Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

Die im nachfolgenden mitgeteilten Untersuchungen stehen in enger Beziehung zu der von *C. Carathéodory* *) entwickelten und von *O. Toeplitz* **) in einem wichtigen Punkte ergänzten Theorie der im Innern des Einheitskreises konvergenten Potenzreihen mit positivem reellem Bestandteil. Auf Grund dieser Theorie haben bereits *Carathéodory* und *Fejér* ***) einen interessanten Satz über Funktionen abgeleitet, die im Kreise $|x| < 1$ regulär und beschränkt sind. Im folgenden wird die Theorie dieser Funktionen nach einigen Richtungen etwas weiter ausgebaut. Dies geschieht nicht mit Hilfe der *Carathéodory*schen Ergebnisse, sondern auf direktem Wege. Der hier eingeführte kettenbruchartige Algorithmus liefert sehr leicht eine an und für sich wichtige Parameterdarstellung für die Koeffizienten der zu betrachtenden Potenzreihen. Die für diese Parameterdarstellung geltenden, in § 3 bewiesenen Sätze II und III enthalten bereits im wesentlichen den Hauptinhalt der zu entwickelnden Theorie. Es bedarf nur noch einer rein rechnerischen Umformung der gewonnenen Ausdrücke, um von dem Satze II zu dem Hauptergebnis dieser Arbeit, dem Satze VIII des § 6, zu gelangen. Aus diesem Satz lassen sich die *Carathéodory*-*Toeplitz*schen

---

*) Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 95 und Rend. di Palermo, Bd. 32 (1911), S. 193. — Auf anderem Wege sind die *Carathéodory*schen Sätze bewiesen worden von *E. Fischer* (Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 240), *G. Herglotz* (Leipz. Berichte 1911, S. 501), *G. Frobenius* (Berl. Berichte 1912, S. 16) und dem Verf. (ebenda, S. 4). Vgl. auch *F. Riesz*, Ann. de l'École Norm. 1911, S. 33 und Journ. f. Math. Bd. 146 (1915), S. 83.

**) Gött. Nachrichten 1910, S. 489 und Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 191.

***) Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 131—235. — Vergl. auch *T. H. Gronwall*, Annals of Math. Bd. 16 (1914), S. 77 und *G. Pick*, Math. Ann. Bd. 77 (1915), S. 7.

Resultate unmittelbar ablesen, er folgt aber auch umgekehrt ohne Mühe aus diesen (vergl. § 8). Der interessante Satz X des § 7, der hier als Spezialfall des Satzes VIII erscheint, läßt sich auch, wenn man auf die Charakterisierung der Grenzfälle (Satz X*) verzichtet, mit Hilfe eines der wichtigen Sätze von *O. Toeplitz**) über sog. „L-Formen" leicht beweisen.

In einer zweiten Abhandlung, die gleichzeitig mit der vorliegenden der Redaktion überreicht worden ist und im nächsten Band dieses Journals erscheinen wird, werde ich einige Anwendungen der hier entwickelten Theorie behandeln.

§ 1.
Einführung des kettenbruchartigen Algorithmus.

Ist $w = f(x)$ eine im Innern des Einheitskreises reguläre analytische Funktion**), so nenne ich die obere Grenze der Zahlen $|f(x)|$ für $|x| < 1$ kurz *die obere Grenze der Funktion* $f(x)$ und bezeichne sie mit $M(f)$. Ebenso heißt a eine obere Schranke von $f(x)$, wenn $a \geqq M(f)$ ist. Es kann auch $M(f) = \infty$ sein. Ist $M(f)$ eine endliche Zahl, so wird $f(x)$ im Kreise $|x| < 1$ beschränkt genannt. Das bekannte *Schwarz*sche Lemma besagt nur, daß stets

$$M(f) = M(xf)$$

ist. Die Klasse derjenigen Funktionen $f(x)$, für die

$$M(f) \leqq 1 \tag{1.}$$

ist, bezeichne ich im folgenden mit $\mathfrak{E}$.

Bedeutet α eine reelle oder komplexe Zahl, die absolut kleiner als 1 ist, und versteht man wie üblich unter $\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert komplexe Größe, so wird durch die lineare Transformation

$$w' = \frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha} w}$$

der Einheitskreis $|w| \leqq 1$ in sich selbst übergeführt. Ist daher $f(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{E}$, so gilt dasselbe auch für die Funktion

$$g = \frac{f - \alpha}{1 - \bar{\alpha} f}$$

und umgekehrt. Insbesondere ist dann und nur dann $M(g) = 1$, wenn $M(f) = 1$ ist.

---

*) Math. Ann. Bd. 70 (1911), S. 351 (gemeint ist der Satz 5 dieser Arbeit).

**) Über das Verhalten von $f(x)$ für $|x| \geqq 1$ wird nichts vorausgesetzt.

Es sei nun

(2.) $$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe, die der Bedingung (1.) genügt. Dann ist $|c_0| \leqq 1$. Ist insbesondere $|c_0| = 1$, so reduziert sich $f(x)$ auf die Konstante c_0. Ist aber $|c_0| < 1$, so bilde man, wenn c_0 auch mit γ_0 bezeichnet wird, den Ausdruck*)

$$f_1 = \frac{1}{x}\frac{f - \gamma_0}{1 - \bar{\gamma}_0 f} = \frac{c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots}{1 - \gamma_0\bar{\gamma}_0 - \bar{\gamma}_0 c_1 x - \bar{\gamma}_0 c_2 x^2 - \cdots}.$$

Diese Funktion verhält sich ebenso wie $f(x)$ im Kreise $|x| < 1$ regulär und gehört auch zur Klasse $\mathfrak{E}$; ferner ist dann und nur dann $M(f_1) = 1$, wenn $M(f) = 1$ ist. Setzt man

$$\gamma_1 = f_1(0) = \frac{c_1}{1 - \bar{c}_0 c_0},$$

so wird also $|\gamma_1| \leqq 1$. Gilt hier das Gleichheitszeichen, so wird f_1 konstant gleich γ_1. Ist aber $|\gamma_1| < 1$, so setze ich

$$f_2 = \frac{1}{x}\frac{f_1 - \gamma_1}{1 - \bar{\gamma}_1 f_1}, \qquad \gamma_2 = f_2(0).$$

Setzt man nun dieses Verfahren fort, so erhält man eine endliche oder unendliche Folge von Funktionen

(3.) $$f_0 = f, f_1, f_2, f_3, \ldots,$$

zwischen denen die Gleichungen

(4.) $$f_{\nu+1} = \frac{1}{x}\frac{f_\nu - \gamma_\nu}{1 - \bar{\gamma}_\nu f_\nu}, \qquad f_\nu = \frac{\gamma_\nu + x f_{\nu+1}}{1 + \bar{\gamma}_\nu x f_{\nu+1}}, \qquad \gamma_\nu = f_\nu(0)$$

bestehen. Diese Funktionen gehören sämtlich zur Funktionenklasse $\mathfrak{E}$, genauer ist für jedes ν dann und nur dann $M(f_\nu) = 1$, wenn $M(f) = 1$ ist. Reduziert sich eine der Funktionen f_ν auf die Konstante γ_ν, so wird f eine allein durch $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$ bestimmte rationale Funktion, die ich mit $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu]$ bezeichne. Die Funktionen (3.) nenne ich die *zu* $f(x)$ *adjungierten Funktionen*, die Konstanten γ_ν die *zu* $f(x)$ *gehörenden Parameter*.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Folge der zu $f(x)$ adjungierten Funktionen enthält unendlich viele Glieder. In diesem Falle sind die absoluten Beträge der Parameter γ_ν sämtlich *kleiner* als 1. Wird insbesondere für einen Wert von ν die Funktion $f_\nu(x)$ gleich der Konstanten γ_ν, so ist für $\lambda > \nu$

$$f_\lambda(x) = \gamma_\lambda = 0.$$

*) Vergl. *E. Landau*, Vierteljahrsschrift der Züricher Naturf. Ges. Bd. 51 (1906), S. 252.

2. Es gibt eine ganze Zahl n, für die

$$(5.)\qquad |\gamma_0| < 1, |\gamma_1| < 1, \ldots, |\gamma_{n-1}| < 1, |\gamma_n| = 1$$

wird. Die Folge (3.) besteht dann aus den $n+1$ Funktionen

$$f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n = \gamma_n$$

und $f(x)$ wird die rationale Funktion $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$.

Ich behaupte, *daß der zweite Fall dann und nur dann eintritt, wenn $f(x)$ eine rationale Funktion der Form*

$$(6.)\qquad f(x) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x + \omega_\nu}{1 + \overline{\omega}_\nu x}, \qquad 0 \leqq |\omega_\nu| < 1, |\varepsilon| = 1$$

darstellt, oder anders ausgedrückt, die Form

$$(6'.)\qquad f(x) = \varepsilon \frac{x^n + \overline{k}_1 x^{n-1} + \cdots + \overline{k}_n}{1 + k_1 x + \cdots + k_n x^n} = \varepsilon \frac{x^n \overline{P}(x^{-1})}{P(x)}\text{*)}$$

hat, wobei $P(x)$ höchstens vom Grade n ist und nur außerhalb des Einheitskreises verschwindet (oder überall gleich 1 ist).

Ist nämlich $f(x)$ von der Form (6'.), so liegen die Pole dieser Funktion außerhalb des Einheitskreises, außerdem ist für $|x| = 1$ auch $|f(x)| = 1$. Daher gehört $f(x)$ gewiß zur Funktionenklasse $\mathfrak{E}$. Wir haben nur zu zeigen, daß

$$(7.)\qquad f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$$

wird, wobei die Parameter γ_ν den Bedingungen (5.) genügen. Für $n = 0$ ist dies gewiß richtig, da alsdann $f(x) = \varepsilon = [x; \varepsilon]$ wird. Ist aber $n > 0$, so wird

$$\gamma_0 = f(0) = \varepsilon \overline{k}_n = \varepsilon \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n,$$

also $|\gamma_0| < 1$. Ferner ist

$$f_1 = \frac{1}{x} \frac{f - \gamma_0}{1 - \overline{\gamma}_0 f} = \frac{\varepsilon}{x} \frac{x^n \overline{P}(x^{-1}) - \overline{k}_n P(x)}{P(x) - k_n x^n \overline{P}(x^{-1})} = \varepsilon \frac{x^{n-1} \overline{Q}(x^{-1})}{Q(x)},$$

wobei

$$Q(x) = \frac{P(x) - k_n x^n \overline{P}(x^{-1})}{1 - \overline{k}_n k_n} = 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{k_\nu - k_n \overline{k}_{n-\nu}}{1 - \overline{k}_n k_n} x^\nu$$

zu setzen ist. Dieses Polynom ist höchstens vom Grade $n-1$ und kann für $|x| \leqq 1$ nicht verschwinden, weil für ein solches x

$$|x^n \overline{P}(x^{-1})| \leqq |P(x)|, \text{ also } |k_n x^n \overline{P}(x^{-1})| < |P(x)|$$

ist. Die Funktion $f_1(x)$ hat also dieselbe Form wie $f(x)$, wobei aber an Stelle von n die Zahl $n-1$ tritt. Nimmt man daher das zu Beweisende für $n-1$ als richtig an, so erhält $f_1(x)$ die Form

*) Im folgenden bezeichne ich stets, wenn $P(x)$ ein Polynom ist, mit $\overline{P}(x)$ das Polynom mit den konjugiert komplexen Koeffizienten.

$$f_1(x) = [x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n], \qquad (|\gamma_1| < 1, \ldots, |\gamma_{n-1}| < 1, |\gamma_n| = 1)$$

und mithin läßt $f(x)$ die Darstellung (7.) zu. Die Zahl γ_n wird hierbei gleich ε.

Weiß man umgekehrt, daß $f(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{E}$ ist, deren Parameter den Bedingungen (5.) genügen, so wird

$$f_n(x) = \gamma_n = \varepsilon \frac{x^0}{1}, \qquad |\varepsilon| = |\gamma_n| = 1.$$

Es sei schon bewiesen, daß $f_{\nu+1}(x)$ die Form

$$f_{\nu+1}(x) = \gamma_n \frac{x^{n-\nu-1} \bar{R}(x^{-1})}{R(x)}$$

hat, wo $R(x)$ ein Polynom höchstens vom Grade $n-\nu-1$ bedeutet, das für $x=0$ den Wert 1 hat und entweder gleich 1 ist oder nur außerhalb des Einheitskreises verschwindet. Dann wird

$$f_\nu = \frac{\gamma_\nu + x f_{\nu+1}}{1 + \bar{\gamma}_\nu x f_{\nu+1}} = \gamma_n \frac{x^{n-\nu} \bar{S}(x^{-1})}{S(x)},$$

wobei

$$S(x) = R(x) + \bar{\gamma}_\nu \gamma_n x^{n-\nu} \bar{R}(x^{-1})$$

zu setzen ist. Dieses Polynom ist höchstens vom Grade $n-\nu$ und genügt der Bedingung $S(0) = 1$. Man schließt ferner ähnlich wie vorhin, daß $S(x)$ für $|x| \leqq 1$ nicht verschwinden kann. Was für $\nu+1$ gilt, ist also auch für ν richtig. Für $\nu = 0$ ergibt sich, daß $f(x)$ die Form (6'.) haben muß.

Eine Funktion von dieser Form kann man auch einfach charakterisieren als eine im Kreise $|x| \leqq 1$ reguläre rationale Funktion mit n (gleichen oder verschiedenen) Nullstellen, deren absoluter Betrag für $|x| = 1$ beständig gleich 1 ist*).

§ 2.

Die Funktionen Φ und Ψ.

Wir gehen wieder von einer Potenzreihe (2.) aus, fassen jetzt aber die Koeffizienten c_ν als beliebige komplexe Variable auf. Mit Hilfe der Formeln (4.) lassen sich dann die Ausdrücke f_ν als Quotienten von Potenzreihen berechnen, die formal in der Form

$$f_\nu(x) = c_{\nu 0} + c_{\nu 1} x + c_{\nu 2} x^2 + \cdots \qquad (c_{0\lambda} = c_\lambda)$$

entwickelbar sind. Hierbei wird offenbar $c_{\nu\lambda}$ eine wohlbestimmte rationale Funktion von

$$c_0, \bar{c}_0, c_1, \bar{c}_1, \ldots, c_{\nu-1}, \bar{c}_{\nu-1}, c_\nu, c_{\nu+1}, \ldots, c_{\nu+\lambda}.$$

Insbesondere setze ich

$$\gamma_\nu = c_{\nu 0} = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu) = \Phi_\nu.$$

---

*) Vergl. *T. H. Gronwall*, Annals of Math. Bd. 14 (1912), S. 72.

Diese Ausdrücke werden später genauer bestimmt werden. Speziell ist

$$\Phi_0 = c_0, \qquad \Phi_1 = \frac{c_1}{1 - \bar{c}_0 c_0}, \qquad \Phi_2 = \frac{c_2(1 - \bar{c}_0 c_0) + \bar{c}_0 c_1^2}{(1 - \bar{c}_0 c_0)^2 - \bar{c}_1 c_1}.$$

Für numerisch gegebene Koeffizienten c_ν ist, wie man leicht erkennt, der Nenner von Φ_ν von Null verschieden, wenn keine der Zahlen $|\gamma_0|, |\gamma_1|, \ldots, |\gamma_{\nu-1}|$ gleich 1 ist.

Umgekehrt ist

$$c_\nu = \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = \Psi_\nu$$

eine wohlbestimmte *ganze* rationale Funktion von

$$\gamma_0, \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}, \bar{\gamma}_{\nu-1}, \gamma_\nu.$$

Insbesondere wird

$$\Psi_0 = \gamma_0, \; \Psi_1 = \gamma_1(1 - \bar{\gamma}_0\gamma_0), \; \Psi_2 = \gamma_2(1 - \bar{\gamma}_0\gamma_0)(1 - \bar{\gamma}_1\gamma_1) - \bar{\gamma}_0\gamma_1^2(1 - \bar{\gamma}_0\gamma_0).$$

Um die Ausdrücke Ψ_ν allgemein zu berechnen, beachte man, daß beim Übergang von f zu f_1 an Stelle von $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ treten. Daher ist $c_{1\nu} = \Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu+1})$. Aus

$$f(1 + \bar{\gamma}_0 x f_1) = \gamma_0 + x f_1$$

ergibt sich nun durch Vergleichen der Koeffizienten die Rekursionsformel

$$\Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = (1 - \bar{\gamma}_0\gamma_0)\Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu) - \bar{\gamma}_0 \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda)\Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu-\lambda}).$$

Hieraus schließt man leicht, daß

$$\Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = \gamma_\nu \prod_{\lambda=0}^{\nu-1}(1 - \bar{\gamma}_\lambda\gamma_\lambda) + \Psi'$$

ist, wo Ψ' nur noch von $\gamma_0, \bar{\gamma}_0, \ldots, \gamma_{\nu-1}, \bar{\gamma}_{\nu-1}$ abhängt. Setzt man ferner *γ_λ gleich einer Größe vom absoluten Betrage 1, so hängt Ψ_ν von $\gamma_{\lambda+1}, \bar{\gamma}_{\lambda+1}, \ldots, \gamma_\nu$ nicht mehr ab.* In diesem Fall ist Ψ_ν nichts anderes als der Koeffizient von x^ν in der Entwicklung von $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda]$ nach Potenzen von x.

Allgemein können die rationalen Funktionen

$$(8.) \qquad \varphi_\nu(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu]$$

für beliebige Werte der Parameter γ_λ gebildet werden. Sie sind mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(9.) \quad [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu] = \frac{\gamma_0 + x[x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu]}{1 + \bar{\gamma}_0 x[x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu]}, \quad [x; \gamma_\nu] = \gamma_\nu$$

zu berechnen. Ist $|\gamma_\lambda| = 1$, so wird für $\nu > \lambda$

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu] = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda].$$

Dasselbe gilt bei beliebigem γ_λ, wenn $\gamma_{\lambda+1} = \gamma_{\lambda+2} = \cdots = \gamma_\nu = 0$ ist. In jedem Fall ist, wenn

$$\gamma_0' = \gamma_0, \quad \gamma_1' = \gamma_1, \quad \ldots, \gamma_\nu' = \gamma_\nu, \quad \gamma_{\nu+1}' = \gamma_{\nu+2}' = \cdots = 0$$

gesetzt wird, für genügend kleine Werte von $|x|$

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_\lambda') x^\lambda.$$

Aus (9.) ergibt sich durch den Schluß von $\nu - 1$ auf ν, daß die Funktion $\varphi_\nu(x)$ sich dann und nur dann im Einheitskreis regulär verhält und der Bedingung $M(\varphi_\nu) \leqq 1$ genügt, wenn die Zahlen $|\gamma_0|, |\gamma_1|, \ldots, |\gamma_\nu|$ entweder sämtlich kleiner als 1 sind, oder wenn die erste unter ihnen, die nicht kleiner als 1 ist, genau gleich 1 wird. Ist insbesondere $|\gamma_\lambda| < 1$ für jeden Wert von λ, so wird $M(\varphi_\nu) < 1$. Dies folgt daraus, daß die zu φ_ν adjungierte Funktion $[x; \gamma_\nu] = \gamma_\nu$ dieser Bedingung genügt.

§ 3.

Kriterien für die Koeffizienten einer beschränkten Potenzreihe.

Ich beweise zunächst folgenden Satz

I. *Sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ beliebige Größen, die sämtlich absolut kleiner als 1 sind, so ist die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu,$$

die ich auch kürzer mit $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots]$ bezeichne, für $|x| < 1$ konvergent, und ihre obere Grenze $M(f)$ ist höchstens gleich 1. Ferner ist für $|x| < 1$

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \lim_{\nu=\infty} [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu],$$

und die Konvergenz ist in jedem Kreise $|x| \leqq r < 1$ eine gleichmäßige.

Versteht man nämlich unter $\varphi_\nu(x)$ den mit Hilfe der gegebenen Zahlen γ_λ gebildeten Ausdruck (8.), so gehört diese rationale Funktion für jedes ν zur Funktionenklasse $\mathfrak{C}$. Ist daher

$$\varphi_\nu(x) = d_{\nu 0} + d_{\nu 1} x + d_{\nu 2} x^2 + \cdots,$$

so wird $|d_{\nu\lambda}| \leqq M(\varphi_\nu) < 1$. Speziell ist aber nach dem Früheren für $\lambda \leqq \nu$

$$d_{\nu\lambda} = \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda) = c_\lambda.$$

Folglich ist $|c_\lambda| < 1$ für jeden Wert von λ und daher ist die Potenzreihe $f(x)$ für $|x| < 1$ konvergent. Ferner ist für jede positive Zahl $r < 1$ und für $|x| \leqq r$

$$|f - \varphi_\nu| = \left| \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} (c_\lambda - d_{\nu\lambda}) x^\lambda \right| \leqq \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} (|c_\lambda| + |d_{\nu\lambda}|) r^\lambda < \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} 2 r^\lambda = \frac{2 r^{\nu+1}}{1 - r}.$$

Da der rechts stehende Ausdruck mit wachsendem ν gegen 0 konvergiert, so konvergieren die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ für $|x| \leqq r$ gleichmäßig gegen $f(x)$. Für jede Stelle x im Innern des Einheitskreises folgt ferner aus $f(x) = \lim \varphi_\nu(x)$

und $|\varphi_\nu(x)| < 1$, daß auch $|f(x)| \leqq 1$ ist.

In Verbindung mit den Ergebnissen der §§1 und 2 ergibt sich hieraus:

II. *Die Potenzreihe*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

ist dann und nur dann für $|x| < 1$ *konvergent und dem absoluten Betrage nach höchstens gleich* 1, *wenn die zugehörigen Ausdrücke*

$$\gamma_\nu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu)$$

entweder sämtlich absolut kleiner als 1 *sind, oder wenn eine Zahl n existiert, für die*

$$|\gamma_0| < 1, \quad |\gamma_1| < 1, \ldots, \quad |\gamma_{n-1}| < 1, \quad |\gamma_n| = 1$$

wird und die n-te zu $f(x)$ *adjungierte Funktion*

$$f_n(x) = c_{n0} + c_{n1} x + c_{n2} x^2 + \cdots$$

sich auf das konstante Glied $c_{n0} = \gamma_n$ *reduziert. Im ersten Fall wird*

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu.$$

Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(x)$ *eine rationale Funktion von der Form* (6.) *ist, und es wird* $f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$.

Im folgenden unterscheide ich diese beiden Fälle voneinander, indem ich $f(x)$ als *eine Funktion von unendlichem Range*, bezw. *vom endlichen Range n* bezeichne.

Es gilt ferner der Satz:

III. *Sind* $c_0, c_1, \ldots, c_m$ *gegebene Größen, so läßt sich dann und nur dann eine Potenzreihe der Form*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m + c_{m+1} x^{m+1} + \cdots$$

angeben, die für $|x| < 1$ *konvergiert und der Bedingung* $M(f) \leqq 1$ *genügt, wenn die Ausdrücke*

$$\gamma_\mu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\mu) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

entweder sämtlich absolut kleiner als 1 *sind, oder wenn eine Zahl* $n \leqq m$ *existiert derart, daß*

$$|\gamma_0| < 1, \quad |\gamma_1| < 1, \ldots, \quad |\gamma_{n-1}| < 1, \quad |\gamma_n| = 1$$

wird und c_μ *für* $\mu = n+1, n+2, \ldots, m$ *mit dem Koeffizienten von* x^μ *in der Entwicklung der rationalen Funktion* $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ *nach Potenzen von x übereinstimmt.*

Daß die hier genannten Bedingungen notwendig erfüllt sein müssen, ergibt sich aus dem Früheren. Sie sind aber auch hinreichend. Im ersten Fall gibt es unendlich viele Funktionen der verlangten Art, nämlich alle Funktionen der Form

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots],$$

wo $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, \ldots$ beliebige Größen bedeuten können, deren absolute Beträge höchstens gleich 1 sind. Im zweiten Fall liefert aber $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ die einzige Lösung des Problems (vergl. *Carathéodory* und *Fejér*, a. a. O. S. 234).

Die bisherigen Ergebnisse lassen auch folgende Deutung zu:

IV. *Um die Gesamtheit aller Funktionen der Klasse $\mathfrak{E}$ zu erhalten, hat man nur die Potenzreihen*

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu$$

für alle Größen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots,$ deren absolute Beträge höchstens gleich 1 sind, aufzustellen. Jede Funktion $f(x)$ von unendlichem Range wird hierbei nur einmal erhalten, und zwar sind $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ eindeutig bestimmt als die zu $f(x)$ gehörenden Parameter. Für eine Funktion $f(x)$ vom endlichen Range n, d. h. für eine Funktion der Form (6.) *sind nur $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ eindeutig bestimmt als die Parameter von $f(x)$, die Größen $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$ können dagegen beliebig gewählt werden.*

§ 4.
Berechnung der Ausdrücke Φ_ν.

Um das durch den Satz II gelieferte Kriterium für die Beschränktheit einer gegebenen Potenzreihe (mit vorgeschriebener oberer Schranke) auf eine elegantere Form zu bringen, hat man nur die Ausdrücke $\gamma_\nu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu)$ genauer zu berechnen. Es empfiehlt sich hierbei, nicht von einer Potenzreihe, sondern von einem Quotienten zweier Potenzreihen auszugehen. Es sei also

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}.$$

Der Koeffizient b_0 soll hierbei von Null verschieden sein und kann als reell angenommen werden. Der Quotient $f(x)$ kann dann formal nach Potenzen von x entwickelt werden, es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Setzt man nun

$$g_\nu(x) = a_\nu + a_{\nu+1} x + \cdots, \quad h_\nu(x) = b_\nu + b_{\nu+1} x + \cdots, \quad (g_0 = g,\ h_0 = h)$$

so wird $\gamma_0 = f(0) = \dfrac{a_0}{b_0}$ und

$$f_1 = \frac{1}{x} \frac{f - \gamma_0}{1 - \bar{\gamma}_0 f} = \frac{b_0 g_1 - a_0 h_1}{\bar{b}_0 h - \bar{a}_0 g} = -\frac{D_1(x)}{\Delta_1(x)},$$

wobei

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & g_1 \\ b_0 & h_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & g_0 \\ \bar{a}_0 & h_0 \end{vmatrix}$$

wird. Versteht man nun unter d_1 und δ_1 die Größen

$$d_1 = D_1(0) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad \delta_1 = \Delta_1(0) = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & b_0 \end{vmatrix},$$

so wird, wenn $\delta_1 \neq 0$ ist, $\gamma_1 = f_1(0) = -\frac{d_1}{\delta_1}$ und

$$f_2 = \frac{1}{x}\frac{f_1 - \gamma_1}{1 - \bar{\gamma}_1 f_1} = \frac{1}{x}\frac{d_1 \Delta_1 - \delta_1 D_1}{\delta_1 \Delta_1 - \bar{d}_1 D_1} = -\frac{D_2(x)}{\Delta_2(x)}.$$

Hierbei können $D_2(x)$ und $\Delta_2(x)$ in der Form

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & g_2 \\ \bar{b}_0 & 0 & a_0 & g_1 \\ 0 & b_0 & b_1 & h_2 \\ \bar{a}_0 & 0 & b_0 & h_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & 0 & a_0 & g_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & 0 & g_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & b_0 & h_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & h_0 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Allgemein gilt der Satz:

V. *Man verstehe unter $D_\nu(x)$ und $\Delta_\nu(x)$ die Determinanten des Grades 2ν*

$$D_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 & a_0 & a_1 \ldots & a_{\nu-1} & g_\nu \\ \bar{b}_0 & 0 & \ldots 0 & 0 & a_0 \ldots & a_{\nu-2} & g_{\nu-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & \ldots 0 & 0 & 0 \ldots & a_{\nu-3} & g_{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{b}_{\nu-2} & b_{\nu-3} & \ldots \bar{b}_0 & 0 & 0 \ldots & a_0 & g_1 \\ 0 & 0 & \ldots 0 & b_0 & b_1 \ldots & b_{\nu-1} & h_\nu \\ \bar{a}_0 & 0 & \ldots 0 & 0 & b_0 \ldots & b_{\nu-2} & h_{\nu-1} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \ldots 0 & 0 & 0 \ldots & b_{\nu-3} & h_{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{\nu-2} & \bar{a}_{\nu-3} & \ldots \bar{a}_0 & 0 & 0 \ldots & b_0 & h_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_\nu = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & 0 & \ldots 0 & a_0 & a_1 \ldots & a_{\nu-2} & g_{\nu-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & \ldots 0 & 0 & a_0 \ldots & a_{\nu-3} & g_{\nu-2} \\ \bar{b}_2 & \bar{b}_0 & \ldots 0 & 0 & 0 \ldots & a_{\nu-4} & g_{\nu-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{b}_{\nu-1} & \bar{b}_{\nu-2} & \ldots \bar{b}_0 & 0 & 0 \ldots & 0 & g_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & \ldots 0 & b_0 & b_1 \ldots & b_{\nu-2} & h_{\nu-1} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \ldots 0 & 0 & b_0 \ldots & b_{\nu-3} & h_{\nu-2} \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \ldots 0 & 0 & 0 \ldots & b_{\nu-4} & h_{\nu-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{\nu-1} & \bar{a}_{\nu-2} & \ldots \bar{a}_0 & 0 & 0 \ldots & 0 & h_0 \end{vmatrix}.$$

Ferner sei $d_\nu = D_\nu(0)$, $\delta_\nu = \Delta_\nu(0)$. Ist keine der (sämtlich reellen) Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\nu-1}$ gleich 0, so wird

$$f_\nu = \frac{1}{x}\frac{f_{\nu-1} - \gamma_{\nu-1}}{1 - \bar{\gamma}_{\nu-1} f_{\nu-1}} = -\frac{D_\nu(x)}{\Delta_\nu(x)}, \qquad \gamma_{\nu-1} = f_{\nu-1}(0) = -\frac{d_{\nu-1}}{\delta_{\nu-1}}.$$

Um dieses Bildungsgesetz zu beweisen, haben wir, wie man leicht sieht, nur zu zeigen, daß

$$d_\nu \Delta_\nu - \delta_\nu D_\nu = -\delta_{\nu-1} x D_{\nu+1}, \tag{10.}$$

$$\delta_\nu \Delta_\nu - \bar{d}_\nu D_\nu = \delta_{\nu-1} \Delta_{\nu+1} \tag{11.}$$

ist. Der Beweis beruht auf dem bekannten Determinantensatz: Ist D eine

Determinante beliebigen Grades und bedeutet $D^{\alpha,\alpha';\beta,\beta';\dots}$ diejenige Unterdeterminante, die entsteht, wenn man in D die Zeilen $\alpha, \beta, \dots$ und die Kolonnen $\alpha', \beta', \dots$ streicht, so ist für $\alpha < \beta$, $\alpha' < \beta'$

$$D^{\alpha,\alpha'} D^{\beta,\beta'} - D^{\alpha,\beta'} D^{\beta,\alpha'} = D . D^{\alpha,\alpha';\beta,\beta'}.$$

Für die Determinanten $D_{\nu+1}$ und $\varDelta_{\nu+1}$ ergibt sich ohne Mühe

$$D_{\nu+1}^{1,2\nu+1} = \frac{b_0}{x}(\varDelta_\nu - \delta_\nu), \qquad D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+1} = (-1)^\nu \frac{\bar{a}_0}{x}(D_\nu - d_\nu),$$

$$D_{\nu+1}^{1,2\nu+2} = b_0 \delta_\nu, \qquad D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+2} = (-1)^\nu \bar{a}_0 d_\nu, \qquad D_{\nu+1}^{1,2\nu+1;\nu+1,2\nu+2} = (-1)^{\nu-1} b_0 \bar{a}_0 \delta_{\nu-1}$$

und

$$\varDelta_{\nu+1}^{1,1} = b_0 \varDelta_\nu, \qquad \varDelta_{\nu+1}^{2\nu+2,1} = -\bar{b}_0 D_\nu,$$

$$\varDelta_{\nu+1}^{1,2\nu+2} = -b_0 \bar{d}_\nu, \qquad \varDelta_{\nu+1}^{2\nu+2,2\nu+2} = \bar{b}_0 \delta_\nu, \qquad \varDelta_{\nu+1}^{1,1;2\nu+2,2\nu+2} = b_0 \bar{b}_0 \delta_{\nu-1}.$$

Die zu beweisenden Relationen (10.) und (11.) besagen nur, daß

$$D_{\nu+1}^{1,2\nu+1} D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+2} - D_{\nu+1}^{1,2\nu+2} D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+1} = D_{\nu+1} D_{\nu+1}^{1,2\nu+1;\nu+1,2\nu+2} \text{*}),$$

$$\varDelta_{\nu+1}^{1,1} \varDelta_{\nu+1}^{2\nu+2,2\nu+2} - \varDelta_{\nu+1}^{1,2\nu+2} \varDelta_{\nu+1}^{2\nu+2,1} = \varDelta_{\nu+1} \varDelta_{\nu+1}^{1,1;2\nu+2,2\nu+2}$$

ist.

Aus (11.) ergibt sich für $x = 0$ die für das Folgende wichtige Formel

$$(12.) \qquad 1 - |\gamma_\nu|^2 = \frac{\delta_{\nu-1}\delta_{\nu+1}}{\delta_\nu^2} \qquad \left(\delta_0 = 1,\ \delta_{-1} = \frac{1}{b_0^2}\right).$$

Ist also δ_{n+1} die erste der Zahlen δ_ν, die den Wert 0 hat, so wird γ_n die erste unter den Zahlen γ_ν, deren absoluter Betrag gleich 1 ist. In diesem Fall haben wir auf Grund der früheren Festsetzungen den Quotienten f_{n+1} nicht mehr zu betrachten. Dies ist im folgenden stets zu berücksichtigen.

§ 5.

Die zu einem Quotienten von zwei Potenzreihen gehörenden Hermiteschen Formen.

Die Determinanten δ_ν lassen sich in einfacher Weise deuten, wenn man von den Bezeichnungen des Matrizenkalküls Gebrauch macht.

Der Potenzreihe $g(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ ordnen wir die unendlichen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \qquad \bar{A}' = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & \dots \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & a_0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

zu, denen die formal gebildeten Bilinearformen

---

*) Streng genommen folgt (10.) aus dieser Gleichung zunächst nur für $a_0 \neq 0$. Die Formel (10.) vertritt aber nur ein System von algebraischen Identitäten zwischen den a_λ, $\bar{a}_\lambda$, b_λ, $\bar{b}_\lambda$, gelten diese für $a_0 \neq 0$, so sind sie auch für $a_0 = 0$ richtig.

$$A(x, y) = \sum_{\lambda \geqq \varkappa}^{\infty}{}_{0}\, a_{\lambda-\varkappa} x_\varkappa y_\lambda, \qquad \bar{A}'(x, y) = \sum_{\lambda \geqq \varkappa}^{\infty}{}_{0}\, \bar{a}_{\varkappa-\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

entsprechen. Die ν-ten „Abschnitte“ von A und $\bar{A}'$ sind die Matrizen des Grades $\nu+1$

$$A_\nu = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_\nu \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\nu-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A}'_\nu = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_\nu & \bar{a}_{\nu-1} & \bar{a}_{\nu-2} & \dots & \bar{a}_0 \end{pmatrix}$$

und $\bar{A}'_\nu A_\nu$ läßt sich deuten als die Koeffizientenmatrix der *Hermite*schen Form

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}(x_0, x_1, \dots, x_\nu) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \cdots + a_{\nu-\lambda} x_\nu|^2.$$

Auch die unendliche Matrix $\bar{A}' A$ kann in jedem Falle gebildet werden. Ihre Koeffizienten sind endliche Summen und $\bar{A}'_\nu A_\nu$ ist nichts anderes als der ν-te Abschnitt von $\bar{A}' A$.

Definieren wir in derselben Weise für die Potenzreihe $h(x) = \Sigma b_\nu x^\nu$ die Matrizen $B, B_\nu, \bar{B}', \bar{B}'_\nu$ und die *Hermite*sche Form $\mathfrak{B}_\nu$, so ist A mit B und also A_ν mit B_ν vertauschbar. Dies folgt einfach daraus, daß AB als die zur Potenzreihe

$$g(x)\, h(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \cdots$$

gehörende Matrix charakterisiert werden kann*). Daher ist auch $\bar{A}'_\nu$ mit $\bar{B}'_\nu$ vertauschbar.

Die im vorigen Paragraphen eingeführte Determinante $\delta_{\nu+1}$ kann nun zunächst in der Form

$$\delta_{\nu+1} = \begin{vmatrix} \bar{B}'_\nu, A_\nu \\ \bar{A}'_\nu, B_\nu \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Ich behaupte aber, *daß $\delta_{\nu+1}$ auch als die Determinante der Matrix $\bar{B}'_\nu B_\nu - \bar{A}'_\nu A_\nu$, d. h. als die Koeffizientendeterminante der Hermiteschen Form*

$$(13.) \qquad \mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{H}(x_0, x_1, \dots, x_\nu) = \mathfrak{B}_\nu - \mathfrak{A}_\nu$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\nu} (|b_0 x_\lambda + \cdots + b_{\nu-\lambda} x_\nu|^2 - |a_0 x_\lambda + \cdots + a_{\nu-\lambda} x_\nu|^2)$$

aufgefaßt werden kann.

Dies folgt unmittelbar aus einem einfachen Hilfssatz:

Sind P, Q, R, S vier Matrizen desselben Grades n und ist P mit R vertauschbar, so ist die Determinante $|M|$ der Matrix

*) Vergl. *O. Toeplitz*, Math. Ann. Bd. 70, S. 356.

$$M = \begin{pmatrix} P, & Q \\ R, & S \end{pmatrix}$$

des Grades $2n$ gleich der Determinante der Matrix $PS - RQ$.

Ist nämlich die Determinante von P nicht Null, so wird, wenn E die Einheitsmatrix des Grades n bedeutet,

$$\begin{pmatrix} P^{-1}, & 0 \\ -RP^{-1}, & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P, & Q \\ R, & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E, & P^{-1}Q \\ 0, & S - RP^{-1}Q \end{pmatrix}.$$

Geht man zu den Determinanten über, so erhält man

$$|P^{-1}| \cdot |M| = |S - RP^{-1}Q|,$$

also

$$|M| = |P| \cdot |S - RP^{-1}Q| = |PS - PRP^{-1}Q| = |PS - RQ|.$$

Ist aber $|P| = 0$, so betrachte man an Stelle von M die Matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} P + xE, & Q \\ R, & S \end{pmatrix}.$$

Auch hier ist noch R mit $P + xE$ vertauschbar. Für genügend kleine Werte von $|x|$ ist aber die Determinante von $P + xE$ von 0 verschieden, also wird

$$|M_1| = |(P + xE)S - RQ|.$$

Läßt man x gegen 0 konvergieren, so erhält man wieder die zu beweisende Gleichung.

Dem früher betrachteten Quotienten $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ entspricht also das unendliche System der *Hermite*schen Formen (13.) mit den Determinanten $\delta_{\nu+1}$. Ebenso gehört zu dem Quotienten

$$f_\lambda(x) = -\frac{D_\lambda(x)}{\Delta_\lambda(x)}$$

ein wohlbestimmtes System von *Hermite*schen Formen

$$\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda)} = \mathfrak{H}^{(\lambda)}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Determinante von $\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda)}$ möge mit $\delta_{\nu+1}^{(\lambda)}$ bezeichnet werden. Insbesondere ist

$$\mathfrak{H}_\nu^{(1)} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} |(\bar{b}_0 b_0 - \bar{a}_0 a_0) x_\lambda + \cdots + (\bar{b}_0 b_{\nu-\lambda} - \bar{a}_0 a_{\nu-\lambda}) x_\nu|^2$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{\nu} |(b_0 a_1 - a_0 b_1) x_\lambda + \cdots + (b_0 a_{\nu-\lambda+1} - a_0 b_{\nu-\lambda+1}) x_\nu|^2.$$

Eine einfache Rechnung liefert nun die wichtige Formel

$$(14.) \qquad \delta_1 \mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$$

$$= |\bar{b}_0(b_0 x_0 + \cdots + b_\nu x_\nu) - \bar{a}_0(a_0 x_0 + \cdots + a_\nu x_\nu)|^2 + \mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

Der Übergang von $\mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$ zu $\mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ entspricht also dem *ersten Schritt bei der Jacobischen Transformation der Form* $\mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$. Auf Grund einer bekannten Eigenschaft der *Jacobi*schen Transformation ergibt sich hieraus, daß die Determinante von $\mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ gleich $\delta_1^{\nu-1}\delta_{\nu+1}$ ist. Folglich ist

(15.) $$\delta_{\nu+1}^{(1)} = \delta_1^{\nu}\delta_{\nu+2}.$$

Hieraus können wir aber leicht schließen, daß allgemein

(16.) $$\delta_{\nu+1}^{(\lambda)} = \delta_{\lambda-1}^{\nu+1}\delta_\lambda^{\nu}\delta_{\nu+\lambda+1}$$

wird. Geht man nämlich von $f_\lambda = -\frac{D_\lambda}{\Delta_\lambda}$ zu $f_{\lambda+1}$ in derselben Weise über wie von f zu f_1, so erhält man $f_{\lambda+1}$ zunächst (vergl. (10.) und (11.)) als den Ausdruck

$$f_{\lambda+1} = -\frac{\delta_{\lambda-1}D_{\lambda+1}}{\delta_{\lambda-1}\Delta_{\lambda+1}},$$

dem die *Hermite*schen Formen $\delta_{\lambda-1}^2\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda+1)}$ entsprechen. Nimmt man daher die Formel (16.) für λ als bewiesen an, so ergibt sich wegen (15.), daß die Determinante von $\delta_{\lambda-1}^2\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda+1)}$ gleich

$$(\delta_{\lambda-1}\delta_{\lambda+1})^\nu\delta_{\lambda-1}^{\nu+2}\delta_\lambda^{\nu+1}\delta_{\nu+\lambda+2}$$

ist. Um hieraus $\delta_{\nu+1}^{(\lambda+1)}$ zu erhalten, hat man durch $\delta_{\lambda-1}^{2(\nu+1)}$ zu dividieren; man erhält dann, wie zu beweisen ist, $\delta_{\nu+1}^{(\lambda+1)} = \delta_\lambda^{\nu+1}\delta_{\lambda+1}^{\nu}\delta_{\nu+\lambda+2}$.

Wir können nun leicht beweisen:

VI. *Sind unter den Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ die n ersten von Null verschieden, die folgenden sämtlich gleich Null, so reduziert sich der Quotient $f_n(x)$ auf eine Konstante ε vom absoluten Betrage* 1, *d. h. die Potenzreihen $-D_n(x)$ und $\varepsilon\Delta_n(x)$ stimmen in allen Koeffizienten überein. Sind umgekehrt $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ von Null verschieden und reduziert sich $f_n(x)$ auf eine Konstante ε vom absoluten Betrage* 1, *so sind die Zahlen $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots$ sämtlich gleich Null.*

Auf Grund der Formel (16.) genügt es offenbar, diesen Satz nur für den Fall $n = 0$ zu beweisen. Wir haben also zu zeigen: dann und nur dann unterscheiden sich die Koeffizienten a_ν und b_ν voneinander nur um einen konstanten Faktor vom absoluten Betrage 1, wenn alle Determinanten $\delta_1, \delta_2, \ldots$ verschwinden. Ist zunächst $a_\nu = \varepsilon b_\nu$ für jedes ν und $|\varepsilon| = 1$, so wird für jeden Wert von ν die Form $\mathfrak{H}_\nu$ identisch gleich 0, daher ist gewiß $\delta_\nu = 0$. Sind umgekehrt alle δ_ν gleich 0, so folgt zunächst aus $\delta_1 = \bar{b}_0 b_0 - \bar{a}_0 a_0 = 0$, daß $\frac{a_0}{b_0} = \varepsilon$ vom absoluten Betrage 1 ist. Ich setze

$$u_\nu = a_\nu - \varepsilon b_\nu, \qquad U_\nu = A_\nu - \varepsilon B_\nu,$$

so daß also

$$\bar{b}_\nu - \varepsilon\bar{a}_\nu = -\varepsilon\bar{u}_\nu, \qquad \bar{B}'_\nu - \varepsilon\bar{A}'_\nu = -\varepsilon\bar{U}'_\nu$$

wird. Es sei schon bewiesen, daß die Differenzen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sämtlich verschwinden. Daß nun auch $u_n = 0$ ist, ergibt sich aus dem Verschwinden der Determinante

$$\delta_{2n} = \begin{vmatrix} \bar{B}'_{2n-1}, A_{2n-1} \\ \bar{A}'_{2n-1}, B_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varepsilon\bar{U}'_{2n-1}, & U_{2n-1} \\ \bar{A}'_{2n-1}, & B_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante des Grades $4n$ läßt sich nämlich in der Form

$$\delta_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & X \\ -\varepsilon\bar{X}' & 0 & 0 & 0 \\ \bar{A}'_{n-1} & 0 & B_{n-1} & Y \\ Z & \bar{A}'_{n-1} & 0 & B_{n-1} \end{vmatrix}$$

schreiben, wo

$$X = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \ldots & u_{2n-1} \\ 0 & u_n & \ldots & u_{2n-2} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$$

ist und Y, Z gewisse andere Matrizen n-ten Grades bedeuten. Daher ist

$$\delta_{2n} = |-\varepsilon\bar{X}'X\,B_{n-1}\bar{A}'_{n-1}| = (-\varepsilon)^n |u_n|^{2n} b_0^n \bar{a}_0^n = (-1)^n |b_0 u_n|^{2n},$$

was nur dann verschwinden kann, wenn $u_n = a_n - \varepsilon b_n = 0$ ist.

Genauer erkennt man in ähnlicher Weise: *sind die m ersten der Determinanten δ_ν gleich* 0 *und ist m eine gerade Zahl, so ist auch die Zahl δ_{m+1} gleich Null.*

Die durch (13.) definierte *Hermite*sche Form $\mathfrak{H}_\nu$ kann aufgefaßt werden als der ν-te Abschnitt der *Hermite*schen Form

$$\mathfrak{H} = \bar{B}'B - \bar{A}'A = \sum_{\varkappa,\lambda}{}_0^\infty h_{\varkappa\lambda}\bar{x}_\varkappa x_\lambda\,{}^{*)}$$

mit unendlich vielen Veränderlichen. Hierbei ist, wenn μ die kleinere der beiden Zahlen $\varkappa$ und λ bedeutet,

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varrho=0}^{\mu} (\bar{b}_{\varkappa-\varrho} b_{\lambda-\varrho} - \bar{a}_{\varkappa-\varrho} a_{\lambda-\varrho})$$

zu setzen. Die Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sind also die Abschnittsdeterminanten von $\mathfrak{H}$. Die Form $\mathfrak{H}$ nenne ich, wie üblich, *nichtnegativ*, wenn jede der

*) Die Summe ist als eine rein formale Bildung anzusehen, sie braucht keineswegs zu konvergieren.

Formen $\mathfrak{H}_\nu$ mit endlich vielen Veränderlichen nichtnegativ ist, und deute dies kurz durch $\mathfrak{H} \geqq 0$ an. Es gilt nun der Satz:

VII. *Die Hermitesche Form $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann nichtnegativ, wenn die Determinanten $\delta_1, \delta_2, \dots$ entweder sämtlich positiv (>0) sind, oder wenn*

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$$

wird. Im zweiten Fall ist n gleich dem Range r der unendlichen Matrix $\mathfrak{H} = (h_{\varkappa\lambda})$.

Ist zunächst $\mathfrak{H} \geqq 0$, so kann $\delta_{\nu+1}$ für jedes $\nu \geqq 0$ als die Determinante der nichtnegativen *Hermite*schen Form $\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{H}(x_0, x_1, \dots, x_\nu)$ keine negative Zahl sein. Ist hierbei $\delta_{\nu+1} > 0$, so wird $\mathfrak{H}_\nu$ eine *positive* Form, und daher ist auch $\mathfrak{H}_{\nu-1} = \mathfrak{H}(x_0, x_1, \dots, x_{\nu-1}, 0)$ positiv definit. Ihre Determinante δ_ν ist demnach auch eine positive Zahl. Dies zeigt, daß für die Zahlen $\delta_1, \delta_2, \dots$ nur eine der beiden im Satze genannten Möglichkeiten eintreten kann*).

Sind umgekehrt die Zahlen $\delta_1, \delta_2, \dots$ sämtlich positiv, so ist jede der Formen $\mathfrak{H}_\nu$ als *Hermite*sche Form mit endlich vielen Veränderlichen und lauter positiven Abschnittsdeterminanten bekanntlich positiv definit, also ist gewiß $\mathfrak{H} \geqq 0$. Es möge also der zweite Fall eintreten. Ist $n = 0$, d. h. sind die Zahlen δ_ν sämtlich gleich 0, so verschwinden nach Satz VI alle Koeffizienten $h_{\varkappa\lambda}$ von $\mathfrak{H}$ und es ist $\mathfrak{H} = 0, r = 0$. Unsere Behauptung sei nun schon bewiesen, wenn an Stelle von n die Zahl $n-1$ tritt. Wir betrachten dann an Stelle der *Hermite*schen Form $\mathfrak{H}$ die Form $\mathfrak{H}^{(1)}$, deren Abschnitte die auf S. 217 betrachteten Formen $\mathfrak{H}_\nu^{(1)}$ sind. Die zugehörigen Abschnittsdeterminanten sind wegen (15.) die Zahlen

$$\delta_1^{(1)} = \delta_2, \quad \delta_2^{(1)} = \delta_1 \delta_3, \quad \delta_3^{(1)} = \delta_1^2 \delta_4, \dots .$$

In unserem Falle wird

$$\delta_1^{(1)} > 0, \quad \delta_2^{(1)} > 0, \dots, \quad \delta_{n-1}^{(1)} > 0, \quad \delta_n^{(1)} = \delta_{n+1}^{(1)} = \cdots = 0.$$

Auf Grund der gemachten Voraussetzung ist daher $\mathfrak{H}^{(1)}$ eine nichtnegative Form des Ranges $n-1$. Die Gleichung (14.) lehrt uns nun, daß $\mathfrak{H}_\nu$ für $\nu \geqq n$ eine nichtnegative Form vom Range $1 + (n-1) = n$ ist. Damit ist der Satz VII aber vollständig bewiesen.

Wir haben am Anfang dieses Paragraphen die Zahl b_0 als reell angenommen. Man erkennt aber leicht, daß die Formel (16.) und die Sätze VI und VII auch für beliebige (von Null verschiedene) Werte von b_0 richtig sind.

---

*) Dies ist ein bekanntes Resultat aus der Theorie der *Hermite*schen Formen.

§ 6.

Umformung der Kriterien des § 3.

Aus der Formel (12.) geht hervor, daß die zum Ausdruck $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ gehörenden Parameter

$$\gamma_\nu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu) = -\frac{d_\nu}{\delta_\nu}$$

für jeden Index n dann und nur dann den Bedingungen

$$(17.) \qquad |\gamma_0| < 1, |\gamma_1| < 1, \ldots, |\gamma_{n-1}| < 1, |\gamma_n| \leqq 1$$

genügen, wenn

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} \geqq 0$$

ist. Soll hierbei $|\gamma_n| = 1$ sein und sollen außerdem noch in der Potenzreihe

$$f_n(x) = -\frac{D_n(x)}{\Delta_n(x)} = c_{n0} + c_{n1}x + c_{n2}x^2 + \cdots \qquad (c_{n0} = \gamma_n)$$

alle Koeffizienten $c_{n1}, c_{n2}, \ldots$ gleich 0 werden, so müssen nach Satz VI alle Zahlen δ_ν für $\nu \geqq n+1$ verschwinden. Diese Bedingungen sind auch hinreichend. Dies zeigt aber, daß der Satz II sich folgendermaßen aussprechen läßt:

VIII. *Die Potenzreihenentwicklung eines Ausdrucks der Form*

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}, \qquad b_0 \neq 0$$

ist dann und nur dann für $|x| < 1$ *konvergent und* $M(f) \leqq 1$, *wenn die Determinanten*

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & b_0 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & 0 & a_0 & a_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & 0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & b_0 & b_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}, \ldots$$

entweder sämtlich positiv sind, oder wenn sich eine Zahl n angeben läßt, so daß

$$\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$$

wird. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(x)$ *eine rationale Funktion der Form*

$$(18.) \qquad f(x) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x + \omega_\nu}{1 + \bar{\omega}_\nu x}, \qquad |\omega_\nu| < 1, |\varepsilon| = 1$$

darstellt.

Aus dem Satz VII folgt ferner:

VIII*. *Die Potenzreihenentwicklung des Ausdrucks* $f(x)$ *ist dann und nur dann für* $|x| < 1$ *konvergent und* $M(f) \leqq 1$, *wenn die Hermitesche Form* $\mathfrak{H} = \bar{B}'B - \bar{A}'A$ *nichtnegativ ist. Die Form* $\mathfrak{H}$ *ist dann und nur dann* *vom endlichen Range n, wenn $f(x)$ vom Range n ist, d. h. eine rationale Funktion der Form* (18.) *darstellt.*

Der Satz III läßt sich in etwas verallgemeinerter Fassung so formulieren:

IX. *Gegeben seien zwei Potenzreihen*

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu, \qquad H(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu x^\nu,$$

wobei l_0 von Null verschieden sein soll. Um zu entscheiden, ob sich bei gegebenem $m \geqq 0$ zwei andere Potenzreihen

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \qquad h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

so bestimmen lassen, daß

$$(19.) \qquad a_0 = k_0,\, b_0 = l_0, \ldots, a_m = k_m,\, b_m = l_m$$

wird und zugleich die Potenzreihe

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

für $|x| < 1$ konvergiert und der Bedingung $|f(x)| \leqq 1$ genügt, bilde man den Quotienten

$$F(x) = \frac{G(x)}{H(x)} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

und betrachte die zugehörigen Determinanten

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} \bar{l}_0 & k_0 \\ \bar{k}_0 & l_0 \end{vmatrix}, \qquad \eta_2 = \begin{vmatrix} \bar{l}_0 & 0 & k_0 & k_1 \\ \bar{l}_1 & \bar{l}_0 & 0 & k_0 \\ \bar{k}_0 & 0 & l_0 & l_1 \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_0 & 0 & l_0 \end{vmatrix}, \ldots$$

Die Aufgabe läßt dann und nur dann eine Lösung zu, wenn entweder die Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ sämtlich positiv sind oder wenn

$$(20.) \qquad \eta_1 > 0, \ldots, \eta_n > 0,\, \eta_{n+1} = \eta_{n+2} = \cdots = \eta_{m+1} = 0 \qquad (0 \leqq n \leqq m)$$

wird. Ist hierbei $n < m - 1$, so kommen noch die Bedingungen

$$(21.) \qquad \eta_{m+2} = \eta_{m+3} = \cdots = \eta_{2m-n} = 0$$

hinzu. In beiden Fällen können die Koeffizienten $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ beliebig gewählt werden. Im ersten Falle läßt die Aufgabe dann noch unendlich viele Lösungen zu. Im zweiten Falle sind $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$, wenn $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ fixiert werden, eindeutig bestimmt und die zugehörige Funktion $f(x)$ ist eine wohlbestimmte rationale Funktion der Form (18.)*).

*) Die Einführung der Koeffizienten $k_{m+1}, l_{m+1}, \ldots$ erscheint hier als überflüssig, der Beweis gestaltet sich aber etwas einfacher, wenn man den Satz so ausspricht, wie das hier geschieht. Es würde ferner genügen zu verlangen, daß $c_0 = C_0, c_1 = C_1, \ldots, c_m = C_m$ wird. Es ist jedoch zu beachten, daß die Berechnung der Koeffizienten C_ν gänzlich vermieden wird.

Beim Beweis hat man zu berücksichtigen, daß die $m+1$ ersten der zu f gehörenden Determinanten δ_ν mit den entsprechenden η_ν übereinstimmen. Die Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ hängen nur von den $2m+2$ Koeffizienten $k_0, l_0, \ldots, k_m, l_m$ ab. Auch die im zweiten Fall hinzukommenden Bedingungen (21.) liefern nur Beziehungen zwischen diesen $2m+2$ Koeffizienten. Dies ergibt sich ohne Mühe aus der auf S. 219 durchgeführten Betrachtung. Die Zahl l_0 nehmen wir, was offenbar gestattet ist, als reell an.

Aus VIII folgt zunächst, daß die Aufgabe nur dann einen Sinn hat, wenn unter den (reellen) Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ keine negativ ist, und daß, wenn eine dieser Zahlen Null ist, auch alle folgenden verschwinden müssen. Sind nun die Determinanten

$$\delta_1 = \eta_1, \delta_2 = \eta_2, \ldots, \delta_n = \eta_n \qquad (n \leq m)$$

positiv (>0), so genügen die mit Hilfe der Zahlen (19.) gebildeten Ausdrücke

$$\gamma_0 = \frac{k_0}{l_0} = \frac{a_0}{b_0}, \gamma_1 = -\frac{d_1}{\delta_1}, \ldots, \gamma_n = -\frac{d_n}{\delta_n}$$

den Bedingungen (17.) und hierbei ist dann und nur dann $|\gamma_n| = 1$, wenn $\delta_{n+1} = \eta_{n+1} = 0$ wird. Ist $n = m$ und $\eta_{m+1} > 0$, so wähle man für $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, \ldots$ beliebige Größen, die absolut ≤ 1 sind. Die Potenzreihe

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu$$

ist dann für $|x| < 1$ konvergent und $M(f) \leq 1$, ferner stimmen ihre $m+1$ ersten Koeffizienten mit den Zahlen $C_0, C_1, \ldots, C_m$ überein. Ist dann $b_\mu = l_\mu$ für $0 \leq \mu \leq m$, so hat bei beliebiger Wahl der Koeffizienten $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ die Potenzreihe $g(x) = f(x)\,h(x)$ die Eigenschaft, daß ihre $m+1$ Koeffizienten die vorgeschriebenen Werte $k_0, k_1, \ldots, k_m$ erhalten. Dieselbe Betrachtung gilt auch im Falle $n = m$, $\eta_{m+1} = 0$, wenn unter $f(x)$ die alsdann allein in Betracht kommende rationale Funktion $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ verstanden wird (vergl. den Schluß des § 3).

Es sei also $n < m$ und $\eta_{n+1} = \cdots = \eta_{m+1} = 0$. Die einzige Funktion $f(x)$, die eine Lösung der Aufgabe liefern kann, ist jetzt die rationale Funktion $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$. Es ist also zu untersuchen, ob die Koeffizienten a_ν und b_ν so gewählt werden können, daß

$$(22.) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n] \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu, \quad a_\mu = k_\mu, \; b_\mu = l_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

wird. Ist nun $n = 0$, d. h. sind alle Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ gleich 0, so wird $[x; \gamma_0] = \gamma_0$ und es wird nur verlangt, daß

$$k_1 = \gamma_0 l_1,\ k_2 = \gamma_0 l_2, \ldots, k_m = \gamma_0 l_m \qquad \left(\gamma_0 = \frac{k_0}{l_0},\ |\gamma_0| = 1\right)$$

wird. Dies tritt (vergl. S. 219) dann und nur dann ein, wenn auch die Zahlen $\eta_{m+2}, \ldots, \eta_{2m}$ sämtlich verschwinden. Es sei nun schon für ein gegebenes $n < m-1$ (bei beliebigem m) bewiesen, daß die Relationen (22.) sich dann und nur dann befriedigen lassen, wenn zu (20.) noch die Bedingungen (21.) hinzukommen, und hierbei sollen die Koeffizienten $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ beliebig gewählt werden können. Ist dann

$$\eta_1 > 0,\ \eta_2 > 0, \ldots, \eta_{n+1} > 0,\ \eta_{n+2} = \cdots = \eta_{m+1} = 0,$$

so haben wir die Relationen

$$(23.)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}] \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu,\ a_\mu = k_\mu,\ b_\mu = l_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

zu untersuchen. Wir betrachten nun die Quotienten

$$F_1 = \frac{1}{x} \frac{F - \gamma_0}{1 - \bar{\gamma}_0 F} = \frac{\Sigma k'_\nu x^\nu}{\Sigma l'_\nu x^\nu}, \qquad f_1 = \frac{1}{x} \cdot \frac{f - \gamma_0}{1 - \bar{\gamma}_0 f} = \frac{\Sigma a'_\nu x^\nu}{\Sigma b'_\nu x^\nu}, \qquad \left(\gamma_0 = \frac{k_0}{l_0} = \frac{a_0}{b_0}\right).$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} k'_\nu &= l_0 k_{\nu+1} - k_0 l_{\nu+1},\ l'_\nu = \bar{l}_0 l_\nu - \bar{k}_0 k_\nu, \\ a'_\nu &= b_0 a_{\nu+1} - a_0 b_{\nu+1},\ b'_\nu = \bar{b}_0 b_\nu - \bar{a}_0 a_\nu \end{aligned} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

zu setzen. Nimmt man schon an, daß $a_0 = k_0$, $b_0 = l_0$ ist, so gilt offenbar (23.) dann und nur dann, wenn

$$(24.)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu x^\nu = [x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}] \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_\nu x^\nu,\ a'_\mu = k'_\mu,\ b'_\mu = l'_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots m-1)$$

und außerdem noch $b'_m = l'_m$ ist. Nun treten aber beim Übergang von F zu F_1 an Stelle der Determinanten η_ν die Zahlen $\eta_\nu^{(1)} = \eta_1^{\nu-1} \eta_{\nu+1}$ (vergl. Formel (15.)). Diese Zahlen genügen also den Bedingungen

$$\eta_1^{(1)} > 0, \ldots, \eta_n^{(1)} > 0,\ \eta_{n+1}^{(1)} = \cdots = \eta_m^{(1)} = 0.$$

Auf Grund der über n gemachten Voraussetzung können wir also schließen, daß die Relationen (24.) sich dann und nur dann befriedigen lassen, wenn noch

$$\eta_{m+1}^{(1)} = \eta_{m+2}^{(1)} = \cdots = \eta_{2(m-1)-n}^{(1)} = 0$$

ist. Dies liefert, wie zu beweisen ist, für die η_ν die Bedingungen

$$\eta_{m+2} = \eta_{m+3} = \cdots = \eta_{2m-(n+1)} = 0.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so können die Koeffizienten $b'_m, b'_{m+1}, \ldots$ beliebig gewählt werden, insbesondere kann also noch angenommen werden, daß $b'_m = l'_m$ ist.

§ 7.

Beschränkte Potenzreihen und beschränkte Bilinearformen.

Eine Bilinearform

$$A(x, y) = \sum_{\varkappa, \lambda}{}_0^\infty a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = (a_{\varkappa\lambda})$ bezeichnet man bekanntlich nach *Hilbert* *) als *beschränkt*, wenn sich eine endliche Zahl m angeben läßt, so daß für alle reellen und komplexen Zahlen $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ und für jedes n

$$|A_n(x, y)| = \left|\sum_{\varkappa, \lambda}{}_0^n a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda\right| \leqq m \sqrt{\sum_{\varkappa=0}^{n} |x_\varkappa|^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{n} |y_\lambda|^2}$$

wird. Jede Zahl m, die diesen Bedingungen genügt, wird eine *obere Schranke*, die kleinste unter ihnen die *obere Grenze* $m(A)$ *von* A genannt. Ist A beschränkt, so sind die Reihen $\sum\limits_{\varkappa=0}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda}|^2$ und $\sum\limits_{\varkappa=0}^{\infty} |a_{\lambda\varkappa}|^2$ für jeden Wert von λ konvergent und ihre Summen sind höchstens gleich $(m(A))^2$. Es können daher die Matrizen

$$\bar{A}' A = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{\nu\varkappa} a_{\nu\lambda}\right), \qquad A \bar{A}' = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\varkappa\nu} \bar{a}_{\lambda\nu}\right)$$

gebildet werden. Bezeichnet man ihre Elemente mit $h_{\varkappa\lambda}$ und $h'_{\varkappa\lambda}$, so wird für jedes Wertsystem $x_0, x_1, \ldots$ mit konvergenter Summe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2$

$$\bar{A}' A = \sum_{\varkappa, \lambda}{}_0^\infty h_{\varkappa\lambda} \bar{x}_\varkappa x_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\nu\lambda} x_\lambda\right|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2,$$

$$A \bar{A}' = \sum_{\varkappa, \lambda}{}_0^\infty h'_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_{\varkappa\nu} x_\varkappa\right|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2$$

und die hier auftretenden unendlichen Reihen sind konvergent. Versteht man daher unter E die *Hermite*sche Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2$ (und auch die zugehörige unendliche Einheitsmatrix), so sind $m^2 E - \bar{A}' A$ und $m^2 E - A \bar{A}'$ nichtnegative *Hermite*sche Formen. Die Formen $\bar{A}' A$ und $A \bar{A}'$ sind wieder beschränkt und ihre oberen Grenzen sind genau gleich dem Quadrat der Zahl $m(A)$.

Weiß man umgekehrt nur, daß $\sum\limits_{\varkappa=0}^{\infty} |a_{\varkappa\lambda}|^2$ für jedes λ konvergent sind, so kann man die *Hermite*sche Matrix $\bar{A}' A = (h_{\varkappa\lambda})$ bilden. Die Bilinear-

*) Gött. Nachrichten, 1906, S. 157.

form A ist dann beschränkt und m eine obere Schranke von A, wenn die *Hermite*sche Form mit der Koeffizientenmatrix $m^2 E - \bar{A}'A$ nichtnegativ ist, d. h. wenn ihre „Abschnitte" sämtlich nichtnegative Formen sind. Um die obere Grenze $m(A)$ von A zu berechnen, hat man nur für jedes n die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x - h_{00}, & -h_{01}, \ldots, & -h_{0n} \\ -h_{10}, & x - h_{11}, \ldots, & -h_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ -h_{n0}, & -h_{n1}, \ldots, & x - h_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

zu betrachten. Ist μ_n die größte unter den (sämtlich reellen, nichtnegativen) Wurzeln dieser Gleichung, so wird $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \ldots$ und

$$m(A) = \lim_{n=\infty} \sqrt{\mu_n}\,^*).$$

Reduziert sich nun bei der früheren Betrachtung der Nenner $h(x)$ des Quotienten $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ auf eine positive Konstante m, so wird $B = mE$ und $\bar{B}'B = m^2 E$. Aus den Sätzen VIII und VIII* ergibt sich daher ohne weiteres:

X. *Die Potenzreihe*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist dann und nur dann für $|x| < 1$ *konvergent und beschränkt, wenn die Bilinearform*

$$A(x, y) = \sum_{\varkappa \leqq \lambda} a_{\lambda-\varkappa} x_\varkappa y_\lambda, \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

beschränkt ist. Die obere Grenze $M(g)$ *der Potenzreihe* $g(x)$ *ist genau gleich der oberen Grenze* $m(A)$ *der Bilinearform* A.

X*. *Setzt man für* $\varkappa \leqq \lambda$

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \bar{a}_{\varkappa-\nu} a_{\lambda-\nu}$$

und $h_{\lambda\varkappa} = \bar{h}_{\varkappa\lambda}$, *so ist* m *dann und nur dann eine obere Schranke der Potenzreihe* $g(x)$, *wenn die Hermitesche Form*

$$\mathfrak{H} = m^2 E - \bar{A}' A = m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{x}_\nu x_\nu - \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty} {}_0\, h_{\varkappa\lambda} \bar{x}_\varkappa x_\lambda = m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{x}_\nu x_\nu - \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_{\varkappa+\lambda} \right|^2$$

---

*) Dasselbe gilt auch für $A\bar{A}'$. Die hier angeführten Sätze über Bilinearformen sind mit durchaus elementaren Hilfsmitteln zu beweisen. Vergl. *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, Math. Ann., Bd. 69, S. 289, und meine Arbeit, dieses Journal, Bd. 140, S. 1.

nichtnegativ ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Abschnittsdeterminanten $\delta_1, \delta_2, \ldots$ von $\mathfrak{H}$ entweder sämtlich positiv (>0) sind, oder wenn die n ersten unter ihnen positiv, die folgenden alle Null sind. Notwendig und hinreichend für das Eintreten des zweiten Falles ist, daß $g(x)$ eine rationale Funktion der Form

$$g(x) = c \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x+\omega_\nu}{1+\bar{\omega}_\nu x}, \qquad |\omega_\nu| < 1, \; |c| = m$$

darstellt. Die Zahl n gibt hierbei zugleich den Rang der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}$ an.

Verzichtet man darauf, die Bedeutung des Ranges der Form $\mathfrak{H}$ und das Verhalten der Determinanten δ_ν zu charakterisieren, so kann man den Satz X ohne Mühe direkt beweisen.

Nimmt man an, daß die Potenzreihe $g(x)$ für $|x| < 1$ konvergent und $|g(x)| \leqq m$ ist, so betrachte man eine zweite Potenzreihe

$$u(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu,$$

von der nur verlangt wird, daß $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2$ konvergieren soll. Setzt man

$$g(x)\, u(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu x^\nu, \quad v_\nu = a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu-1} + \cdots + a_\nu u_0,$$

so wird bekanntlich für $0 \leqq r < 1$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 r^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\varphi})\, u(re^{i\varphi})|^2 d\varphi. \tag{25.}$$

Da aber $|g(re^{i\varphi})| \leqq m$ ist, so folgt hieraus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 r^{2\nu} \leqq \frac{m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2 r^{2\nu} \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2.$$

Für $u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots = 0$ wird daher

$$\sum_{\nu=0}^{n} |v_\nu|^2 r^{2\nu} \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Läßt man r gegen 1 konvergieren, so erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{n} |v_\nu|^2 = \sum_{\nu=0}^{n} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu-1} + \cdots + a_\nu u_0|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Schreibt man in dieser Formel, die für beliebige Größen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ gilt, u_ν an Stelle von $u_{n-\nu}$, so geht sie über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2. \tag{26.}$$

Weiß man umgekehrt, daß diese Ungleichung für jedes n und für jedes Wertsystem $u_0, u_1, u_2, \ldots$ gilt, so erhält man insbesondere für $u_\nu = \bar{a}_\nu$

$$|a_0\bar{a}_0 + a_1\bar{a}_1 + \cdots + a_n\bar{a}_n|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2,$$

d. h. $\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2 \leqq m^2$. Da dies für jedes n gilt, so ergibt sich, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2$ konvergiert und daher ist auch $g(x)$ für $|x| < 1$ konvergent. Zugleich erkennt man auf Grund einer bekannten Regel, daß auch die Reihen

$$a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

konvergent sind, sobald nur $\Sigma |u_\nu|^2$ konvergiert. Aus (26.) folgt nun für $n' \leqq n$

$$\sum_{\nu=0}^{n'} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Hält man n' fest und läßt n über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{n'} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2,$$

folglich ist auch

$$(27.) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2.$$

Setzt man hier nun, wenn $|x| < 1$ ist, $u_\lambda = x^\lambda$, so erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |x|^{2\nu} \left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda\right|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |x|^{2\nu},$$

d. h. $|g(x)|^2 \leqq m^2$.

Die Potenzreihe $g(x)$ ist also dann und nur dann für $|x| < 1$ konvergent und $|g(x)| \leqq m$, wenn die Ungleichungen (26.) für alle n und für alle Wertsysteme $u_0, u_1, \ldots$ bestehen. Diese Relationen besagen aber nur, daß jeder Abschnitt von $m^2 E - \bar{A}' A$ nichtnegativ ist, oder was dasselbe ist, daß die Bilinearform A beschränkt und $m(A) \leqq m$ ist.

§ 8.
Der *Carathéodory-Toeplitz*sche Satz.

Durch die lineare Transformation

$$w' = \frac{1-w}{1+w}, \qquad w = \frac{1-w'}{1+w'}$$

geht die Halbebene $\Re(w) > 0$ in den Einheitskreis $|w'| < 1$ über und der Kreis $|w| < 1$ in die Halbebene $\Re(w') > 0$. Soll sich daher eine Funktion $\varphi(x)$ für $|x| < 1$ regulär verhalten und einen positiven reellen Bestandteil haben, so muß

$$f(x) = \frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}$$

für $|x| < 1$ regulär und $|f(x)| < 1$ sein. Auch das Umgekehrte ist richtig. Ist insbesondere $\varphi(x)$ als Quotient zweier Potenzreihen

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \qquad h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \qquad (b_0 \neq 0)$$

gegeben, so wird

$$f(x) = \frac{h(x) - g(x)}{h(x) + g(x)}.$$

Werden nun wie auf S. 215 den Potenzreihen $g(x)$ und $h(x)$ die Matrizen (Bilinearformen) A und B zugeordnet, so gehören zu $h(x) - g(x)$ und $h(x) + g(x)$ die Matrizen $B - A$ und $B + A$. Um nun zu entscheiden, ob $\varphi(x)$ für $|x| < 1$ regulär ist und einen positiven reellen Bestandteil hat, ist nach dem Früheren nur die *Hermite*sche Form mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{H} = (\bar{B}' + \bar{A}')(B + A) - (\bar{B}' - \bar{A}')(B - A) = 2(\bar{B}'A + \bar{A}'B)$$

zu betrachten. Setzt man speziell $h(x) = 1$, so wird $B = E$ und $\mathfrak{H} = 2(A + \bar{A}')$.

Auf Grund der Sätze VIII und VIII* ergibt sich daher unmittelbar:

XI. *Die Potenzreihe*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_0 = a_0' + a_0'' i)$$

ist dann und nur dann für $|x| < 1$ *konvergent und der reelle Bestandteil von* $\varphi(x)$ *positiv, wenn die Hermitesche Form*

$$H = A + \bar{A}' = \sum_{\lambda \geq \varkappa} (a_{\lambda-\varkappa} x_\varkappa \bar{x}_\lambda + \bar{a}_{\lambda-\varkappa} x_\lambda \bar{x}_\varkappa) \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

nichtnegativ ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß die Abschnittsdeterminanten

$$\delta_1 = 2a_0', \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 2a_0', & a_1 \\ \bar{a}_1, & 2a_0' \end{vmatrix}, \qquad \delta_3 = \begin{vmatrix} 2a_0', & a_1, & a_2 \\ \bar{a}_1, & 2a_0', & a_1 \\ \bar{a}_2, & \bar{a}_1, & 2a_0' \end{vmatrix}, \ldots$$

von H entweder sämtlich positiv (> 0) *sind oder*

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$$

wird. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $\varphi(x)$ eine rationale Funktion der Form

$$(28.) \qquad \varphi(x) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}, \qquad f(x) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x + \omega_\nu}{1 + \bar{\omega}_\nu x} \qquad (|\omega_\nu| < 1, |\varepsilon| = 1)$$

ist. Die Zahl n gibt hierbei zugleich den Rang der Form H an.

Dies ist der in der Einleitung erwähnte *Carathéodory*sche Satz in der *Toeplitz*schen Fassung*). Herr *Carathéodory* charakterisiert jedoch im Grenzfall eines endlichen Ranges die Ausnahmefunktionen (28.) anders, nämlich als rationale Funktionen, die eine Partialbruchzerlegung der Form

$$(29.)\qquad \varphi(x) = bi - \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{x+\varepsilon_\nu}{x-\varepsilon_\nu}$$

zulassen, wobei b reell, die ε_ν voneinander verschieden und vom absoluten Betrage 1 sind und die r_ν positive reelle Zahlen bedeuten.

Eine Funktion vom Typus (28.) läßt sich offenbar kennzeichnen als ein Ausdruck der Form

$$(30.)\qquad \varphi(x) = \frac{P-Q}{P+Q},$$

wo Q ein Polynom n-ten Grades ist, das nur im Innern des Einheitskreises Null wird, und $P(x) = x^n \bar{Q}(x^{-1})$ zu setzen ist. Die *Carathéodory*sche Formel (29.) liefert also den rein algebraischen Satz:

XII. *Ist*

$$Q(x) = a \prod_{\nu=1}^{n} (x + \omega_\nu)$$

ein Polynom n-ten Grades, dessen Nullstellen sämtlich innerhalb des Einheitskreises liegen, und setzt man $P(x) = x^n \bar{Q}(x^{-1})$, so sind die n Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ der Gleichung

$$(31.)\qquad F(x) = P(x) + Q(x) = 0$$

*voneinander verschieden und auf dem Einheitskreis gelegen**). Schreibt man ferner die Partialbruchzerlegung des Ausdrucks* (30.) *in der Form*

$$(32.)\qquad \frac{P-Q}{P+Q} = c - \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{x+\varepsilon_\nu}{x-\varepsilon_\nu},$$

so wird die Konstante c rein imaginär und die Koeffizienten r_ν sind reell und positiv.

Dieser Satz läßt sich leicht auch direkt beweisen. Zunächst folgt

---

*) Daß der Rang n der (nichtnegativen) Form H allein mit Hilfe der δ_ν bestimmt werden kann, wird in den auf S. 205 zitierten Abhandlungen nicht ausdrücklich hervorgehoben. Einen einfachen Beweis hierfür hat mir Herr *Carathéodory* bereits im Jahre 1911 brieflich mitgeteilt.

**) Allgemeiner liegen die Wurzeln der Gleichung $P(x) + \lambda\, Q(x) = 0$ für $|\lambda| < 1$ außerhalb, für $|\lambda| > 1$ innerhalb und für $|\lambda| = 1$ auf der Peripherie des Einheitskreises. Im letzteren Falle hat die Gleichung keine mehrfachen Wurzeln.

aus $F(x) = x^n \bar{F}(x^{-1})$, daß zugleich mit ε_ν auch $\bar{\varepsilon}_\nu^{-1}$ eine Wurzel der Gleichung (31.) ist. Innerhalb des Einheitskreises kann $F(x)$ aber nicht verschwinden. Denn $\frac{Q}{P}$ hat in diesem Kreise keinen Pol und ist für $|x| = 1$ vom absoluten Betrage 1. Für $|x| < 1$ ist daher

$$|F(x)| \geqq |P(x)| - |Q(x)| > 0.$$

Da ferner aus $|\varepsilon_\nu| > 1$ folgen würde, daß $|\bar{\varepsilon}_\nu^{-1}| < 1$ ist, muß $|\varepsilon_\nu| = 1$ sein. Aus $P(\varepsilon_\nu) = -Q(\varepsilon_\nu)$ ergibt sich noch

$$\frac{F'(\varepsilon_\nu)}{P(\varepsilon_\nu)} = \frac{P'(\varepsilon_\nu)}{P(\varepsilon_\nu)} - \frac{Q'(\varepsilon_\nu)}{Q(\varepsilon_\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_\nu + \bar{\omega}_\lambda^{-1}} - \frac{1}{\varepsilon_\nu + \omega_\lambda}\right) = -\varepsilon_\nu^{-1} s_\nu,$$

wobei s_ν in der Form

$$s_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1 - \omega_\lambda \bar{\omega}_\lambda}{|\varepsilon_\nu + \omega_\lambda|^2}$$

geschrieben werden kann. Diese Zahl ist aber wegen $|\omega_\lambda| < 1$ reell und positiv. Daher ist $F'(\varepsilon_\nu)$ nicht Null, die ε_ν sind also voneinander verschieden. Bringt man nun den Ausdruck (30.), was jedenfalls möglich ist, auf die Form (32.), so wird

$$-2\varepsilon_\nu r_\nu = \frac{P(\varepsilon_\nu) - Q(\varepsilon_\nu)}{P'(\varepsilon_\nu) + Q'(\varepsilon_\nu)} = \frac{2P(\varepsilon_\nu)}{F'(\varepsilon_\nu)} = -\frac{2\varepsilon_\nu}{s_\nu}.$$

Daher ist $r_\nu = \frac{1}{s_\nu}$ eine positive reelle Zahl. Setzt man nun in (32.) für x irgendeine (von den ε_ν verschiedene) Zahl vom absoluten Betrage 1 ein, so wird der links stehende Ausdruck und jedes Glied der rechts stehenden Summe rein imaginär. Folglich ist auch c eine rein imaginäre Größe.

Wir haben hier den Satz XI aus dem scheinbar allgemeineren Satze VIII gefolgert. Man kann aber auch leicht diesen Satz mit Hilfe des Satzes XI beweisen.

Ist nämlich $\varphi(x)$ nicht als eine Potenzreihe, sondern wie am Anfang dieses Paragraphen als Quotient zweier Potenzreihen $g(x)$ und $h(x)$ gegeben und sind wieder A und B die zugehörigen Matrizen, so denke man sich $\varphi(x)$ nach Potenzen von x entwickelt. Die dieser Potenzreihe entsprechende Matrix C ist, wie aus $A = CB$ folgt (vergl. S. 216), nichts anderes als die Matrix AB^{-1} *). Hierbei ist zu beachten, daß B als „Dreiecksmatrix", die in der Hauptdiagonale nur die von Null verschiedene Zahl b_0 enthält, eine eigentliche Inverse besitzt. Um nun zu entscheiden, ob die Potenz-

*) Vergl. *O. Toeplitz*, Math. Ann. Bd. 70, S. 357.

reihe $\varphi(x)$ für $|x|<1$ konvergiert und einen positiven reellen Bestandteil besitzt, hat man nur die *Hermite*sche Form

$$H = C + \bar{C}' = AB^{-1} + (\bar{B}')^{-1}\bar{A}'$$

zu betrachten. Diese Form ist aber dann und nur dann nichtnegativ, wenn

$$\bar{B}'HB = \bar{B}'A + \bar{A}'B$$

diese Eigenschaft besitzt*). Außerdem multipliziert sich beim Übergang von H zu $\bar{B}'HB$ die ν-te Abschnittsdeterminante δ_ν von H nur mit dem positiven Faktor $|b_0|^{2\nu}$.

Ist nun ferner ein Quotient $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ zweier Potenzreihen gegeben und will man entscheiden, ob die zugehörige Potenzreihenentwicklung für $|x|<1$ konvergiert und der Bedingung $|f(x)|<1$ genügt, so hat man nur zu untersuchen, ob die Reihenentwicklung von

$$\varphi(x) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{h(x)-g(x)}{h(x)+g(x)}$$

für $|x|<1$ konvergiert und einen positiven reellen Bestandteil besitzt. Sind aber wieder A und B die zu $g(x)$ und $h(x)$ gehörenden Matrizen, so hat man bei $\varphi(x)$ die *Hermite*sche Form

$$(\bar{B}' + \bar{A}')(B - A) + (\bar{B}' - \bar{A}')(B + A) = 2(\bar{B}'B - \bar{A}'A)$$

zu betrachten. Auf Grund dieser Gleichung und der vorhin über die Abschnittsdeterminanten gemachten Bemerkung schließt man nun ohne weiteres, daß aus dem Satz XI die Sätze VIII und VIII* folgen.

Es ist auch leicht zu sehen, wie der Satz IX des vorigen Paragraphen abzuändern ist, wenn man an Stelle der Funktionen $f(x)$, die der Bedingung $|f(x)| \leqq 1$ (für $|x|<1$) genügen sollen, die Funktionen $\varphi(x)$ mit positivem reellem Teil betrachtet. Man erhält auf diese Weise einen weiteren Satz von *C. Carathéodory* (Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 207 ff.) in etwas verallgemeinerter Fassung.

Berlin, im September 1916.

---

*) Man erkennt leicht, daß in unserem Fall mit den unendlichen Matrizen in dieser Weise operiert werden darf.