Werk

Titel: Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allge...

Autor: Koebe, Paul

Jahr: 1915

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0145|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung.

(*H. A. Schwarz* zu seinem 50-jährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 zugeeignet.)

Von Herrn *Paul Koebe* in Leipzig.

I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.

A. Einleitung.

In vorliegender Abhandlung, welche als erste einer der Kette meiner spezifischen Uniformisierungsarbeiten*) parallellaufenden selbständigen Serie von Arbeiten gedacht ist, bringe ich zunächst (erster Teil) die von mir als „*Schmiegungsverfahren*“ bezeichnete, in den Gött. Nachr. 1912**) vorläufig skizzierte Methode der konformen Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf eine Kreisfläche zur ausführlichen Entwickelung. Der abzubildende, einfach zusammenhängende Bereich wird zunächst auf einen innerhalb des Einheitskreises befindlichen Bereich abgebildet, was immer durch Anwendung linearer Transformationen,

*) Ich verweise insbesondere auf meine Arbeiten „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven“ und „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“ in Math. Ann. Bd. 67, 69, 72, 75 bezw. dieses Journal, Bd. 138, 139, Annali di Matematica Bd. 21 (*Lagrange*-Festband II), Leipziger Berichte 1914, Jahresbericht der D. M. V. 1913 (Referat), ferner auf die darauf Bezug nehmenden Veröffentlichungen: *Osgood:* „Lehrbuch der Funktionentheorie“ (2. Auflage, Teubner 1912), *Study:* „Vorlesungen über Geometrie“, Bd. II (Teubner 1913), *Weyl:* „Die Idee der *Riemann*schen Fläche“ (Teubner 1913), *Fricke-Klein:* „Vorlesungen über automorphe Funktionen“ Bd. II, Schlußlieferung (Teubner 1912). Wegen ausführlicherer Literaturangaben sei verwiesen auf die Zusammenstellungen in meinen genannten Annalenarbeiten und in genanntem Referat.

**) „Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung.“ Nachr. d. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1912, S. 844 ff.

eventuell unter Hinzuziehung einer Quadratwurzeloperation möglich ist. Nunmehr wird auf den Bereich, der den Nullpunkt enthaltend vorgestellt wird, eine den Nullpunkt fest lassende, unendliche Folge von Quadratwurzeloperationen angewandt, welche eine immer stärkere Anschmiegung der Begrenzung an die Peripherie des Einheitskreises bewirken und in der Grenze die gesuchte Abbildung liefern.

Im Fall des zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs (zweiter Teil) handelt es sich um die konforme Abbildung auf die Fläche eines Kreisrings, wobei grundsätzlich neue Schwierigkeiten, die nochmalige Konvergenzbetrachtungen nötig machen, nicht auftreten.

Schließlich gibt (dritter Teil) die Frage der Ränderzuordnung bei der konformen Abbildung zu einer besonderen Untersuchung Anlaß, eine Frage, welche bei den im ersten und zweiten Teile gegebenen Existenzbeweisen ganz außer Betracht blieb. Hier handelt es sich nun einerseits um die Gewinnung der alten *Schwarz*schen Resultate über die Ränderzuordnung im Falle analytischer Begrenzung einschließlich der Stetigkeit in Ecken und Spitzen (*Schwarz-Picard*), andererseits um die Gewinnung der mehr der abstrakten Sphäre angehörenden neueren allgemeinen Resultate von *Osgood*, (*Fatou*), *Study*, *Carathéodory*, auf welche ich meinerseits bereits in einer kleinen vorläufigen Note in den Gött. Nachrichten 1913 eingegangen bin, und welche hier eine wohl kaum noch weiterer Vereinfachung fähige Entwickelung finden.

Die in vorliegender Abhandlung behandelten Probleme und gewonnenen Hauptresultate erheben, wie aus dem Gesagten bereits hervorgeht, als solche nicht den Anspruch auf Neuheit*). Sie wollen vielmehr durch die Methode der Behandlung gewürdigt werden. Als ein Charakteristikum dieser Methode hebe ich die vollständige (abgesehen von § 12) Vermeidung des Integralbegriffs hervor, so daß die ganze Beweisführung auf die allgemeinen elementaren Grundlagen der Potenzreihentheorie gestellt und insofern die vorgetragene Theorie der *Weierstraß*schen Funktionentheorie eingeordnet erscheint. Es ist von prinzipiellem Interesse, die hiermit bezeichnete Forderung in möglichst weitem Umfange zur Durchführung

*) Die erste Behandlung der Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs gibt *Osgood* in Trans. of the Am. Math. Soc., 1900. Dieselbe fußt wesentlich auf vorausgegangenen Entwicklungen von *Schwarz* und *Poincaré*.

zu bringen und dadurch eine immer tiefere Durchdringung *Riemann*schen und *Weierstraß*schen Geistes in der Funktionentheorie herbeizuführen*).

Häufigen Gebrauch mache ich im folgenden von dem Satze, daß eine von einer Konstanten verschiedene analytische Funktion $f(z)$ an einer regulären Stelle z_0 kein Maximum des absoluten Betrages liefern kann sowie kein Minimum des absoluten Betrages, falls sie in z_0 nicht geradezu den Wert Null hat, ferner kein Maximum oder Minimum der Werte des reellen Teiles von $f(z)$. Diese Sätze sind alle aus dem Potenzreihenbegriff sofort erhältlich. Man braucht nur in bekannter Weise den Funktionswert als Summe von drei Bestandteilen darzustellen in der Weise $F(z) = F(z_0) + a_n(z-z_0)^n + (z-z_0)^{n+1} \cdot \bar{F}(z)$, unter a_n eine von Null verschiedene Konstante verstehend, unter n eine ganze positive Zahl $\geqq 1$ und unter $\bar{F}(z)$ eine in z_0 reguläre Funktion. Beschränkt man sich auf eine hinreichend kleine Nachbarschaft der Stelle z_0, so wird der dritte Bestandteil, absolut genommen, kleiner als der zweite Bestandteil, absolut genommen, und daher wird das zweite Glied für die erwähnten, den genannten vier Sätzen entsprechend zu treffenden Entscheidungen das ausschlaggebende, sofern man die Richtung des die Größe $a_n(z-z_0)^n$ repräsentierenden Vektors im ersten Falle mit der des Vektors $F(z_0)$ übereinstimmend wählt, im zweiten Falle dieser Richtung entgegengesetzt, im dritten Falle

*) In dieser Beziehung will ich neben meiner dritten Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (Gött. Nachr. 1908), in welcher ich zuerst den Nutzen eines *„allgemeinen Konvergenzprinzips"* für die konforme Abbildung gezeigt habe, noch besonders auf meine Note „zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung" in den Leipziger Berichten (1914) hinweisen, in welcher u. a. eine Lösung des allgemeinen Uniformisierungsproblems in dem bezeichneten Sinne mitgeteilt ist. In gewissem Umfange findet sich die Tendenz auch bei *Gauß* (arithmetisch-geometrisches Mittel), *Schwarz* (Züricher Programmschrift 1869/70, Ges. Abh. Bd. II, S. 108 ff.), *Poincaré* (Acta math. Bd. IV), *Schlesinger* (dieses Journ. Bd. 105 und 110, Ann. de l'École Normale Bd. 20, 1903), *Carathéodory* (Math. Ann. Bd. 72, 1912), jedoch nicht mit dem Bewußtsein einer allgemeinen Richtung gebenden Idee. In der gemeinten Abhandlung des letzteren, deren Titel wegen ihrer näheren Beziehung zum Gegenstande der vorliegenden Abhandlung hier noch aufgeführt werde: „Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten", bildet das erwähnte „allgemeine Konvergenzprinzip" (S. 120) ebenfalls den Hauptbeweisgrund. Übrigens findet dieses oft bequeme Prinzip in vorliegender Abhandlung keine Anwendung.

übereinstimmend mit der positiven Richtung der Achse des Reellen, im vierten Falle dieser Richtung entgegengesetzt.

B. Erster Teil.

Konforme Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreises. Das Schmiegungsverfahren.

§ 1.

Vorbereitungen.

Es sei B ein beliebiger, einfach zusammenhängender Bereich der z-Ebene, welcher jedoch nicht mit der ganzen z-Ebene, einschließlich des unendlich fernen Punktes, identisch sein soll und dessen ganze Begrenzung nicht nur von einem einzigen Punkte gebildet sein möge. Wir verstehen unter dem Bereich B bei strenger Definition im folgenden lediglich die Gesamtheit der eigentlichen inneren Punkte, deren einzelner stets zugleich mit einer vollen Umgebung zum Bereiche gehört. Die übrigen Punkte der z-Ebene sind dann entweder Grenzpunkte des Bereichs oder äußere Punkte, je nachdem es in beliebiger Nähe eines derartigen Punktes noch Punkte des Bereichs, d. i. innere Punkte gibt oder nicht. Ein Häufungspunkt von Grenzpunkten ist stets wieder ein Grenzpunkt, und die Gesamtheit der Grenzpunkte bildet ein zusammenhängendes Kontinuum, die Grenze des Bereichs B, ein Kontinuum, welches selbst nicht den Charakter eines Bereichs hat, d. h. keinen Punkt besitzt, von welchem eine vollständige Umgebung zum Kontinuum gehört. Die zu lösende Aufgabe ist nun die folgende:

Formulierung des Abbildungsproblems: Es soll eine in B eindeutige, reguläre analytische Funktion $z' = f(z)$ gefunden werden, welche an je zwei Stellen des Bereichs B voneinander verschiedene Werte annimmt und dadurch eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf das vollständige Innere des Einheitskreises vermittelt. —

Für die oben ausgeschlossenen Fälle (Vollebene und einfach punktierte Ebene) besitzt die soeben formulierte Abbildungsaufgabe sicher keine Lösung, wie man sofort erkennt aus dem Umstande, daß nach eventueller Verlegung der Punktierung in den unendlich fernen Punkt der z-Ebene $f(z)$ eine reguläre analytische Funktion wäre, deren Werte dem absoluten Be-

trage nach unterhalb 1 bleiben. Diese Funktion müßte sich daher auf eine Konstante reduzieren. Der hier benutzte Hilfssatz, daß eine für alle endlichen Werte der unabhängigen Variablen z reguläre, eindeutige analytische Funktion $F(z)$, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, sich auf eine Konstante reduziert, wird potenzreihentheoretisch am einfachsten folgendermaßen bewiesen: Die Funktion $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$ ist für alle endlichen z regulär und wird bestimmt unendlich klein, wenn z unendlich groß wird. Diese Funktion würde demnach im Endlichen ein Maximum ihres absoluten Betrages erreichen, wenn sie nicht identisch verschwindet. —

In dem von uns zugrunde gelegten allgemeinen Falle läßt sich sofort zeigen, daß die zu bestimmende Funktion, sofern sie überhaupt existiert, abgesehen von einer linearen Transformation, die das Innere des Einheitskreises in sich überführt, vollständig bestimmt ist, und daß daher die Abbildungsaufgabe dadurch zu einer vollständig bestimmten gemacht werden kann, daß man vorschreibt, ein gegebener Punkt z_0 in B solle in einen ebenfalls gegebenen Punkt z_0' innerhalb des Einheitskreises übergehen und eine in z_0 gegebene Fortgangsrichtung in eine in z_0' gegebene Fortgangsrichtung. Der Beweis dieses Unitätssatzes reduziert sich darauf, zu zeigen, daß eine umkehrbar eindeutige Transformation $z' = \varphi(z)$ des Inneren des Einheitskreises auf sich selbst, bei welcher der Nullpunkt fest bleibt, die Form $e^{i\alpha} \cdot z$ hat, d. h. geometrisch gesprochen, eine Drehung der z-Ebene mit dem Nullpunkt als Fixpunkt darstellt. Es ist nämlich*) $\frac{\varphi(z)}{z}$ eine für $|z|<1$ reguläre und stets von Null verschiedene Funktion, deren absoluter Betrag auf dem Kreise $|z| = 1-\varepsilon$ und daher auch für alle Punkte $|z|<1-\varepsilon$ zwischen $1+\eta$ und $1-\eta$ liegt, unter η eine zugleich mit ε unendlich klein werdende positive reelle Größe verstanden. Unter diesen Umständen kann $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ für den einzelnen Punkt der Fläche $|z|<1$ nur den Wert 1 haben, muß also konstant gleich 1 sein, was bei einer regulär analytischen Funktion nur möglich ist, wenn sie selbst eine Konstante ist, d. h. $\frac{f(z)}{z} \equiv c$, unter c eine reelle oder komplexe Konstante vom absoluten Betrage 1 verstanden.

*) Vgl. *Poincaré*, Acta math. Bd. 4, 1883, pag. 232.

Die von uns nunmehr in Angriff zu nehmende Aufgabe der konformen Abbildung des gegebenen Bereichs B auf das Innere des Einheitskreises werden wir durch unendlich viele Quadratwurzeloperationen bewirken, welche wir zweckmäßig als die *Schmiegungsoperationen* bezeichnen, weil die wesentliche Eigenschaft der einzelnen dieser Operationen die ist, eine Verstärkung der Anschmiegung der Begrenzungslinie des jeweilig abzubildenden Bereichs an die Peripherie des Einheitskreises, und zwar vom Innern her zu bewirken.

Als *erste vorbereitende Schmiegungsoperation* definieren wir eine solche, welche bewirkt, daß der Bereich B eineindeutig konform abgebildet wird auf einen Bereich B_1, welcher vollständig im Innern des Einheitskreises liegt und den Nullpunkt enthält*).

Besitzt der Bereich B einen äußeren Punkt z_0, so genügt offenbar eine lineare Transformation der Form $\frac{a}{z-z_0}$, unter a eine hinreichend klein zu wählende Konstante verstanden. Besitzt B keinen äußeren Punkt, was z. B. bei einem Schlitzbereiche (ganze längs eines Schlitzes aufgeschnittene Ebene) der Fall ist, so ist die Anwendung einer Quadratwurzel erforderlich. Es seien a und b irgend zwei voneinander verschiedene Grenzpunkte des Bereichs B. Bilden wir dann mit der Funktion $z' = \frac{z-a}{z-b}$ den Bereich konform ab, so werden 0 und ∞ Grenzpunkte des neuen Bereichs B'. Wird nunmehr die Operation $\sqrt{z'}$ auf den Bereich B' angewandt, so ergibt sich ein Bereich B'', welcher sicher äußere Punkte aufweist. Denn zunächst ist die Funktion $\sqrt{z'}$ nach Fixierung irgendeines Ausgangswertes in B' eindeutig, weil sie in B' unverzweigt ist und weil B' einfach zusammenhängend ist. Ist nun z_0' irgendein Punkt in B', so wird dort ein Wert $\sqrt{z_0'}$ angenommen, und folglich kann der Wert $-\sqrt{z_0'}$ von der betrachteten Funktion in B' nicht angenommen werden, einerseits wegen der Eindeutigkeit der Funktion $\sqrt{z'}$ in B' und andererseits deswegen, weil der Wert $-\sqrt{z_0'}$ nur an der Stelle z_0' angenommen werden kann. Dasselbe gilt von den Werten $-\sqrt{z'}$ einer gewissen Umgebung der Stelle z_0'. Damit ist gesagt, daß B'' ein zweidimensionales Stück der Ebene unbe-

*) Vgl. die analogen Bemerkungen, welche ich in Gött. Nachr. 1907 S. 644 mache.

deckt läßt, d. h. äußere Punkte besitzt und nunmehr seinerseits mittelst einer linearen Transformation auf einen Bereich B_1 abgebildet werden kann, welcher innerhalb des Einheitskreises liegt.

Unser oben gestelltes Abbildungsproblem reduziert sich somit, wenn nochmals zwei lineare Transformationen des Einheitskreises in sich zu Hilfe genommen werden, auf folgendes Abbildungsproblem: *Einen einfach zusammenhängenden schlichten Bereich B_1 innerhalb des Einheitskreises mit dem Nullpunkt als innerem Punkt konform auf das vollständige Innere des Einheitskreises abzubilden in der Weise, daß der Nullpunkt und die positiv reelle Fortgangsrichtung R im Nullpunkte fest bleiben.*

Vermöge des Übergangs vom Bereich B (z-Ebene) zum Bereiche B_1 (z_1-Ebene) sind wir in der Lage, in allen Fällen festzustellen, daß eine Abbildung des von mehr als *einem* Punkte begrenzten einfach zusammenhängenden Bereichs B auf die im Unendlichen punktierte Ebene (Z-Ebene) nicht möglich ist; denn es wäre $z_1(Z)$ eine für alle endlichen Z eindeutige reguläre und beschränkte Funktion, die sich somit auf eine Konstante reduzieren müßte. Dasselbe Resultat ergibt sich uns übrigens auch ohne Bezugnahme auf den Bereich B_1 folgendermaßen: Es sei z_0 ein endlicher Punkt von B, dem der Punkt Z_0 bei der hypothetischen Abbildung entspreche. Dann ist $\frac{1}{z-z_0}$ eine in der Form $\frac{C}{Z-Z_0} + \mathfrak{P}(Z-Z_0)$ an der Stelle Z_0 entwickelbare Funktion von Z. Es ist sodann $\frac{1}{z-z_0} - \frac{C}{Z-Z_0}$ eine für alle endlichen Z reguläre Funktion, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, mithin eine Konstante; also wäre z eine ganze oder gebrochene lineare Funktion von Z; also wäre B ein Bereich, dessen vollständige Begrenzung sich auf einen Punkt reduzieren müßte, wie die Begrenzung der punktierten Z-Ebene. Vom Bereiche B war jedoch vorausgesetzt worden, daß seine Begrenzung sich nicht auf einen Punkt reduzieren soll.

§ 2.

*Das Schmiegungsverfahren und die Schmiegungswirkung desselben**).

Wir definieren nunmehr eine unendliche Folge von eineindeutigen

*) Vgl. die Voranzeige in Gött. Nachr. 1912, S. 844ff. Vgl. ferner wegen verschiedener Beweiselemente: Gött. Nachr. 1907, S. 203 u. 644; Math. Ann. Bd. 67, S. 209 u. 216; dieses Journ. Bd. 139, S. 261.

konformen Abbildungen, von welchen die erste den Bereich B_1 unter Festhaltung des Richtungselements R in einen Bereich B_2, die zweite den Bereich B_2 unter Festhaltung von R in einen Bereich B_3 überführt und so weiter. Alle sich ergebenden Bereiche $B_1, B_2, \ldots$ sind innerhalb des Einheitskreises enthalten, und es mögen, unter z_1 einen in B_1 variablen Punkt verstanden, die sich ergebenden, den genannten Bereichen angehörenden Bildpunkte von z_1 mit $z_2, z_3, \ldots$ bezeichnet werden. Wird mit $1-\delta_n$ der Radius der größten Kreisfläche K_n mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt bezeichnet, welcher vollständig in B_n enthalten ist, mit δ_n demnach die Breite des vom Einheitskreise als äußerem Begrenzungskreis und vom Kreise K_n als innerem Kreis gebildeten Kreisrings R_n, so wird sich für die Bereiche B_n die Haupteigenschaft ergeben

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots; \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0;$$

d. h. die Bereiche $B_1, B_2, B_3, \ldots$ schmiegen sich mit ihren Begrenzungslinien $L_1, L_2, L_3, \ldots$ mehr und mehr der Peripherie des Einheitskreises an. Die Bereiche B_n selbst gehen also schließlich in die vollständige Fläche des Einheitskreises über.

Der Bereich B_{n+1} wird allgemein aus dem Bereiche B_n in folgender Weise gefunden. Es wird auf der Linie L_n der dem Nullpunkte am nächsten liegende Punkt α_n aufgesucht. Gibt es mehr als einen solchen Punkt, so genügt es, irgendeinen derselben zu wählen. Wir wollen etwa, um einen bestimmten erklärt zu haben, sagen: wir wählen stets den von größter Amplitude, wobei wir für die Amplitudenbestimmung nur die Werte zwischen $-\pi$ und $+\pi$ zulassen. Nunmehr erweitern wir die Fläche des Bereichs B_n zu einem Windungsflächenstücke W_n erster Ordnung mit dem Punkte α_n als Windungspunkt und dem zweifach durchlaufen zu denkenden Einheitskreise als Begrenzungslinie. Die Fläche W_n ist ebenso wie B_n einfach zusammenhängend. Die in B_n als Teil enthaltene Kreisfläche K_n ist ebenfalls nur ein einfach zusammenhängender Teil von W_n. Das Richtungselement R denken wir uns in B_n markiert, nicht jedoch in dem zweiten Blatte der Fläche W_n*).

*) Man kann an Stelle eines Windungsflächenstücks erster Ordnung auch ein solches ν-ter Ordnung oder ein solches unendlich hoher Ordnung treten lassen. Die nachfolgenden Beweisführungen bleiben dabei voll in Geltung.

Die n-te Schmiegungsoperation, d. i. diejenige, welche den Bereich B_{n+1} aus B_n entstehen läßt, ist nun definiert als diejenige Abbildungsoperation, durch welche die Fläche W_n eineindeutig konform auf die schlichte Fläche des Einheitskreises abgebildet wird mit der Nebenbedingung, daß das Richtungselement R festbleiben soll. Diese Abbildungsfunktion $z_{n+1} \equiv \varphi_n(z_n)$ ist elementar und wird einfach durch Komposition bestimmt. Es wird zunächst durch lineare Transformation das Innere des Einheitskreises so auf sich abgebildet, daß der Punkt α_n in den Nullpunkt übergeht, eine lineare Transformation, die man ihrerseits noch zerlegen kann in eine Drehung um den Nullpunkt zur Überführung des Punktes α_n in einen Punkt der positiv reellen Halbachse und eine darauffolgende reelle lineare Transformation. Die Fläche W_n mit dem Richtungselement R geht bei der genannten Transformation in eine Fläche W_n' mit dem Nullpunkt als Windungspunkt und dem nicht mehr am Nullpunkt befindlichen Richtungselement R_n' über. Nunmehr wird die Fläche W_n' mittelst einer Quadratwurzeloperation auf die schlichte Fläche des Einheitskreises abgebildet, wobei der Nullpunkt festbleibt und das Richtungselement R_n' in ein Richtungselement R_n'' übergeht. Schließlich wird durch nochmalige Anwendung einer linearen Transformation die schlichte Fläche des Einheitskreises so auf sich abgebildet, daß das Richtungselement R_n'' in R übergeht.

Die in der angegebenen Weise aufgebaute Abbildungsfunktion $\varphi_n(z_n)$ besitzt eine Umkehrungsfunktion $z_n \equiv \psi_n(z_{n+1})$, welche offenbar eine rationale Funktion zweiten Grades ist, die innerhalb des Einheitskreises an zwei voneinander verschiedenen Stellen, deren eine der Nullpunkt ist, verschwindet und außerhalb des Einheitskreises nicht verschwindet, auf der Peripherie des Einheitskreises nur Werte vom absoluten Betrage 1 annimmt. Der Quotient $\frac{z_n}{z_{n+1}}$ ist eine rationale Funktion von z_{n+1}, welche innerhalb des Einheitskreises das Maximum ihres absoluten Betrages auf der Peripherie des Einheitskreises erlangt, nämlich 1. Es ist demnach $\left|\frac{z_n}{z_{n+1}}\right| < 1$ für alle Stellen innerhalb des Einheitskreises, die nicht auf der Peripherie des Einheitskreises liegen, so daß wir sagen können: Bei der durch die Funktion $\varphi_n(z_n)$ vermittelten konformen Abbildung des Bereichs B_n auf den Bereich B_{n+1} werden alle Punkte des Bereichs B_n in größere Entfernung vom Nullpunkt gerückt, mit Ausnahme des festbleibenden Nullpunktes und mit

Ausnahme der etwa vorhandenen Grenzpunkte des Bereichs B_n, welche auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Die soeben angestellten Betrachtungen lehren uns bereits, daß

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| < \cdots < |\alpha_n| < |\alpha_{n+1}| < \cdots$$

ist und mithin

$$\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n > \delta_{n+1} > \cdots .$$

Die weitergehende noch zu begründende Tatsache ist folgende:

$$\lim_{n=\infty} |\alpha_n| = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0.$$

Um sie zu begründen, definieren wir eine Hilfsfunktion $\sigma(\varrho)$, welche für $0 < \varrho < 1$ als eine beständig positive (> 0) und stetige Funktion erklärt werden wird, für welche außerdem $\lim_{\varrho=1} \sigma(\varrho) = 0$ ist. Wir gelangen zur Funktion $\sigma(\varrho)$, indem wir die Fläche des Kreises $\varkappa_\varrho$ mit dem Radius ϱ und dem Nullpunkt als Mittelpunkt nach der obigen Methode konform abbilden, indem wir den Windungspunkt erster Ordnung in irgendeinen Punkt der Peripherie des Kreises $\varkappa_\varrho$ verlegen. Die Kreisfläche $\varkappa_\varrho$ wird dadurch auf einen einfach zusammenhängenden Bereich $\varkappa'_\varrho$ abgebildet, dessen Begrenzungslinie λ_ϱ vollständig außerhalb $\varkappa_\varrho$ verläuft, diese Kreislinie einfach umschlingend und sie dabei in keinem Punkte berührend. Ist ξ_ϱ der dem Nullpunkt am nächsten liegende Punkt der Linie λ_ϱ, so wird

$$\sigma(\varrho) = |\xi_\varrho| - \varrho$$

definiert. Wählen wir irgendein nicht bis zum Nullpunkte und auch nicht bis zum Punkte 1 sich erstreckendes Intervall auf der Strecke 0 bis 1, so kann man für dieses Intervall behaupten, daß die Funktion $\sigma(\varrho)$, die offenbar stetig ist, ihren Werten nach oberhalb einer endlichen Größe m bleibt, die ihrerseits größer als Null ist.

Zur näheren numerischen Bestimmung einer solchen unteren Schranke m dienen folgende Bemerkungen. Die Funktion, welche die konforme Abbildung des im Punkte $+\varrho$ verzweigten Windungsflächenstücks W im wiederholt angegebenen Sinne auf die schlichte Fläche des Einheitskreises leistet, werde mit $Z = H(z)$ bezeichnet, der für $z = 0$ den Wert Null annehmende Hauptzweig mit $h(z)$. Alsdann behaupten wir, daß das Minimum M_ϱ der Funktion $|h(z)|$ für die durch $|z| = \varrho$ im Hauptblatte von W erklärte Kreislinie $\varkappa$ den Wert $|h(-\varrho)| = -h(-\varrho)$ hat.

Die Behauptung ergibt sich so: Die Funktion $\left(\log \frac{1}{|H(z)|} - \log \frac{1}{|z|}\right)$ ist die zu W gehörende, am Rande verschwindende, im Nullpunkte des

zweiten Blattes von W unendlich werdende *Green*sche Funktion des Gebiets W und werde als solche mit $G(z)$ bezeichnet. Unsere obige Behauptung ist gleichbedeutend mit der, daß das Minimum γ der von $G(z)$ auf $\varkappa$ angenommenen Werte im Punkte $(-\varrho)$ und nur in diesem angenommen wird.

Um letztere Behauptung zu erweisen, denken wir uns die Fläche W auf die schlichte Fläche eines Z'-Einheitskreises so abgebildet, daß der Windungspunkt ϱ in den Nullpunkt übergeht, die beiden Punkte $z = 0$ in Punkte $\mp\beta$ $(\beta > 0)$, die beiden Punkte $-\varrho$ in Punkte $\mp\alpha$ $(\alpha > 0)$, die beiden Kreislinien $|z| = \varrho$ in die linke und rechte Hälfte einer durch die Punkte $-\alpha$, 0, $+\alpha$ gehenden Lemniskate. Unsere Funktion $G(z)$, in die Z'-Ebene überpflanzt, wird zur *Green*schen Funktion $I'(Z')$ des Z'-Einheitskreises mit dem Punkte $+\beta$ als Unendlichkeitsstelle. Die Niveaulinien der Funktion $I'(Z')$ bilden eine Kreisschaar, deren durch $-\alpha$ hindurchgehender, eindeutig bestimmter Kreis K offenbar den durch α und $-\alpha$ hindurchgehenden, den Nullpunkt zum Mittelpunkt habenden Kreis K' umschließt, denselben nur im Punkte $-\alpha$ berührend. Der Kreis K' seinerseits umschließt vollständig die Lemniskate, dieselbe nur in den beiden Punkten α und $-\alpha$ berührend. Q. e. d.

Wir fügen noch hinzu, daß die Größe $\frac{M_\varrho}{\varrho}$ von $+\infty$ monoton bis $+1$ abnimmt, wenn ϱ beständig zunehmend von 0 bis $+1$ variiert. Dabei variiert nämlich der Punkt $-\alpha$ der Z'-Ebene monoton abnehmend von 0 bis (-1), der Punkt β monoton zunehmend von 0 bis 1. Die Größe $\log\frac{M_\varrho}{\varrho}$ ist nun aber gleich $I'(Z')_{Z'=-\alpha}$.

Nunmehr kehren wir zu unseren Bereichen B_n und zu den Punkten α_n zurück. Wir sehen jetzt unmittelbar, daß

$$|\alpha_{n+1}| - |\alpha_n| \geqq \sigma(|\alpha_n|)$$

ist; denn der Bereich B_n enthält die Kreisfläche $K_n \equiv \varkappa_{|\alpha n|}$ als Teil in sich. Es sei nun γ irgendeine reelle positive Größe oberhalb $|\alpha_1|$, jedoch unterhalb Eins. Wir bezeichnen mit M_γ das Minimum der Funktion $\sigma(\varrho)$ für das Intervall von $|\alpha_1|$ bis γ. Ferner bezeichnen wir mit E_γ die größte in $\frac{\gamma-\alpha_1}{M_\gamma}$ enthaltene ganze Zahl. Alsdann behaupten wir, daß $|\alpha_n| > \gamma$ ist für alle $n > E_\gamma$. In der Tat wird ja beim Übergange von α_1 zu α_2

$$|\alpha_2| - |\alpha_1| > \sigma(|\alpha_1|) > M_\gamma$$

sein, ebenso

$$|\alpha_3| - |\alpha_2| > M_\gamma$$

usw., so daß wir nach der angegebenen Anzahl von Schritten notwendig mit $|\alpha_n|$ über γ hinauskommen. Hiermit ist vollständig dargetan, daß unser Schmiegungsverfahren nach und nach eine vollständige Anschmiegung der Begrenzungslinie an die Peripherie des Einheitskreises bewirkt.

§ 3.

Die gleichmäßige Konvergenz der Größen $|z_n|$ bzw. $\log|z_n|$.

Wir betrachten nunmehr z_n als Funktion von z_1 und bezeichnen diese Funktion mit $f_n(z_1)$. Alsdann gilt es zu zeigen, daß die Folge der Funktionen $f_n(z_1)$ $[n = 1, 2, 3, \ldots]$ in B_1, d. i., präziser ausgedrückt, in jedem inneren, nicht bis an die Grenze von B_1 sich erstreckenden Teilbezirke β von B_1 gleichmäßig konvergiert.

Um dies zu beweisen, zeigen wir zunächst die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $|f_n(z_1)|$ in dem erwähnten Bezirke β. Diese ergibt sich folgendermaßen. Es ist in β

$$|z_{n+m}| \leqq |z_n|,$$

und ferner hat man

$$\left|\frac{z_{n+m}}{z_n}\right| < \frac{1}{|\alpha_n|},$$

weil der Quotient $\frac{z_{n+m}}{z_n}$, wie oben erwähnt, in B_1 regulär ist und daher dem Maximum seines absoluten Betrages bei Annäherung an die Grenze von B_1 zustrebt, wobei $|z_{n+m}|$ jedenfalls kleiner als 1 bleibt, während $|z_n|$ im Sinne einer Verkleinerung durch eine beliebig wenig unterhalb $|\alpha_n|$ befindliche positive Größe ersetzt werden kann. Setzen wir jetzt $\frac{1}{|\alpha_n|} = 1 + \eta_n$, unter η_n eine positive, bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein werdende Größe verstehend, so haben wir

$$|z_{n+m}| \leqq (1 + \eta_n)|z_n|$$

und daher wegen $|z_n| < 1$

$$(*) \qquad |z_{n+m}| - |z_n| \leqq \eta_n.$$

Hiermit aber ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $|f_n(z_1)|$ nicht nur für jeden Bezirk β, sondern sofort für den ganzen Bereich B_1 dargetan.

Es handelt sich nunmehr darum, den Übergang von der Abschätzungsrelation (*) zu einer Abschätzungsrelation für die Differenz $z_{n+m} - z_n$ zu machen, welche für jeden Bereich β gültig sein muß. Um zu dem genannten Ziele zu gelangen, genügt es, den Nachweis zu führen, daß in β nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Größe ε

$$\left| \frac{z_{n+m}}{z_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

gemacht werden kann, indem man nur n hinreichend groß wählt. Denn man kann dann setzen

$$\frac{z_{n+m}}{z_n} = 1 + \eta_{n,m},$$

wobei mit $\eta_{n,m}$ eine in β mit unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig unendlich klein werdende Größe bezeichnet wird, und von da aus bei Berücksichtigung von $|z_n| < 1$ schließen

$$|z_{n+m} - z_n| < |\eta_{n,m}|.$$

Von der somit jetzt zu untersuchenden Funktion $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ ist bekannt, daß sie dem absoluten Betrage nach für das ganze Gebiet B_1 gleich $1 + \eta'_{n,m}$ gesetzt werden kann, unter $\eta'_{n,m}$ eine in B_1 erklärte reelle positive und zugleich mit n gleichmäßig unendlich klein werdende Funktion verstanden; ferner, daß sie im Nullpunkt reell positiv ist. Auch die Funktion $\log \frac{z_{n+m}}{z_n}$ ist in B_1 vollständig regulär erklärt, sofern wir noch festsetzen, sie solle im Nullpunkt einen reellen Wert haben, der hier positiv reell wird. Jetzt wird der reelle Teil dieser Funktion, d. i. die Größe $\log \left| \frac{z_{n+m}}{z_n} \right| \equiv \log |z_{n+m}| - \log |z_n|$ betrachtet. Wegen $\log x < x - 1$ für $x > 1$ ist

$$\log \left| \frac{z_{n+m}}{z_n} \right| < \frac{z_{n+m}}{z_n} - 1 < \frac{1}{|\alpha_n|} - 1 = \eta_n.$$

Wir sind somit sicher, daß im ganzen Bereiche B_1 die Funktion $\Re \log \frac{z_{n+m}}{z_n} \equiv \Re \Phi_{n,m}(z_1)$ beliebig klein wird, wenn nur n hinreichend groß gewählt wird. Es handelt sich jetzt nur noch darum, einen Schluß auf das Unendlichkleinwerden auch des imaginären Teiles unter den erwähnten Umständen zu machen, und zwar letzteren Schluß für β. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz.

§ 4.

Herleitung eines Hilfssatzes.

Hilfssatz: Es sei $f(z)$ eine für $|z|<R$ regulär erklärte, für $z=0$ den Wert Null annehmende analytische Funktion, und es sei für denselben Bezirk $-\mu<\Re f(z)<+\mu$. Alsdann liegt, für einen Bezirk $|z|\leqq R'<R$ der imaginäre Teil von $f(z)$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer Größe $\mu\cdot Q$, wobei Q reell positiv ist und nur von dem Verhältnis $\frac{R'}{R}$, nicht jedoch von der Wahl der Funktion $f(z)$ abhängt.

Wir gelangen in einfachster Weise zu einer sofort die äußersten Schranken in Evidenz setzenden Abschätzung der gewünschten Art unter Zuhilfenahme eines *Schwarz*schen Lemmas, dessen Grundgedanken wir bereits oben Seite 185 zur Anwendung gebracht haben. Das *Schwarz*sche Lemma besagt folgendes:

*Schwarz*sches Lemma*): Ist $F(z)$ eine für $|z|<1$ reguläre, im Punkte $z=0$ selbst den Wert Null annehmende analytische Funktion, welche das Innere des Einheitskreises konform auf ein Gebiet innerhalb des Einheitskreises abbildet, so wird durch diese Funktion die Fläche des durch die Ungleichheit $|z|\leqq\varrho<1$ definierten Kreises K_ϱ konform abgebildet auf ein Gebiet, welches ganz im Kreise K_ϱ liegt. —

Der äußerst einfache Beweis geht so: $\frac{F(z)}{z}$ ist für $|z|<1$ regulär und dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$, weil nach der Peripherie des Einheitskreises hin $|z|=1$ wird, während $|F(z)|\leqq 1$ bleibt; daher $|F(z)|\leqq|z|$. Das Maximum 1 für $\left|\frac{F(z)}{z}\right|$ kann nur dann für ein z erreicht werden, wenn $\frac{F(z)}{z}$ eine Konstante ist, also $F(z)$ geometrisch eine Drehung darstellt, q. e. d.

Nunmehr bedarf es nur einer einfachen logarithmischen Transformation, um zu der für unsern eigentlich zu beweisenden Hilfssatz in Betracht kommenden charakteristischen Figur zu gelangen. Die Bedingung nämlich, daß $-\mu<\Re f(z)<\mu$ sein soll, kann durch Betrachtung der Funktion $\frac{f(z)}{\mu}$ an Stelle von $f(z)$ auf die speziellere Bedingung $-1<\Re f(z)<1$

*) *H. A. Schwarz:* „Zur Theorie der Abbildung.“ (Züricher Progamm 1869/70 = Ges. Abh. Bd. II. S. 108 ff.) Das Lemma findet auch bei *Carathéodory* vielfältige Verwendung. Vgl. z. B. Math. Ann. Bd. 72, S. 107 ff.

reduziert werden. Geometrisch bedeutet dies, daß die Werte $f(z)$ in ihrer Variabilität auf die Fläche eines unendlichen Parallelstreifens beschränkt sind, dessen begrenzende Geraden parallel der Achse des Imaginären im Abstande 1 von derselben verlaufen. Wird jetzt die Fläche dieses Parallelstreifens mittelst einer Exponentialfunktion auf die Fläche des Einheitskreises so abgebildet, daß die Punkte -1 und $+1$ fest bleiben, während die beiden unendlich fernen Punkte des Parallelstreifens in die Punkte $+i$ und $-i$ übergehen, so ergibt sich aus $f(z)$ durch Zusammensetzung mit der genannten Hilfsabbildung eine Funktion $F(z)$, welche für $z=0$ verschwindet und für $|z|<R$ dem absoluten Betrage nach unterhalb 1 bleibt, daher nach dem *Schwarz*schen Lemma für $z\leqq R'$ dem absoluten Betrage nach unterhalb $\frac{R'}{R}$. Dieser Einschränkung der Werte von $F(z)$ auf die Fläche des Kreises mit dem Radius $\frac{R'}{R}$ entspricht eine Beschränkung der Werte von $f(z)$ auf die Fläche einer ganz im Innern des Parallelstreifens enthaltenen konvexen Kurve mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, deren am weitesten nach rechts und links liegende Punkte, die Durchschnittspunkte mit der Achse des Reellen sind, während der höchste und tiefste Punkt die Durchschnittspunkte mit der Achse des Imaginären sind, wie sich unmittelbar aus dem Umstande ergibt, daß den von $+i$ nach $-i$ führenden Kreisbögen die unendlichen geraden Linien des Parallelstreifens entsprechen, welche mit der konvexen Kurve wegen der Konformität der Abbildung dieselben Winkel einschließen wie der betreffende Kreisbogen der F-Ebene mit dem Kreise vom Radius $\frac{R'}{R}$. Die Höhe des obersten Punktes unserer konvexen Kurve über der Achse des Reellen möge mit Q bezeichnet werden. Es ist dies die Größe Q, deren Existenz in unserem oben formulierten, hiermit bewiesenen Hilfssatz behauptet worden ist*). Wir finden

$$Q=\frac{2}{\pi}\log\frac{R+R'}{R-R'}.$$

Beiläufig bemerkt, ergibt unsere Beweismethode sofort noch folgenden

*) Der am weitesten nach rechts und links liegende Punkt der konvexen Kurve liegt, wie erwähnt, auf der Achse des Reellen, und zwar im Abstande $\frac{4\mu}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R'}{R}$. Hiermit ist eine von *Schwarz* aus dem *Poisson*schen Integral gefolgerte, von ihm beim alternierenden Verfahren („gürtelförmige Verschmelzung") benutzte Relation für Potentiale bewiesen, nämlich

$$-\frac{4\mu}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R'}{R}<\Re f(z)<+\frac{4\mu}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R'}{R}.$$

Zusatz zum Hilfssatz: Der imaginäre Teil von $f(z)$ erreicht den äußersten Wert $\mu \cdot Q$ seines absoluten Betrages dann und nur dann, wenn $f(z)$ die konforme Abbildung des Kreises $|z|<R$ auf das Innere des Parallelstreifens vermittelt, welcher begrenzt wird von den beiden Parallelen im Abstande μ zur Achse des Imaginären. Die Funktion $f(z)$ hat dann die Form

$$f(z) = \frac{2\mu}{i\pi} \log \frac{iR-z}{iR+z},$$

in welcher noch z durch $e^{i\alpha}z$ (α reell) ersetzt werden kann.

Bei der sogleich vorzunehmenden Anwendung des Hilfssatzes kommt derselbe in folgender Fassung in Betracht:

Hilfssatz: Ist $f(z)$ für $|z|<R$ regulär erklärt und ist die Schwankung des reellen Teiles dieser Funktion in demselben Bezirke $\leqq \mu$, so ist die Schwankung des imaginären Teiles in dem Bezirke $|z| \leqq R' < R$ kleiner als $2\mu Q$. Als Schwankung einer reellen Funktion in einem Gebiet wird hierbei der Unterschied zwischen algebraisch größtem und kleinstem Werte derselben bezeichnet, bzw. der Unterschied zwischen der oberen und unteren Grenze der Funktionswerte in dem Gebiet.

§ 5.

Zuendeführung des Konvergenzbeweises. Nähere Untersuchung der Grenzabbildung.

Der § 4 begonnene Konvergenzbeweis geht nunmehr folgendermaßen zu Ende. Wir bezeichnen mit β' einen aus lauter gleich großen Quadraten der Seitenlänge a aufgebauten, einfach zusammenhängenden Teilbereich von B_1, der den Bereich β enthält und dessen Begrenzung weder mit der Begrenzung von β noch mit der Begrenzung von B_1 einen Punkt gemeinschaftlich hat. Ein solcher Bereich β' läßt sich natürlich mit Leichtigkeit bestimmen und man kann dabei noch der Nebenbedingung genügen, daß der kürzeste Abstand der Begrenzungslinien von β' und B_1 oberhalb $a\sqrt{2}$, d. i. oberhalb der Diagonalenlänge des Quadrates liegt. Man hat dazu nur nötig a hinreichend klein zu wählen.

Es genügt, da der zu untersuchende imaginäre Teil der Funktion $\log \frac{z_{n+m}}{z_n} \equiv \Phi_{n,m}(z_1)$, d. i. die Größe Am $\frac{z_{n+m}}{z_n}$*) im Nullpunkt verschwindet,

*) Am $\equiv$ Amplitude von.

die Schwankung dieses imaginären Teiles im Bezirke β abzuschätzen, welche wiederum kleiner ist als die Schwankung des imaginären Teiles in dem Bereiche β'. Die Schwankung in β' ist nun kleiner als die Summe der Schwankungen in den einzelnen Quadraten von β'. Ist N die Anzahl dieser Quadrate, so wird mithin die Schwankung des imaginären Teiles $< N \cdot \Delta$ sein, wenn Δ eine für alle N Quadrate des Bereichs β' gültige, noch herzuleitende obere Schranke der Schwankung des imaginären Teiles ist. Nun kann nach dem zweiten Hilfssatz $\Delta < Q\bar{\Delta}$ gesetzt werden, unter $\bar{\Delta}$ die mit wachsendem n unendlich klein werdende Schwankung des reellen Teiles in B verstanden. In der Tat kann man den Mittelpunkt eines einzelnen Quadrates zum Zentrum eines Kreises vom Radius $R = a$ wählen und einen zu ersterem konzentrischen Kreis vom Radius $R' = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ konstruieren, dessen Peripherie durch die Ecken des betreffenden Quadrates hindurchgeht. Damit ist bewiesen, daß die Größe Am $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ in β gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n unendlich groß wird. Andererseits näherte sich $\left|\frac{z_{n+m}}{z_n}\right|$ gleichmäßig dem Werte 1, so daß nun die Größe $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ selbst in β gleichmäßig gegen 1 konvergiert, mithin $f_n(z_1)$ in β gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$.

Die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ kann sich übrigens nicht auf eine Konstante reduzieren; denn sie verschwindet im Nullpunkt wie jede der Näherungsfunktionen $f_n(z_1)$; in einem von Null verschiedenen Punkte jedoch ist ihr absoluter Wert größer als der jeder Näherungsfunktion, also von Null verschieden. Es ist ferner einleuchtend, daß der absolute Betrag der Grenzfunktion an jeder Stelle des Bereichs B_1 kleiner als 1 ist. Denn jedenfalls kann er nicht größer sein, weil der absolute Betrag jeder Näherungsfunktion kleiner als 1 ist, und die Übereinstimmung 1 wird durch den Satz ausgeschlossen, daß eine von einer Konstanten verschiedene reguläre analytische Funktion an einer regulären Stelle kein Maximum ihres absoluten Betrages haben kann.

Wir haben uns noch zu überlegen, was allerdings jetzt keine Schwierigkeit mehr haben wird, ob, wie es sein soll, die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ eine *eineindeutige* konforme Abbildung des Bereichs B_1 auf das *vollständige* Innere des Einheitskreises leistet.

Was zunächst den ersten Punkt, nämlich die Eineindeutigkeit, anbetrifft, so ergibt sich dieselbe aus dem entsprechenden Abbildungscharakter der Näherungsfunktionen. Nehmen wir etwa an, die Funktion $f_\infty(z_1)$ habe an zwei voneinander verschiedenen Stellen z_1' und z_2'' in B_1 denselben Wert, d. h. $f_\infty(z_1') = f_\infty(z_1'') = a$. Alsdann wird eine Umgebung von z_1' und eine Umgebung von z_1'' je auf eine Umgebung von a abgebildet, woraus ersichtlich ist, daß man, falls nicht bereits die Werte der Ableitungen $f_\infty'(z_1')$ und $f_\infty'(z_1'')$ von Null verschieden sind, das Paar z_1', z_1'' durch ein benachbartes ersetzen kann, für welches die Bedingung des Nichtverschwindens der Ableitungen zutrifft. Nehmen wir also z_1' und z_1'' in dieser Weise an.

Wir konstruieren um z_1' und z_1'' als Mittelpunkte je einen Kreis vom Radius ϱ, genannt $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, und wählen ϱ so klein, daß $f_\infty(z_1)$ innerhalb und auf der Grenze jeder dieser Kreisflächen keinen Wert zweimal annimmt. Die Kreisflächen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ werden dann durch Vermittlung der Funktion $f_\infty(z_1)$ auf schlichte Gebiete, γ_1 und γ_2, abgebildet, welche beide den Punkt a in ihrem Innern enthalten. Jetzt bezeichnen wir mit $\varkappa$ die größte in γ_1 und γ_2 enthaltene Kreisfläche mit a als Mittelpunkt. Der Radius derselben wird mit ϱ' bezeichnet. Die Umkehrungsfunktion der Funktion $f_\infty(z_1)$ wäre nun in $\varkappa$ eine mindestens zweideutige analytische Funktion. Allerdings hängen die beiden von uns betrachteten Zweige dieser Umkehrungsfunktion durch analytische Fortsetzung innerhalb $\varkappa$ selbst nicht zusammen. Nunmehr denken wir uns eine der Näherungsfunktionen $f_n(z_1)$ bestimmt, welche in einem Teilbezirke β von B_1, der die Kreisflächen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ vollständig enthält, die Funktion $f_\infty(z_1)$ bis auf eine Größe approximiert, die kleiner ist als $\frac{\varrho'}{3}$. Das jedenfalls schlichte Bild, welches diese Funktion von $\varkappa_1$ entwirft, wird ein Flächenstück sein, dessen vollständige Begrenzung außerhalb des mit dem Radius $\frac{2\varrho'}{3}$ um a als Mittelpunkt beschriebenen Kreises verläuft, und welches daher das Innere desselben Kreises vollständig schlicht bedecken muß, weil jedenfalls $f_n(z_1')$ sich von a um weniger als $\frac{\varrho'}{3}$ unterscheidet und folglich in dem erwähnten Kreise liegt. Auf dieselbe Weise ergibt sich, daß das Bild, welches die Funktion $f_n(z_1)$ von der Kreisfläche $\varkappa_2$ entwirft, die genannte Kreisfläche vom Radius $\frac{2}{3}\varrho'$ vollständig bedeckt. Das ist aber ein Widerspruch gegen

die Tatsache, daß $f_n(z_1)$ niemals an zwei voneinander verschiedenen Stellen des Bereichs B_1 einen und denselben Wert annimmt.

Es steht mithin jetzt fest, daß die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ in B_1 keinen Wert mehr als einmal annimmt und also ein schlichtes Bild des Bereichs B_1 auf ein Flächenstück innerhalb des Einheitskreises liefert. Daß dieses Flächenstück das ganze Innere des Einheitskreises ist, bedarf noch einer weiteren Prüfung.

Zum Zwecke dieses Nachweises wird ein Kreis K_r mit dem Radius $r < 1$ und dem Nullpunkt als Mittelpunkt innerhalb des Einheitskreises konstruiert. r kann dabei insbesondere beliebig nahe an 1 gewählt sein. Um zu zeigen, daß das von $f_\infty(z_1)$ entworfene Bild des Bereichs B_1 die Fläche des Einheitskreises vollständig ausfüllt, wäre der Nachweis zu führen, daß es jede Kreisfäche K_r vollständig bedeckt. Um dieses nun zu erkennen, gehen wir in der Folge der Näherungsfunktion $f_n(z_1)$ und damit der Näherungsbereiche B_n soweit, daß B_n und folglich alle Bereiche mit höherem Index die Fläche des Kreises K_r vollständig enthalten. Sei B_{n_0} der erste, so bestimmte Bereich in der Folge, dessen Begrenzung übrigens mit K_r keinen Punkt gemeinschaftlich haben soll. Wir konstruieren in B_{n_0} einen mit K_r konzentrischen Kreis $K_{r'}$ mit einem Radius $r' > r$. Der Kreislinie $K_{r'}$ entspricht in B_1 eine geschlossene reguläre analytische Linie L, welche einen Teilbereich von B_1 begrenzt. Es ist nun einleuchtend, daß das Bild, welches die Funktion $f_\infty(z_1)$ von der Linie L entwirft, eine Kurve innerhalb des Einheitskreises sein wird, welche ganz außerhalb von K_r verläuft. Die Fläche B_1 wird daher notwendig auf einen schlichten Teilbereich des Einheitskreises abgebildet, der die Kreisfläche K_r vollständig enthält. Denn dieser Bildbereich hat ja innerhalb K_r keine Grenzpunkte.

C. Zweiter Teil.

Konforme Abbildung des allgemeinsten zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings.

§ 6.

Abbildung von Kreisringflächen aufeinander.

Wir verstehen unter einem *Kreisring* einen zweifach zusammenhängenden Bereich, welcher von zwei zueinander konzentrischen Kreisen,

einem äußeren und einem inneren, begrenzt wird. Einen solchen Kreisring nennen wir einen *einfach ausgearteten Kreisring*, wenn der innere oder äußere Begrenzungskreis sich auf einen Punkt reduziert, der dann der Mittelpunkt bzw. der unendlich ferne Punkt wäre. Wir nennen ihn *zweifach ausgeartet*, wenn beide Kreise sich auf Punkte reduzieren, etwa auf den Nullpunkt als den inneren und den unendlich fernen Punkt als äußeren Begrenzungskreis. Einen nicht ausgearteten Kreisring bezeichnen wir auch als *gewöhnlichen Kreisring*.

Wir untersuchen zunächst die Frage der eineindeutigen konformen Abbildung zweier Kreisringe aufeinander bzw. auf sich selbst, wobei wir eine solche Abbildung in der Voraussetzung immer nur für die inneren Punkte (nicht Grenzpunkte) des Bereichs erklärt denken.

Wir zeigen zunächst, daß die drei Typen im Sinne der konformen Abbildung nicht aufeinander bezogen werden können, d. h.: Es ist unmöglich, einen gewöhnlichen Kreisring auf einen ausgearteten Kreisring abzubilden, und es ist unmöglich, einen einfach ausgearteten Kreisring auf einen zweifach ausgearteten Kreisring abzubilden.

Gehen wir etwa vom zweifach ausgearteten Kreisring aus und bezeichnen wir mit $z' \equiv f(z)$ eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung dieser Kreisring eineindeutig konform auf einen einfach ausgearteten Kreisring mit dem Nullpunkt als isoliertem Begrenzungspunkt oder auf einen gewöhnlichen Kreisring abgebildet wird. Wir betrachten dann die sich ergebende Funktion $z' = \varphi(\zeta)$, wenn man setzt $\log z = \zeta$. Die Funktion $\varphi(\zeta)$ ist eine für alle endlichen ζ regulär erklärte analytische Funktion, welche dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleibt. Eine solche Funktion muß sich auf eine Konstante reduzieren*).

Es bleibt noch die Unmöglichkeit der konformen Abbildung eines gewöhnlichen Kreisrings auf einen einfach ausgearteten Kreisring zu zeigen. Es werde zu dem Zwecke die Existenz einer derartigen Abbildungsfunktion $z' = f(z)$ angenommen, und zwar möge z im einfach ausgearteten, z' im gewöhnlichen Kreisringe variieren. Wir setzen $\zeta = \log z$ und $\zeta' = \log z'$ und betrachten die Funktion $\zeta' = \varphi(\zeta)$, welche eine konforme Abbildung einer

*) Vgl. oben S. 181.

Halbebene auf einen Parallelstreifen vermittelt. Der Charakter der Abbildung ist, wenn wir die Halbebene als die linke Halbebene, den Parallelstreifen jedoch parallel zur Achse des Imaginären, und zwar von der Achse des Imaginären selbst und einer Parallelen links im Abstande π begrenzt annehmen, von der Art, daß jedesmal, wenn der reelle Teil von ζ negativ unendlich groß wird, der reelle Teil von ζ' sich unbegrenzt $-\pi$ nähert und umgekehrt. Bildet man jetzt den Parallelstreifen mittelst der Funktion $Z' = e^{\frac{1}{i}\zeta'}$ auf die obere Halbebene ab, so wird $Z'(\zeta)$ eine Funktion, welche eine Halbebene in eine Halbebene transformiert, also eine lineare Funktion, welche wegen des geschilderten, auf die neuen Verhältnisse sofort übertragbaren Abbildungscharakters dem Punkte $\zeta = \infty$ alle Punkte der negativ reellen Z'-Halbachse entsprechen lassen müßte, was sinnwidrig ist.

Zum Schlusse bleibt zu zeigen, daß zwei gewöhnliche, konzentrisch liegend vorgestellte Kreisringe dann und nur dann eineindeutig aufeinander abbildbar sind, wenn sie dasselbe Radienverhältnis besitzen, und daß in einem solchen Falle die Abbildung entweder eine gewöhnliche Ähnlichkeitstransformation mit dem Mittelpunkt als Fixpunkt ist oder eine mit einer Spiegelung an irgendeinem konzentrischen Kreise zusammengesetzte indirekte Ähnlichkeitstransformation, die ihrerseits den Mittelpunkt fest läßt, welcher im folgenden mit dem Nullpunkte zusammenfallend angenommen werde.

Zum Beweise können wir annehmen, daß bei einer vorgestellten Abbildung der beiden gewöhnlichen Kreisringe durch eine Funktion $z' = f(z)$ der äußere Kreis dem äußeren, der innere dem inneren entsprechen möge in dem Sinne, daß jeder unbegrenzten Annäherung an den äußeren Kreis des z-Kreisringes eine unbegrenzte Annäherung an den äußeren Kreis des z'-Kreisringes entspreche und das Analoge für die inneren Begrenzungskreise gilt. Wäre dies nicht der Fall, so brauchen wir nur mit dem einen Kreisringe eine lineare Transformation vorzunehmen, bestehend aus einer Spiegelung an einem Begrenzungskreise mit nachfolgender Spiegelung an der Achse des Reellen. Wir können weiter annehmen, daß bei beiden Kreisringen der äußere Begrenzungskreis der Einheitskreis ist. Gehen wir jetzt wieder zu den Größen $\zeta = \log z$ und $\zeta' = \log z'$ über, so ergeben sich als Bilder der Kreisringe zwei Parallelstreifen zur Achse des Imaginären von

der Breite $\log q$ bzw. $\log q'$, wenn q und q' die Radien der inneren Begrenzungskreise sind. Diese beiden Streifen erscheinen nun durch eine konforme Abbildung, und zwar in der Weise aufeinander bezogen, daß die beiden unendlich fernen Zipfel des einen Streifens den beiden unendlich fernen Zipfeln des andern entsprechen, und zwar der obere dem oberen, der untere dem unteren. Die Funktion $Z = e^{i\zeta \frac{\pi}{\log q}}$ und $Z' = e^{i\zeta' \frac{\pi}{\log q'}}$ vermitteln konforme Abbildungen der beiden Streifen auf die untere Z- bzw. Z'-Halbebene, und wir haben nun eine eineindeutige Beziehung dieser Halbebenen aufeinander, welche so beschaffen ist, daß der unbegrenzten Annäherung an den Nullpunkt die unbegrenzte Annäherung an den Nullpunkt entspricht und das Analoge für den unendlich fernen Punkt gilt. Das heißt aber, daß die Funktion $Z'(Z)$, die doch nun eine reelle lineare Funktion sein muß, die Form $Z' = cZ$ hat, unter c eine reelle positive Konstante verstanden. Dies ergibt nun sofort die Beziehung der beiden Kreisringe aufeinander in der Gestalt

$$(*) \qquad z' = C z'',$$

wobei C eine Konstante ist und μ den reellen positiven Wert $\frac{\log q'}{\log q}$ hat. Nun ist aber klar, daß im vorliegenden Falle $\mu = 1$ sein muß, weil einer einfachen Umlaufung des Nullpunktes der z-Ebene eine einfache Umlaufung desselben in der z'-Ebene entsprechen soll. Damit ist der Beweis zu Ende geführt.

Es ist von Interesse, noch einen anderen Beweis des letzten Satzes, insbesondere mit Bezug auf die gewöhnlichen Kreisringflächen, kennen zu lernen, welcher ebenfalls rein funktiontheoretisch verläuft und vollständig auf den Prinzipien der Potenzreihen aufgebaut ist, insbesondere den Integralbegriff nicht benutzt. Wir betrachten die Funktion $\log |z'| = \Re \log (z')$ als Funktion im z-Kreisringe. Sie nimmt auf dem Einheitskreise den Wert Null, auf dem inneren Begrenzungskreise den Wert $\log q'$ an. Dasselbe tut die Funktion $\frac{\log q'}{\log q} \log |z|$. Die Differenz wäre demnach in dem z-Kreisringe eindeutig und auf beiden Begrenzungslinien Null. Dann müßte diese Differenz sich notwendig auf den konstanten Wert Null reduzieren, weil der reelle Teil einer analytischen Funktion an einem regulären Punkte kein Maximum oder Minimum haben kann. Hieraus ergibt sich nun sofort wieder die obige Formel $(*)$.

Die vorstehende Beweismethode ist in folgender Weise auch zum Nachweise der Unmöglichkeit der konformen Abbildung eines gewöhnlichen Kreisringes auf einen einfach ausgearteten Kreisring brauchbar. Von beiden Kreisringflächen wird angenommen, daß sie den Einheitskreis als äußeren Begrenzungskreis haben und daß der Annäherung an diesen äußeren Kreis in einem Kreisring die Annäherung an denselben im anderen entspricht. Wird der im gewöhnlichen Kreisring variierende Punkt mit z bezeichnet, der vorgestellte Bildpunkt des ausgearteten Kreisrings mit z', so ist die Größe $\log|z'|$ eine im z-Kreisringe eindeutig erklärte Funktion, die auf dem Einheitskreise verschwindet, auf dem inneren Begrenzungskreise vom Radius q jedoch negativ unendlich wird. Dasselbe gilt von der Funktion $\frac{1}{n}\log|z'|$, wenn unter n eine positive ganze Zahl verstanden wird. Bilden wir nun die Funktion

$$\frac{1}{n}\log|z'| - \log|z|.$$

Dieselbe ist im gewöhnlichen Kreisring eindeutig und nimmt auf dem äußeren Kreisringe den Wert Null an, auf dem inneren jedoch wird sie negativ unendlich, woraus folgt, daß sie im ganzen z-Kreisringe negativ ist. Also wäre

$$\frac{1}{n}\log|z'| < \log|z|$$

für jede Wahl von n. Das ist aber sinnwidrig, weil die Größe links für unbegrenzt wachsendes n und festgehaltenes z und damit z' unendlich klein wird.

Mit der Frage der konformen Abbildung zweier Kreisringflächen aufeinander ist auch die Frage nach allen konformen Abbildungen eines Kreisrings auf sich selbst erledigt. Wir erkennen nach der obigen ersten Beweismethode, für welche der Übergang zu den Größen ζ und ζ' charakteristisch war, daß die konforme Abbildung im Falle des einfach ausgearteten Kreisrings die Form hat $z' = az$, wobei noch $|a| = 1$ ist, im Falle des zweifach ausgearteten Kreisrings entweder die Form $z' = a \cdot z$ oder die Form $z' = \frac{a}{z}$, wobei a eine beliebige reelle oder komplexe Zahl ist, im Falle des gewöhnlichen Kreisrings mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2 schließlich entweder die Form $z' = az$, wobei wieder $|a| = 1$ sein muß, oder die Form $z' = a\frac{\varrho_1\varrho_2}{z}$, wobei wiederum $|a| = 1$ sein muß. Geometrisch bedeutet die Transformation $z' = \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{z}$ die Ausführung einer Spiegelung am Kreise vom

Radius $\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$ (Symmetralkreis des Ringes) mit darauffolgender Spiegelung an der Achse des Reellen.

Übrigens bietet sich zur Erledigung der Frage nach den konformen Abbildungen eines gewöhnlichen Kreisrings auf sich selbst noch der besonders einfache Weg dar: Man bringe die Frage zunächst auf den Fall, daß innerer und äußerer Kreis sich selbst entsprechen. Der Quotient $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ für eine angenommene Abbildungsfunktion $z' = f(z)$ bekommt dann auf beiden Begrenzungskreisen den Wert 1; es ist also $\frac{z'}{z}$ eine Konstante vom absoluten Betrage 1.

Handelt es sich nochmals um die weitergehende Frage der konformen Abbildung eines gewöhnlichen Kreisrings (z-Ebene) auf einen andern gewöhnlichen Kreisring (z'-Ebene), so kann man nun folgendermaßen schließen. Dem Symmetralkreise des z-Kreissrings muß der Symmetralkreis des z'-Kreisrings entsprechen, weil die Spiegelung des z-Kreisringes am Symmetralkreise sich auf den z'-Kreisring als eine indirekt konforme Abbildung desselben auf sich selbst überträgt, welche sich wegen der dabei eintretenden Vertauschung der Begrenzungslinien nach dem unmittelbar vorher Bewiesenen in der Tat als eine Transformation durch reziproke Radien am Symmetralkreise des z'-Ringes ergibt. Nunmehr kann man jeden der vier Ringe, in welche die ursprünglich betrachteten Kreisringe durch die Symmetralkreise zerlegt sind, wieder durch den ihm zugehörenden Symmetralkreis in zwei Ringe zerlegen, wieder das Entsprechen der Symmetralkreise in Original- und Bild-Ebene schließen und so in inf. fortfahrend schließen, daß $|z'| = |z|^{\alpha}$ ist usw.

§ 7.

Abbildung des allgemeinsten schlichten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings.

Es handelt sich nunmehr um den Nachweis der Möglichkeit der konformen Abbildung eines beliebig vorgelegten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings.

Sei B ein solcher Bereich, über dessen Begrenzung wir jedoch keinerlei Voraussetzungen machen. Eine Grenze oder beide Grenzen können sich auch auf einen Punkt reduzieren *(einfach bzw. zweifach ausgearteter*

WANDTAFELN ZUM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

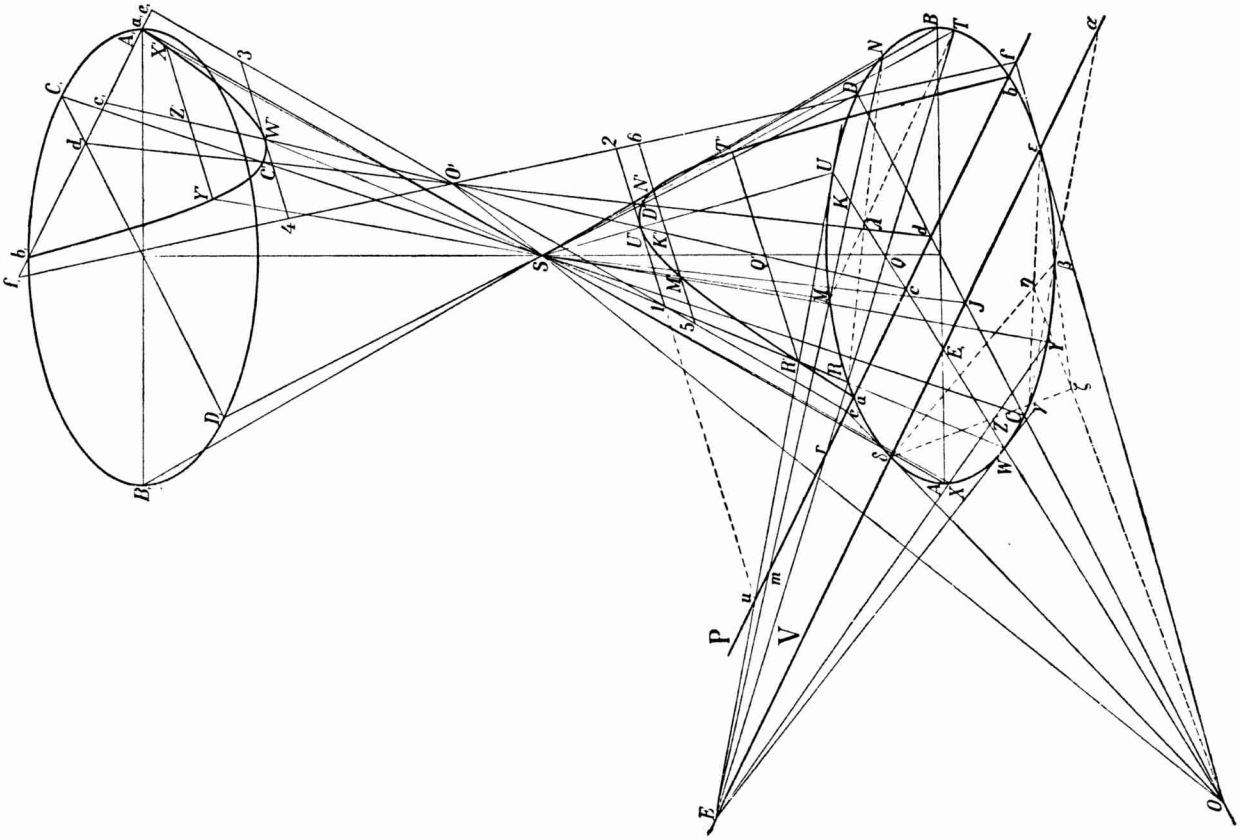
GEZEICHNET VON **A. SCHULTE-TIGGES**

1

Ellipse und Parabel

als Zentralprojektionen des Kreises.

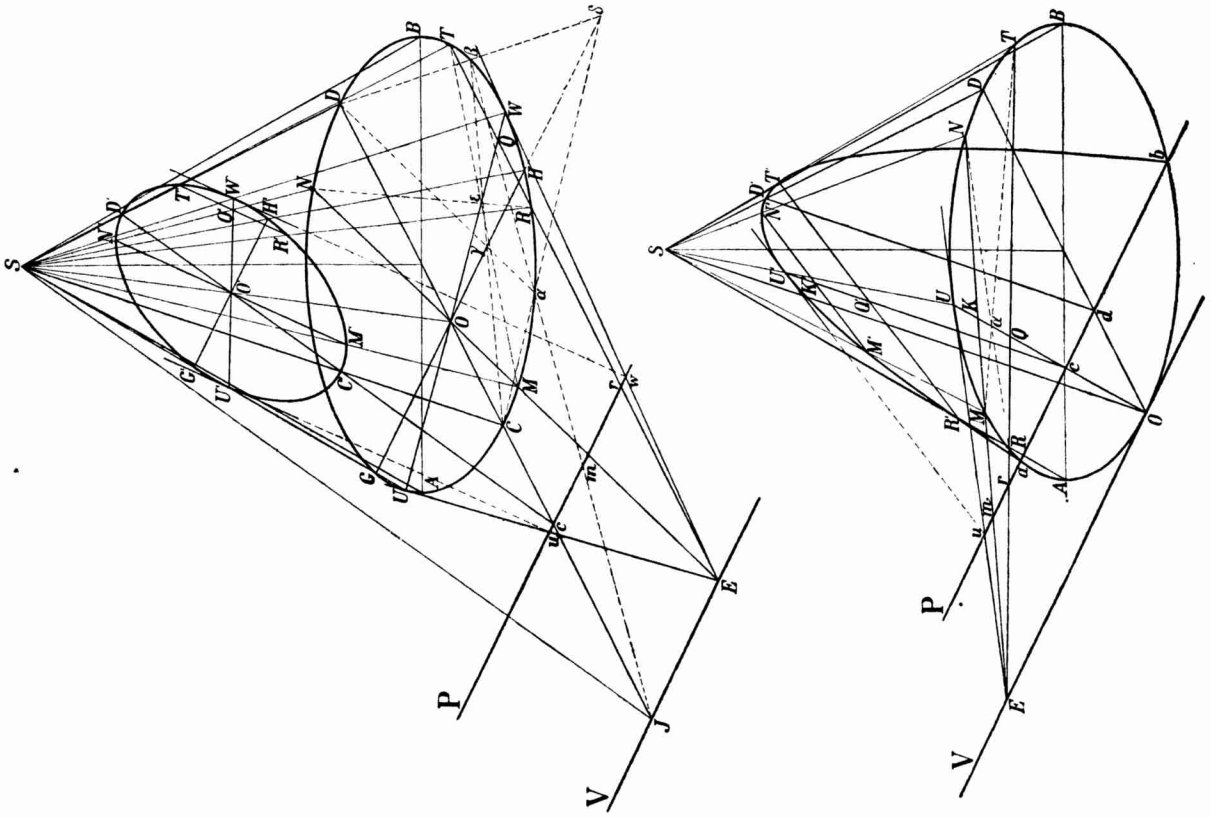
(Verkleinerte Abbildungen)



2

Die Hyperbel

als Zentralprojektion des Kreises.



Die zweifarbigen Wandtafeln, Format 95 × 130 cm, sind auf Leinenpapier gedruckt und mit Stäben versehen.
Preis jeder Tafel 10 Mark

Bereich). Gewisse Vereinfachungen können wir auf elementare Weise sofort erzielen. Sind beide Grenzen des Bereichs Punkte, so bringen wir sie durch eine lineare Transformation nach Null und ∞. Ist nur eine Grenze ein Punkt, die andere jedoch nicht, so können wir den einfach zusammenhängenden Bereich, welcher entsteht, wenn man den isolierten Grenzpunkt zum Bereiche hinzunimmt, durch lineare Transformation, nötigenfalls unter Hinzunahme einer Quadratwurzeloperation, in einen Bereich verwandeln, der ganz in einem endlichen Bezirke, z. B. innerhalb des Einheitskreises enthalten ist. Dabei können wir es gleichzeitig so einrichten, daß der erwähnte isolierte Grenzpunkt der Nullpunkt wird. Liegt schließlich ein *gewöhnlicher Bereich* B vor (keine Begrenzungslinie reduziert sich auf einen Punkt), so können wir zunächst denjenigen, B enthaltenden einfach zusammenhängenden Bereich, welcher aus B entsteht durch Weglassung der einen Begrenzungslinie, in einen Bereich verwandeln, der ganz innerhalb des Einheitskreises liegt. Dabei geht B in einen Bereich B' über, der ebenfalls ganz innerhalb des Einheitskreises liegt, und nunmehr können wir die innere Begrenzungslinie von B' analog behandeln, indem wir den durch das Unendliche gehenden einfach zusammenhängenden Bereich, welcher aus B' durch Weglassung der äußeren Begrenzungslinie entsteht, mittelst einer linearen Transformation unter eventueller Hinzunahme einer Quadratwurzeloperation auf einen Bereich abbilden, der innerhalb des Einheitskreises liegt. Das Ergebnis ist, daß der Bereich jetzt in der Weise vereinfacht erscheint, daß der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt äußere Punkte (auch nicht Begrenzungspunkte) des Bereichs sind und durch den Bereich selbst voneinander getrennt werden.

Man kann in folgender Weise noch einen Schritt weitergehen, wenn man die konforme Abbildung des allgemeinsten einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreises benutzt. Anstatt die angegebenen elementaren Operationen auszuführen, ersetzt man dieselben direkt durch Kreisabbildungen der betreffenden, oben in Betracht gezogenen, einfach zusammenhängenden Bereiche. Alsdann wird das Resultat ein Bereich sein, der im Falle des gewöhnlichen Bereichs von einem Kreise und einer geschlossenen, regulären, analytischen Linie begrenzt wird. Im Falle des einfach ausgearteten Bereichs gelangen wir in der angegebenen Weise direkt zum einfach ausgearteten Kreisring.

Im Falle des gewöhnlichen Bereichs gelangen wir unter Berufung auf das Hauptresultat des ersten Abschnittes folgendermaßen zum gewünschten Ziele der Abbildung des Bereichs auf einen gewöhnlichen Kreisring.

Wir wählen irgend zwei Punkte a und b auf den Begrenzungslinien, a auf der einen, b auf der anderen, und bilden den Bereich mittelst der Funktion $\log \frac{z-a}{z-b}$ ab. Diese Abbildung wird, da die Funktion $\log \frac{z-a}{z-b}$ unendlich-vieldeutig ist, zweckmäßig aufgefaßt als eine eineindeutige konforme Abbildung des über B befindlichen Teiles Φ der einfach zusammenhängenden *Riemann*schen Fläche des Logarithmus auf ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet Φ'. In der Tat ist Φ ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Flächenstück. Der sich ergebende Bereich Φ' wird nicht nur von einem Punkte begrenzt. Man kann daher Φ' eineindeutig konform auf das Innere des Einheitskreises und diese Fläche durch lineare Transformation auf die obere Halbebene abbilden. Die Abbildungsfunktion, welche den Bereich B auf die erwähnte Halbebene abbildet, heiße $t(z)$. Einem vollständigen Umlauf im Bereiche B entspricht eine Transformation der oberen t-Halbebene in sich, also eine reelle lineare Transformation, welche jedenfalls keinen Fixpunkt in der oberen Halbebene hat, daher durch reelle lineare Substitution der Abbildungsfunktion $t(z)$ entweder auf die Form $t' = ct$ mit c als einer reellen positiven, von 1 verschiedenen Konstanten, oder auf die Form $t' = t \pm 2\pi$ gebracht werden kann.

Im *ersten* Falle kann man von der t-Halbebene mit Hilfe der Funktion $\tau = \log t$ auf die Fläche eines Parallelstreifens parallel zur Achse des Reellen übergehen, und es entspricht dann dem Übergange von t zu t' der Übergang von τ zu $\tau' = \tau + \log c$, wobei $\log c$ reell zu wählen ist. Jetzt würde der gefundene Parallelstreifen mit Hilfe der Funktion $z' = e^{\frac{2\pi i}{\log c}\tau}$ abgebildet, welche Funktion gewissermaßen eine Aufwickelung des Parallelstreifens über der Fläche eines Kreisringes bewirkt, wobei zwei Punkte dann und nur dann zur Deckung kommen, wenn ihr Unterschied ein positives oder negatives Vielfaches von $\log c$ ist. Das bedeutet aber, daß die Funktion $z'(z)$, die jetzt gefunden ist, eine eineindeutige konforme Abbildung des Inneren von B auf das Innere eines gewöhnlichen Kreisringes bewirkt.

Im *zweiten* Falle bilden wir $z' = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ und erhalten eine eineindeutige Abbildung des Bereichs B auf die Fläche eines einfach ausgearteten Kreisrings. Dies ist aber, insofern als wir gegenwärtig einen nicht ausgearteten Bereich B voraussetzen, unmöglich, wie sich durch Hinweis auf den Satz ergibt, daß eine in der Umgebung einer Stelle reguläre und beschränkte analytische Funktion sich auch noch an dieser Stelle regulär verhält. Im Rahmen unserer Betrachtungsweise bietet sich indes folgende, von jenem Hilfssatze keinen Gebrauch machende Beweisführung als eine naturgemäße dar.

Den Bereich B transformieren wir nach der oben bezeichneten Methode so, daß seine äußere Begrenzungskurve der Einheitskreis ist und der Nullpunkt weder dem Innern noch der Grenze angehört. Sei z ein in B variabler Punkt. Bei der Abbildung auf den ausgearteten Kreisring $(0 < |z'| < 1)$ durch die Funktion $z'(z)$ möge der inneren Begrenzungslinie von B der isolierte Grenzpunkt, nämlich $z' = 0$, entsprechen. Dann ist $\frac{1}{n} \log |z'|$ in B regulär und eindeutig und wird bei Annäherung an die innere Begrenzungslinie von B bestimmt negativ unendlich. Nun ergibt sich, wie oben S. 198, daß

$$\frac{1}{n} \log |z'| < \log |z|$$

ist für jedes ganzzahlige positive n, daß daher $\log |z|$ überall im Bereich B den Wert Null haben müßte.

Wir haben somit jetzt das Resultat:

Satz I. Jeder gewöhnliche oder einfach ausgeartete oder zweifach ausgeartete, zweifach zusammenhängende Bereich B läßt sich eineindeutig und konform und, abgesehen von einer linearen Transformation, nur auf eine Weise auf die Fläche eines Kreisringes abbilden, welcher bzw. ein gewöhnlicher, einfach ausgearteter oder zweifach ausgearteter Kreisring ist.

Satz II. In jedem zweifach zusammenhängenden schlichten Bereich B läßt sich eine im Inneren desselben reguläre von der einen Begrenzung zur anderen führende analytische Linie (Querschnitt) auf unendlichviele Weisen so bestimmen, daß der dadurch entstehende, einfach zusammenhängende Bereich B' auf die Fläche eines Halbkreisringes oder eines Halbparallelstreifens, oder schließlich eines Parallelstreifens (d. i. ganzen Parallelstreifens) abgebildet werden kann, dessen, dem Querschnitte entsprechende Randstücke im ersten Falle zwei durch eine homothetische

Transformation mit dem Mittelpunkt des Kreisringes als Zentrum aufeinander bezogene Halbkreise sind, im zweiten und dritten Falle zwei durch Parallelverschiebungen vertikal zur Längsachse des Parallelstreifens aufeinander bezogene Halbgeraden bzw. Geraden. Die betreffenden Abbildungsfunktionen sind bis auf eine Ähnlichkeitstransformation bestimmt, wenn im ersten Falle noch festgesetzt wird, welchem Durchlaufungssinne des Bereichs B der Übergang vom inneren zum äußeren Begrenzungshalbkreise entsprechen soll. Siehe die Figuren.

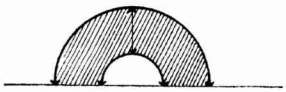


Fig. 1.

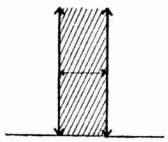


Fig. 2.

Fig. 3.

Wir vermerken noch den folgenden, durch die vorstehenden Überlegungen ohne Zuhilfenahme der *Laurent*schen Reihe oder des *Cauchy*schen Integrals erwiesenen Satz:

Satz III: Wird eine schlichte Umgebung U eines Punktes z_0 (exkl. z_0 selbst) eineindeutig konform auf ein Gebiet U' abgebildet, so verhält sich die Abbildung auch noch im Punkte z_0 selbst regulär, oder es besitzt die Abbildungsfunktion im Punkte z_0 eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung.

Unser Beweis würde sich so gestalten. Sei $f(z)$ die Abbildungsfunktion. Dann können wir durch Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung der Stelle z_0 bzw. ev. durch eine lineare Transformation von $f(z)$ erreichen, daß die Funktion $z' = f(z)$ beschränkt ist, mithin das Gebiet U' in einem endlichen Bezirke enthalten ist. Ferner können wir annehmen, daß die innere Begrenzung des zweifach zusammenhängenden Bereichs U, d. i. der Punkt z_0, der inneren Begrenzung von U' entspricht. Sei nun K ein in U verlaufender Kreis mit z_0 als Mittelpunkt, K' die Bildkurve von K in U'. Wir bilden den von K' umschlossenen, einfach zusammenhängenden Bereich auf die Fläche des Einheitskreises ab vermittelst einer Funktion $Z'(z')$, wobei der nach außen durch K' begrenzte Teil von U' in einen zweifach zusammenhängenden, nach außen vom Einheitskreise begrenzten Bereich U'' übergeht, von dem angenommen werden

kann, daß er den Nullpunkt weder in seinem Innern noch auf seiner Begrenzung enthält. Die Funktion $z(Z')$ bildet U'' auf einen ausgearteten Kreisring ab, was nach den Betrachtungen S. 202 nur möglich ist, wenn die innere Begrenzungslinie von U'' sich auf einen Punkt reduziert, so daß nun $z(Z')$ die Abbildung zweier ausgearteten Kreisringe aufeinander vermittelt, folglich eine lineare Funktion ist.

D. Dritter Teil.

Die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.

§ 8.

Verhalten der Abbildungsfunktion längs geschlossener regulärer, analytischer Begrenzungslinien.

Es seien C und C' zwei geschlossene reguläre, ganz im Endlichen verlaufende analytische Linien, die eine in der z-Ebene, die andere in der z'-Ebene. Es sei ferner bekannt, daß ein an C anschließender, zweifach zusammenhängender Flächenstreifen eineindeutig konform auf einen an C' anschließenden Flächenstreifen abgebildet sei mittelst einer Funktion $z' = f(z)$, von welcher jedoch nicht als bekannt vorausgesetzt wird, daß sie sich auf der Linie C selbst noch regulär oder auch nur stetig verhält. Wir wollen beweisen, daß die Funktion $f(z)$ tatsächlich auf der Linie C regulär ist, und daß folglich die analytische Fortsetzung der Funktion $f(z)$ über C hinaus derart stattfindet, daß je zwei in bezug auf C im *Schwarz*schen Sinne spiegelbildlich symmetrischen Punkten der z-Ebene zwei in bezug auf C' spiegelbildlich symmetrische Punkte entsprechen.

Zum Beweise möge angenommen werden, daß die betrachteten Flächenstreifen im Inneren der Kurven C bzw. C' liegen. Wir beschränken uns jetzt in unserer Betrachtung auf so schmale Flächenstreifen S und S', daß es möglich ist, dieselben als solche an C bzw. an C' zu spiegeln, so daß sich wieder zwei schlichte Flächenstreifen ergeben. Die beiden zueinander spiegelbildlichen Flächenstreifen der z-Ebene bilden zusammen, unter Hinzunahme der Linie C zum Inneren, einen zweifach zusammenhängenden Bereich B. In derselben Weise erhalten wir in der z'-Ebene einen zweifach zusammenhängenden Bereich B'. Wir machen nun eine konforme Abbildung des Bereichs B auf einen Kreisring K mittelst einer

Funktion $\zeta(z)$. Analog wird durch eine Funktion $\zeta'(z')$ der Bereich B' auf einen Kreisring K' abgebildet. Es ist nun hervorzuheben, daß bei den erwähnten Abbildungen den Linien C und C' jedesmal ein mit dem betreffenden Kreisring konzentrischer Kreis (der Symmetralkreis des Ringes) entspricht, dessen Radius gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radien des betreffenden Kreisringes ist. Es überträgt sich nämlich die in B definierte Spiegeltransformation, welche C fest läßt, in eine gewisse Spiegeltransformation, welche das Innere des Kreisringes in sich überführt und eine gewisse Kurve $\varkappa$ fest läßt. Nach den Entwickelungen des § 6 ist es klar, daß es sich hier nur um eine Transformation durch reziproke Radien an dem Symmetralkreise handeln kann. Wir haben somit unsere ursprünglichen Flächenstreifen innerhalb C bzw. C' durch die Funktionen $\zeta(z)$ und $\zeta'(z')$ jede auf einen Kreisring, $\overline{K}$ und $\overline{K}'$, mit $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ (Symmetralkreis von K bzw. K') als umschließendem Begrenzungskreis abgebildet, und zwar in der Weise, daß dabei den Kurven C und C' in regulärer Weise die Kreise $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ entsprechen. Da nun die beiden Flächenstreifen S und S' durch eine Funktion $f(z)$ eineindeutig aufeinander bezogen waren, so ergibt sich eine entsprechende eineindeutige Beziehung der Kreisringe $\overline{K}$ und $\overline{K}'$, welche folglich linear ist (nach § 6), und welche somit auch auf den Kreislinien $\varkappa$ und $\varkappa'$ regulär erklärt ist. Dies überträgt sich aber nun rückwärts auf die Linien C und C', welche jetzt durch $f(z)$ in regulärer Weise aufeinander bezogen erscheinen.

Hiermit ist die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung eines einfach oder zweifach zusammenhängenden Bereichs im Sinne regulären analytischen Verhaltens der Abbildungsfunktion entschieden für alle einfach und mehrfach zusammenhängenden Bereiche, welche von geschlossenen analytischen Linien begrenzt sind, deren Inneres (exkl. der Begrenzungen) in eineindeutiger Weise konform wieder auf Bereiche derselben Begrenzungsform abgebildet vorausgesetzt wird.

§ 9.

Verhalten der Abbildungsfunktion längs regulärer analytischer Begrenzungsstücke.

Wir wollen die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche weiterverfolgen. Die Frage

wird damit übrigens von selbst auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche klargestellt, weil man jeden mehrfach zusammenhängenden Bereich mit $p+1$ Begrenzungslinien durch $p+1$ Operationen, deren jede einzelne eine konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereichs auf eine Kreisfläche darstellt, auf einen Bereich mit $p+1$ geschlossenen regulären Linien abbilden kann. Unser besonderes prinzipielles Interesse wird sich darauf zu richten haben, die Ränderzuordnungsfrage ohne Hinzuziehung des Integralbegriffs rein potenzreihentheoretisch zu erledigen.

Wir fassen zunächst den Fall eines schlichten Bereichs B ins Auge, welcher ein geradliniges Begrenzungsstück s hat von der Art, daß bei Spiegelung des ganzen Bereichs B an dem Begrenzungsstück s sich ein Bereich B' ergibt, der zusammen mit B einen neuen ebenfalls schlichten, einfach zusammenhängenden Bereich B'' bildet. Wir wollen zeigen, daß die Abbildungsfunktion $\zeta = f(z)$, welche die konforme Abbildung des Inneren des Bereichs B auf das Innere des Einheitskreises leistet, sich auf der ganzen Strecke s, exkl. deren hier nicht zu betrachtende Endpunkte, regulär verhält. Der Gedanke der Beweisführung besteht darin, die Abbildung des Bereichs B auf den ζ-Einheitskreis in neuer Weise herzustellen, und zwar in einer Form, bei welcher die Regularität der neuen Abbildung auf der Strecke s sofort evident wird*). Diese neue Abbildung kann sich ja von der eigentlich zu untersuchenden nur durch eine lineare Transformation unterscheiden wegen des für das Abbildungsproblem geltenden Unitätssatzes.

Wir bilden den Bereich B'' auf die Fläche des Einheitskreises ab. Bei dieser konformen Abbildung entspricht der Spiegelung des Bereichs B'' in bezug auf die Strecke s in der ζ-Ebene eine analytische Spiegelungstransformation, welche die Fläche des Einheitskreises eineindeutig in sich transformiert und eine gewisse Linie σ, nämlich das Bild von s, fest läßt. Nun ist klar, daß die erwähnte Transformation eine Transformation durch reziproke Radien ist, und daß daher σ ein den Einheitskreis in zwei Kreisbogenzweiecke zerlegender Orthogonalkreisbogen ist. Zur näheren Begründung kann man annehmen, daß σ die Achse des Reellen im Nullpunkte

*) Vgl. *C. Carathéodory*, Math. Ann. Bd. 73, S. 313 u. 314.

berührt. Setzt man nun die zu untersuchende Spiegelung an σ mit einer nachfolgenden Spiegelung an der Achse des Reellen zusammen, so ergibt sich eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst, welche den Nullpunkt und die Richtung der positiv-reellen Halbachse im Nullpunkt fest läßt, also mit der identischen Abbildung zusammenfällt. Dasjenige der genannten Kreisbogenzweiecke, welches dem Gebiet B entspricht, bilden wir elementar auf die Fläche des Einheitskreises ab, wobei σ in ein bestimmtes Stück der Peripherie regulär transformiert wird. Damit aber ist das Resultat gewonnen. Wir haben eine konforme Abbildung von B auf das Innere des Einheitskreises angegeben, bei welcher der Strecke s ein bestimmtes Stück der Peripherie in regulärer Weise entspricht.

Besitzt die Strecke s in bezug auf den Bereich B nicht die Eigenschaft, daß B'' wieder ein die Ebene schlicht bedeckender, einfach zusammenhängender Bereich ist, so können wir dies doch sofort durch eine Quadratwurzeloperation bewirken, indem wir die längs s aufgeschlitzt vorgestellte Vollebene auf eine Halbebene abbilden, wobei B in einen neuen Bereich B der gewünschten Art übergeht.

Besitzt der Bereich B einen Kreisbogen als Begrenzungsstück, so werden wir durch eine lineare Transformation, bei welcher der Kreisbogen in eine geradlinige Strecke übergeht, auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt.

Jetzt betrachten wir den Fall eines regulären analytischen Begrenzungsstücks s. Mit dem Begriffe des regulären analytischen Begrenzungsstücks ist unmittelbar die Möglichkeit der konformen Abbildung eines gewissen, das Stück s einbettenden Flächenstreifens S zu beiden Seiten von s auf einen Flächenstreifen $\overline{S}$ gesetzt, zu beiden Seiten eines Stücks $\bar{s}$ der Achse des Reellen. Den Flächenstreifen S denken wir uns als ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in welchem s verläuft. Die Linie s fassen wir übrigens dabei nicht in der Vollständigkeit auf, in welcher sie als Begrenzung in Betracht kommt, vielmehr nehmen wir von dem betreffenden vollständigen Begrenzungsstück lediglich ein inneres Stück, eben unser s, irgendwo heraus.

Wir führen nun eine konforme Abbildung des Bereichs B auf die Fläche des Einheitskreises wieder schrittweise aus, und zwar so, daß wir bei jedem einzelnen Schritte sicher sind, bzw. uns überzeugen können,

daß die Abbildung auch noch auf s sich regulär verhält. Wir betrachten den einfach zusammenhängenden Bereich B^* der z-Ebene, welcher entsteht, wenn man sich diese Ebene lediglich längs s aufgeschlitzt denkt und die beiden Seiten von s als vollständige Begrenzung nimmt. Der Bereich B^* kann nun jedenfalls auf das Innere des Einheitskreises (ξ-Ebene) abgebildet werden. Dabei würde B in ein Teilgebiet desselben übergehen, welches nun einen Kreisbogen als Begrenzungsstück aufweist. Die ganze Frage wird dadurch auf die Frage reduziert, ob die erwähnte Abbildung des Bereichs B^* auf das Innere des ξ-Einheitskreises sich auf s noch regulär verhält, wobei die Endpunkte von s selbst von dieser näheren Bestimmung des Abbildungscharakters ausgeschlossen bleiben dürfen. Daß dies aber nun in der Tat der Fall ist, ergibt sich durch Betrachtung des Flächenstreifens S. Dieser Flächenstreifen konnte auf den Flächenstreifen $\bar{S}$ abgebildet werden durch eine Funktion, welche auch noch auf s regulär ist. Es fragt sich demnach, ob die hiermit gesetzte Abbildung des Flächenstreifens $\bar{S}$ auf einen nach außen von der Peripherie des ξ-Einheitskreises begrenzten Flächenstreifen den gewünschten Charakter der Regularität auf $\bar{s}$ besitzt.

Dies letztere ergibt sich aber als unmittelbare Folge des § 9 bewiesenen Satzes über den Charakter der Abbildung zweier durch geschlossene reguläre analytische Linien C und C' begrenzter Flächenstreifen aufeinander. Kann man doch den Flächenstreifen $\bar{S}$ sofort in einen solchen Streifen verwandeln, indem man elementar die längs $\bar{s}$ aufgeschlitzte Ebene auf das Innere des Einheitskreises abbildet, wobei $\bar{S}$ in einen Flächenstreifen übergeht, der nach außen vom Einheitskreise begrenzt wird.

§ 10.

Verhalten der Abbildungsfunktion in Ecken und Spitzen, die von analytischen Kurvenbögen gebildet werden.

Wir fassen nun weiter den Fall eines Eckpunktes oder einer Spitze des Bereichs B ins Auge, welche von zwei in einem Punkte z_0 endigenden, regulären analytischen Begrenzungsstücken s_1 und s_2 gebildet werde. Es ist nicht nötig vorauszusetzen, daß die Linien s_1 und s_2 auch noch im Punkte z_0 regulär analytisch sind; sie brauchen sich vielmehr nur dem

Punkte z_0 asymptotisch zu nähern. Den Linien s_1 und s_2 entsprechen nach § 9 zwei Stücke σ_1 und σ_2 der Peripherie des Einheitskreises; die Funktion $\zeta = f(z)$, welche die konforme Abbildung des betrachteten schlichten Bereichs B auf die Fläche des Einheitskreises leistet, ist auf s_1 und s_2 regulär analytisch. Was jetzt bewiesen werden soll, ist, daß $f(z)$ im Punkte z_0, bei beliebig vorgestellter Annäherung an diesen Punkt innerhalb der betrachteten Ecke bzw. Spitze, stetig ist. Man bemerkt, daß es zum Zwecke dieses Nachweises wesentlich genügt, darzutun, daß die beiden Kreisbögen σ_1 und σ_2, die sich selbstverständlich nicht teilweise überdecken können, in einem und demselben Punkte ζ_0 der Peripherie des Einheitskreises zusammenstoßen, welcher Punkt dann eben dem Punkte z_0 entsprechen würde. Dies ergibt sich nach einer von *Picard* herrührenden äußerst einfachen und anschauungsmäßig gehaltenen Methode*). Wir nehmen an, daß σ_1 und σ_2 nicht zusammenstoßen, sondern in getrennten Punkten ζ_1 und ζ_2, beide entsprechend dem Punkte z_0, endigen. Alsdann können wir um z_0 einen Kreis von beliebig kleinem Radius beschreiben und auf diesem Kreise einen s_1 mit s_2 verbindenden Kreisbogen auswählen, welcher nun ein Stück der Ecke bzw. Spitze von beliebig kleinem Maximaldurchmesser abgrenzt. Übertragen wir diese Vorstellung in die ζ-Ebene, so erkennen wir, daß die Funktion $z(\zeta)$ sich längs des ganzen Peripheriestückes von ζ_1 bis ζ_2 stetig dem konstanten Werte z_0 nähert und sich folglich überhaupt auf eine Konstante reduziert, gemäß dem folgenden Hilfssatze. (Hilfssatz I).

Satz von *Schwarz*: Ist $F(z)$ eine oberhalb eines Stückes $a \ldots b$ der Achse des Reellen in einem gewissen anschließenden Flächenstreifen regulär erklärte analytische Funktion von der Eigenschaft, bei der Annäherung an die Achse des Reellen gleichmäßig einem konstanten Werte zuzustreben, so reduziert sich diese Funktion überhaupt auf eine Konstante**). —

---

*) *E. Picard:* „Traité d'analyse" t. II pag. 277 (I. édition).

Eine früher (1870) von *Schwarz* gefundene, nicht näher veröffentlichte Methode, die mir auf dem Wege mündlicher Mitteilung bekannt geworden ist, erstreckt sich nur auf den Fall, daß s_1 und s_2 in z_0 selbst noch den Charakter algebraischer Kurven besitzen.

**) *H. A. Schwarz:* „Zur Integration der partiellen Differentialgleichung

Dieser Satz läßt sich ohne Integralbegriff folgendermaßen beweisen.

Wir nehmen an, daß der erwähnte konstante Wert gleich Null sei, was durch Subtraktion derselbigen Konstanten von der Funktion erreicht werden kann. Wir denken uns jetzt über einem in $a \ldots b$ enthaltenen Intervall der Achse des Reellen als Basis die Fläche H eines Halbkreises konstruiert. Das Intervall wird dabei so klein angenommen, daß der Halbkreis H ganz in dem Flächenstreifen liegt, in welchem wir die Funktion $F(z)$ als erklärt betrachten. Nunmehr wird die Fläche des Halbkreises elementar in der Weise auf die Fläche des Einheitskreises einer z'-Ebene abgebildet, daß die Endpunkte der Basis des Halbkreises den Punkten -1 und $+1$ entsprechen. Die in die z'-Ebene überpflanzte Funktion $F(z)$ möge mit $\Phi(z')$ bezeichnet werden. Diese Funktion wird nun längs der unteren Hälfte der Peripherie des Einheitskreises stetig in Null übergehen. Wird nunmehr mit $\Psi(z')$ die durch den Ausdruck $\overline{\Phi}(\bar{z}')$ erklärte Funktion bezeichnet, wobei durch die Striche über den Buchstaben z', Φ der Übergang zum konjugiert imaginären Wert angedeutet sein soll, so ist die Funktion $\Phi(z') \cdot \Psi(z')$ eine längs der ganzen Peripherie des Einheitskreises stetige in Null übergehende Funktion, welche daher nach dem Satze vom Maximum des absoluten Betrages einer regulären Funktion identisch verschwinden muß, womit dann $\Phi(z')$ und $F(z)$ identisch verschwinden müßten*).

Wird die Ecke oder Spitze speziell von Kreisbögen s_1 und s_2 gebildet, so ist es wünschenswert die analytische Natur der Abbildungsfunktion in dem Punkte z_0 noch genauer zu bestimmen. Wir erreichen dies, indem wir eine von der allgemeinen, soeben entwickelten Methode verschiedene und davon unabhängige Methode befolgen.

Ist zunächst der Winkel, unter welchem s_1 und s_2 zusammenstoßen, von 0, π und 2π verschieden, so gelangen wir durch lineare Transformation zu einer Ecke, gebildet von zwei im Punkte $z = 0$ zusammentreffenden

---

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen", Berliner Monatshefte 1870, Ges. Abh. Bd. II. In dieser Abhandlung hat *Schwarz* überhaupt seine auf dem Spiegelungsprinzip der Potentialfunktionen, d. i. auf dem *Poisson*schen Integral beruhenden Beweisgedanken betreffs der Ränderzuordnung bei analytischer Begrenzung mitgeteilt.

*) Vgl. eine analoge Betrachtungsweise in *E. Lindelöf*s S. 212 zitierter Note.

geradlinigen Strecken, die wir wieder mit s_1 und s_2 bezeichnen. Vermittels eines Kreises um den Punkt $z = 0$ als Mittelpunkt schneiden wir nun vom Bereiche B einen Sektor S ab und diesen bilden wir elementar auf die Fläche eines Halbkreises ab. Die Fläche H dieses Halbkreises erscheint nun, abgesehen vom Basismittelpunkte des Halbkreises, regulär analytisch auf ein Stück Σ des ζ-Einheitskreises bezogen, wobei insbesondere die Basis selbst nach Ausschluß ihres Mittelpunktes auf zwei getrennte Stücke σ_1 und σ_2 der Peripherie abgebildet wird. Nun folgt aber, daß die Abbildung auch noch im Mittelpunkte selbst regulär ist, weil man sowohl den Halbkreis H als auch das Stück Σ auf die Fläche des Einheitskreises abbilden kann, so, daß für die in Untersuchung stehenden Stellen die Abbildung durchaus regulär ist, und weil die nun zu betrachtende Beziehung des Einheitskreises auf sich selbst notwendig eine ganze oder gebrochene lineare Funktion ist.

Liegt einer der oben besonders genannten Fälle vor, in welchen nämlich der Winkel 0, π oder 2π ist, so verlege man durch lineare Transformation den Eckpunkt in den unendlich fernen Punkt so, daß s_1 und s_2 Halbgeraden parallel der Achse des Reellen werden. Nunmehr leistet die Exponentialfunktion im Falle des Winkels 0, die Umkehrungsfunktion von $z + \log z$ im Falle des Winkels π oder 2π denselben Dienst, welchen vorher die Potenzfunktion leistete. An Stelle des den Kreissektor von vorhin begrenzenden Kreisbogens tritt jetzt beim Winkel 0 eine geradlinige Strecke, in den anderen Fällen ein Zykloidenbogen.

§ 11.

*Behandlung der Frage der Ränderzuordnung im allgemeinsten Falle**).

Um das Verhalten der Funktion $\zeta = f(z)$ am Rande des Bereichs B im allgemeinsten Falle zu bestimmen und damit zu den allgemeinen Re-

*) Vgl. meine Note „Ränderzuordnung bei konformer Abbildung“ in Gött. Nachr. 1913, S. 286, in welcher insbesondere der Hilfssatz II (vorliegende Abh. S. 212) mitgeteilt und potentialtheoretisch bewiesen ist. Eine auf diese Beweisführung sich beziehende Bemerkung, welche Herr *Carathéodory* in einer anschließenden Note „Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung“ (Gött. Nachr. 1913, S. 509, Zeile 6—8) macht, ist m. E. unbegründet. Im übrigen sei auf die neueren, den Gegenstand betreffenden Arbeiten von *Osgood* („On the Transformation of the Boundary in the Case of Conformal

sultaten von *Osgood, Fatou-Carathéodory, Study* zu gelangen, benötigen wir einen über den vorhin aufgestellten hinausgehenden Hilfssatz. Dieser neue Hilfssatz lautet folgendermaßen:

Hilfssatz II. Es sei $F(z)$ eine oberhalb der Achse des Reellen längs eines Stücks $a \ldots b$ derselben regulär erklärte analytische Funktion, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleiben mögen, und welche außerdem folgende Eigenschaft besitzt: Es soll möglich sein, in beliebiger Nähe der Achse des Reellen längs des ganzen Stücks $a \ldots b$ immer noch eine Linie λ anzugeben, auf welcher sich die Funktionswerte von einem konstanten, von λ unabhängigen Werte gleichmäßig um eine beliebig kleine Größe unterscheiden. Alsdann ist die Funktion eine Konstante*). —

Der Beweis dieses neuen Hilfssatzes läßt sich ebenso führen, wie der Beweis des ersteren. Der konstante Wert kann zunächst auf Null gebracht werden. In dem Halbkreis H verlaufen die Linien λ von Randpunkt zu Randpunkt. In der z'-Ebene bekommen wir eine Funktion $\Phi(z') \cdot \Phi(z')$, welche nun auf geschlossenen, längs der ganzen Peripherie des Einheitskreises entlang laufenden, den Nullpunkt umschließenden Linien Λ dem absoluten Betrage nach einen beliebigen Kleinheitsgrad besitzt und sich folglich auf eine Konstante reduzieren muß.

Fassen wir nun sogleich den Fall des allgemeinsten Bereichs B ins Auge, wobei wir diesen Bereich ganz im Endlichen liegend und den Nullpunkt im Inneren enthaltend uns vorstellen wollen, was immer durch eine lineare Transformation eventuell in Verbindung mit einer Quadratwurzeloperation erreichbar ist.

Mapping", Bull. of the Am. Math. Soc., II. Series 9, 1902/3, S. 233—235), *Osgood-Taylor* (Am. Trans. 1913), *Carathéodory, Study, Lindelöf, Courant* verwiesen, bei welch letzterem man wegen der ausführlichen Zitate nachsehen wolle (Dieses Journal Bd. 144). Die Arbeiten von *Lindelöf* (Compt. Rend. 1914) und *Courant* erschienen während der Niederschrift bzw. nach Einsendung der vorliegenden Abhandlung.

*) Ist der konstante Wert von λ abhängig, d. h., wird von der Funktion $F(z)$ außer ihrer Beschränktheit nur vorausgesetzt, daß die Schwankung auf Linien λ, die sich mehr und mehr der Strecke $a \ldots b$ anschmiegen, unendlich klein wird, so muß sich $F(z)$ ebenfalls auf eine Konstante reduzieren, weil man nun jedenfalls auch in der Lage ist, eine solche Folge von Linien λ auszuwählen, auf welchen die Konvergenz der Funktionswerte gegen einen konstanten Wert im Sinne der Voraussetzungen des Hilfssatzes II stattfindet.

Wir unterscheiden zwischen erreichbaren und nichterreichbaren Grenzpunkten des Bereichs B. Ein Grenzpunkt P heißt erreichbar, wenn es eine Linie L gibt, welche von dem Inneren des Bereichs aus sich dem Punkte P unbegrenzt nähert, so daß ein die Linie L durchlaufender Punkt gegen den Punkt P konvergiert.

Daß ein Grenzpunkt P durchaus nicht immer ein erreichbarer Punkt zu sein braucht, lehrt das Beispiel des folgenden Bereichs: In dem Quadrat mit den Ecken 0, 1, $1+i$, i mögen in den Punkten der Form $\frac{1}{n}$ $[n=2, 3, 4, \ldots]$ senkrecht zur Achse des Reellen Strecken von der Länge $\frac{1}{2}$ errichtet werden, welche sich gegen eine Strecke a, von 0 bis $\frac{i}{2}$, häufen. Die erwähnten Strecken zusammen mit den Seiten des Quadrates bilden die vollständige Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Bereichs B, für welchen die Punkte der Strecke a auf der Achse des Imaginären (exkl. $\frac{i}{2}$ selbst) nichterreichbare Grenzpunkte sind.

Um einen bestimmten erreichbaren Grenzpunkt des allgemeinen Bereichs B präzise zu definieren, genügt es im allgemeinen nicht, nur diesen Punkt selbst anzugeben, sondern es ist außerdem eine Linie L anzugeben, auf welcher die Erreichung stattfinden kann. Die Linie L können wir uns dabei zweckmäßig immer vom Nullpunkt ausgehend vorstellen. Ein und derselbe Grenzpunkt kann nämlich möglicherweise von ganz verschiedenen Seiten her erreichbar sein und in diesem Sinne sogar ein unendlichvielfach zu zählender Punkt sein. Wir werden naturgemäß zwei erreichbare Grenzpunkte P_1 und P_2 von B mit den zugehörenden definierenden Linien L_1 und L_2 dann und nur dann als einen und denselben erreichbaren Grenzpunkt ansprechen, wenn erstens P_1 und P_2 mit einem und demselben Punkte P koinzidieren, und wenn außerdem die Linien L_1 und L_2, die wir uns, wie gesagt, beide vom Nullpunkte ausgehend vorstellen, nur solche Gebiete umschließen die ganz in B enthalten sind, also keinen Grenzpunkt von B enthalten, außer P selbst. Die so definierte Gesamtheit der verschiedenen erreichbaren Grenzpunkte des Bereichs B befindet sich offenbar in zyklischer Anordnung.

Wir beweisen nun eine Reihe von Sätzen, welche die Hauptergebnisse der *Osgood-Fatou-Study-Carathéodory*schen Untersuchungen bilden*).

*) Das im *Fatou*schen Satze (s. *Carathéodory* und *Study* a. a. O.) enthaltene

Satz I: Es sei P ein erreichbarer Grenzpunkt von B, L eine ihn definierende Linie. Alsdann entspricht der Linie L im ζ-Einheitskreise eine Linie Λ, die in einem Punkte der Peripherie endigt.

Nehmen wir in der Tat das Gegenteil an, so würde die Linie Λ einen Verlauf zeigen, bei welchem sie an einem gewissen Stück der Peripherie des Einheitskreises sicher unendlich oft entlangstreicht, dabei in immer größere Nähe des Einheitskreises kommend, so daß $z(\zeta)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes II erfüllen, also konstant sein würde.

Satz II: Sind L_1 und L_2 zwei verschiedene, einen und denselben erreichbaren Grenzpunkt P $(z = z_0)$ definierende Linien, so endigen die entsprechenden Linien Λ_1 und Λ_2 der ζ-Ebene in demselben Punkte der Peripherie des Einheitskreises.

Wir nehmen an, es würden sich zwei verschiedene Grenzpunkte ζ_1 und ζ_2 ergeben. Alsdann werden sich Λ_1 und Λ_2 von einer gewissen Stelle an nicht mehr schneiden, was dann auch von L_1 und L_2 von der korrespondierenden Stelle ab gilt. Sind ζ^* und z^* die letzten Treffpunkte, so begrenzen die erst von ζ^* bzw. z^* ab in Betracht gezogenen Linien Λ_1 und Λ_2 bzw. L_1 und L_2 zwei Gebiete I' und G, deren eines an den Kreisbogen $\zeta_1 \ldots \zeta_2$ anstößt, während das andere entsprechend an P anstößt. Man erkennt sofort, daß nun die Funktion $z(\zeta)$ längs des Kreisbogens $\zeta_1 \ldots \zeta_2$ gleichmäßig dem konstanten Werte z_0 zustreben und sich folglich auf eine Konstante reduzieren muß nach Hilfssatz I.

Satz III: Zwei verschiedenen erreichbaren Grenzpunkten z_1 und z_2 mit den definierenden Linien L_1 und L_2 entsprechen stets auch verschiedene Punkte ζ_1 und ζ_2 der Peripherie des ζ-Einheitskreises.

Beweis: Die Linien L_1 und L_2 werden sich von einer gewissen Stelle ab nicht mehr schneiden. Die von da genommenen Endstücke dieser Linien bilden zusammen einen Querschnitt Q von z_1 nach z_2, welcher den Bereich B in zwei Gebiete B_1 und B_2 zerlegt. Wird angenommen, daß die Linien Λ_1 und Λ_2 in einem und demselben Punkte ζ_0 endigen, so ergibt sich als Bild von B_1 oder andernfalls von B_2 ein Teilgebiet I'_1 innerhalb des Einheitskreises, welches nur in dem einen Punkt ζ_0 die

---

Resultat bleibt hier außer Betracht, soweit es auf den *Lebesgue*schen Maßbegriff Bezug nimmt, desgleichen, insoweit es auf allgemeine beschränkte analytische Funktionen, die nicht Abbildungsfunktionen sind, Bezug hat.

Peripherie des Einheitskreises erreicht. Sei B_1 das Γ_1 entsprechende Gebiet. Wir konstruieren jetzt in B_1 einen Querschnitt des Bereichs B in Gestalt eines einfachen Kreisbogens. Um einen solchen Querschnitt zu finden, wählen wir in unmittelbarer Nähe irgend eines von z_1 und z_2 verschiedenen Grenzpunktes des Bereichs B_1, der zugleich Grenzpunkt von B ist, einen inneren Punkt A des Bereichs B_1 und ziehen von A aus den kürzesten Radiusvektor nach der Grenze des Bereichs B_1, der in A' endigen möge. Um A' als Mittelpunkt konstruieren wir sodann den Kreis mit dem Radius $A'A$, welcher, von A aus nach beiden Seiten bis zur Grenze des Bereichs B_1 verfolgt, uns den gewünschten kreisförmigen Querschnitt q liefert, der nun B_1 in zwei Stücke zerlegt, von denen das dem Querschnitt Q abgewandte Stück, B', uns weiter interessiert. Wir machen jetzt eine konforme Abbildung von B' auf die Fläche des Einheitskreises einer z'-Ebene, wobei wir nach § 9 dem Kreisbogen q etwa den unteren Halbkreis entsprechen lassen können. Die Funktion $\zeta(z')$ ist nunmehr innerhalb des ganzen Einheitskreises der z'-Ebene erklärt und geht längs des ganzen oberen Halbkreises gleichmäßig in den konstanten Wert ζ_0 über, wäre somit nach Hilfssatz I überhaupt konstant.

Satz IV: Die Gesamtheit M' aller Punkte Π der Peripherie des ζ-Einheitskreises, welche den verschiedenen erreichbaren Grenzpunkten des Bereichs B im Sinne der Sätze I, II, III entsprechen, bilden eine Punktmenge, welche auf der Peripherie des Einheitskreises überall verstreut ist, so daß in jedem noch so kleinen Intervall der Peripherie des Einheitskreises Punkte der Menge M' liegen.

Beweis: Es wird angenommen, daß ein Bogen von ζ_1 bis ζ_2 auf der Peripherie des Einheitskreises von Punkten der Menge M' frei sei. Alsdann konstruieren wir den Radius V vom Nullpunkte nach einem Punkte ζ_3 innerhalb des erwähnten Kreisbogens $\zeta_1 \ldots \zeta_2$. Diesem Radius entspricht in B eine Linie L, welche sich der Begrenzung von B asymptotisch nähert. Nunmehr wählen wir auf L eine gegen einen Grenzpunkt z_* konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ und konstruieren in B die von diesen Punkten nach der Begrenzung von B führenden kürzesten geradlinigen Strecken $s_1, s_2, s_3, \ldots$, deren Länge mit unbegrenzt wachsendem Index offenbar unendlich klein wird. Diesen Strecken entsprechen im Einheitskreise Linien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, welche von Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ des

Radiusvektors V ausgehen und in Punkten der Peripherie des Einheitskreises, jedoch außerhalb des Bogens $\zeta_1 \dots \zeta_2$ endigen. Beachten wir, daß die Punkte z_n gegen z_* konvergieren, und daß von den Linien σ_n notwendig unendlichviele entweder längs des Peripheriestücks $\zeta_3 \dots \zeta_1$ oder $\zeta_3 \dots \zeta_2$ entlang laufen müssen, so erkennen wir, daß auf die Funktion $z(\zeta)$ mit Bezug auf einen der beiden genannten Kreisbögen die Voraussetzungen des Hilfssatzes II Anwendung finden, daß sich mithin die Funktion $z(\zeta)$ auf eine Konstante reduzieren müßte.

Satz V: Die Funktion $\zeta = f(z)$ vermittelt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Peripherie des Einheitskreises und den Randelementen des Bereichs B.

Die vollständige Begrenzung des Bereichs B kann nach folgendem Prinzipe in *Randelemente**) aufgelöst werden. Die Menge M aller erreichbaren Punkte der Begrenzung von B bildet, wie erwähnt, ein in zyklischer Anordnung befindliches Punktsystem. Demgemäß können wir in dieser Punktmenge, ähnlich wie im Gebiete der rationalen Zahlen, „Schnitte" definieren. Diese Schnitte wollen wir jedoch stets so nehmen, daß wir den eventuell vorhandenen innersten Punkt bei der Schnittbildung unbeteiligt bleiben lassen. Nunmehr können wir die einzelnen Schnitte durch Folgen von Punktepaaren $P_n P_n'$ aus der Menge M ersetzen, welche den Schnitt in derselben Weise definieren, wie man einen Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen durch unendlich klein werdende ineinandergeschachtelte Intervalle mit rationalen Endpunkten definiert. Jetzt wird die Folge der Punktepaare $P_n P_n'$ zur Definition einer Folge ineinandergeschachtelter Querschnitte Q_n verwandt, von welchen der einzelne Querschnitt Q_n die erreichbaren Randpunkte P_n und P_n' miteinander verbindet. Dabei ist noch die Bedingung zu erfüllen, daß mit unbegrenzt wachsendem Index n die Linien Q_n gleichmäßig der Grenze des Bereichs B zustreben, d. h. von einem gewissen n ab außerhalb eines jeden ganz inneren Teilbereichs β von B zu liegen kommen. Wird der durch Q_n abgeschnittene Teilbereich von B mit b_n bezeichnet, so definieren wir nun als das Randelement $[Q_n]$ die Gesamtheit der Grenzpunkte von B, welche allen Bereichen b_n als Grenzpunkte angehören. So bildet in unserem Beispiel S. 213 die Strecke a

*) *Carathéodory* spricht von „*Primenden*". Ich bringe statt dessen die einfachere Bezeichnung „*Randelemente*" in Vorschlag.

von 0 bis $\frac{i}{2}$ auf der Achse des Imaginären ein Randelement. Wir werden zwei Randelemente $[Q]$ und $[Q']$ dann und nur dann als verschieden bezeichnen, wenn die zur Definition benutzten Bereiche b_n und b_n' von einem gewissen n ab keinen inneren Punkt gemeinschaftlich haben. Es ist klar, daß ein und derselbe Grenzpunkt nunmehr als unendlichvielfacher Punkt erscheinen kann, insofern als er nämlich unendlichvielen Randelementen angehören kann. Es ist ferner klar, daß ein Randelement höchstens einen erreichbaren Grenzpunkt enthalten kann. In unserem Beispiel ist dies der Punkt $\frac{i}{2}$.

Der Inhalt unseres Satzes V soll nun der sein, daß der Querschnittfolge Q_n eine Querschnittfolge im ζ-Einheitskreise entspricht, die sich schließlich auf einen Punkt der Peripherie zusammenzieht, und daß umgekehrt einer Folge von Querschnitten im ζ-Einheitskreise, die sich auf einen Punkt der Peripherie zusammenziehen und dabei sämtlich als Verbindungslinien zwischen Punkten der Menge M' gewählt gedacht werden dürfen, eine Querschnittfolge Q_n entspricht, die ein Randelement $[Q]$ definiert. Daß die so gemeinte Korrespondenz zwischen den Randelementen von B und den Punkten der Peripherie des ζ-Einheitskreises eine eineindeutige ist, ist, wie überhaupt der ganze Inhalt des Satzes V, auf Grund der Sätze I—IV unmittelbar einleuchtend. Der Satz V erscheint gewissermaßen als eine bequeme Art, den Inhalt der vorstehenden Sätze konzentriert wiederzugeben.

Das allgemeine Resultat dieses Paragraphen liefert, angewandt auf den Fall eines von einer *Jordan*-Kurve begrenzten Bereichs B oder noch spezieller eines konvexen Bereichs B, in welchem Falle die Begrenzungslinie ja immer eine *Jordan*-Kurve ist, den von *Osgood* aufgestellten Satz, daß in diesen Fällen die Abbildungsbeziehung bis in den Rand hinein stetig und eineindeutig erklärt werden kann*). In diesen Fällen sind nämlich alle Punkte der Begrenzung erreichbare und einfache Punkte; es reduzieren sich die Randelemente sämtlich auf Punkte.

Man kann fragen nach der charakteristischen Eigentümlichkeit derjenigen Bereiche B, für welche die Funktion $z(\zeta)$ bis in die Peripherie des Einheitskreises hinein als stetige Funktion erklärt werden kann, ohne

*) S. auch die Beweise bei *Osgood* und *Carathéodory* a. a. O.

daß dabei ausgeschlossen wird, daß diese Funktion an mehreren Stellen der Peripherie denselben Wert annimmt. Die Frage beantwortet sich sofort dahin: Es müssen sich alle Randelemente auf Punkte reduzieren. Diese Eigenschaft läßt sich auch durch folgende damit äquivalente Eigenschaft ersetzen: Ist P ein Grenzpunkt des Bereichs, L eine ihn approximierende Linie in B, so ist es stets möglich, auf L eine gegen P konvergierende Punktfolge zu bestimmen und durch dieselbe eine Linie L' in B zu ziehen, welche in P endigt; hierfür können wir abgekürzt sagen: Jeder Grenzpunkt P ist erreichbar, und zwar *entlang* jeder ihn approximierenden Linie L.

§ 12.

Analytische Spiegelung an einer Jordan-Kurve.

Der in § 11 gegebene Nachweis der am Rande noch bestehenden Stetigkeit der konformen Abbildung eines von einer *Jordan*-Kurve begrenzten einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche des Einheitskreises kann als Grundlage dienen, um den Begriff der geschlossenen regulären analytischen Linie und im speziellen des Kreises durch eine bestimmte analytische Spiegelungseigenschaft aus dem allgemeinen Begriffe der *Jordan*-Kurve herauszuheben. Wir behaupten folgenden Satz:

Satz I: Wird von einer in der z-Ebene gegebenen *Jordan*-Kurve angenommen, daß es möglich sei, eine eineindeutige konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel zu definieren, welche dem vollständigen Inneren der *Jordan*-Kurve das vollständige Äußere derselben einschließlich des unendlichfernen Punktes entsprechen läßt, und welche auf der *Jordan*-Kurve selbst noch stetig ist, d. h. jeder von innen her in einem Punkte der *Jordan*-Kurve endigenden Linie eine von außen her in demselben Punkte endigende Linie entsprechen läßt, so ist die *Jordan*-Kurve ein Kreis und die Spiegelung nichts anderes als die bekannte Transformation durch reziproke Radien. —

Satz II: Existiert die erwähnte Abbildung nicht für das ganze Innere, jedoch für eine gewisse Nachbarschaft der *Jordan*-Kurve, so ist die *Jordan*-Kurve eine geschlossene reguläre analytische Linie, und die betrachtete Abbildung ist identisch mit der bekannten *Schwarz*schen analytischen Spiegelung an dieser Linie. —

Zum Beweise des Satzes I bilden wir das Innere der *Jordan*-

Kurve C durch eine Funktion $\zeta(z)$ auf das Innere des Einheitskreises ab. Gleichzeitig definieren wir eine konforme Abbildung des Äußeren der Kurve C auf das Äußere des Einheitskreises durch die Bestimmung, es solle einem Punkte z' außerhalb C, welchem, vermöge der vorausgesetzten „Spiegelung" an C, innerhalb C der Punkt z entspreche, in der ζ-Ebene der Punkt ζ' entsprechen, welcher aus ζ durch Spiegelung am Einheitskreise (Transformation durch reziproke Radien) hervorgeht. Auf diese Weise ist für die ganze ζ-Ebene eine eindeutige analytische Funktion erklärt, die nur an einer Stelle außerhalb des Einheitskreises unendlich von erster Ordnung wird, und die auf dem Einheitskreise selbst allerdings zunächst nur als stetig bezeichnet werden kann. Diese Stetigkeit ist eben eine Folge der Stetigkeit der Funktion $\zeta(z)$ auf der Begrenzung C des abgebildeten Bereichs. Nun besteht aber der Satz, daß eine zu beiden Seiten eines Stückes der Achse des Reellen eindeutig und regulär erklärte analytische Funktion, von welcher auf der Achse des Reellen jedoch nur die Stetigkeit bekannt ist, auch auf der Achse des Reellen selbst regulär sein muß. Der Beweis dieses letzteren Satzes wird bekanntlich geführt mittelst der *Cauchy*schen Integralformel in analoger Weise, wie nach *Schwarz**) das Spiegelungsprinzip für analytische Funktionen bewiesen wird. Machen wir jetzt von dem Satze Gebrauch, indem wir an die Stelle der Achse des Reellen die Peripherie des Einheitskreises treten lassen, so erkennen wir, daß die Funktion $z(\zeta)$ sich auch auf dem Einheitskreise regulär verhält und folglich eine eindeutige, durchweg konforme Abbildung der ζ-Ebene auf die volle z-Ebene vermittelt, d. h. eine überall reguläre Funktion mit nur einer Unendlichkeitsstelle erster Ordnung ist, also eine lineare Funktion. Dieses aber hat zur Folge, daß die Kurve C eine Kreislinie ist, und daß die Spiegelung an C sich auf die Transformation durch reziproke Radien reduziert.

Unter den Voraussetzungen des Satzes II lehrt dieselbe Hilfsabbildung in Verbindung mit dem eben genannten Hilfssatze über analytische Funktionen, daß die nunmehrige Funktion $z(\zeta)$, wie sie zu beiden Seiten der Peripherie des Einheitskreises erklärt ist, sich auf diesem selbst noch regulär verhalten muß und daher diesem Kreise eine geschlossene, reguläre analytische Linie, d. i. C, entsprechen läßt.

*) *H. A. Schwarz*: „Über einige Abbildungsaufgaben" Ges. Abh. Bd. II.

Der Satz II läßt sich offenbar in der Weise erweitern, daß an Stelle einer geschlossenen *Jordan*-kurve ein *Jordan*-Kurvenstück mit zwei Endpunkten tritt, zu dessen beiden Seiten anschließende Flächenstreifen durch „Spiegelung" aufeinander bezogen werden. Auch ein solches Kurvenstück muß, abgesehen von den Endpunkten, den Charakter einer regulären analytischen Linie besitzen, und die „Spiegelung" der beiden Seiten aufeinander muß mit der *Schwarz*schen Spiegelung zusammenfallen.

§ 13.

Die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungsfunktion.

Die Funktion $\zeta(z)$ besitzt eine Eigenschaft, welche mit der Frage der Ränderzuordnung in engem Zusammenhang steht, ohne dieselbe zu erschöpfen, jedoch andererseits für sich Interesse beanspruchen kann. Es ist dies die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit dieser Funktion, gültig für das ganze, nicht abgeschlossene Innere von B. Diese Eigenschaft findet ihren präzisen Ausdruck in folgendem Satze.

Satz: Die Funktion $\zeta(z)$ ist in B (exkl. Grenze) unter allen Umständen, d. h. ohne Annahme irgendeiner spezielleren Voraussetzung über die Begrenzung des Bereichs B, der nur im Endlichen liegend, d. h. genauer innerhalb eines endlichen Kreises, vorgestellt wird, gleichmäßig stetig im Sinne einer sofort für den ganzen Bereich B gültigen Abschätzung. Der Entfernungsbegriff für irgend zwei Punkte z_1 und z_2 des Bereichs, die ja innerhalb B nicht immer geradlinig verbunden werden können, ist dabei zu erklären als die untere Grenze der Längen aller aus geradlinigen Strecken gebildeten von z_1 nach z_2 innerhalb B verlaufenden Polygonzüge. —

Wird die im Satz definierte Entfernung der beiden Punkte z_1 und z_2 mit $E_{1,2}$ bezeichnet, so besagt unser Satz folgendes: Nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven, von Null verschiedenen Größe ε läßt sich stets eine positive von Null verschiedene Größe δ_ε bestimmen, so daß $|\zeta_2 - \zeta_1| < \varepsilon$ wird, für alle Punktpaare z_1, z_2 des Bereichs B, für welche $E_{1,2} < \delta_\varepsilon$ ist.

Der Beweis ergibt sich sofort indirekt. Die Annahme des Gegenteils würde nämlich zur Folge haben, daß man eine unendliche Folge von Punktpaaren $z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)} [\nu = 1, 2, \ldots]$ angeben könnte, für welche die Entfernung $E_{1,2}^{(\nu)}$ gegen Null konvergiert, während die Entfernungsgröße $|\zeta_2^{(\nu)} - \zeta_1^{(\nu)}|$ oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen Schranke bleibt. Es ist

klar, daß die Punktpaare $z_1^{(\nu)}$, $z_2^{(\nu)}$ in diesem Falle mit wachsendem Index ν sich der Grenze des Bereichs B unbegrenzt nähern und demgemäß die Punktpaare $\zeta_1^{(\nu)}$, $\zeta_2^{(\nu)}$ der Peripherie des Einheitskreises. Wir dürfen annehmen, was eventuell durch Betrachtung einer Teilfolge der ursprünglich gewählten Folge jederzeit erreicht wird, daß die Folge der Punktpaare $z_1^{(\nu)}$, $z_2^{(\nu)}$ gegen einen bestimmten Grenzpunkt z_* konvergiert. Wegen $\lim_{\nu=\infty} E_{1,2}^{(\nu)} = 0$ lassen sich die Punktpaare innerhalb B durch Linien $s^{(\nu)}$ von schließlich unendlich klein werdender Länge verbinden. Diesen Linien $s^{(\nu)}$ entsprechen im ζ-Einheitskreise Linien $\sigma^{(\nu)}$, die $\zeta_1^{(\nu)}$ mit $\zeta_2^{(\nu)}$ verbinden und sich mit wachsendem Index ν gleichmäßig der Peripherie des Einheitskreises anschmiegen und daher nun an einem gewissen Stück Σ der Peripherie jedenfalls unendlich oft entlanglaufen werden. Demgemäß treffen auf die Funktion $z(\zeta)$ mit Beziehung auf das Stück Σ und den konstanten Wert z_* die Voraussetzungen des Hilfssatzes II S. 212 zu, so daß die Funktion $z(\zeta)$ sich auf eine Konstante reduzieren müßte.

Wie tief wir mit dem soeben bewiesenen Satze bereits in das Wesen der Ränderzuordnungsfrage eingedrungen sind, erkennt man aus dem Umstande, daß auf Grund dieses Satzes zum Beispiel im Falle einer *Jordan*-Kurve als Begrenzung die Stetigkeit der Funktion $\zeta(z)$ bis in die Grenze hinein bewiesen ist. Zur vollen Klärung der Ränderzuordnungsfrage in diesem Falle ist nur noch der Nachweis der Eineindeutigkeit der Beziehung zwischen den Punkten der *Jordan*-Kurve und den Punkten der Peripherie des ζ-Einheitskreises zu erbringen, was oben geschehen ist.

Unser Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $\zeta(z)$ steht in enger, sofort ersichtlicher Beziehung zu einem von *Osgood* bereits 1903 l. c. ohne Beweis mitgeteilten, von ihm als „physical law" bezeichneten Satze: „*Physical law:* Let a fixed circle be drawn in B with O as centre. Let c be an open curve of length l drawn in B, but lying outside the fixed circle. Let the maximum numerical value of the flux across c (or the upper limit, in case no maximum exists), when c assumes all possible forms and positions, be denoted by $f(l)$, then $\lim_{l=0} f(l) = 0$."

Mit 0 ist hierbei die Unendlichkeitsstelle der *Green*schen Funktion des Bereichs B bezeichnet, mit $f(l)$ eine Größe, welche numerisch gleich ist dem Unterschied der Amplituden der den Endpunkten von l bei der Ab-

bildung entsprechenden Punkte innerhalb des Einheitskreises. Man bemerkt, daß unser obiger Satz und der *Osgood*sche leicht auseinander gefolgert werden können.

Inhaltsübersicht.

Seite

A. Einleitung 177

B. Erster Teil: Konforme Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreises. Das Schmiegungsverfahren 180

§ 1. Vorbereitungen 180

§ 2. Das Schmiegungsverfahren und die Schmiegungswirkung desselben 183

§ 3. Die gleichmäßige Konvergenz der Größen $|z_n|$ bzw. $\log|z_n|$ 188

§ 4. Herleitung eines Hilfssatzes 190

§ 5. Zuendeführung des Konvergenzbeweises. Nähere Untersuchung der Grenzabbildung 192

C. Zweiter Teil: Konforme Abbildung des allgemeinsten schlichten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings 195

§ 6. Abbildung von Kreisringflächen aufeinander 195

§ 7. Abbildung des allgemeinsten schlichten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings 200

D. Dritter Teil: Die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. 205

§ 8. Verhalten der Abbildungsfunktion längs geschlossener regulärer, analytischer Begrenzungslinien 205

§ 9. Verhalten der Abbildungsfunktion längs regulärer analytischer Begrenzungsstücke 206

§ 10. Verhalten der Abbildungsfunktion in Ecken und Spitzen, die von analytischen Kurvenbögen gebildet werden 209

§ 11. Behandlung der Frage der Ränderzuordnung im allgemeinsten Falle 212

§ 12. Analytische Spiegelung an einer *Jordan*-Kurve 219

§ 13. Die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungsfunktion 221