer Stelle $\tau_0 \neq 0$ als eindeutige Funktion von τ, so ist nach Nr. 8 (10):

$$(3) \qquad \left\{d\tau - \frac{2\varkappa}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}\,\tau^{1/2}\,dv\right\}\left\{d\tau + \frac{2(1-\varkappa)}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}\,\tau^{1/2}\,dv\right\} = 0$$

die Differentialgleichung der isotropen Flächenkurven; es gehen somit durch den Punkt $X^0(v_0, \tau_0 \neq 0)$ die beiden, voneinander verschiedenen Kurven:

$$(4) \qquad \tau^{1/2} - \tau_0^{1/2} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}(v - v_0) = 0, \quad \tau^{1/2} - \tau_0^{1/2} + \frac{1-\varkappa}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}(v - v_0) = 0.$$

Diese Kurven berühren den Hauptzylinder $\tau = 0$ je in einem Punkte:

$$P^{(1)}\left\{v_1 = v_0 - \frac{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}{\varkappa}\,\tau_0^{1/2},\ \varrho_1 = \tau_1 = 0\right\},$$

$$P^{(2)}\left\{v_2 = v_0 + \frac{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}{1-\varkappa}\,\tau_0^{1/2},\ \varrho_2 = \tau_2 = 0\right\},$$

die Punkte liegen auf der Schraubenlinie $\varrho = \tau = 0$, die als Schnittkurve von Hauptzylinder und Fläche selbst isotrope Flächenkurve ist; sie sei die *Hauptschraubenlinie* (L_H) der Fläche genannt.

Dem durch den Vektor $\varkappa P^{(1)} + (1-\varkappa)P^{(2)}$ bestimmten Punkte kommen nach Nr. 10 (14) die Koordinaten $v = v_0$, $\varrho = \varrho_0$, $\tau = \tau_0$ zu, d. h. er ist mit X^0 identisch. Sonach ergibt sich folgendes erste Resultat:

Sind $P(\sigma = p,\ \varrho = \tau = 0)$ *und* $Q(\sigma = q,\ \varrho = \tau = 0)$ *zwei voneinander verschiedene* $(p \neq q)$ *Punkte der Hauptschraubenlinie* (L_H), *so hat der Punkt* X, *der die Sehne* PQ *im Verhältnis* $\frac{\overline{QX}}{\overline{QP}} = \varkappa$ *teilt, die kanonischen Koordinaten* (vgl. Nr. 10 (14)):

$$(5) \qquad v = \varkappa p + (1-\varkappa)\,q, \qquad \tau = \varkappa(1-\varkappa)\,(p-q)^2,$$
$$\varrho = -\tfrac{1}{6}\,\varkappa(1-\varkappa)\,(1-2\varkappa)\,(p-q)^3,$$

liegt also auf der Fläche (2). *Hieraus folgt die neue Flächendarstellung*:

$$(6) \qquad (X/w) = \varkappa\{-\tfrac{1}{6}p^3\mathfrak{c} + \tfrac{1}{2}p^2\mathfrak{b} + p\mathfrak{a}/w\} + (1-\varkappa)\{-\tfrac{1}{6}q^3\mathfrak{c} + \tfrac{1}{2}q^2\mathfrak{b} + q\mathfrak{a}/w\}.$$

Da nun die Punkte P, Q voreinander nicht ausgezeichnet sind, so erhält man auch einen Flächenpunkt X', wenn man die Sehne QP im Verhältnis $\frac{\overline{PX'}}{\overline{PQ}} = \varkappa$, oder die Sehne PQ im Verhältnis $\frac{\overline{QX'}}{\overline{QP}} = 1 - \varkappa$ teilt, wie man aus (5) sofort bestätigt.

Die Fläche entsteht daher als Ort der Punkte, welche die Sehnen der Hauptschraubenlinie (L_H), wie man sagen könnte, „von beiden Seiten her", *im Verhältnis* $\varkappa$ *teilen*; sie sei daher als *Sehnenteilungsfläche* $[T_\varkappa]$ bezeichnet [8]).

Nach (6) *gehen durch den Punkt* $X(\tau \neq 0)$ *die beiden isotropen Flächenkurven* $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$, *also selbst Lyonsche Schraubenlinien*, die aber nicht gegenüber der die Fläche erzeugenden Gruppe $\{S_i\}$ invariant sind. *Diese Gleichung stellt daher zugleich eine Translationserzeugung der Fläche dar. Die Kurven* $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ *berühren den Hauptzylinder* $\tau = 0$ *in den Punkten* P, Q *der durch* X *gehenden Bisekante von* (L_H).

Durch einen Punkt Q von (L_H) geht zunächst die isotrope Flächenkurve (L_H) selbst. Nun liegen aber auf jeder Bisekante von (L_H) durch Q zwei Flächenpunkte X, X', und wegen des festen Wertes der Teilverhältnisse $\frac{\overline{QX}}{\overline{QP}} = \varkappa$, $\frac{\overline{QX'}}{\overline{QP}} = 1 - \varkappa$ sind die Örter dieser Punkte zwei zu (L_H) in bezug auf Q ähnlich gelegene Kurven, also selbst zwei isotrope Schraubenlinien. *Demnach ist* (L_H) *der Ort der singulären Flächenpunkte* $(D = 0)$; *durch jeden Punkt* Q *gehen außer* (L_H) *noch zwei isotrope Flächenkurven mit gemeinsamer Tangente in* Q.

Der Ort der Bisekanten von (L_H) durch den festen Punkt Q ist der Drehkegel (man verlege für den Augenblick den Vektorenursprung O nach Q): $(X/X) - \frac{1}{3}(X/\mathfrak{b})^2 = \frac{1}{3}\varkappa(1-\varkappa)pq(p-q)^2 = 0$, der also die Fläche $[T_\varkappa]$ in den isotropen Kurven $p = 0$, $q = 0$, $p - q = 0$ schneidet, welche sämtlich durch Q gehen. Demnach ist das zuvor ausgesprochene Resultat bestätigt; *die durch einen Punkt* Q *von* (L_H) *gehenden isotropen Flächenkurven liegen auf dem Bisekantenkegel mit* Q *als Spitze.*

Die Fläche $[T_\varkappa]$ *ist der Tangentenfläche von* (L_H) *einbeschrieben,* (L_H) *also Rückkehrkante der Fläche.*

15. *Algebraische Untersuchung der Fläche.* In homogenen Koordinaten ist nach (6):

$$(7)\quad \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 : \mathfrak{X}_4 = (X/\mathfrak{c}) : (X/\mathfrak{b}) : (X/\mathfrak{a}) : 1$$
$$= -\{\varkappa p + (1-\varkappa)q\} : -\tfrac{1}{2}\{\varkappa p^2 + (1-\varkappa)q^2\} : \tfrac{1}{6}\{\varkappa p^3 + (1-\varkappa)q^3\} : 1$$

eine Parameterdarstellung der eigentlichen Punkte der Fläche $[T_\varkappa]$, aus der, in Übereinstimmung mit (2), die Flächengleichung sich ergibt:

$$(8)\quad 4\varkappa(1-\varkappa)\{\mathfrak{X}_1^3 + 3\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 - 3\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2\}^2 + (1-2\varkappa)^2\{\mathfrak{X}_1^2 + 2\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\}^3 = 0.$$

Ist $\mathfrak{X}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{X}_4\mathfrak{x}_4 = 0$ die Ebenengleichung, so folgen nach einfacher Rechnung die Parameterdarstellung:

$$(9)\quad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4 = -6pq : 6(p+q) : 12 : \{\varkappa p^2(p-3q) + (1-\varkappa)q^2(q-3p)\}$$

sowie die Gleichung:

$$(10)\quad \{\mathfrak{x}_2^3 + 3\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 - 3\mathfrak{x}_4\mathfrak{x}_3^2\}^2 - (1-2\varkappa)^2\{\mathfrak{x}_2^2 + 2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3\}^3 = 0$$

[8]) Zu dem nach (1) ausgeschlossenen Werte $\varkappa = \frac{1}{2}$ gehört bekanntlich die *Lie*sche Minimaldoppelfläche, wie auch aus (5) sofort erhellt.

in Ebenenkoordinaten. *Die Fläche* $[T_\varkappa]$ *ist somit von der sechsten Ordnung und Klasse*[9]). Der Schnitt der beiden Flächen $\mathfrak{X}_1^3 + 3\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 - 3\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2 = 0$, $\mathfrak{X}_1^2 + 2\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 = 0$, der *Lie*schen Schraubenfläche $[L]$ und des Hauptzylinders, ist der Ort der singulären Punkte von $[T_\varkappa]$. Es sind dies die Gerade $(f_u)(\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_4 = 0)$, die Schraubungsachse der Gruppe, sowie die Hauptschraubenlinie (L_H) (in (7) die Kurve $p = q$); beide Örter haben den Punkt F_u, den Fundamentalpunkt der Gruppe, gemeinsam, (f_u) ist Tangente von (L_H) in F_u, $\mathfrak{X}_4 = 0$ die zugehörige Schmiegebene (die uneigentliche Ebene $[\varepsilon_u]$). Das Koordinatentetraeder ist also ein Schmiegtetraeder der Kurve (L_H). Die Fläche $[T_\varkappa]$ hat, wie bereits gesagt, die Schraubenlinie (L_H) zur Rückkehrkurve. *Der Punkt* F_u *ist vierfacher, die übrigen Punkte von* (f_u) *sind dreifache Flächenpunkte; alle Punkte von* (f_u) *sind uniplanar, mit* $[\varepsilon_u]$ *als Tangentialebene.* Die Geraden der Ebene $[\varepsilon_u]$ schneiden (berühren) die Fläche in, sechsfach zu zählenden, Punkten von (f_u).

Diese Singularitäten der Fläche prägen ihren ebenen Schnitten besondere Eigenschaften auf; es seien nur behandelt die *Schnitte mit den Profilebenen* (den Ebenen durch (f_u)), *den Tangentialebenen des Hauptzylinders* sowie den *Schmiegebenen* von (L_H), wofür unbeschadet der Allgemeinheit die Ebenen $\mathfrak{X}_1 = 0$, $\mathfrak{X}_2 = 0$, $\mathfrak{X}_3 = 0$ genommen werden können; diese Ebenen sind die Flächen des von $O(0:0:0:1)$ ausgehenden Dreikants der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, und zwar ist $(\mathfrak{a})$ die Tangente von (L_H), $(\mathfrak{b})$ der durch O gehende Strahl der Kongruenz $\{\mathfrak{N}\}$ (vgl. Nr. 6), $(\mathfrak{c})$ verbindet O mit F_u.

Die Ebene $\mathfrak{X}_1 = 0$ schneidet $[T_\varkappa]$ außer in der dreifach zählenden Geraden (f_u) in der *Kurve dritter Ordnung und Klasse*:

$$9\varkappa(1-\varkappa)\mathfrak{X}_3^2\mathfrak{X}_4 + 2(1-2\varkappa)^2\mathfrak{X}_2^3 = 0; \tag{11}$$

diese Kurve hat in O eine Spitze mit der Geraden $(\mathfrak{b})$ als Spitzentangente, in F_u einen Wendepunkt mit (f_u) als Wendetangente, und ist durch diese Eigenschaften im wesentlichen bestimmt. Die Fläche $[T_\varkappa]$ entsteht durch Verschraubung dieser Profilkurve.

Die Ebene $\mathfrak{X}_2 = 0$ berührt den Hauptzylinder in O, trifft $[\varepsilon_u]$ in einer Geraden (h_u), welche den a. K. in G_u und F_u schneidet, und trifft die Fläche *in dem Paar (zueinander kongruenter) Kurven dritter Ordnung und Klasse*:

$$\mathfrak{X}_1^3 - \lambda\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2 = 0, \qquad \mathfrak{X}_1^3 - \mu\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2 = 0, \qquad \text{wo} \tag{12}$$

$$\lambda + \mu = 24\varkappa(1-\varkappa), \quad \lambda\mu = 36\varkappa(1-\varkappa) \qquad \text{und}$$

$$(\lambda-\mu)^2 = -144\varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa)^2 \neq 0.$$

Jede dieser Kurven hat in O einen Wendepunkt mit $(\mathfrak{a})$ als Wendetangente, in F_u eine Spitze mit (h_u) als Spitzentangente.

Die Ebene $\mathfrak{X}_3 = 0$, die Schmiegebene von (L_H) in O, schneidet $[\varepsilon_u]$ in der Geraden (g_u), der Tangente des a. K. in G_u, welche den Pol H_u von (h_u) bezüglich des a. K. enthält. Die Schnittkurve mit der Fläche besteht aus dem *Tripel voneinander verschiedener Parabeln*:

[9]) Die isotropen Flächenkurven haben den Rang vier, der absolute Kegelschnitt (a. K.) hat auf ihren Tangentenflächen die Multiplizität eins; daher ist nach *S. Lie*, Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I, Math. Annalen Bd. 14 (1879) S. 351 die Klasse der Fläche gleich sechs.

$$(13)\qquad \{\mathfrak{X}_1^2 + \alpha\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\}\{\mathfrak{X}_1^2 + \beta\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\}\{\mathfrak{X}_1^2 + \gamma\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\} = 0, \qquad \text{wo}$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 6, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 12(1-\varkappa+\varkappa^2), \quad \alpha\beta\gamma = 8(1-2\varkappa)^2,$$
$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 = -2^6\cdot 3^2\varkappa^2(1-\varkappa)^2(1-2\varkappa)^2 \neq 0.$$

Diese Parabeln gehören dem Kegelschnittbüschel an, das in O die Gerade $(\mathfrak{a})$, in H_u die Gerade (g_u) berührt.

16. *Zweite Parameterdarstellung der Fläche.* Vermöge der Darstellung (6) werden:

$$(14)\qquad \begin{gathered} E_1 = G_1 = 0, \quad F_1 = \tfrac{1}{2}\varkappa(1-\varkappa)(p-q)^2, \quad D_1^2 = -F_1^2, \\ D_1L_1 = \tfrac{1}{2}\varkappa^2(1-\varkappa)(p-q)^2, \quad M_1 = 0, \quad D_1N_1 = -\tfrac{1}{2}\varkappa(1-\varkappa)^2(p-q)^2 \end{gathered}$$

die Fundamentalgrößen der Fläche für die Parameter p, q. Hieraus ergeben sich das *Gaußsche* Krümmungsmaß:

$$(15)\qquad K = -\frac{4}{\varkappa(1-\varkappa)}\frac{1}{(p-q)^4}$$

sowie die Differentialgleichungen:

$$(16)\qquad \varkappa dp^2 + (1-\varkappa)\,dq^2 = 0, \qquad \varkappa dp^2 - (1-\varkappa)dq^2 = 0$$

der Krümmungs- bzw. Asymptotenlinien, deren erste in den ursprünglichen Parametern die Form:

$$(16\,a)\qquad 4\tau dv^2 + d\tau^2 = 0$$

besitzt. Nun hat die Ebene, welche den Hauptzylinder längs einer Erzeugenden $v = \bar{v}$, $\tau = 0$ berührt, in kanonischen Koordinaten die Gleichung $(v-\bar{v})^2 + \tau = 0$; fordert man nun, daß sie den Punkt X^0 $(v = v_0, \tau = \tau_0 \neq 0)$ enthalte, so folgt

$$(17)\qquad v - v_0 = \pm(\sqrt{-\tau} - \sqrt{-\tau_0})$$

als *Gleichung der durch X^0 an den Hauptzylinder gehenden beiden Tangentialebenen. Diese Gleichung ist zugleich das Integral der Differentialgleichung* (16 a), *und hieraus folgt das wichtige Resultat*:

Durch einen nichtsingulären Punkt X^0 gehen zwei (reguläre) ebene Krümmungslinien, die in den Tangentialebenen des Hauptzylinders liegen und die Kurve (L_H) berühren; durch einen singulären Punkt geht eine ebene reguläre sowie die Kurve (L_H) als singuläre Krümmungslinie. Die Fläche $[T_\varkappa]$ gehört somit zu den Enneperschen Minimalflächen. Die Krümmungslinien sind die in (12) dargestellten Kurven.

Die *Asymptotenlinien der Fläche sind von der dritten Ordnung.* Aus (14) und (15) leitet man weiterhin den Satz ab:

Sind $[T_\varkappa]$, $[T_{\bar{\varkappa}}]$ irgend zwei der betrachteten Schraubenflächen, bezogen auf ihre Parameter $p, q, \bar{p}, \bar{q}$, *so werden durch die Abbildungen* (bei konstantem a, b):

$$(18)\qquad \bar{p} = a(p+b), \quad \bar{q} = a(q+b); \quad \text{oder} \quad \bar{p} = -a(q+b), \quad \bar{q} = -a(p+b)$$

die Flächen isometrisch aufeinander bezogen, wenn:

$$(19)\qquad a^4 = \frac{\varkappa(1-\varkappa)}{\bar{\varkappa}(1-\bar{\varkappa})}$$

gesetzt wird, und dies sind die einzigen Isometrien zwischen beiden Flächen; die willkürliche Konstante b entspricht einer Verschraubung einer Fläche in sich, welche also die Isometrie nicht aufhebt. Es gibt somit vier wesentlich verschiedene Iso-

metrien, da bei gleichzeitiger Vertauschung von p und q, $\varkappa$ und $1-\varkappa$ die Fläche $[T_\varkappa]$ ungeändert bleibt (vgl. Nr. 14 (6)).

17. *Die zweigliedrige projektive Gruppe der Flächen* $[T_\varkappa]$. Die Flächen $[T_\varkappa]$ bilden einen metrischen Spezialfall einer allgemeineren, von *Lie*[10]) aufgestellten Flächenklasse, nämlich der *Flächen 6. Ordnung und Klasse* $[\mathfrak{T}]$, *welche eine zweigliedrige Gruppe automorpher Kollineationen gestatten.* Jede dieser Flächen $[\mathfrak{T}]$ enthält eine irreduzible Rückkehrkurve 3. Ordnung (L_H), die Tangente eines Punktes F_u von (L_H) als dreifache Gerade (f_u) sowie eine ausgezeichnete Ebene $[\varepsilon_u]$, die Schmiegebene von (L_H) in F_u und Tangentialebene der Fläche längs ihrer dreifachen Geraden (f_u); die Tangentenfläche von (L_H) schneidet $[\varepsilon_u]$ (außer in (f_u)) in einem irreduziblen Kegelschnitt (K_a). *Jede Kollineation, welche die Kurve* (K_a) *in den absoluten Kegelschnitt überführt, verwandelt die Fläche* $[\mathfrak{T}]$ *in eine Minimalschraubenfläche* $[T_\varkappa]$, *und umgekehrt. Daher übertragen sich alle zuvor gewonnenen Resultate ohne weiteres auf die Flächen* $[\mathfrak{T}]$, falls man nur alle metrischen Aussagen projektiv faßt; hierauf näher einzugehen ist indes hier nicht der Ort. Dagegen sei die zweigliedrige Kollineationsgruppe behandelt, die sich in kanonischen Koordinaten besonders einfach darstellt.

Die automorphe Kollineation einer Fläche $[\mathfrak{T}]$ muß jedenfalls die Rückkehrkurve (L_H) 3. Ordnung invariant lassen, zugleich aber die Ebene $[\varepsilon_u]$, die Gerade (f_u) sowie den Punkt F_u; sie führt daher auch den Ort der Schmiegstrahlen von (L_H), welche (f_u) treffen, in sich über, also eine *Cayley*sche Regelfläche 3. Ordnung $[\mathfrak{L}]$ (die zu der *Lie*schen Schraubenfläche kollinear ist). Diese gestatten aber nun nach *Lie*[10]) eine *dreigliedrige projektive Gruppe* $\{\mathfrak{G}_3\}$, und in ihr muß die gesuchte zweigliedrige Gruppe $\{\mathfrak{G}_2\}$ der Flächen $[\mathfrak{T}]$ enthalten sein.

Um nun zunächst die Gruppe $\{\mathfrak{G}_3\}$ aufzustellen, wähle man das Koordinatentetraeder als Schmiegtetraeder der Kurve (L_H) so, daß die Gleichungen $\mathfrak{X}_4 = 0$ die Ebene $[\varepsilon_u]$, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_4 = 0$ die Gerade (f_u), $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_4 = 0$ den Punkt F_u darstellen; alsdann hat die Fläche $[\mathfrak{L}]$ die Gleichung:

$$\mathfrak{X}_1^3 + 3\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 - 3\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2 = 0, \tag{20}$$

und für die gesuchten automorphen Kollineationen $\mathfrak{X} \to \overline{\mathfrak{X}}$ dieser Fläche findet man nach einfacher Rechnung die Gleichungen (mit $\varkappa \neq 0$):

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{X}}_1 : \overline{\mathfrak{X}}_2 : \overline{\mathfrak{X}}_3 : \overline{\mathfrak{X}}_4 = {} & \{\varkappa\mathfrak{X}_1 - \lambda\mathfrak{X}_4\} : \{\varkappa\lambda\mathfrak{X}_1 + \varkappa^2\mathfrak{X}_2 + \mu\mathfrak{X}_4\} \\ & : \{\varkappa\mu\mathfrak{X}_1 - \varkappa^2\lambda\mathfrak{X}_2 + \varkappa^3\mathfrak{X}_3 - (\tfrac{1}{3}\lambda^3 + \lambda\mu)\mathfrak{X}_4\} : \mathfrak{X}_4.\end{aligned} \tag{21}$$

Sie lassen sich durchsichtiger schreiben bei Benutzung von Koordinaten, die nur für die nicht in $[\varepsilon_u]$ gelegenen Punkte erklärt werden sollen:

Als kanonische Koordinaten ϱ, σ, τ eines Punktes $\mathfrak{X}$ sollen bezeichnet werden die Parameter:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_4} = -\sigma, \quad \frac{\mathfrak{X}_2}{\mathfrak{X}_4} = -\tfrac{1}{2}(\sigma^2 + \tau), \quad \frac{\mathfrak{X}_3}{\mathfrak{X}_4} = \tfrac{1}{6}\sigma^3 + \tfrac{1}{2}\sigma\tau - \varrho, \quad \text{oder:} \\ &\sigma = -\frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_4}, \quad \tau = -\frac{1}{\mathfrak{X}_4^2}\{\mathfrak{X}_1^2 + 2\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\}, \quad 3\varrho = \frac{1}{\mathfrak{X}_4^3}\{\mathfrak{X}_1^3 + 3\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4 - 3\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4^2\}.\end{aligned} \tag{22}$$

[10]) Vgl. [L. 2] S. 213, 218.

Bei Verwendung dieser Koordinaten gehen die Gleichungen (21) über in:

$$(23)\qquad \boxed{\bar{\varrho} = \varkappa^3 \varrho, \quad \bar{\sigma} = \varkappa\sigma + \lambda, \quad \bar{\tau} = \varkappa^2\tau - \lambda^2 - 2\mu}$$

und *stellen die gesuchte dreigliedrige Gruppe* $\{\mathfrak{G}_3\}$ *dar*, mit der Parameterkomposition:

$$(24)\qquad \bar{\bar{\varkappa}} = \varkappa\bar{\varkappa}, \quad \bar{\bar{\lambda}} = \bar{\varkappa}\lambda + \bar{\lambda}, \quad \bar{\bar{\mu}} = \bar{\varkappa}^2\mu + \bar{\mu} - \bar{\varkappa}\lambda\bar{\lambda}.$$

Bei den Flächen $\{\mathfrak{T}\}$ bleibt nun außerdem die Kurve $(L_H)\,(\varrho = \tau = 0)$ invariant, und daher wird $\lambda^2 + 2\mu = 0$ sein müssen; in der Tat stellen alsdann die Gleichungen:

$$(25)\qquad \boxed{\bar{\varrho} = \varkappa^3 \varrho, \quad \bar{\sigma} = \varkappa\sigma + \lambda, \quad \bar{\tau} = \varkappa^2\tau}$$

eine *zweigliedrige kontinuierliche Gruppe* $\{\mathfrak{G}_2\}$ dar [11]). *Diese läßt nun*, wie aus (25) unmittelbar ersichtlich, *die durch den Punkt* $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ *gehende Bahnfläche*:

$$(26)\qquad \bar{\varrho}^2\tau_0^3 - \bar{\tau}^3\varrho_0^2 = 0$$

invariant, also im Falle $9\varrho_0^2 + \tau_0^3 = 0$ die *Tangentenfläche 4. Ordnung von* (L_H), im Falle $9\varrho_0^2 + \tau_0^3 \neq 0$ dagegen die in Rede stehende *Fläche* $[\mathfrak{T}]$ 6. *Ordnung und Klasse*; diese Flächen sind somit W-Flächen der Gruppe $\{\mathfrak{G}_2\}$.

Die Gruppe $\{\mathfrak{G}_2\}$ läßt, wie aus (22), (25) ersichtlich, den Kegelschnitt $(K_a): \mathfrak{X}_4 = 0, \ \mathfrak{X}_2^2 + 2\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_3 = 0$ invariant, und daher lassen sich die Transformationen der Gruppe als *Ähnlichkeiten* (mit (K_a) als absoluten Kegelschnitt) auffassen, und *die in* $\{\mathfrak{G}_2\}$ *enthaltene eingliedrige Untergruppe* $(\varkappa = 1)$ *entspricht dann der Schraubungsgruppe, welche die Flächen* $[T_\varkappa]$ *erzeugt.*

18. *Schraubenflächen und Nullsystem der Schraubungsgruppe.* Ordnet man durch das mit der Gruppe $\{S_i\}$ verbundene Nullsystem dem Punkte $X(\varrho, \sigma, \tau)$ einer Schraubenfläche $[S_i]: \varrho = \varrho(\tau)$ (von den Schraubenzylindern $\tau = \text{const.}$ abgesehen) den Nullpunkt $\bar{X}$ seiner Tangentialebene zu, so *ist der Fläche* $\{S_i\}$ *eine Schraubenfläche* $[\bar{S}_i]$ *zugeordnet*, der Ort der Punkte $\bar{X}$, die in Parametern folgendermaßen dargestellt wird (der Akzent bezeichne die Ableitung nach τ):

$$(27)\qquad \bar{v} = v - 2\varrho', \quad \bar{\tau} = -\tau - 4\varrho'^2, \quad \bar{\varrho} = \varrho + \tfrac{8}{3}\varrho'^3.$$

Hieraus folgt, daß durch diese Transformation der Fläche $[\bar{S}_i]$ wieder die Fläche $[S_i]$ zugeordnet wird. *Jede Liesche Schraubenfläche* $\varrho = \text{const.}$ *wird somit auf sich selbst bezogen. Dagegen geht eine Fläche* $[T_\varkappa]$ *mit der Gleichung* $9(\varrho - \varrho_0)^2 + (1 - \alpha)\tau^3 = 0, \ \alpha(1 - \alpha) \neq 0$ (vgl. Nr. 13 (1)) *über in eine Fläche derselben Art mit der Gleichung* $9(\bar{\varrho} - \varrho_0)^2 + (1 - \bar{\alpha})\bar{\tau}^3 = 0$, *wo* $\alpha\bar{\alpha} = 1$ *ist*; *insbesondere sind daher die Flächen* $[T_\varkappa]$ *mit dem Parameter* $\alpha = -1$ *oder* $2\varkappa = 1 \pm \sqrt{2}$ *gegenüber der Transformation invariant.*

Es gehen somit Minimalflächen wieder in Minimalflächen über, und zwar so, daß Asymptotenlinien wieder Asymptotenlinien entsprechen, während den isotropen Kurven der einen Fläche die Krümmungslinien der homologen Fläche zugeordnet sind.

---

[11]) Vgl. [L. 5] S. 149

Karlsruhe, den 16. April 1925.