Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme.

Von Herrn *Ernst Steinitz* in Breslau.

Einleitung.

Cauchy hat zuerst bemerkt, daß die Konvergenz gewisser Reihen von der Anordnung ihrer Glieder abhängig ist, und hat damit diejenige Erscheinung entdeckt, die man heute als *bedingte Konvergenz* zu bezeichnen pflegt. *Dirichlet* zeigte, daß jede absolut konvergente Reihe unbedingt konvergiert und bei jeder Anordnung dieselbe Summe ergibt. Er erkannte ferner, daß bei gewissen nicht absolut konvergenten Reihen durch Umstellung der Glieder eine konvergente Reihe mit anderer Summe erzielt werden kann. Diese beiden Bemerkungen wurden durch die Untersuchungen *Riemanns* ergänzt, welcher erstens die völlige Äquivalenz von absoluter und unbedingter Konvergenz dartat und zweitens bewies, daß eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen zu einer konvergenten Reihe mit beliebig vorgeschriebener (reeller) Summe umgeordnet werden kann, oder, wie wir es ausdrücken wollen, daß der „Summenbereich" einer solchen Reihe alle reellen Zahlen umfaßt.

Es liegt nahe, die Frage nach dem Summenbereich im komplexen Gebiete aufzuwerfen. Hier treten uns sofort zwei verschiedene Typen bedingt konvergenter Reihen entgegen. Bezeichnet g eine Gerade in der komplexen Zahlenebene, α einen Punkt auf g, $\omega \neq 0$ einen Punkt auf der durch den Nullpunkt gezogenen Parallelen, endlich

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

eine bedingt konvergente reelle Reihe, so folgt aus dem *Riemann*schen Satze sofort, daß die komplexe Reihe

$$\alpha + a_1 \omega + a_2 \omega + \cdots + a_n \omega + \cdots$$

jeden komplexen Wert von der Form $\alpha + r\omega$ haben kann, unter r jede reelle Zahl verstanden; d. h. *der Summenbereich der Reihe ist die Gerade g.* Ist ferner

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

irgendeine zweite reelle bedingt konvergente Reihe, so kann

$$b_1 i + b_2 i + \cdots + b_n i + \cdots$$

jeden rein imaginären Wert erhalten, und der Summenbereich der aus den Zahlen

$$a_1, b_1 i, a_2, b_2 i, \ldots a_n, b_n i, \ldots$$

gebildeten Reihe umfaßt *die ganze Ebene.*

Nun entsteht aber die Frage, ob mit den beiden hier durch Beispiele aufgewiesenen Typen alle Typen bedingt konvergenter komplexer Reihen erschöpft sind. Dies ist in der Tat der Fall, d. h. *der Summenbereich einer bedingt konvergenten komplexen Reihe ist entweder eine Gerade oder die ganze Ebene.* Bei Ausdehnung der Untersuchung auf komplexe Zahlen mit n Einheiten, die man in üblicher Weise als Punkte eines n-dimensionalen Raumes deutet, ergibt sich das analoge Resultat: *Der Summenbereich einer bedingt konvergenten Reihe ist stets eine lineare Mannigfaltigkeit.*

Zu diesem Ergebnis bin ich vor sieben Jahren gelangt und habe es damals Herrn *E. Landau* mitgeteilt, der mich bald darauf auf eine damals gerade erschienene Arbeit von *P. Lévy**) hinwies, in welcher derselbe Gegenstand behandelt ist. Nach einem flüchtigen Blick in diese Arbeit, welche einen dem meinigen verwandten, aber einfacheren Gedankengang verfolgt, glaubte ich von einer Publikation absehen zu sollen. In enger Beziehung zu meiner Behandlung des Reihenproblems steht aber mein Aufsatz: „Über diejenigen konvexen Polyeder mit n Grenzflächen, welche nicht durch $n - 4$ ebene Schnitte aus einem Tetraeder abgeleitet werden können**)," den ich ein Jahr darauf publizierte. Die Theorie der konvexen Punktmengen hat sich in neuerer Zeit überhaupt mehr und mehr als ein wichtiges Hilfsmittel für Untersuchungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik bewährt. Es erschien mir daher angebracht, ihre Grundlagen im Zusammenhange darzu-

*) Sur les séries semi-convergentes, Nouv. ann. d. Math. 64, 4. Sér. 5 (1905).
**) Arch. d. Math. und Phys., III. Reihe, XIV, p. 1 (1907).

stellen*). Dies soll hier geschehen. Wenn ich in Verbindung damit nun doch das Reihenproblem behandle, so geht die Anregung hierzu auf Herrn *Landau* zurück, der in neueren Lehrbüchern der Analysis bezüglich der komplexen Reihen geradezu falsche Angaben fand, sich auch bei der Durchsicht der *Lévy*schen Arbeit von ihrer Richtigkeit nicht überzeugen konnte. Das hat mich veranlaßt, diese Arbeit nochmals aufs genaueste durchzustudieren. Sie ist sehr knapp, ja sprunghaft gehalten und im Ausdruck oft unklar. Wer die Lösung nicht bereits kennt, wird stellenweise kaum erraten können, was gemeint ist. Kennt man die Lösung, so überzeugt man sich leicht, daß die Gesichtspunkte, in deren Auffindung die hauptsächlichen Schwierigkeiten der Aufgabe liegen, soweit sie sich auf die gewöhnlichen komplexen Zahlen bezieht, wirklich gefunden sind. Daß die Ausführungen im einzelnen richtig sind, wenn sie auch zur vollständigen Erledigung der Aufgabe nicht ausreichen, das zu konstatieren, ist aber auch dann noch recht mühsam. So sehr es zu mißbilligen ist, wenn Publikationen in so mangelhafter Form erfolgen, daß zu ihrem Verständnis noch ausführliche Kommentare notwendig sind, es muß zugegeben werden, daß Herr *Lévy* den angegebenen Satz für Reihen mit gewöhnlichen komplexen Zahlen in der zitierten Arbeit zum großen Teil bewiesen hat. Anders steht es mit dem Satze für die allgemeinen komplexen Zahlen, da hier nur Resultate angegeben werden. Damit soll nicht gesagt sein, daß Herr *Lévy* nicht auch für den allgemeinen Fall einen Beweis gefunden hat, noch weniger, daß er ihn nicht habe finden können. Aber man kann nicht sagen, daß dieser Beweis in seiner Arbeit enthalten ist, da hierzu ergänzende Untersuchungen im n-dimensionalen Raume notwendig werden, die nur im Falle $n=2$ noch trivial sind. Um dies im einzelnen darzulegen, habe ich im Abschnitt V der vorliegenden Arbeit den allgemeinen Beweis im wesentlichen in der Form

*) In neuerer Zeit hat *C. Carathéodory* in der Arbeit „Über den Variabilitätsbereich der *Fourier*schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen", Rend. del Circ. mat. di Palermo XXXII (1911) eine kurze und übersichtliche Darstellung der grundlegenden Sätze über konvexe Punktmengen gegeben, so weit er ihrer für seine Zwecke bedarf. Ich möchte schon hier darauf hinweisen, daß ich den Begriff konvex etwas anders fasse als *Minkowski* und *Carathéodory*, indem ich ihn nicht auf abgeschlossene und ganz im Endlichen liegende Punktmengen beschränke. Dies ist für die Behandlung des Reihenproblems wesentlich.

gegeben, wie ich ihn ursprünglich fand, und dabei genau ausgeführt, welche für den Beweis wesentlichen Punkte sich auch bei Herrn *Lévy* finden und welche bei ihm fehlen. In Abschnitt IV ist ein auf ganz anderer Grundlage ruhender Beweis mitgeteilt, den ich erst vor einigen Jahren fand. Er hat den Vorzug, das Problem direkter anzugreifen, ist bei beliebigem n auch kürzer. Hier wird auch eine einfache geometrische Deutung für den Punkt, der die Summe einer unbedingt konvergenten Reihe, und allgemeiner für die lineare Mannigfaltigkeit, die den Summenbereich einer bedingt konvergenten Reihe darstellt, gegeben. Die Grundlagen der n-dimensionalen Geometrie, welche hier überall gebraucht werden, hätten als bekannt vorausgesetzt werden können. Ich habe es aber vorgezogen, sie nochmals abzuleiten. Dabei kommt natürlich alles auf die Form der Darstellung an. Ich glaube, daß die hier gewählte ihre Vorzüge besitzt und darum nicht überflüssig erscheinen wird.

I. Lineare Mannigfaltigkeiten.

§ 1. Wir betrachten nebeneinander zwei Zahlsysteme:

1) den Körper R der reellen Zahlen,

2) ein aus R abgeleitetes System $\mathsf{P}_n = \mathsf{P}$ von komplexen Zahlen mit n Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$, d. h. ein System, für welches folgende Festsetzungen gelten:

Jedes Element aus P ist ein Ausdruck von der Form

$$\gamma = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + \cdots + c_n \varepsilon_n,$$

wo $c_1, c_2, \dots c_n$ beliebige reelle Zahlen sind. Sind

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n, \qquad \beta = b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_n \varepsilon_n$$

irgend zwei komplexe Zahlen, so soll nur dann $\alpha = \beta$ sein, wenn $a_1 = b_1, \dots a_n = b_n$ ist. Es ist ferner

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\varepsilon_1 + \cdots + (a_n + b_n)\varepsilon_n, \qquad \alpha - \beta = (a_1 - b_1)\varepsilon_1 + \cdots + (a_n - b_n)\varepsilon_n$$

und, wenn c eine beliebige reelle Zahl bedeutet,

$$c\alpha = (ca_1)\varepsilon_1 + \cdots + (ca_n)\varepsilon_n$$

zu setzen.

In der Folge bezeichnen wir stets mit kleinen lateinischen Buchstaben reelle, mit kleinen griechischen Buchstaben komplexe Zahlen; große lateinische und griechische Buchstaben bezeichnen Systeme reeller bzw. komplexer Zahlen. Die beiden Zahlenarten werden als vollkommen verschieden betrachtet; es soll also nicht R als Teilsystem von P angesehen werden. Doch bezeichnen wir mit 0 sowohl die reelle Zahl als auch die komplexe Zahl $c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n$, deren sämtliche Koeffizienten c gleich 0 sind. Da wir die komplexen Zahlen auch als Punkte eines n-dimensionalen Raumes deuten, nennen wir die Koeffizienten c einer komplexen Zahl γ auch *Koordinaten von* γ. p komplexe Zahlen $\gamma_1, \ldots \gamma_p$ heißen *linear abhängig*, wenn eine lineare Relation $c_1\gamma_1 + \cdots + c_p\gamma_p = 0$ existiert, in der nicht alle Koeffizienten c verschwinden; andernfalls heißen sie *linear unabhängig*. Besteht zwischen den komplexen Zahlen $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ eine Beziehung von der Form $\gamma = c_1\gamma_1 + \cdots + c_p\gamma_p$, so heißt γ *komponierbar aus* $\gamma_1, \ldots \gamma_p$.

§ 2. Moduln. — Ein System M von komplexen Zahlen heiße ein *Modul*, wenn es den beiden Forderungen genügt:

a) Ist α ein Element aus M, c eine beliebige reelle Zahl, so gehört allemal auch $c\alpha$ zu M.

b) Sind α, β Elemente aus M, so gehört auch $\alpha + \beta$ zu M.

Aus dieser Definition erhellt sofort:

Jeder Modul enthält das Element 0, *und dieses bildet für sich einen Modul.*

Hat man ein System von endlich- oder unendlichvielen Moduln, so stellt die Gesamtheit der komplexen Zahlen, die allen diesen Moduln gemeinsam sind, wieder einen Modul dar. — Dieser soll als *Durchschnitt* der gegebenen Moduln bezeichnet werden.

Ist A ein beliebiges System komplexer Zahlen und Δ der Durchschnitt aller Moduln, welche A enthalten (und es gibt wenigstens einen solchen Modul, nämlich das System P aller komplexen Zahlen), so ist Δ ebenfalls ein A enthaltender Modul und kann demnach als der *kleinste* A *enthaltende Modul* bezeichnet werden. *Es gibt* also *zu jedem System* A *von komplexen Zahlen einen kleinsten* A *enthaltenden Modul* — er sei mit *Md.* A bezeichnet — *welcher in allen* A *enthaltenden Moduln enthalten ist.* Das System A wird auch eine *Basis von Md.* A genannt.

Ist A *ein endliches System, bestehend aus den Zahlen*

$$\alpha_1, \ldots \alpha_p,$$

so besteht Md. A *aus allen aus* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ *komponierbaren Zahlen.* Denn aus der Moduldefinition folgt sofort, daß jeder A enthaltende Modul auch alle aus A komponierbaren Zahlen enthalten muß, und daß die Gesamtheit dieser Zahlen selbst einen Modul darstellt.

Bleiben wir dabei, daß A aus den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_p$ besteht, und nehmen wir an, daß in $\mathsf{M} = Md.\,\mathsf{A}$ r linear unabhängige Zahlen $\beta_1, \dots \beta_r$ vorkommen. Sei $k \geqq 0$ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen β, welche auch in A enthalten sind. Ist dann $k < r$, so sei etwa β_r nicht in A enthalten. Stellen wir jetzt β_r in der Form

$$(1.)\qquad \beta_r = c_1\,\alpha_1 + \dots + c_p\,\alpha_p$$

dar, und lassen wir auf der rechten Seite alle Glieder, die den Koeffizienten 0 haben, fort, so muß wenigstens ein α_i zurückbleiben, welches von $\beta_1, \dots \beta_r$ verschieden ist, da sonst zwischen den β eine lineare Relation bestände. Dann aber können wir die Gleichung (1.) nach α_i auflösen, und es folgt, wenn A' das System bezeichnet, welches aus A dadurch hervorgeht, daß α_i durch β_r ersetzt wird, $Md.\,\mathsf{A}' = Md.\,\mathsf{A} = \mathsf{M}$. A' ist eine Basis von M, welche wieder p Zahlen, und zwar $k+1$ von den Zahlen $\beta_1, \dots \beta_r$ enthält. Ist $k+1 < r$, so können wir dieselbe Schlußweise wiederholen. Somit ergibt sich schließlich:

Besitzt der Modul M eine Basis von p Zahlen, und enthält er r linear unabhängige Zahlen $\beta_1, \dots \beta_r$, so besitzt er auch eine Basis von p Zahlen, unter denen die Zahlen $\beta_1, \dots \beta_r$ sämtlich vorkommen.

Hieraus folgt weiter:

In einem Modul, der eine Basis von p Zahlen besitzt, können nicht mehr als p linear unabhängige Zahlen vorkommen, und — da das System P aller komplexen Zahlen die Basis $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ hat —

Es gibt nicht mehr als n linear unabhängige komplexe Zahlen.

Die Höchstzahl linear unabhängiger Elemente, die man einem Modul entnehmen kann, wird als *Rang* oder *Dimension des Moduls* bezeichnet. Hiernach hat P die Dimension n, während die Zahl 0 den einzigen Modul von der Dimension 0 darstellt.

Ist M ein Modul von der Dimension $r > 0$, so kann nach dem Vorangehenden eine Basis von M nicht weniger als r Elemente enthalten. Soll ein System A von r Zahlen eine Basis von M sein, so dürfen diese nicht linear abhängig sein; denn sonst könnte man eine von ihnen aus den andern komponieren und daher die Basis A durch Fortlassen dieser Zahl reduzieren. Besteht aber A aus r linear unabhängigen Zahlen

$\alpha_1, \ldots \alpha_r$, und ist α ein beliebiges Element aus M, so besteht, da r die Dimension von M ist, eine Relation zwischen $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ in welcher der Koeffizient von α nicht verschwinden kann. α ist also aus $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ komponierbar, mithin $Md. \mathsf{A} = \mathsf{M}$. Somit ergibt sich:

Ist M *ein Modul von der Dimension* $r > 0$, *so bilden* r *Zahlen* $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ *aus* M *dann und nur dann eine Basis von* M, *wenn sie linear unabhängig sind.* Wir können, wie sofort zu sehen, hinzusetzen, *daß im letzteren Falle jede Zahl aus* M *nur auf eine Weise in der Form* $c_1 \alpha_1 \cdots + c_r \alpha_r$ *darstellbar ist.*

Weiter folgt: *Wenn von zwei Moduln* M *und* N *von gleicher Dimension* r *der eine* M *den andern* N *enthält, so sind sie identisch.* Denn eine Basis aus r Elementen von N ist nach dem vorhergehenden Satze zugleich eine Basis von M. — *Das System* P *aller komplexen Zahlen ist* daher *der einzige Modul von der Dimension* n. —

Sind A, B zwei beliebige Moduln, ist Δ ihr Durchschnitt, Γ der kleinste (der Durchschnitt) aller A und B enthaltenden Moduln, so besteht zwischen den Dimensionen a, b, c, d von $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ die Beziehung $a + b = c + d$. Denn wenn $\delta_1, \ldots \delta_d$ eine Basis von Δ bilden, so kann man durch Hinzunahme von $a - d$ Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_{a-d}$ aus A, bzw. von $b - d$ Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_{b-d}$ aus B eine Basis von A bzw. B erhalten. Dann stellen die $a + b - d$ Zahlen $\delta_1, \ldots \delta_d, \alpha_1, \ldots \alpha_{a-d}, \beta_1, \ldots \beta_{b-d}$, wie man leicht sieht, eine irreduzible Basis von Γ dar.

§ 3. Lineare Transformationen.

Definition. Sind $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n$, $\beta = b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_n \varepsilon_n$ irgend zwei komplexe Zahlen, so bezeichnen wir mit $\alpha\beta$ die reelle Zahl $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ *(Graßmanns inneres Produkt).*

Es gelten die Identitäten

$$(2.) \quad \alpha\beta = \beta\alpha, \quad c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta, \quad c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta, \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

$$(3.) \qquad \xi = (\varepsilon_1 \xi)\varepsilon_1 + \cdots + (\varepsilon_n \xi)\varepsilon_n.$$

Definition. Die komplexe Veränderliche $\eta = \varphi(\xi)$ heiße eine *lineare (homogene) Funktion der Veränderlichen* ξ, wenn $\varphi(\xi)$ für jedes ξ eindeutig definiert ist und die Gleichungen

$$\varphi(c\xi) = c\varphi(\xi), \qquad \varphi(\xi_1 + \xi_2) = \varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)$$

bei beliebigen c, ξ, ξ_1, ξ_2 bestehen.

Es seien $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ n feste linear unabhängige komplexe Zahlen, so daß der Ausdruck $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ jeden komplexen Wert einmal annimmt, wenn die Koordinaten c die reellen Zahlen durchlaufen. Setzt man dann, unter $\beta_1, \ldots \beta_n$ beliebige feste komplexe Zahlen verstehend,

$$\xi = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,$$
$$\varphi(\xi) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n,$$

so folgt aus der Definition der linearen Funktionen unmittelbar, daß $\varphi(\xi)$ eine lineare Funktion von ξ ist, und zwar die einzige, welche an den Stellen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ die Werte $\beta_1, \ldots \beta_n$ annimmt. *Man kann also eine lineare Funktion $\varphi(\xi)$ bestimmen, indem man ihre Werte an n linear unabhängigen Stellen vorschreibt.* Damit $\varphi(\xi)$ jedes komplexen Wertes fähig ist — oder auch, damit $\varphi(\xi)$ nur für $\xi = 0$ verschwindet —, ist notwendig und hinreichend, daß die Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_n$ linear unabhängig sind. In diesem Falle wird auch umgekehrt ξ eine (eindeutige) lineare Funktion von $\varphi(\xi)$. Man spricht dann von einer *linearen (homogenen) Transformation* φ, durch welche jedem ξ ein $\eta = \varphi(\xi)$ eindeutig umkehrbar zugeordnet wird.

Ebenfalls als unmittelbare Folgerung aus der Definition der linearen Funktion $\varphi(\xi)$ ergibt sich: *Die Summe von linearen Funktionen ist eine lineare Funktion. Ist $\varphi(\xi)$ eine lineare Funktion von ξ, so auch $c \cdot \varphi(\xi)$. Eine lineare Funktion von einer linearen Funktion von ξ ist eine lineare Funktion von ξ. — $(\alpha\xi)\cdot\beta$, wo α, β beliebige Konstanten sind, stellt eine lineare Funktion von ξ dar. Durchläuft ξ einen r-dimensionalen Modul mit der Basis $\alpha_1, \ldots \alpha_r$, so durchläuft $\varphi(\xi)$ alle Zahlen des Moduls mit der Basis $\varphi(\alpha_1), \ldots \varphi(\alpha_r)$, also eines Moduls, dessen Dimension $\leqq r$ ist. Im Falle einer linearen Transformation müssen beide Moduln von gleicher Dimension sein.*

Es sei jetzt M ein beliebiger Modul, und es mögen die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ eine Basis von M bilden. Dann konstituieren die Zahlen ξ, welche den r Gleichungen

$$\alpha_1\xi = 0, \ \ldots \ \alpha_r\xi = 0$$

genügen, einen zweiten Modul N, und wenn α eine beliebige Zahl aus M ist, so wird auch die Gleichung $\alpha\xi = 0$ durch jede Zahl aus N befriedigt. Hieraus folgt, daß der Modul N durch den Modul M eindeutig bestimmt ist. Wir nennen N den *zu* M *komplementären Modul.* Besteht M nur aus der Zahl 0, so umfaßt N alle komplexen Zahlen; umfaßt M alle komplexen Zahlen, so besteht N, wie aus der Identität (3.) hervorgeht, nur aus der Zahl 0. Nehmen wir an, daß M die Dimension r habe, daß

$0 < r < n$ sei, und daß die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ eine Basis von M bilden, und wählen wir noch $n - r$ Zahlen $\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n$ so, daß die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ linear unabhängig sind. Dann ist jede komplexe Zahl γ aus $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ komponierbar, und da im Falle $\xi \neq 0$ $\gamma \xi$ nicht für jedes γ gleich 0 wird, so muß in diesem Falle auch wenigstens eine der Zahlen $\alpha_1 \xi, \ldots \alpha_n \xi$ von 0 verschieden sein. Setzt man also

$$\eta = \varphi(\xi) = (\alpha_1 \xi) \varepsilon_1 + \cdots + (\alpha_n \xi) \varepsilon_n,$$

so ist η eine lineare Funktion von ξ, die nur für $\xi = 0$ verschwindet, somit jeden Wert genau einmal annimmt. Da nun die Gleichungen

$$\alpha_1 \xi = 0, \ldots \alpha_r \xi = 0$$

für die Zahlen ξ aus N und nur für diese bestehen, so beschreibt η, wenn ξ den Modul N durchläuft, den $(n-r)$-dimensionalen Modul mit der Basis $\varepsilon_{r+1}, \ldots \varepsilon_n$. Daher ist auch N von der Dimension $n-r$. Der zu N komplementäre Modul M′ muß hiernach von der Dimension $n-(n-r) = r$, und, da er offenbar alle Elemente des r-dimensionalen Moduls M enthält, mit M identisch sein. *Die sämtlichen Moduln gruppieren sich also zu Paaren komplementärer Moduln. Von den beiden Moduln eines solchen Paares besteht jeder aus den Zahlen, die mit jeder Zahl des anderen Moduls multipliziert* 0 *ergeben. Die Summe der Dimensionen zweier komplementärer Moduln ist n.*

§ 4. Lineare Mannigfaltigkeiten.

Definition: Es sei δ eine komplexe Zahl, A ein System komplexer Zahlen. Dann bezeichnen wir mit $A + \delta$ bzw. $A - \delta$ das System aller Zahlen $\alpha + \delta$ bzw. $\alpha - \delta$, wo α jede Zahl aus A bedeutet. Die Systeme A und $A + \delta$ (oder $A - \delta$) heißen *parallel.* — Es ist hiernach klar, daß zwei Systeme, die zu einem dritten parallel sind, auch zueinander parallel sein müssen.

Definition. Ist M ein Modul, so heißen zwei Zahlen α, β *modulo* M *kongruent* — in Zeichen

$$\alpha \equiv \beta \text{ mod. } M$$

—, wenn die Differenz $\beta - \alpha$ dem Modul M angehört.

Es ergeben sich aus der Moduldefinition sofort die Sätze: *Aus* $\alpha \equiv \beta$ mod. M *folgt* $\beta \equiv \alpha$ mod. M *und* $c\alpha \equiv c\beta$ mod. M *für beliebiges c. Aus* $\alpha \equiv \beta$ mod. M, $\gamma \equiv \delta$ mod. M *folgt* $\alpha + \gamma \equiv \beta + \delta$ mod. M. *Jede Zahl ist sich selbst kongruent, und zwei Zahlen, die einer dritten* mod. M *kongruent sind, sind auch einander* mod. M *kongruent.*

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die komplexen Zahlen mod. M zu *Restklassen*, d. h. zu Systemen kongruenter Zahlen zusammenzufassen. Eine solche Klasse ist, wenn M gegeben ist, durch irgendeines ihrer Elemente bestimmt; sie fällt mit M zusammen, wenn sie die Zahl 0 enthält, und wird durch $\mathsf{M} + \alpha$ dargestellt, wenn sie die Zahl α enthält.

Definition: Unter einer *linearen Mannigfaltigkeit* ist ein System komplexer Zahlen zu verstehen, das einem Modul M parallel ist, oder — was nach dem Vorangehenden auf dasselbe hinauskommt — ein System komplexer Zahlen, die eine Restklasse eines Moduls M konstituieren.

Indem wir für „komplexe Zahl" auch „Punkt" sagen, können wir die letzten Sätze in geometrischer Form auch so aussprechen:

Zwei parallele lineare Mannigfaltigkeiten fallen zusammen, wenn sie einen Punkt gemein haben. Durch einen gegebenen Punkt läßt sich zu einer gegebenen linearen Mannigfaltigkeit genau eine parallele legen. Unter den zu einer linearen Mannigfaltigkeit parallelen Mannigfaltigkeiten befindet sich ein Modul, nämlich die durch den Punkt 0 *gehende Mannigfaltigkeit* *).

Unter der *Dimension einer linearen Mannigfaltigkeit* ist die Dimension des zugehörigen parallelen Moduls zu verstehen. Hiernach gibt es lineare Mannigfaltigkeiten von $0, 1, 2, \ldots n$ Dimensionen. Die 0-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind die einzelnen Punkte, während die Gesamtheit P aller Punkte die einzige n-dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt. Als *Geraden* und *Ebenen* bezeichnen wir im folgenden die 1- und $(n-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten.

Wenn ein System von endlich- oder unendlichvielen linearen Mannigfaltigkeiten Λ *wenigstens einen gemeinsamen Punkt* α_0 *hat, so ist der Durchschnitt dieser Mannigfaltigkeiten wieder eine lineare Mannigfaltigkeit.* Denn wenn man jede Mannigfaltigkeit Λ des Systems durch den parallelen Modul $\Lambda - \alpha_0$ ersetzt, so haben die so erhaltenen Moduln als Durchschnitt einen Modul M, und $\mathsf{M} + \alpha_0$ ist alsdann der Durchschnitt des Systems linearer Mannigfaltigkeiten. — Bezeichnen wir, unter A eine beliebige Punktmenge ($=$ Menge komplexer Zahlen) verstehend, mit *Ln.* A den Durchschnitt aller A enthaltenden linearen Mannigfaltigkeiten, also die

*) Wir verwenden die Bezeichnung parallel nur bei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimensionenzahl.

kleinste unter diesen Mannigfaltigkeiten, so gilt offenbar die Identität $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0) = Ln.\,\mathsf{A}-\alpha_0$ oder

$$Ln.\,\mathsf{A} = Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0) + \alpha_0.$$

Ist α_0 Element von A, so wird $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0)$ ein Modul und $\mathsf{A}-\alpha_0$ — oder auch das System, welches zurückbleibt, wenn wir aus $\mathsf{A}-\alpha_0$ die 0 fortlassen — eine Basis dieses Moduls. Besteht daher A aus den Punkten $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$, so umfaßt $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0) = Md.(\mathsf{A}-\alpha_0)$ alle Punkte

$$c_1(\alpha_1-\alpha_0) + \cdots + c_r(\alpha_r-\alpha_0)$$

mit beliebigen Koeffizienten c, $Ln.\,\mathsf{A}$ alle Punkte

$$\alpha_0 + c_1(\alpha_1-\alpha_0) + \cdots + c_r(\alpha_r-\alpha_0) = c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r,$$

wo c_0 für $1-c_1-\cdots-c_r$ gesetzt ist. $Ln.\,\mathsf{A}$ hat wie $Ln.(\mathsf{A}-\alpha_0) = Md.(\mathsf{A}-\alpha_0)$ höchstens die Dimension r. *Die kleinste lineare Mannigfaltigkeit Λ, welche $r+1$ gegebene Punkte $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ enthält (oder „verbindet"), besteht also aus allen Punkten*

$$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r,$$

wo die Koeffizienten c nur an die Bedingung

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1$$

gebunden sind, und ist höchstens von der Dimension r. — Andererseits läßt sich jede r-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit Λ als kleinste $r+1$ Punkte $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ verbindende lineare Mannigfaltigkeit darstellen. Es ist dazu, nachdem α_0 in Λ willkürlich angenommen ist, notwendig und hinreichend, $\alpha_1, \dots \alpha_r$ so zu wählen, daß die Differenzen $\alpha_1-\alpha_0, \dots \alpha_r-\alpha_0$ dem Modul $\Lambda-\alpha_0$ angehören und linear unabhängig sind, also eine Basis dieses Moduls bilden. Ist dies der Fall, so wird durch $\alpha_0 + c_1(\alpha_1-\alpha_0) + \cdots + c_r(\alpha_r-\alpha_0)$ jeder Punkt von Λ einmal dargestellt. Nun spricht sich die Bedingung der Unabhängigkeit von $\alpha_1-\alpha_0, \dots \alpha_r-\alpha_0$ darin aus, daß die Gleichung $a_1(\alpha_1-\alpha_0) + \cdots + a_r(\alpha_r-\alpha_0) = 0$ nur für $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ besteht. Setzt man also $1-c_1-\cdots-c_r = c_0$, $-a_1-\cdots-a_r = a_0$, so daß

$$\alpha_0 + c_1(\alpha_1-\alpha_0) + \cdots + c_r(\alpha_r-\alpha_0) = c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r,$$
$$a_1(\alpha_1-\alpha_0) + \cdots + a_r(\alpha_r-\alpha_0) = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r$$

wird, so ergibt sich: *$r+1$ Punkte $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ einer r-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit Λ bestimmen diese Mannigfaltigkeit dann und nur dann, wenn keine Relation $a_0\alpha_0 + \cdots + a_r\alpha_r = 0$ besteht, in welcher die Summe der Koeffizienten a gleich 0 ist, ohne daß diese Koeffizienten sämtlich verschwinden.*

In diesem Falle wird jeder Punkt von Λ *genau einmal in der Form* $c_0\alpha_0 + \cdots + c_r\alpha_r$ *dargestellt, wenn man die Koeffizienten c der Bedingung* $c_0 + \cdots + c_r = 1$ *unterwirft.*

Ist die Dimension r einer linearen Mannigfaltigkeit Λ kleiner als n, α_0 ein Punkt von Λ, M der zu Λ parallele Modul, N der zu M komplementäre Modul (dessen Dimension gleich $n-r$ ist), $\beta_1, \dots \beta_{n-r}$ eine Basis von N, so besteht Λ aus allen Punkten ξ, für welche $\xi - \alpha_0$ zu M gehört, M aus allen Punkten $\xi - \alpha_0$, für welche

$$\beta_i(\xi - \alpha_0) = 0 \qquad (i=1,\dots n-r)$$

wird. Setzen wir also $\beta_i\alpha_0 = c_i$ $(i = 1, \dots n-r)$, so sehen wir, *daß sich die Punkte einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit* $(r < n)$ *als die simultanen Lösungen von* $n-r$ *Gleichungen*

$$\beta_i\,\xi = c_i \qquad (i=1,\dots n-r)$$

ergeben, wo $\beta_1, \dots \beta_{n-r}$ *linear unabhängig sind.* Geometrisch gesprochen: *die r-dimensionale Mannigfaltigkeit stellt sich als Durchschnitt von* $n-r$ *Ebenen dar.* Geht man umgekehrt von $n-r$ Gleichungen

$$\beta_i\,\xi = c_i \qquad (i=1,\dots n-r) \tag{4.}$$

aus, wo $\beta_1, \dots \beta_{n-r}$ linear unabhängig sind, also die Basis eines $(n-r)$-dimensionalen Moduls N darstellen, und wählt man, falls $r > 0$ ist, r Zahlen $\beta_{n-r+1}, \dots \beta_n$ so, daß auch die n Zahlen $\beta_1, \dots \beta_n$ linear unabhängig sind, so durchläuft

$$\varphi(\xi) = (\beta_1\,\xi)\,\varepsilon_1 + \cdots + (\beta_n\,\xi)\,\varepsilon_n$$

mit ξ alle komplexen Zahlen. Dies zeigt, daß die Gleichungen (4.) lösbar sind. Ist nun $\xi = \alpha_0$ eine Lösung, so kann man den Gleichungen wieder die Form

$$\beta_i(\xi - \alpha_0) = 0 \qquad (i=1,\dots n-r)$$

geben und sieht hieraus, daß die Gesamtheit ihrer Lösungen die r-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit $\mathsf{M} + \alpha_0$ erfüllt, wo M den zu N komplementären Modul bezeichnet. Hält man die β_i fest, während man die c_i variiert, so bleibt M fest, während für α_0 jeder vorgeschriebene Wert eintreten kann (indem man $c_i = \beta_i\alpha_0$ nimmt), und man erhält also alle zu M parallelen Mannigfaltigkeiten und nur diese.

Es sei noch der folgende aus früheren Sätzen sich fast unmittelbar ergebende Satz erwähnt, der sich auch als Definition linearer Mannigfaltigkeiten eignet. *Eine Punktmenge* Λ *ist eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn* *sie die Forderung erfüllt: Sind α und β irgend zwei (gleiche oder verschiedene) Punkte aus Λ, a, b zwei reelle Zahlen, deren Summe 1 ist, so ist auch stets $a\alpha + b\beta$ in Λ enthalten.*

§ 5. Einführung metrischer Begriffe. — Bei der Ableitung aller bisherigen Sätze ist die eine Voraussetzung, die wir in § 1 machten, daß nämlich R der Körper der reellen Zahlen sei, überflüssig. Man überzeugt sich leicht, daß alles Bisherige unverändert bestehen bleibt, wenn das zugrunde gelegte System R, dessen Elemente weiterhin mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet wurden, ein Körper ist in dem allgemeinen Sinne, wie dieser Begriff in neueren Arbeiten gebraucht wird*). Erst im folgenden werden spezielle Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen benutzt.

Ist α eine beliebige Zahl, so ist $\alpha\alpha$, wofür wir auch α^2 schreiben, $\geqq 0$ und nur dann $= 0$, wenn $\alpha = 0$ ist. Der absolute Wert von $\sqrt{\alpha^2}$ heißt *absoluter Wert von* α und wird mit $|\alpha|$ bezeichnet. Der absolute Wert einer Differenz $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ heißt *Abstand* oder *Entfernung der Punkte* α, β. — Es ist $|c\alpha| = |c| \cdot |\alpha|$.

Ist $\alpha \neq 0$, so ist $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ eine Zahl vom absoluten Werte 1. Von diesen Zahlen sagen wir, daß sie *Richtungen* repräsentieren. Die durch eine Zahl α vom absoluten Werte 1 repräsentierte Richtung wird *Richtung* α genannt. Die Richtungen α und $-\alpha$ heißen *entgegengesetzt.* Sind α und β zwei verschiedene Punkte, so heißt die Richtung $\frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|}$ *Richtung von* α *nach* β; sie ist der Richtung von β nach α entgegengesetzt. Ist Λ eine r-dimensionale Mannigfaltigkeit, $r > 0$, so heißen die Richtungen zwischen den Punkten von Λ die *Richtungen von* Λ. Ist M der zu Λ parallele Modul, so werden die Richtungen von Λ durch die in M enthaltenen Zahlen vom absoluten Werte 1 repräsentiert. Hieraus folgt sofort, daß sich parallele lineare Mannigfaltigkeiten als solche mit demselben Richtungssystem charakterisieren lassen, und daß in einer Geraden nur zwei entgegengesetzte Richtungen vorkommen.

Die durch den Punkt α gehende Gerade mit den Richtungen $\delta, -\delta$

---

*) S. insbesondere *H. Weber*, Math. Ann. 43, S. 521; *E. Steinitz*, dieses Journal 137, S. 167.

besteht aus allen Punkten $\alpha + c\delta$. Ein von α verschiedener Punkt der Geraden liegt von α aus in der Richtung δ oder $-\delta$, je nachdem c positiv oder negativ ist. Der Punkt α gibt so Anlaß die Gerade in zwei Punktmengen einzuteilen, die *Halbgeraden* oder *Strahlen* genannt werden sollen. Den Punkt α rechnen wir jedem dieser *Gegenstrahlen* zu und bezeichnen ihn als ihren *Ursprung*. *Ein Strahl ist durch seinen Ursprung und seine Richtung bestimmt.* — Wenn in einer Punktfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ die Richtung von jedem Punkte α_i zum nächsten α_{i+1} die nämliche δ ist, so ist, wie sich sofort ergibt, δ auch die Richtung von α_1 nach α_p. Unter drei verschiedenen Punkten α, β, γ einer Geraden ist deshalb stets einer dadurch ausgezeichnet, daß er zwischen den beiden andern, d. h. so liegt, daß die Richtungen von ihm nach den beiden andern Punkten entgegengesetzt sind. Man hat, wenn wieder $\delta, -\delta$ die Richtungen der Geraden sind, zwei Gleichungen

$$\alpha = \gamma + a\delta, \qquad \beta = \gamma + b\delta,$$

aus denen

$$\gamma = \frac{b}{b-a}\alpha + \frac{a}{a-b}\beta$$

folgt. Setzen wir $\frac{b}{b-a} = a'$, $\frac{a}{a-b} = b'$, so ist $\gamma = a'\alpha + b'\beta$, und $a' + b' = 1$. γ liegt zwischen α und β, wenn a und b verschiedenes Vorzeichen haben, wenn also $a' > 0$, $b' > 0$ ist. — Zu den zwischen α und β gelegenen Punkten wollen wir auch immer α und β selbst rechnen und, wenn $\alpha = \beta$ ist, den Punkt $\alpha = \beta$ als zwischen α und β gelegen ansehen. Dann gilt allgemein: *Zwischen α und β gelegen sind die Punkte γ von der Form $\gamma = a'\alpha + b'\beta$, wo $a' + b' = 1$, $a' \geqq 0$, $b' \geqq 0$ ist.*

Aus der Identität $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta$ folgt, falls α und β Richtungen sind

$$(\alpha \pm \beta)^2 = 2(1 \pm \alpha\beta);$$

und da $(\alpha \pm \beta)^2 \geqq 0$ und nur dann $= 0$ ist, wenn $\alpha \pm \beta = 0$ ist, so ergibt sich: *Für zwei Richtungen α, β ist $|\alpha\beta| \leqq 1$; die Gleichungen $\alpha\beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ finden nur im Falle $\alpha = \beta$ bzw. $\alpha = -\beta$ statt.* Der $\geqq 0$ und $\leqq \pi$ genommene Wert von $\arccos \alpha\beta$ heißt der *Winkel zwischen den Richtungen α und β* ($\sphericalangle(\alpha, \beta)$). Es ist also

$$\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\beta}{1} - \frac{1}{2}\frac{(\alpha\beta)^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{(\alpha\beta)^5}{5} - \cdots.$$

Sind α, β beliebig aber $\neq 0$, so sind $\frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{\beta}{|\beta|}$ Richtungen; mithin ist $\frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{\beta}{|\beta|} \leqq 1$, also

$$\alpha\beta \leqq |\alpha| \cdot |\beta|,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{\beta}{|\beta|}$ gilt. Ist eine der Zahlen α, β gleich 0, so wird $\alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta| = 0$. Die Ungleichung $\alpha\beta \leqq |\alpha| \cdot |\beta|$ (ebenso $|\alpha\beta| \leqq |\alpha| \cdot |\beta|$) gilt also ohne Einschränkung. Daraus folgt weiter

$$|\alpha + \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta} \leqq \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,|\alpha|\,|\beta|} = |\alpha| + |\beta|,$$

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn eine der Zahlen α, β gleich 0 ist, oder wenn die Richtungen $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ und $\frac{\beta}{|\beta|}$ gleich sind. — Für drei Punkte α, β, γ gilt daher

$$|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| \geqq |\alpha - \gamma|;$$

und hier gilt das Gleichheitszeichen nur wenn β zwischen α und γ liegt. Im Dreieck ist daher die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Ein System von Richtungen heiße *orthogonal*, wenn es entweder aus einer einzigen Richtung besteht, oder wenn je zwei Richtungen des Systems den Winkel $\frac{\pi}{2}$ einschließen. — Bilden $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ ein System orthogonaler Richtungen, so folgt aus $\alpha_i^2 = 1$, $\alpha_i\,\alpha_k = 0$ $(i \neq k)$, für beliebige Koeffizienten c die Gleichung

$$(c_1\,\alpha_1 + \cdots + c_r\,\alpha_r)^2 = c_1^2 + \cdots + c_r^2,$$

welche zeigt, *daß die Elemente eines Systems orthogonaler Richtungen linear unabhängig sind.* — Die Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ stellen ein System orthogonaler Richtungen dar.

Es sei M ein r-dimensionaler Modul, $r > 0$. Ist dann $\alpha \neq 0$ eine Zahl aus M, so gehört auch die Richtung $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ dem Modul M an. Ein orthogonales in M enthaltenes System von Richtungen kann nicht mehr als r Elemente enthalten, da es in M nicht mehr als r linear unabhängige Zahlen gibt. Hat man andererseits k orthogonale Richtungen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ in M, und ist $k < r$, so kann man in M eine nicht aus $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ komponierbare Zahl β angeben. Sind dann $c_1, \ldots c_k$ zunächst beliebig gewählt, und wird $\beta' = \beta - (c_1 \alpha_1 + \cdots + c_k \alpha_k)$ gesetzt, so ist $\beta' \neq 0$ und $\alpha_{k+1} = \frac{\beta'}{|\beta'|}$ eine in M enthaltene Richtung. Nun wird aber

$$\alpha_{k+1} \cdot \alpha_i = \frac{\beta' \alpha_i}{|\beta'|} = \frac{\beta \alpha_i - c_i}{|\beta'|}. \qquad (i = 1, \ldots k)$$

Wählt man also $c_i = \beta \alpha_i$ $(i = 1, \ldots k)$, so wird $\alpha_{k+1} \alpha_i = 0$, und es ist $\alpha_1, \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1}$ ein in M enthaltenes System orthogonaler Richtungen. Hieraus folgt, *daß man in einem r-dimensionalen Modul M r orthogonale Richtungen finden kann*, und genauer, *daß, wenn man schon ein System von k solchen Richtungen hat, man dasselbe zu einem solchen von r Richtungen innerhalb M vervollständigen kann.* Dieses System $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ stellt dann eine Basis von M dar. Da der Modul aller Zahlen n-dimensional ist, so kann man im Falle $r < n$ noch $n - r$ (nicht in M vorkommende) Richtungen $\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n$ so hinzufügen, daß das System $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ orthogonal ist. $\alpha_{r+1}, \ldots \alpha_n$ bilden dann die Basis eines $(n-r)$-dimensionalen Moduls N und aus $\alpha_i \alpha_k = 0$ $(i \neq k)$ folgt, daß die Moduln M und N zueinander komplementär sind, daß also jede Richtung aus M zu jeder Richtung aus N orthogonal ist. Es umfaßt aber auch jeder der Moduln M, N alle Richtungen, die zu jeder Richtung des andern orthogonal sind. — Jede komplexe Zahl γ läßt sich auf genau eine Weise in der Form

$$\gamma = c_1 \alpha_1 + \cdots + c_n \alpha_n = (c_1 \alpha_1 + \cdots + c_r \alpha_r) + (c_{r+1} \alpha_{r+1} + \cdots + c_n \alpha_n),$$

also auf genau eine Weise in der Form $\gamma = \mu + \nu$ so darstellen, daß μ zu M, ν zu N gehört.

Es sei jetzt Λ eine zu M, Λ^* eine zu N parallele Mannigfaltigkeit, also etwa

$$\Lambda = \mathsf{M} + \alpha, \qquad \Lambda^* = \mathsf{N} + \beta.$$

Stellt man dann α und β in der Form

$$\alpha = \mu_1 + \nu_1, \qquad \beta = \mu_2 + \nu_2$$

so dar, daß μ_1, μ_2 zu M, ν_1, ν_2 zu N gehören, und setzt man

$$\mu_2 + \nu_1 = \gamma,$$

so ist $\mathsf{M} + \mu_1 = \mathsf{M} = \mathsf{M} + \mu_2$, $\mathsf{N} + \nu_2 = \mathsf{N} = \mathsf{N} + \nu_1$, daher

$$\Lambda = \mathsf{M} + \gamma, \qquad \Lambda^* = \mathsf{N} + \gamma$$

und mithin γ gemeinsamer Punkt von Λ und Λ^*. Ist ferner λ irgendein Punkt aus Λ, λ^* irgendein Punkt aus Λ^*, so gehört $\lambda - \gamma$ dem Modul M, $\lambda^* - \gamma$ dem komplementären Modul N an, und es wird das Quadrat des Abstandes der Punkte λ, λ^*

$$(\lambda^* - \lambda)^2 = [(\lambda^* - \gamma) - (\lambda - \gamma)]^2 = (\lambda^* - \gamma)^2 + (\lambda - \gamma)^2.$$

Im Falle $\lambda = \lambda^*$ muß also $\lambda = \lambda^* = \gamma$ sein, d. h. *γ ist der einzige gemeinsame Punkt von $\mathsf{\Lambda}$ und $\mathsf{\Lambda}^*$.* Ferner zeigt unsere Gleichung, wenn man λ^* festhält und λ innerhalb $\mathsf{\Lambda}$ variieren läßt, daß γ dem Punkte λ^* näher ist als jeder andere Punkt von $\mathsf{\Lambda}$. Ist λ^* von γ verschieden, so ist die Verbindungsgerade von λ^* und γ zugleich die einzige Gerade durch λ^*, welche $\mathsf{\Lambda}$ schneidet und zu $\mathsf{\Lambda}$ (d. h. zu allen Richtungen von $\mathsf{\Lambda}$) senkrecht ist. Denn wenn ξ der Schnittpunkt einer solchen Geraden mit $\mathsf{\Lambda}$ ist, so muß $\xi - \lambda^*$ zu N, also ξ zu $\mathsf{N} + \lambda^* = \mathsf{\Lambda}^*$ gehören, woraus $\xi = \gamma$ folgt. Somit ist gezeigt: *Ist $\mathsf{\Lambda}$ eine lineare Mannigfaltigkeit (ihre Dimension $r > 0$ und $< n$), so geht durch jeden Punkt λ^* außerhalb $\mathsf{\Lambda}$ genau eine $\mathsf{\Lambda}$ schneidende und zu $\mathsf{\Lambda}$ senkrechte Gerade. Ihr Schnittpunkt γ mit $\mathsf{\Lambda}$ ist der λ^* zunächst gelegene Punkt von $\mathsf{\Lambda}$.* — Der Abstand $|\lambda^* - \gamma|$ heißt *Abstand des Punktes λ^* von der Mannigfaltigkeit $\mathsf{\Lambda}$.*

Ist $\mathsf{\Lambda}$, also auch der zu $\mathsf{\Lambda}$ parallele Modul M, eine Ebene, so wird der zu M komplementäre Modul N eine Gerade. Sind $\alpha, -\alpha$ die Richtungen dieser Geraden, so wird $\mathsf{\Lambda}$ von allen Punkten ξ erfüllt, die einer gewissen Gleichung von der Form

$$\alpha \xi = c$$

genügen. Jeder Punkt λ^* außerhalb $\mathsf{\Lambda}$ liegt auf einer bestimmten *Normalen* von $\mathsf{\Lambda}$, d. h. auf einem Strahl (einer Halbgeraden), der zu $\mathsf{\Lambda}$ senkrecht ist und dessen Ursprung γ in $\mathsf{\Lambda}$ liegt. Die Richtung $\frac{\lambda^* - \gamma}{|\lambda^* - \gamma|}$ dieser Normalen ist α oder $-\alpha$, je nachdem $\alpha \cdot \frac{\lambda^* - \gamma}{|\lambda^* - \gamma|} = \frac{\alpha \lambda^* - c}{|\lambda^* - \gamma|}$ positiv oder negativ ist. (In jedem Falle ist $1 = \alpha^2 = \frac{|\alpha \lambda^* - c|}{|\lambda^* - \gamma|}$, also $|\alpha \lambda^* - c|$ der Abstand des Punktes λ^* von der Ebene $\mathsf{\Lambda}$.) Der Ebene $\mathsf{\Lambda}$ entspricht also eine Einteilung der ganzen Punktmenge außerhalb $\mathsf{\Lambda}$ in zwei Gebiete, die *beiden Seiten von* $\mathsf{\Lambda}$, welche den beiden zu $\mathsf{\Lambda}$ senkrechten Richtungen $\alpha, -\alpha$ zugeordnet sind. Die „*α-Seite*" wird von den Punkten λ^* erfüllt, für welche $\alpha \lambda^* > c$ ist.

II. Grenzwerte.

§ 6. Schranken einer Punktmenge.

Ist A eine Menge reeller Zahlen, so heißt m eine *obere (untere) Schranke* von A, wenn alle Zahlen aus $A \leqq m$ (bzw. $\geqq m$) sind. Eine

Zahlenmenge A, die eine obere (untere) Schranke besitzt, heißt *nach oben (unten) beschränkt.* Die Menge A ist *absolut beschränkt*, d. h. die absoluten Werte ihrer Elemente liegen unter einer festen Größe, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Ist A nach oben (unten) beschränkt, so gibt es unter allen oberen (unteren) Schranken eine kleinste (größte), die *obere (untere) Grenze* genannt wird.

Wir führen an dieser Stelle einige Bezeichnungen ein, die wir zum Teil erst späterhin verwenden. Es sei a eine reelle, α eine komplexe Zahl, B eine reelle, B eine komplexe Zahlenmenge (Punktmenge), und es bedeute b jede Zahl aus B, β jede Zahl aus B. Dann verstehen wir unter aB bzw. $\alpha\mathsf{B}$ bzw. $|\mathsf{B}|$ das von den reellen Zahlen ab bzw. $\alpha\beta$ bzw. $|\beta|$, unter $a\mathsf{B}$ bzw. $B\alpha$ das von den komplexen Zahlen $a\beta$ bzw. $b\alpha$ gebildete System.

Eine Ebene Λ mit den Normalenrichtungen $\alpha, -\alpha$, welche erfüllt wird von allen Punkten ξ, die der Gleichung $\alpha\xi = c$ genügen, soll eine *Schranke einer Punktmenge* Z *in Richtung* α heißen, wenn kein Punkt von Z auf der α-Seite von Λ liegt, wenn also c obere Schranke von $\alpha\mathsf{Z}$ ist. Die Punktmenge Z heiße *in Richtung* α *beschränkt*, wenn sie nach der Richtung α eine Schranke besitzt, wenn also die reelle Zahlenmenge $\alpha\mathsf{Z}$ nach oben beschränkt ist. Ist dann g die obere Grenze von $\alpha\mathsf{Z}$, so heißt die Ebene mit der Gleichung $\alpha\xi = g$ die *Grenz-* oder *Stützebene von* Z *in Richtung* α. Sie gehört mit zu den Schranken in Richtung α und ist unter ihnen dadurch ausgezeichnet, daß sie entweder Punkte aus Z enthält, oder daß doch diese Punkte ihr beliebig nahe kommen.

Aus den identisch geltenden Gleichungen und Ungleichungen

$$|(c\gamma)\zeta| = |c|\cdot|\gamma\zeta|, \qquad |(\gamma_1 + \gamma_2)\zeta| \leqq |\gamma_1\zeta| + |\gamma_2\zeta|$$

(und der Moduldefinition in Nr. 2) folgt, daß diejenigen komplexen Zahlen γ, für welche $\gamma\mathsf{Z}$ absolut beschränkt ist, einen Modul bilden. — Von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der Reihen von komplexen Zahlen sind gewisse Punktmengen, die wir *symmetrisch ausgedehnt* nennen wollen. Die Punktmenge Z soll symmetrisch ausgedehnt heißen, wenn sie sich jedem Paare entgegengesetzter Richtungen $\alpha, -\alpha$ gegenüber in der Beziehung gleichartig verhält, daß sie entweder nach beiden Richtungen beschränkt oder nach beiden unbeschränkt ist. — Es sei Z eine symmetrisch ausgedehnte Punktmenge, $\gamma \neq 0$. Ist dann $\gamma\mathsf{Z}$ nach oben beschränkt, so ist Z in Richtung $\frac{\gamma}{|\gamma|}$, also auch in der entgegengesetzten Richtung beschränkt. Daher ist $-\gamma Z$ nach oben, mithin γZ nach unten beschränkt. γZ ist also absolut beschränkt. Da nun die komplexen Zahlen γ, für welche γZ absolut beschränkt ist, in jedem Falle einen Modul bilden, so können wir dasselbe hier für die Zahlen γ behaupten, für welche γZ nach oben beschränkt ist. Dieser Modul M enthält dann alle Richtungen und nur solche Richtungen, nach denen Z beschränkt ist.

Es kann natürlich auch sein, daß Z nach keiner Richtung beschränkt, oder, wie wir sagen wollen, *total unbeschränkt* ist. Dann reduziert sich der Modul M auf 0. — Ist die Dimension von M gleich r, so soll Z eine *symmetrisch ausgedehnte Punktmenge* $(n-r)$*-ter Klasse* (oder von der Klasse $n-r$) heißen. Die n-te Klasse umfaßt dann die total unbeschränkten Punktmengen, die 0-te Klasse diejenigen, welche nach allen Richtungen beschränkt sind. Die letzteren sind nichts anderes als die absolut beschränkten Punktmengen. Denn, wenn Z absolut beschränkt, m die obere Grenze von $|Z|$ ist, so folgt aus der allgemeinen Ungleichung (§ 5) $\alpha\zeta \leqq |\alpha||\zeta|$, wenn α eine Richtung, ζ eine Zahl aus Z darstellt, $\alpha\zeta \leqq |\zeta| \leqq m$, d. h. Z ist nach jeder Richtung beschränkt. Wird andererseits Z als nach jeder Richtung beschränkt vorausgesetzt, so ergibt sich, wenn wir diese Voraussetzung auf die Richtungen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ und die entgegengesetzten anwenden, daß $|\varepsilon_1\zeta|, \ldots |\varepsilon_n\zeta|$ unter einem festen Wert m bleiben, und aus der Identität

$$\zeta = (\varepsilon_1\zeta)\,\varepsilon_1 + \cdots + (\varepsilon_n\zeta)\,\varepsilon_n$$

folgt

$$|\zeta| \leqq |(\varepsilon_1\zeta)\,\varepsilon_1| + \cdots + |(\varepsilon_n\zeta)\,\varepsilon_n| = |\varepsilon_1\zeta| + \cdots + |\varepsilon_n\zeta| \leqq nm,$$

d. h. Z ist absolut beschränkt. — Jede lineare r-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wie man sofort sieht, eine symmetrisch ausgedehnte Punktmenge von der Klasse r; der oben mit M bezeichnete Modul, welcher die Richtungen umfaßt, nach denen Λ beschränkt ist, ist zu dem zu Λ parallelen Modul komplementär.

§ 7. Abgeschlossene Punktmengen.

Umgebung eines Punktes α heiße jede Menge aller Punkte, deren Abstand von α einen gegebenen positiven Wert m nicht überschreitet. — *Häufungsstelle* einer Punktmenge Z heißt ein (zu Z gehöriger oder nicht gehöriger) Punkt α, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung von α wenigstens ein von α verschiedener Punkt aus Z liegt. — Eine Punktmenge Z heißt (nach *G. Cantor*) *abgeschlossen*, wenn sie keine Häufungsstellen oder nur solche besitzt, die selbst Punkte von Z sind.

Wir bemerken noch ausdrücklich: So wie wir hier weder unendlich große (reelle oder komplexe) Zahlen noch unendlich ferne Punkte einführen, so kennen wir auch keine unendlich fernen Häufungsstellen. Wir werden daher beispielsweise von der Menge aller Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sagen, daß sie keine Häufungsstelle besitzt, und sie demgemäß als abgeschlossen betrachten, wenn es auch bei anderen Untersuchungen zweckmäßig sein kann, die Definitionen so zu fassen, daß solche Mengen nicht als abgeschlossen gelten*).

Jede lineare Mannigfaltigkeit Λ ist eine abgeschlossene Punktmenge, da jeder Punkt außerhalb Λ einen kürzesten Abstand von Λ hat (§ 5), also nicht Häufungsstelle von Λ ist. Ist ferner ein Punkt α und eine positive Zahl m gegeben, so konstituieren sowohl die der Bedingung $|\xi - \alpha| \leqq m$, als auch die der Bedingung $|\xi - \alpha| \geqq m$ genügenden Punkte ξ eine abgeschlossene Punktmenge.

Wenn ein System von endlich- oder unendlichvielen abgeschlossenen Punktmengen Π wenigstens einen gemeinsamen Punkt hat, so ist der Durchschnitt Δ des Systems wieder eine abgeschlossene Punktmenge. Denn eine Häufungsstelle von Δ ist auch Häufungsstelle einer jeden der Mengen Π, also Punkt jeder dieser Mengen und somit Punkt von Δ. — Zu jeder Punktmenge Z gehört eine kleinste Z enthaltende abgeschlossene Punktmenge, nämlich der Durchschnitt aller Z enthaltenden abgeschlossenen Punktmengen. Wir kennzeichnen diese Punktmenge weiterhin durch einen beigefügten Strich. Z' muß alle Punkte von Z, ebenso alle Häufungsstellen von Z enthalten. Ist andererseits ein Punkt α weder Punkt noch Häufungsstelle von Z, so kann man $m > 0$ so wählen, daß für jeden Punkt ζ aus Z $|\zeta - \alpha| \geqq m$ wird. Die sämtlichen Punkte ξ, welche der Bedingung $|\xi - \alpha| \geqq m$ genügen, bilden dann eine abgeschlossene Punktmenge, welche Z, nicht aber den Punkt α, enthält. α kann daher nicht dem

*) Erst in Abschnitt VII, wo wir die Verhältnisse im projektiven Raum betrachten, werden die für diesen zweckmäßigen Definitionen eingeführt werden.

Durchnitt Z' aller Z enthaltenden abgeschlossenen Punktmengen angehören. Z' besteht also aus allen Punkten und Häufungsstellen von Z.

§ 8. Konvergenz.

Es liege eine komplexe Zahlenfolge

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_p, \dots$$

vor. — Aus $|\gamma(\xi_1+\xi_2)| \leqq |\gamma\xi_1| + |\gamma\xi_2|$ und $|\gamma(c\xi)| = |c| \cdot |\gamma\xi|$ folgt, daß diejenigen Zahlen, für welche die reelle Folge

$$\gamma_0\xi, \gamma_1\xi, \dots \gamma_p\xi, \dots$$

den Grenzwert 0 hat, einen Modul erfüllen. Wenn daher für n linear unabhängige Werte ξ $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi = 0$ ist, so besteht diese Gleichung für jedes ξ. In diesem Falle schreibt man $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = 0$. Die Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = 0$ besagt demnach, daß die n Koordinatenfolgen $\gamma_0\varepsilon_i, \gamma_1\varepsilon_i, \dots$ $(i = 1, \dots n)$ den Grenzwert 0 haben. Aus

$$(1.) \qquad |\gamma_p\varepsilon_i| \leqq |\gamma_p| \leqq |\gamma_p\varepsilon_1| + \dots + |\gamma_p\varepsilon_n| \qquad (i=1,\dots n;\ p=0,1,\dots)$$

folgt ferner, daß die Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = 0$ mit der Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} |\gamma_p| = 0$ äquivalent ist.

Die Angabe $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = \gamma$ wird als gleichbedeutend mit $\lim\limits_{p=\infty} (\gamma_p - \gamma) = 0$ erklärt. Sie ist auch gleichbedeutend mit der Angabe, daß die Koordinatenfolgen $\gamma_0\varepsilon_i, \gamma_1\varepsilon_i, \dots$ $(i = 1, \dots n)$ die Koordinaten von γ zu Grenzwerten haben, oder daß für jedes ξ $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi = \gamma\xi$ ist.

Liegen zwei komplexe Zahlenfolgen $\alpha_0, \alpha_1, \dots$; $\beta_0, \beta_1, \dots$ und eine reelle $c_0, c_1, \dots$ vor, welche Grenzwerte besitzen, so ergibt sich aus den bekannten Sätzen über reelle Zahlenfolgen ohne weiteres:

$$\lim_{p=\infty} (\alpha_p \pm \beta_p) = \lim_{p=\infty} \alpha_p \pm \lim_{p=\infty} \beta_p, \qquad \lim_{p=\infty} (c_p\alpha_p) = \lim_{p=\infty} c \cdot \lim_{p=\infty} \alpha_p,$$

$$\lim_{p=\infty} (\alpha_p\beta_p) = \lim_{p=\infty} \alpha_p \cdot \lim_{p=\infty} \beta_p$$

und für jede lineare Funktion $\varphi(\xi)$

$$\lim_{p=\infty} \varphi(\alpha_p) = \varphi(\lim_{p=\infty} \alpha_p).$$

Ist $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen, und besitzt die reelle Folge $\gamma_0\xi, \gamma_1\xi, \dots$ für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ Grenzwerte, so folgt aus $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p(\xi_1+\xi_2) = \lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi_1 + \lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi_2$ und $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p(c\xi_1) = c \lim\limits_{p=\infty} \gamma_p\xi_1$: Diejenigen Zahlen ξ, für welche die Folge $\gamma_0\xi, \gamma_1\xi, \dots$ einen Grenzwert besitzt, erfüllen einen Modul M. Ist r der Rang von M, so gibt es eine bestimmte $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Λ von der Beschaffenheit, daß für jede Zahl γ aus Λ und jede Zahl ξ aus M die Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p \xi = \gamma \xi$ besteht. Ist nämlich $r=0$, so kann ξ nur den Wert 0 haben, und die Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p \xi = \gamma \xi$ besteht für jeden Wert von γ. Ist $r > 0$, $\alpha_1, \dots \alpha_r$ eine Basis von M, und wird $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p \alpha_i = c_i$ $(i=1, \dots r)$ gesetzt, so fordert die Gleichung $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p \xi = \gamma \xi$, daß γ den r Gleichungen $\gamma \alpha_i = c_i\,(i=1, \dots r)$ genügt. Durch diese Gleichungen wird aber eine $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Λ definiert. Ist andererseits γ irgendein Element dieser Mannigfaltigkeit, ξ eine Zahl aus M, so hat ξ die Form $\xi = a_1 \alpha_1 + \cdots + a_r \alpha_r$, und es wird

$$\lim_{p=\infty} \gamma_p \xi = \lim_{p=\infty} a_1 \gamma_p \alpha_1 + \cdots + \lim_{p=\infty} a_r \gamma_p \alpha_r = a_1 \lim_{p=\infty} (\gamma_p \alpha_1) + \cdots + a_r \lim_{p=\infty} (\gamma_p \alpha_r)$$
$$= a_1 c_1 + \cdots + a_r c_r = a_1 \gamma \alpha_1 + \cdots + a_r \gamma \alpha_r = \gamma \xi .$$

Wird $\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p = \sigma_p$ gesetzt $(p = 0, 1, \dots)$, so heißt die Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots$$

konvergent, wenn die Folge $\sigma_0, \sigma_1, \dots \sigma_p \dots$ einen Grenzwert σ besitzt; σ heißt die Summe der Reihe. Die Forderung der Konvergenz der komplexen Reihe ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die reelle Reihe $\gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \cdots$ für jedes ξ konvergiert, oder daß die n Koordinatenreihen $\gamma_0 \varepsilon_i + \gamma_1 \varepsilon_i + \cdots$ $(i = 1, \dots n)$ konvergieren sollen. Die Summen dieser Reihen sind dann die Koordinaten $\sigma \varepsilon_i$ der Summe σ der komplexen Reihe. — In jedem Falle bilden die Zahlen ξ, für welche die Reihe $\gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \cdots$ konvergiert einen Modul M, und für jede Zahl ξ dieses Moduls ist $\gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \cdots = \sigma \xi$, wo σ innerhalb einer bestimmten linearen Mannigfaltigkeit Λ beliebig wählbar ist, deren Dimension $n-r$ ist, wenn r die Dimension von M bezeichnet.

Damit die komplexe Reihe $\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots$ unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß die n Koordinatenreihen unbedingt, also absolut konvergieren. Die Reihe hat dann bei jeder Anordnung ihrer Glieder auch dieselbe Summe. Aus den Ungleichungen (1.) folgt, daß als notwendige und hinreichende Bedingung für die unbedingte Konvergenz der Reihe auch die Konvergenz von $|\gamma_0| + |\gamma_1| + \cdots$, also die absolute Konvergenz angegeben werden kann.

III. Konvexe Punktmengen.

§ 9. Eine Punktmenge Z soll *konvex* heißen, wenn sie die Forderung erfüllt: Sind α und β Punkte aus Z, so gehört auch jeder Punkt zwischen α und β der Menge Z an.

α und β sollen hierbei nicht notwendig verschieden sein. Wir betrachten demgemäß auch einen einzelnen Punkt als eine konvexe Punktmenge.

1. *Der Durchschnitt* Δ *eines Systems von endlich- oder unendlich-vielen konvexen Punktmengen* Π (die wenigstens einen gemeinsamen Punkt besitzen) *ist eine konvexe Punktmenge.*

Denn, wenn α und β zu Δ gehören, so gehören sie auch zu jeder Menge Π. Daher ist auch jeder Punkt zwischen α und β Punkt einer jeden Menge Π, also Punkt von Δ. — Jede Punktmenge ist in einer konvexen Punktmenge, nämlich in dem System P aller Punkte enthalten. Aus 1. ergibt sich jetzt sofort:

2. *Zu jeder Punktmenge* Z *gibt es eine kleinste* Z *enthaltende konvexe Punktmenge, nämlich den Durchschnitt aller* Z *enthaltenden konvexen Punktmengen.*

Wir bezeichnen diese Punktmenge weiterhin durch einen übergesetzten Strich, im vorliegenden Falle also mit $\overline{Z}$.

3. *Ist die Punktmenge* Z *konvex, so ist auch* Z' (die kleinste Z enthaltende abgeschlossene Punktmenge, § 7) *konvex.*

Es seien nämlich α und β Punkte aus Z', γ ein Punkt zwischen α und β. α und β sind Punkte oder Häufungsstellen von Z. Ist daher eine beliebig kleine positive Zahl d gegeben, so gibt es in Z zwei Punkte α_1, β_1 (die eventuell mit α, β zusammenfallen können), für welche

$$(1.) \qquad |\alpha_1 - \alpha| < d, \quad |\beta_1 - \beta| < d$$

wird. Da γ zwischen α und β liegt, hat man eine Gleichung

$$(2.) \qquad \gamma = c\alpha + (1-c)\beta. \qquad (0 \leqq c \leqq 1)$$

Wegen der Konvexität von Z gehört dann der zwischen α_1 und β_1 gelegene Punkt

$$(3.) \qquad \gamma_1 = c\alpha_1 + (1-c)\beta_1$$

zu Z. Aus (1.), (2.), (3.) folgt

$$|\gamma_1 - \gamma| = |c(\alpha_1 - \alpha) + (1-c)(\beta_1 - \beta)|$$
$$\leqq c|\alpha_1 - \alpha| + (1-c)|\beta_1 - \beta| \leqq cd + (1-c)d = d.$$

Dies zeigt, daß in jeder Umgebung von γ ein Punkt γ_1 von Z liegt, daß also γ Punkt oder Häufungsstelle von Z, somit Punkt von Z' sein muß. Z' ist also konvex.

Es sei Z eine beliebige Punktmenge. Soll eine Z enthaltende Punktmenge Π konvex und abgeschlossen sein, so muß sie $\bar{Z}$ und daher auch die kleinste $\bar{Z}$ enthaltende abgeschlossene Punktmenge $(\bar{Z})'$, die wir kurz mit $\bar{Z}'$ bezeichnen, enthalten. Da aber nach 3. $\bar{Z}'$ auch konvex ist, so folgt:

4. $\bar{Z}' = (\bar{Z})'$ *ist die kleinste von allen* (der Durchschnitt aller) Z *enthaltenden zugleich konvexen und abgeschlossenen Punktmengen.*

Die linearen Mannigfaltigkeiten sind Beispiele für konvexe, abgeschlossene Punktmengen. Bezeichnet ferner α eine Richtung, so ist das System A aller Punkte ξ, welche der Bedingung $\alpha\xi \leqq c$ genügen, also der „Halbraum", welcher alle Punkte ξ der Ebene $\alpha\xi = c$ und alle auf der $(-\alpha)$-Seite dieser Ebene gelegenen Punkte umfaßt, konvex und abgeschlossen. Sind nämlich ξ_1, ξ_2 Punkte aus A, und ist ξ ein Punkt zwischen ξ_1 und ξ_2, so hat man

$$\alpha\xi_1 \leqq c, \quad \alpha\xi_2 \leqq c, \quad \xi = a\xi_1 + (1-a)\xi_2, \qquad (0 \leqq a \leqq 1)$$

daher

$$\alpha\xi = a\alpha\xi_1 + (1-a)\alpha\xi_2 \leqq ac + (1-a)c = c.$$

ξ gehört also zu A, und A ist konvex. Ist ferner β ein nicht zu A gehöriger Punkt, $\alpha\beta = c_1$, so folgt $c_1 > c$ und für jeden Punkt ξ aus A

$$|\beta - \xi| = |\alpha||\beta - \xi| \geqq \alpha(\beta - \xi) = \alpha\beta - \alpha\xi \geqq c_1 - c.$$

Mithin ist β keine Häufungsstelle von A. A ist also abgeschlossen.

Es sei Z eine konvexe Punktmenge, die jedoch nicht alle Punkte des Raumes umfassen soll. Ist dann α ein nicht zu Z gehöriger Punkt, $a > 0$, $b > 0$, so liegt α zwischen $\alpha + a\varepsilon_1$ und $\alpha - b\varepsilon_1$, und es können daher diese Punkte nicht beide zugleich der Menge Z angehören. Man kann daher aus den beiden Zahlen $\varepsilon_1, -\varepsilon_1$ eine — wir nennen sie ε_1' — so auswählen, daß das System der Punkte $\alpha + c_1\varepsilon_1'$ $(c_1 > 0)$ keinen Punkt aus A enthält. — Es sei jetzt k eine der Zahlen $1, 2, \dots n$. Nehmen wir an, es sei möglich, aus jedem der k Paare $\varepsilon_1, -\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_k, -\varepsilon_k$ eine Zahl $\varepsilon_1', \dots \varepsilon_k'$ so auszuwählen, daß die Menge Δ_k aller Punkte

$$\alpha + c_1\varepsilon_1' + \cdots + c_k\varepsilon_k' \qquad (c_1 > 0, \dots c_k > 0)$$

keinen Punkt mit Z gemein hat — eine Voraussetzung, die, wie wir sahen, für $k = 1$ sicher erfüllt ist. Ist dann $k < n$, und betrachtet man zwei Punkte

$$\gamma = \alpha + c_1 \varepsilon_1' + \cdots + c_k \varepsilon_k' + a \varepsilon_{k+1},$$
$$\delta = \alpha + d_1 \varepsilon_1' + \cdots + d_k \varepsilon_k' - b \varepsilon_{k+1},$$

wo a, b und alle Koeffizienten c_i, d_i positiv sind, so gehört der zwischen γ und δ gelegene Punkt

$$\frac{b}{a+b}\gamma + \frac{a}{a+b}\delta = \alpha + \frac{b c_1 + a d_1}{a+b}\varepsilon_1' + \cdots + \frac{b c_k + a d_k}{a+b}\varepsilon_k'$$

der Menge Δ_k, also nicht der Menge Z an, und es muß daher wenigstens einer der Punkte γ, δ außerhalb Z liegen. Man kann daher die Zahl ε_{k+1}' aus den beiden Zahlen $\varepsilon_{k+1}, -\varepsilon_{k+1}$ so auswählen, daß das System Δ_{k+1} aller Punkte

$$\alpha + c_1 \varepsilon_1' + \cdots + c_{k+1} \varepsilon_{k+1}' \qquad (c_1 > 0, \ldots c_{k+1} > 0)$$

keinen Punkt aus Z enthält. Dieser Schluß von k auf $k+1$ zeigt uns, daß Systeme, welche den über Δ_k gemachten Voraussetzungen entsprechen, für jeden der Werte $k = 1, \ldots n$ existieren. — Betrachten wir jetzt ein System Δ_n und irgendeinen festen Punkt

$$\omega = \alpha + c_1 \varepsilon_1' + \cdots + c_n \varepsilon_n' \qquad (c_1 > 0, \ldots c_n > 0)$$

aus Δ_n. c_p sei der kleinste der Koeffizienten $c_1, \ldots c_n$. Da $\varepsilon_1', \ldots \varepsilon_n'$ linear unabhängig sind, hat man für jeden Punkt ζ aus Z eine Darstellung

$$\zeta = \alpha + a_1 \varepsilon_1' + \cdots + a_n \varepsilon_n',$$

wobei nicht alle Koeffizienten a positiv sein können. Es sei etwa $a_i \leqq 0$. Dann folgt

$$|\zeta - \omega| \geqq c_i - a_i \geqq c_i \geqq c_p.$$

Diese Ungleichung zeigt, daß kein Punkt aus Δ_n Häufungsstelle von Z ist. Δ_n hat also auch mit Z' keinen Punkt gemein. — Der Zweck dieser Ausführungen war lediglich der Nachweis des Satzes:

5. *Wenn eine konvexe Punktmenge Z nicht alle Punkte enthält, so enthält auch Z' nicht alle Punkte.*

§ 10. **Analytische Darstellung der kleinsten eine Punktmenge Z enthaltenden konvexen Punktmenge.** — Es lasse sich die von 0 verschiedene Zahl γ aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten komponieren; es bestehe also eine Gleichung

$$(4.) \qquad \gamma = a_1 \alpha_1 + \cdots + a_p \alpha_p. \qquad (a_1 > 0, \ldots a_p > 0)$$

Wenn die Zahlen α nicht linear unabhängig sind, also einem Modul von weniger als p Dimensionen angehören, so hat man eine Relation

$$(5.)\qquad 0 = b_1\alpha_1 + \cdots + b_p\alpha_p,$$

in der nicht alle Koeffizienten b verschwinden. Ist dann c' der größte unter den Werten $\frac{|b_1|}{a_1}, \ldots \frac{|b_p|}{a_p}$, und etwa $\frac{|b_i|}{a_i} = c'$, so werde $c = c'$ oder $c = -c'$ gesetzt, je nachdem b_i positiv oder negativ ist. Es ist dann

$$\left|\frac{b_k}{c}\right| = \frac{|b_k|}{c'} = a_k \frac{|b_k|}{a_k}\cdot\frac{1}{c'} \leqq a_k,\quad a_k - \frac{b_k}{c} \geqq 0,\qquad (k = 1, \ldots p)$$

$$a_i - \frac{b_i}{c} = a_i - \frac{|b_i|}{c'} = 0,$$

also in der aus (4.) und (5.) folgenden Relation

$$(6.)\qquad \gamma = \left(a_1 - \frac{b_1}{c}\right)\alpha_1 + \cdots + \left(a_p - \frac{b_p}{c}\right)\alpha_p$$

kein Koeffizient negativ, wenigstens einer gleich 0 und, da $\gamma \neq 0$ ist, wenigstens einer positiv. Läßt man aus (6.) die Glieder mit verschwindenden Koeffizienten fort, so hat man eine Darstellung von γ von derselben Art wie unter (4.), nur daß nicht mehr alle Zahlen α vorkommen. Da eine solche Reduktion möglich ist, so lange die zurückbleibenden Zahlen α linear abhängig sind, so folgt:

1. *Ist die von 0 verschiedene Zahl γ aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten komponierbar, so kann man aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ n oder weniger als n (falls diese Zahlen einem Modul von der Dimension r angehören, r oder weniger als r) solche auswählen, daß auch aus diesen γ mittels positiver Koffizienten komponierbar ist.*

Wenn die $p+1$ Punkte $\alpha_0, \ldots \alpha_p$ einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit Λ angehören, so gehören die Differenzen $\alpha_1 - \alpha_0, \ldots \alpha_p - \alpha_0$ dem zu Λ parallelen Modul an. Ist $p > r$, so sind die Differenzen linear abhängig, und man hat eine Relation

$$b_1(\alpha_1 - \alpha_0) + \cdots + b_p(\alpha_p - \alpha_0) = 0$$

oder

$$(7.)\qquad b_0\alpha_0 + \cdots + b_p\alpha_p = 0,$$

wo

$$(8.)\qquad b_0 + \cdots + b_p = 0$$

ist, ohne daß sämtliche Koeffizienten b verschwinden. Ist jetzt γ ($\gamma = 0$ nicht ausgeschlossen) in der Form

$$(9.)\qquad \gamma = a_0\alpha_0 + \cdots + a_p\alpha_p$$

so darstellbar, daß die Koeffizienten a positiv sind und ihre Summe

$$(10.)\qquad a_0 + \cdots + a_p = 1$$

ist, so folgt

$$(11.)\qquad \gamma = \left(a_0 - \frac{b_0}{c}\right)\alpha_0 + \cdots + \left(a_p - \frac{b_p}{c}\right)\alpha_p$$

für beliebiges $c \neq 0$, und es ist zufolge (8.), (10.) die Summe der Koeffizienten auf der rechten Seite von (11.) gleich 1. Wählt man wieder c so, daß $|c|$ gleich der größten unter den Zahlen $\frac{|b_0|}{a_0}, \ldots \frac{|b_p|}{a_p}$ ist und das Vorzeichen von c mit dem Vorzeichen einer der Zahlen b_i übereinstimmt, für welche $\frac{|b_i|}{a_i} = |c|$ ist, so ist in (11.) kein Koeffizient negativ, aber wenigstens einer 0 und wenigstens einer positiv. Indem man in (11.) die Glieder mit verschwindenden Koeffizienten fortläßt und, falls noch mehr als $r+1$ zurückbleiben, das Verfahren wiederholt, erhält man den Satz:

2. *Läßt sich γ aus $\alpha_0, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten, deren Summe 1 ist, komponieren, so kann man aus den Punkten α $n+1$ oder weniger als $n+1$ (falls die Punkte α einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit angehören, $r+1$ oder weniger als $r+1$) solche auswählen, daß sich schon aus diesen γ mittels positiver Koeffizienten, deren Summe 1 ist, komponieren läßt.*

3. *Die kleinste die Punkte $\alpha_0, \ldots \alpha_p$ enthaltende konvexe Punktmenge besteht aus allen Punkten γ von der Form*

$$(12.)\qquad \gamma = a_0\alpha_0 + \cdots + a_p\alpha_p \quad (a_0 \geqq 0, \ldots a_p \geqq 0;\ a_0 + \cdots + a_p = 1).$$

Beweis. Bezeichnen wir mit A das System der $p+1$ Punkte $\alpha_0, \ldots \alpha_p$, mit B das System aller Punkte γ von der Form (12.), so handelt es sich um den Beweis der Gleichung $\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{B}$. — Es seien zunächst

$$\gamma = a_0\alpha_0 + \cdots + a_p\alpha_p \quad (a_0 \geqq 0, \ldots a_p \geqq 0;\ a_0 + \cdots + a_p = 1),$$
$$\gamma' = a_0'\alpha_0 + \cdots + a_p'\alpha_p \quad (a_0' \geqq 0, \ldots a_p' \geqq 0;\ a_0' + \cdots + a_p' = 1)$$

irgend zwei Punkte aus B, δ ein Punkt zwischen γ und γ'. Dann hat man

$$\delta = c\gamma + c'\gamma' \quad (c \geqq 0, c' \geqq 0;\ c + c' = 1)$$

oder, wenn man $ca_i + c'a_i' = d_i$ $(i = 0, \ldots p)$ setzt,

$$\delta = d_0\alpha_0 + \cdots + d_p\alpha_p \quad (d_0 \geqq 0, \ldots d_p \geqq 0;\ d_0 + \cdots + d_p = 1);$$

δ ist also ein Punkt von B, und somit B eine konvexe Punktmenge. Indem man in (12.) einen Koeffizienten gleich 1, die übrigen gleich 0 nimmt, sieht man, daß B das System A, also auch $\overline{\mathsf{A}}$ enthält. — Wenn man andererseits irgendein Element γ aus B in der Form (12.) darstellt und die Glieder mit verschwindenden Koeffizienten fortläßt, so hat man eine Gleichung

$$\gamma = b_0\beta_0 + \cdots + b_k\beta_k \quad (b_0 > 0, \ldots b_k > 0,\ b_0 + \cdots + b_k = 1),$$

wo die Punkte β sämtlich in A, also auch in $\bar{\mathsf{A}}$ enthalten sind. Setzt man

$$b_0 + \cdots + b_i = s_i, \qquad \frac{b_0\beta_0 + \cdots + b_i\beta_i}{b_0 + \cdots + b_i} = \gamma_i, \qquad (i = 0, \ldots k)$$

so ist für $i = 0, \ldots k-1$, $0 < s_i < 1$, $s_k = 1$, $\gamma_0 = \beta_0$, $\gamma_k = \gamma$:

$$\gamma_{i+1} = \frac{s_i}{s_{i+1}}\gamma_i + \frac{b_{i+1}}{s_{i+1}}\beta_{i+1}, \qquad (i = 0, \ldots k-1)$$

also γ_{i+1} zwischen γ_i und β_{i+1} gelegen. Man schließt hieraus sukzessive, daß die Punkte $\gamma_1, \ldots \gamma_k = \gamma$ zu $\bar{\mathsf{A}}$ gehören müssen. Also ist jeder Punkt γ aus B auch in $\bar{\mathsf{A}}$ enthalten, und es folgt $\mathsf{B} = \bar{\mathsf{A}}$.

Eine konvexe Punktmenge Z heiße *r-dimensional*, wenn die kleinste lineare Mannigfaltigkeit *Ln.* Z, in welcher Z enthalten ist, die Dimension r hat.

Es sei jetzt Z eine beliebige endliche oder unendliche Punktmenge, r die Dimension von $\bar{\mathsf{Z}}$, und es werde mit A jedes Teilsystem von Z bezeichnet, das nicht mehr als $r+1$ Punkte enthält. Γ sei das System aller derjenigen Punkte, welche wenigstens in einer der zu den Systemen A gehörigen kleinsten konvexen Punktmengen $\bar{\mathsf{A}}$ vorkommen. Dann ist Z in Γ, Γ in $\bar{\mathsf{Z}}$ enthalten. — Sind γ_1, γ_2 zwei Punkte aus Γ, so gibt es unter den Systemen A zwei solche $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$, daß γ_1 in $\bar{\mathsf{A}}_1$, γ_2 in $\bar{\mathsf{A}}_2$ vorkommt. Das System B aller der Punkte, die zu A_1 oder A_2 gehören, umfaßt endlichviele, nämlich höchstens $2r+2$ Punkte. Das konvexe System $\bar{\mathsf{B}}$ enthält γ_1 und γ_2, also auch jeden zwischen γ_1 und γ_2 gelegenen Punkt γ. Jeder solche Punkt γ ist, wie die Anwendung der Sätze 3. und 2. ergibt, aus $r+1$ oder weniger als $r+1$ Punkten des Systems B mittels positiver Koeffizienten komponierbar, deren Summe 1 ist. Da B Teilsystem von Z ist, jedes aus $r+1$ oder weniger Punkten von B bestehende System also ein System A repräsentiert, so ist γ Punkt eines Systems $\bar{\mathsf{A}}$ und gehört also zu Γ. Daraus folgt, daß Γ konvex ist; und da Z in Γ enthalten ist, muß auch $\bar{\mathsf{Z}}$ in Γ enthalten sein. Daraus folgt $\Gamma = \bar{\mathsf{Z}}$, und wir erhalten den Satz:

4. *Ist* Z *eine beliebige endliche oder unendliche Punktmenge,* r *die Dimension von* $\bar{\mathsf{Z}}$, *so läßt sich zu jedem Punkte* ζ *aus* $\bar{\mathsf{Z}}$ *eine aus nicht mehr als* $r+1$ *Punkten (in jedem Falle also eine aus nicht mehr als* $n+1$ *Punkten) bestehende Teilmenge* A *von* Z *so bestimmen, daß* ζ *in* $\bar{\mathsf{A}}$ *enthalten ist.*

§ 11. Die kleinste, eine Punktmenge Z enthaltende konvexe und abgeschlossene Punktmenge $\overline{Z}'$.

Im folgenden machen wir von einem aus den Elementen der Theorie der reellen Funktionen von n reellen Veränderlichen bekannten Satz Anwendung: *Ist Z eine abgeschlossene Punktmenge, γ ein nicht zu Z gehöriger Punkt, so gibt es wenigstens einen Punkt ζ in Z, für welchen der Abstand $|\zeta-\gamma|$ ein Minimum wird.* — Ist Z überdies konvex, so können wir hinzufügen, daß es *nur einen* solchen Punkt geben kann. Denn wenn für zwei verschiedene Punkte ζ_1, ζ_2 aus Z $|\zeta_1-\gamma| = |\zeta_2-\gamma| = d$ wird, so können ζ_1 und ζ_2 von γ aus nicht in derselben Richtung liegen, und es wird

$$d = \frac{d}{2}+\frac{d}{2} = \left|\frac{\zeta_1-\gamma}{2}\right| + \left|\frac{\zeta_2-\gamma}{2}\right| > \left|\frac{\zeta_1-\gamma}{2}+\frac{\zeta_2-\gamma}{2}\right| = \left|\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}-\gamma\right|;$$

d. h. der zwischen ζ_1 und ζ_2 gelegene und darum zu Z gehörige Punkt $\frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_2)$ liegt näher zu γ als die Punkte ζ_1, ζ_2.

Es sei Z eine konvexe, abgeschlossene, aber nicht alle Punkte umfassende Menge, γ ein nicht zu Z gehöriger Punkt, β der γ am nächsten gelegene Punkt von Z, d der Abstand der Punkte β und γ, α die Richtung von β nach γ, und es werde $\alpha\beta = c$ gesetzt. Dann ist

$$\gamma = \beta + d\alpha, \quad \alpha\beta = c, \quad \alpha\gamma = c + d, \quad d > 0. \tag{13.}$$

Die Punkte ξ, welche der Ungleichung

$$\alpha\xi \leqq c \tag{14.}$$

genügen, erfüllen einen Halbraum, welcher die Ebene Λ mit der Gleichung $\alpha\xi = c$ und alle auf der $(-\alpha)$-Seite dieser Ebene gelegenen Punkte umfaßt. Der Punkt β liegt in Λ, der Punkt γ auf der α-Seite von Λ. Ist ζ ein beliebiger Punkt aus Z, p eine beliebige positive Zahl < 1, so gehört auch der zwischen β und ζ gelegene Punkt η

$$\eta = p\zeta + (1-p)\beta = \beta - p(\beta-\zeta) \tag{15.}$$

zu Z, und man erhält aus (13.) und (15.) wegen der Minimumseigenschaft der Zahl d

$$\begin{aligned} d^2 \leqq (\gamma-\eta)^2 = (d\alpha + p(\beta-\zeta))^2 &= d^2 + p(2d\alpha(\beta-\zeta) + p(\beta-\zeta)^2) \\ &= d^2 + p(2d(c-\alpha\zeta) + p(\beta-\zeta)^2), \end{aligned}$$

also

$$2d(c-\alpha\zeta) + p(\beta-\zeta)^2 \geqq 0.$$

Dies ist aber, da die positive Zahl p beliebig klein angenommen werden kann, nur möglich, wenn $c-\alpha\zeta \geqq 0$, also $\xi=\zeta$ der Ungleichung (14.)

genügt. Damit ist gezeigt, daß die Punktmenge Z ganz dem durch (**14.**) definierten Halbraum angehört, und daß Λ Stützebene von Z in Richtung α ist. Da γ dem genannten Halbraum nicht angehört, haben wir den Satz:

1. *Ist Z eine konvexe abgeschlossene Punktmenge, γ ein nicht zu Z gehöriger Punkt, so gibt es einen Halbraum, welcher die Punktmenge Z, aber nicht den Punkt γ enthält.*

Es bezeichne jetzt Z eine beliebige Punktmenge. Ist Z, also auch $\bar{Z}'$, total unbeschränkt und somit in keinem Halbraum enthalten, so muß nach Satz 1. $\bar{Z}'$ alle Punkte des Raumes umfassen. Nach § 9, Satz 5., gilt dann dasselbe schon für $\bar{Z}$. — Ist aber Z nicht total unbeschränkt, so gibt es Z enthaltende Halbräume. Jeder solche Halbraum muß, da er konvex und abgeschlossen ist, auch $\bar{Z}'$ enthalten. Ist andererseits ξ ein allen diesen Halbräumen gemeinsamer Punkt, so muß ξ auch zu $\bar{Z}'$ gehören, weil es sonst nach Satz 1. einen $\bar{Z}'$ enthaltenden Halbraum gäbe, der ξ nicht enthielte. Somit ergeben sich die beiden Sätze:

2. *Ist Z eine total unbeschränkte Punktmenge, so umfaßt $\bar{Z}'$, also auch $\bar{Z}$ alle Punkte des Raumes*

und

3. *Ist die Punktmenge Z nicht total unbeschränkt, so ist $\bar{Z}'$ der Durchschnitt aller Z enthaltenden Halbräume.*

Anmerkung: Betrachten wir Schranken und Stützebenen als „orientierte“ Ebenen, deren Normale einen bestimmten Richtungssinn erhalten hat, so können wir dem letzten Resultat die folgende Fassung geben: *$\bar{Z}'$ ist die größte Punktmenge, welche dieselben Schranken (oder Stützebenen) besitzt wie Z.*

IV. Konvergente Reihen.

§ 12. Vorbemerkungen. — Wenn man bei einer unendlichen Folge reeller oder komplexer Zahlen von der Anordnung der Elemente abstrahiert, so bleibt eine abzählbare Zahlenmenge übrig, die sich noch auf unendlichviele andere Arten zu einer Zahlenfolge anordnen läßt. Dabei ist natürlich nicht außer acht zu lassen, daß die abzählbare Menge, von welcher hier die Rede ist, noch nicht bestimmt ist, wenn von jeder Zahl feststeht, ob sie in der Menge vertreten ist oder nicht; vielmehr muß auch feststehen, wie oft dies der Fall ist. Bei den Untersuchungen über Zahlenfolgen hat man zu unterscheiden zwischen solchen Eigenschaften, welche durch die Anordnung der Elemente bedingt sind, und solchen, die von der Anordnung unabhängig sind, also der abzählbaren Menge an sich anhaften. Bei den Eigenschaften der zweiten Kategorie kann man die Forderung stellen, sie von vornherein in einer solchen Form einzuführen bzw. nachzuweisen, daß die Unabhängigkeit von der Anordnung unmittelbar zutage tritt.

Bei der Erklärung des Grenzwertes einer Zahlenfolge wird zumeist auf die Anordnung Bezug genommen. Indessen, daß die Folge einen Grenzwert besitzt, besagt nichts anderes, als daß eine Zahl, eben dieser Grenzwert, existiert, von dem sich höchstens endlichviele Glieder der Folge (absolut) um mehr als eine gegebene positive Größe p unterscheiden, wie klein auch p angenommen werde; und es ist hiernach klar, daß es sich hier um eine Eigenschaft der Folge handelt, die jeder Umordnung gegenüber invariant ist. Die Bezeichnungen *fundamental* für Zahlenfolgen mit Grenzwert und *elementar* speziell für Zahlenfolgen mit dem Grenzwert 0, welche *Heine* gebraucht, können wir demgemäß auf die abzählbaren Systeme übertragen, welche von den Gliedern der Folge konstituiert werden.

Bei der allgemeinen Definition der Konvergenz (bzw. Summe) einer unendlichen Reihe

$$(1.) \qquad \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots$$

ist die Bezugnahme auf die Anordnung der Glieder nicht zu vermeiden, wie sich nachträglich aus dem Beweise des Vorkommens bedingter Konvergenz ergibt. Wird mit Γ das System der Glieder der Reihe (1.), mit Σ das System der Zahlen

$$\sigma_p = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p \qquad (p=0, 1, \ldots)$$

bezeichnet, so ist für die Frage, ob die Reihe (1.) konvergiert, ob also die Folge

$$\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_p, \ldots$$

einen Grenzwert besitzt, das System Σ an sich entscheidend, d. h. die Reihenfolge seiner Elemente ohne Bedeutung, doch das System Σ selbst ist durch die Anordnung der Elemente von Γ bedingt. Zu einem von dieser Anordnung unabhängigen System werden wir aber geführt, wenn wir gleichzeitig die Elemente aller der verschiedenen Systeme Σ betrachten, die den verschiedenen Anordnungen von Γ zu einer unendlichen Reihe entsprechen. Alle diese Elemente haben das gemein, daß sie Summen von endlichvielen Elementen aus Γ darstellen. Eine solche Summe, also die Summe eines jeden endlichen Teilsystems von Γ nennen wir eine *Partialsumme* von Γ, und wir bezeichnen mit Γ_* das System aller Partialsummen von Γ. Dabei rechnen wir zu den endlichen Teilsystemen auch das leere System und dementsprechend zu den Partialsummen auch stets die Zahl 0. Auch für den Fall, daß Γ selbst ein endliches System ist, werden wir diese Bezeichnungen verwenden; ist in diesem Falle k die Anzahl der Elemente von Γ, so besteht Γ_* aus 2^k Elementen, die natürlich numerisch nicht verschieden zu sein brauchen.

Das System Γ_* der Partialsummen eines abzählbaren Systems Γ spielt in den folgenden Untersuchungen, die sich auf die Gesamtheit aller Reihen, zu denen sich das System Γ anordnen läßt, beziehen, eine wesentliche Rolle. Die wichtigsten hier auftretenden Begriffe sind die (unbedingte und bedingte) *Summierbarkeit* und der *Summenbereich.* Wir nennen eine abzählbare Zahlenmenge *summierbar*, wenn wenigstens eine der Reihen, zu denen sie sich anordnen läßt, konvergiert. Wir nennen eine summierbare Zahlenmenge *unbedingt* oder *bedingt summierbar*, je nachdem alle oder nicht alle aus ihr gebildeten Reihen konvergieren. Wir nennen *Summenbereich* einer summierbaren Zahlenmenge die Gesamtheit aller derjenigen Zahlen, die sich als Summe einer aus den (sämtlichen) Zahlen der gegebenen Menge gebildeten Reihe darstellen lassen.

§ 13. Unbedingte Summierbarkeit.

Ist C ein abzählbares System reeller, nicht negativer Zahlen,

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_p + \cdots \tag{2.}$$

eine aus allen Elementen von C gebildete Reihe, und wird

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_p = s_p \tag{3.}$$

gesetzt, so stellen die Summen s_p Elemente des Systems C_* der Partialsummen dar. Hat man ferner irgendeine Partialsumme t, so haben die in dieselbe eingehenden Elemente aus C innerhalb der Reihe (2.) bestimmte Indizes, von denen, da es sich um eine endliche Anzahl handelt, einer der größte ist. Ist k dieser größte Index, so enthält s_k alle Summanden aus t, und es wird $s_k \geqq t$. Daraus folgt, daß das System C_* aller Partialsummen und das System der Partialsummen s_p entweder beide nach oben unbeschränkt sind oder beide dieselbe obere Grenze haben. Im ersten Fall kann kein $\lim\limits_{p=\infty} s_p$ existieren, während im zweiten $\lim\limits_{p=\infty} s_p$ existiert und gleich dieser oberen Grenze ist. Das besagt, da die Anordnung der Elemente der Reihe (2.) willkürlich war:

Ein abzählbares System C reeller, nicht negativer Zahlen ist entweder überhaupt nicht summierbar oder unbedingt summierbar, je nachdem das System C_* der Partialsummen (nach oben) unbeschränkt oder beschränkt ist. Im zweiten Fall ist der Summenbereich von C eine einzige Zahl, nämlich die obere Grenze von C_*.

Ist C ein abzählbares System reeller Zahlen und C_* nicht absolut beschränkt, so müssen entweder die positiven oder die negativen Zahlen aus C ein System bilden, dessen Partialsummen nach oben bzw. unten nicht beschränkt sind. Man zeigt dann in bekannter Weise, daß die Elemente aus C zu einer divergenten Reihe angeordnet werden können, daß also C nicht unbedingt summierbar ist. — Es sei jetzt C_* absolut beschränkt, s' die obere, s'' die untere Grenze von C_*,

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_p + \cdots$$

eine beliebige aus den Elementen von C gebildete Reihe, und es habe wieder s_p die unter (3.) angegebene Bedeutung. Wird dann mit s'_p die Summe der positiven, mit s''_p die Summe der negativen Elemente aus s_p bezeichnet, wobei, wenn solche Elemente fehlen, die betreffende Summe gleich 0 zu setzen ist, so ist

$$(4.) \qquad s_p = s'_p + s''_p, \qquad (p=0,1,\ldots)$$

$$(5.) \qquad 0 \leqq s'_0 \leqq s'_1 \leqq \cdots, \qquad 0 \geqq s''_0 \geqq s''_1 \geqq \cdots.$$

Ist t irgendeine Partialsumme von C, so kann man p so wählen, daß alle in t eingehenden Elemente aus C auch in s_p auftreten. Dann aber ist $s'_p \geqq t \geqq s''_p$. Hieraus, und weil jedes s'_p und jedes s''_p eine Partialsumme darstellt, folgt, daß die obere Grenze von C_* zugleich obere Grenze aller s'_p, die untere Grenze von C_* untere Grenze aller s''_p wird. Unter Berücksichtigung von (4.) und (5.) erhält man also $\lim\limits_{p=\infty} s'_p = s'$, $\lim\limits_{p=\infty} s''_p = s''$ und daraus

$$\lim_{p=\infty} s_p = s' + s''.$$

Das besagt: *Für die unbedingte Summierbarkeit eines Systems C von reellen Zahlen ist notwendig und hinreichend, daß das System C_* der Partialsummen absolut beschränkt ist. Der Summenbereich von C besteht dann aus einer einzigen Zahl, nämlich aus der Summe der oberen und unteren Grenze von C_*.*

Wir betrachten nun ein abzählbares System Γ von komplexen Zahlen und eine aus den sämtlichen Zahlen von Γ gebildete Reihe

$$(6.) \qquad \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots.$$

Ist dann ξ eine beliebige komplexe Zahl, so konstituieren die Glieder der Reihe

$$(7.) \qquad \gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \cdots + \gamma_p \xi + \cdots$$

das reelle System $\xi\Gamma$. Die Reihe (6.) ist konvergent, wenn die Reihe (7.) für jedes ξ konvergiert; sie ist unbedingt konvergent, wenn die Reihe (7.) für jedes ξ unbedingt konvergiert. Anders ausgedrückt: Damit das System Γ unbedingt summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden Wert von ξ das reelle System $\xi\Gamma$ unbedingt summierbar ist. Dazu ist aber erforderlich, daß das System der Partialsummen von $\xi\Gamma$ d. i. $\xi\Gamma_*$ für jeden Wert von ξ absolut beschränkt ist, und das ist dann und nur dann der Fall, wenn Γ_* selbst absolut beschränkt ist (§ 6.).

Wir setzen jetzt Γ_* als absolut beschränkt voraus, bezeichnen für jedes ξ mit $g(\xi)$ die obere Grenze von $\xi\Gamma_*$ und setzen

$$(8.) \qquad g(\xi) - g(-\xi) = h(\xi),$$

$$(9.) \qquad h(\varepsilon_1)\varepsilon_1 + \cdots + h(\varepsilon_n)\varepsilon_n = \sigma,$$

so daß σ eine durch das System Γ an sich vollständig bestimmte Zahl ist. Nun ist $h(\xi)$ die Summe der oberen und unteren Grenze von $\xi\Gamma_*$; man erhält daher als Summe der unbedingt konvergenten Reihe (7.)

$$(10.) \qquad \gamma_0 \xi + \gamma_1 \xi + \cdots + \gamma_p \xi + \cdots = h(\xi).$$

Aus (10.) folgt weiter

$$(\gamma_0 \varepsilon_i)\varepsilon_i + (\gamma_1 \varepsilon_i)\varepsilon_i + \cdots + (\gamma_p \varepsilon_i)\varepsilon_i + \cdots = h(\varepsilon_i)\varepsilon_i, \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots n)}$$

hieraus unter Benutzung der Identität $(\gamma\varepsilon_1)\varepsilon_1 + \cdots + (\gamma\varepsilon_n)\varepsilon_n = \gamma$ und der Gleichung (9.)

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots = \sigma$$

und unter Berücksichtigung von (10.)

$$(11.) \qquad h(\xi) = \sigma\xi.$$

Die Zahl σ, die sich als Summe des beliebig angeordneten Systems Γ ergibt, hat eine einfache geometrische Bedeutung, die aus der Betrachtung der kleinsten die Punktmenge $2\Gamma_*$ enthaltenden konvexen und abgeschlossenen Punktmenge $2\overline{\Gamma}'_*$ hervorgeht. Diese Menge wird nach § 11, Satz 3. von den Punkten gebildet, die allen $2\Gamma_*$ enthaltenden Halbräumen gemein sind. Nun wird ein Halbraum von allen Punkten ξ erfüllt, die einer Ungleichung von der Form

$$\delta\xi \leqq c \tag{12.}$$

genügen, wo δ eine Richtung oder auch eine beliebige von 0 verschiedene komplexe Zahl bezeichnet. Da nun die obere Grenze von $2\delta\Gamma_*$ durch $2g(\delta)$ gegeben wird, so enthält der durch (12.) dargestellte Halbraum die Punktmenge $2\Gamma_*$ dann, wenn $c \geqq 2g(\delta)$ ist. Ein Punkt η gehört daher dann und nur dann der Menge $2\bar{\Gamma}'_*$ an, wenn für jeden Wert von δ

$$\delta\eta \leqq 2g(\delta) \tag{13.}$$

ist. Setzen wir $\eta - \sigma = \xi$, so wird mit Benutzung der Gleichungen (8.), (11.)

$$\delta\eta = \delta\sigma + \delta\xi = \delta\xi + h(\delta) = \delta\xi + g(\delta) - g(-\delta),$$

und die Ungleichung (13.) geht über in

$$\delta\xi \leqq g(\delta) + g(-\delta). \tag{14.}$$

Diese Ungleichung muß also für jeden Wert von δ bestehen, wenn der Punkt $\eta = \sigma + \xi$ der Menge $2\bar{\Gamma}'_*$ angehören soll. Stellen wir die Bedingung dafür auf, daß der Punkt $\sigma - \xi$ der Menge $2\bar{\Gamma}'_*$ angehört, so haben wir in (14.) $-\xi$ an die Stelle von ξ zu setzen. Da δ jeden beliebigen Wert haben kann, so dürfen wir überdies $-\delta$ an Stelle von δ schreiben. Dann erhalten wir aber genau wieder die Bedingung (14.). Wenn also von zwei Punkten $\sigma + \xi$, $\sigma - \xi$, d. h. von zwei Punkten, deren Verbindungsstrecke den Punkt σ zum Mittelpunkt hat, der eine der Punktmenge $2\bar{\Gamma}'_*$ angehört, so gehört auch der andere dieser Punktmenge an. Dies besagt aber nichts anderes, als daß σ Mittelpunkt von $2\bar{\Gamma}'_*$ ist.

Ebenso ist natürlich $\frac{\sigma}{2}$ Mittelpunkt von $\bar{\Gamma}'_*$. Da zu den Partialsummen von Γ auch die Zahl 0 gehört, so ist $\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}$ und darum auch $\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma$ in $\bar{\Gamma}'_*$ enthalten. Als Mittelpunkt der konvexen Punktmenge $2\bar{\Gamma}'_*$ gehört der Punkt σ natürlich auch dieser an. Einen zweiten Mittelpunkt kann $2\bar{\Gamma}'_*$ nicht haben. Denn wäre $\sigma' = \sigma + \tau$ ein solcher, k eine ganze Zahl, so würde, falls $\sigma + k\tau$ Punkt von $2\bar{\Gamma}'_*$ wäre (was für $k=0$, $k=1$ zuträfe), auch $\sigma - k\tau = \sigma' - (k+1)\tau$ und darum auch $\sigma' + (k+1)\tau = \sigma + (k+2)\tau$ Punkt von $2\bar{\Gamma}'_*$ sein. Es würde also $2\bar{\Gamma}'_*$ alle Punkte $\sigma + k\tau$ mit ganzzahligem k (wegen der Konvexität auch alle Punkte $\sigma + k\tau$

mit reellem k, also die Punkte der Verbindungsgeraden von σ und σ') enthalten. Dies ist aber nicht möglich, weil die Punktmenge $2\overline{\Gamma}'_*$ absolut beschränkt ist. Wir erhalten also folgendes Resultat:

*Für die unbedingte Summierbarkeit eines Systems Γ von komplexen Zahlen ist notwendig und hinreichend, daß das System Γ_* der Partialsummen absolut beschränkt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so besteht der Summenbereich von Γ aus einer einzigen Zahl σ. σ ist (einziger) Mittelpunkt der kleinsten das System $2\Gamma_*$ enthaltenden konvexen und abgeschlossenen Punktmenge $2\overline{\Gamma}'_*$.**)

§ 14. Summierbarkeit und Summenbereich.

Die Frage nach der Summierbarkeit und dem Summenbereich einer abzählbaren Menge Γ von komplexen Zahlen findet ihre vollständige Beantwortung in dem folgenden Satze:

A) *Damit das abzählbare System Γ summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß Γ elementar und das System Γ_* der Partialsummen symmetrisch ausgedehnt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, und ist r die Klasse von Γ_*, so besitzt die Punktmenge $2\overline{\Gamma}'_*$ (ebenso wie $\overline{\Gamma}'_*$) Mittelpunkte, die insgesamt eine r-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit erfüllen. Diese Mannigfaltigkeit stellt den Summenbereich von Γ dar.*

Zunächst ist leicht zu sehen, daß die in Satz A) für die Summierbarkeit angegebenen Bedingungen notwendig sind. Denn wenn das System Γ summierbar und

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots \tag{15.}$$

eine aus den sämtlichen Elementen von Γ gebildete konvergente Reihe ist, so folgt in bekannter Weise, daß $\lim\limits_{p=\infty} \gamma_p = 0$, also Γ ein elementares System (§ 12) ist. Ferner ergibt sich die Konvergenz der reellen Reihe

$$\gamma_0\xi + \gamma_1\xi + \cdots + \gamma_p\xi + \cdots \tag{16.}$$

für jedes ξ. Diese Konvergenz könnte nicht stattfinden, wenn man bei der Zerlegung der Reihe (16.) in ihren positiven und negativen Bestandteil eine konvergente und eine divergente Reihe erhielte oder, was offenbar dasselbe besagt, wenn das System $\xi\Gamma_*$ der Partialsummen nach der einen

*) Im Falle $n = 2$, also bei den gemeinen komplexen Zahlen, ist der Umfang des Flächenstückes $\overline{\Gamma}'_*$ gleich der doppelten Summe der absoluten Werte der Zahlen aus Γ.

Seite beschränkt, nach der andern unbeschränkt wäre. Wählt man für ξ eine Zahl vom absoluten Werte 1, so ist damit gezeigt, daß Γ_* nach den beiden Richtungen $\xi, -\xi$ beschränkt oder nach beiden unbeschränkt ist. Γ_* ist also ein System von symmetrischer Ausdehnung.

Nehmen wir jetzt an, Γ erfülle die beiden als für die Summierbarkeit notwendig erwiesenen Bedingungen, und bezeichnen wir mit r die Klasse des symmetrisch ausgedehnten Systems Γ_*, mit M das System der Zahlen ξ, für welche $\xi\Gamma_*$ beschränkt ist. Dann ist M ein Modul von der Dimension $n-r$, der zu M komplementäre Modul N hat die Dimension r.

Ist $r = 0$, so ist Γ_* absolut beschränkt. Für diesen Fall haben wir im vorigen Paragraphen gezeigt, daß Γ summierbar, der Summenbereich von Γ ein einziger Punkt (also eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit) und dieser zugleich einziger Mittelpunkt von $2\bar{\Gamma}'_*$ ist. Damit ist aber die Richtigkeit des Satzes A) für den Fall $r = 0$ erwiesen.

Ist $r = n$, so ist Γ_* total unbeschränkt; daher umfaßt $\bar{\Gamma}'_*$, ebenso $2\bar{\Gamma}'_*$ alle Punkte des Raumes (§ 11, Satz 2). Dann ist aber auch jeder Raumpunkt Mittelpunkt von $2\bar{\Gamma}'_*$; die Mittelpunkte erfüllen eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit. Was noch zu beweisen übrig bleibt, ist die Behauptung:

B) Ist Γ elementar, Γ_* total unbeschränkt, so kann jede Zahl als Summe einer aus den sämtlichen Elementen von Γ gebildeten Reihe dargestellt werden.

Wir wollen jetzt $0 < r < n$ annehmen.

Die beiden komplementären Moduln M, N haben nur die Zahl 0 gemein, und jede Zahl ξ läßt sich, und zwar auf eine einzige Weise als Summe zweier Zahlen darstellen, von denen die eine zu M, die andere zu N gehört (§ 5). Wir nennen diese beiden Summanden die μ- und die ν-Komponente von ξ und bezeichnen sie mit ξ_μ und ξ_ν, so daß die Gleichung

$$\xi = \xi_\mu + \xi_\nu$$

identisch besteht. Für beliebige Zahlen ξ, η gelten ferner die Identitäten

$$(17.) \qquad \xi_\mu \eta_\nu = 0, \quad \xi\eta = \xi_\mu \eta_\mu + \xi_\nu \eta_\nu.$$

Speziell hat man $\xi^2 = (\xi_\mu)^2 + (\xi_\nu)^2$ und darum

$$(18.) \qquad |\xi| \geqq |\xi_\mu|, \quad |\xi| \geqq |\xi_\nu|.$$

Nimmt man mit jeder Zahl aus Γ die Zerlegung in ihre beiden Komponenten vor, und bezeichnet man mit $\Gamma_\mu = A$ das System der μ-, mit $\Gamma_\nu = \mathsf{B}$ das System der ν-Komponenten, so stellen A_* und B_* die Systeme der μ- bzw. ν-Komponenten von Γ_* dar. Bedeutet δ irgendeine komplexe Zahl, also δ_μ eine Zahl aus M, so ergibt sich aus (17.), daß $\delta_\mu \Gamma$ mit $\delta_\mu \mathsf{A}$ identisch ist, und in gleicher Weise ergeben sich die weiteren hier aufgeführten Identitäten:

$$(19.)\qquad \begin{aligned} \delta\mathsf{A} &= \delta_\mu\mathsf{A} = \delta_\mu\Gamma\,, & \delta\mathsf{B} &= \delta_\nu\mathsf{B} = \delta_\nu\Gamma\,,\\ \delta\mathsf{A}_* &= \delta_\mu\mathsf{A}_* = \delta_\mu\Gamma_*\,, & \delta\mathsf{B}_* &= \delta_\nu\mathsf{B}_* = \delta_\nu\Gamma_*\,. \end{aligned}$$

Aus den allgemeinen Ungleichungen (18.), und weil das System Γ als elementar vorausgesetzt wurde, folgt, daß auch A und B elementare Systeme sind. Wir wissen ferner, daß das System $\xi\Gamma_*$ beschränkt ist oder nicht, je nachdem ξ dem Modul M angehört oder nicht. Aus den Identitäten (19.) ist daher zu ersehen, daß das System $\delta\mathsf{A}_*$ bei beliebiger Wahl von δ beschränkt ist, das System $\delta\mathsf{B}_* = \delta_\nu\mathsf{B}_*$ aber nur dann, wenn δ zu M gehört, also $\delta_\nu = 0$ ist. A_* ist deshalb absolut beschränkt, und es folgt, daß A unbedingt summierbar ist und, zu einer Reihe angeordnet, stets dieselbe Summe σ liefert, wobei der Punkt $\sigma = \sigma_\mu$ einziger Mittelpunkt von $2\bar{\mathsf{A}}'_*$ ist (§ 13.). — Bezeichnen wir mit $g(\delta)$ die obere Grenze von $\delta\mathsf{A}_*$, so zeigt (19.), daß

$$(20.)\qquad g(\delta) = g(\delta_\mu)$$

und gleich der oberen Grenze von $\delta_\mu\Gamma_*$ ist.

Die Punkte ξ, welche einer Ungleichung von der Form

$$\delta\xi \leqq c \qquad (\delta \neq 0)$$

genügen, erfüllen einen Halbraum. Soll dieser Halbraum die Punktmenge $2\Gamma_*$ enthalten, so muß δ dem Modul M angehören und $c \geqq 2g(\delta)$ sein. Da die kleinste $2\Gamma_*$ enthaltende konvexe und abgeschlossene Punktmenge $2\bar{\Gamma}'_*$ der Durchschnitt aller $2\Gamma_*$ enthaltenden Halbräume ist, so folgt, daß der Punkt ξ der Punktmenge $2\bar{\Gamma}'_*$ angehört, wenn die Bedingung

$$(21.)\qquad \delta_\mu\xi \leqq 2g(\delta)$$

für jeden Wert von δ erfüllt ist. Aus $\delta_\mu\xi = \delta_\mu\xi_\mu$ ergibt sich weiter: ξ ist dann und nur dann Punkt von $2\bar{\Gamma}'_*$, wenn ξ_μ dieser Menge angehört. — Soll ein Punkt ξ dem Durchschnitt von $2\bar{\Gamma}'_*$ mit dem Modul M angehören, so muß neben der Ungleichung (21.) noch die Gleichung $\xi = \xi_\mu$ bestehen. Dann aber ist $\delta_\mu\xi = \delta_\mu\xi + \delta_\nu\xi = \delta\xi$, und (21.) geht über in

$$(22.)\qquad \delta\xi \leqq 2g(\delta)\,.$$

Ist andererseits diese Ungleichung für jeden Wert δ erfüllt, so folgt aus ihr und (20.) (indem man δ_μ für δ setzt) zunächst wieder die Ungleichung (21.). Weiter aber folgt aus (22.), wenn man ξ_ν für δ einsetzt und beachtet, daß das System $\xi_\nu \mathsf{A}_*$ nur aus Nullen besteht und demgemäß $g(\xi_\nu) = 0$ ist,

$$\xi_\nu^2 = \xi_\nu \xi \leqq 2\, g(\xi_\nu) = 0,$$

also $\xi_\nu = 0,\, \xi = \xi_\mu$. Die Bedingung (22.) ist daher gleichwertig mit den beiden Bedingungen $\delta_\mu\, \xi \leqq 2 g(\delta),\, \xi = \xi_\mu$. Zu der Ungleichung (22.) wird man aber auch sofort geführt, wenn man die Bedingung dafür sucht, daß ξ der Punktmenge $2\,\overline{\mathsf{A}}'_*$ angehören soll. Es stellt also $2\,\overline{\mathsf{A}}'_*$ den Durchschnitt von $2\,\overline{\Gamma}'_*$ und M dar, und wir können jetzt sagen: ξ ist dann und nur dann Punkt von $2\,\overline{\Gamma}'_*$, wenn ξ_μ Punkt von $2\,\overline{\mathsf{A}}'_*$ ist.

Ein Punkt ω ist Mittelpunkt von $2\,\overline{\Gamma}'_*$, wenn für beliebiges ξ die Punkte $\omega + \xi,\, \omega - \xi$ beide zu $2\,\overline{\Gamma}'_*$ gehören oder nicht gehören. Diese Forderung ist nach den letzten Ergebnissen gleichwertig mit der Forderung, daß die Punkte $\omega_\mu + \xi_\mu,\, \omega_\mu - \xi_\mu$ beide zu $2\,\overline{\mathsf{A}}'_*$ gehören oder nicht gehören müssen. Dies ist wiederum der Ausdruck dafür, daß ω_μ Mittelpunkt von $2\,\overline{\mathsf{A}}'_*$ also gleich σ sein muß. Daraus folgt, daß die Mittelpunkte von $2\,\overline{\Gamma}'_*$ die r-dimensionale Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N}$ konstituieren.

Wird das System Γ zu einer Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_p + \cdots \tag{23.}$$

angeordnet, und werden mit α_p, β_p die Komponenten von γ_p bezeichnet, so ist die Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \cdots$$

konvergent, ihre Summe gleich σ. Die Reihe (23.) konvergiert also, wenn die Reihe

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p + \cdots \tag{24.}$$

konvergent ist. Die Glieder dieser Reihe konstituieren das dem Modul N angehörige System B. Falls also die Reihe (24.) konvergiert, ist ihre Summe eine Zahl aus N, die Summe der Reihe (23.) gehört also der linearen Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N}$ an. Nun läßt sich aber der Modul N als ein System komplexer Zahlen mit r Einheiten $\varepsilon'_1, \ldots \varepsilon'_r$ ansehen. Man braucht nämlich für $\varepsilon'_1, \ldots \varepsilon'_r$ nur irgendein System orthogonaler Richtungen aus N auszuwählen; dann läßt sich jede Zahl aus N auf eine Weise in der Form $c_1 \varepsilon'_1 + \cdots + c_r \varepsilon'_r$ darstellen, und es gelten für das Operieren mit diesen Zahlen alle die Regeln, welche wir in § 1 und § 3 (Definition des Produktes $\alpha\beta$ und des absoluten Wertes) für das Operieren mit den Zahlen von der Form $c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n$ festgesetzt hatten. Für jede von 0 verschiedene Zahl δ_ν aus N ist, wie gezeigt wurde, das System $\delta_\nu \mathsf{B}_*$ unbeschränkt.

Wir können also sagen, daß das System B_*, innerhalb N betrachtet, total unbeschränkt ist. Da ferner das System B elementar ist, so folgt — sofern die Behauptung B) richtig ist —, daß sich B zu einer konvergenten Reihe anordnen läßt, deren Summe einen innerhalb N willkürlich vorgeschriebenen Wert hat. Damit wäre aber gezeigt, daß der Summenbereich von Γ die ganze Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N}$ umfaßt. Wir sehen also, daß wir, um den Beweis des Satzes A) vollständig zu erledigen, nur noch den Beweis für die Behauptung B) zu erbringen haben. Dieser Beweis ist freilich der einzige schwierigere Punkt in diesen Untersuchungen. Wir müssen demselben eine Reihe von Hilfssätzen vorausschicken.

§ 15. Hilfssätze zum Beweise der Behauptung B).

1. *Läßt sich die Zahl γ aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mit Koeffizienten komponieren, die zwischen* 0 *und* 1 *liegen, besteht also eine Gleichung von der Form*

$$(25.)\qquad \gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p \quad (0 \leqq a_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq a_p \leqq 1),$$

so gibt es unter den Gleichungen dieser Art auch solche, in denen nicht mehr als n Koeffizienten einen von 0 *und* 1 *verschiedenen Wert haben.*

Beweis: Wenn in der vorgelegten Gleichung (25.) mehr als n Zahlen α einen von 0 und 1 verschiedenen Koeffizienten haben, so kann man aus diesen Zahlen α $n+1$ oder weniger als $n+1$ solche auswählen, zwischen denen eine lineare Relation mit nicht verschwindenden Koeffizienten besteht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß die ersten r $(r \leqq n+1)$ Zahlen α diese Eigenschaft haben, daß also

$$0 < a_1 < 1, \ldots 0 < a_r < 1 \quad (1 \leqq r \leqq n+1)$$

ist und eine Gleichung

$$(26.)\qquad b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r = 0 \quad (b_1 \neq 0, \ldots b_r \neq 0)$$

besteht. Aus (25.), (26.) folgt für beliebiges x

$$(27.)\qquad \gamma = (a_1 - b_1 x)\alpha_1 + \cdots + (a_r - b_r x)\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_p\alpha_p.$$

Der Koeffizient $a_i - b_i x$ $(i = 1, \ldots r)$ liegt zwischen 0 und 1, wenn x zwischen $\frac{a_i}{b_i}$ und $\frac{a_i - 1}{b_i}$ liegt. Diese beiden Zahlen sind $\neq 0$ und haben verschiedenes

Vorzeichen. Bezeichnen wir die positive mit c_i, die negative mit $-d_i$, mit c bzw. d die kleinste der Zahlen c_i bzw. d_i $(i=1, \dots r)$, und setzen wir $x=c$ oder $x=-d$, so liegen in (27.) die Koeffizienten von $\alpha_1, \dots \alpha_p$ sämtlich zwischen 0 und 1, von den Koeffizienten der Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_r$ ist aber wenigstens einer gleich 0 oder gleich 1. Die Anzahl der von 0 und 1 verschiedenen Koeffizienten ist also in (27.) sicher kleiner als in (25.). Ist sie noch immer größer als n, so können wir den Schluß wiederholen und gelangen so zum Beweise unseres Satzes.

2. *Besteht zwischen den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_p$ eine Gleichung*

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p = 0, \tag{28.}$$

in welcher die p Koeffizienten den beiden Bedingungen genügen:

1) *sie liegen alle zwischen 0 und 1 (die Grenzen eingeschlossen),*

2) *nicht mehr als $2n$ von ihnen sind von 1 verschieden*),*

so ist es möglich, aus den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_p$ eine solche auszuscheiden, daß zwischen den zurückbleibenden wieder eine Gleichung besteht, deren $p-1$ Koeffizienten den Bedingungen 1) und 2) genügen.

Beweis. Wir bezeichnen mit k die Anzahl derjenigen Koeffizienten in (28.), die von 0 und 1 verschieden sind. Der Bedingung 2) gemäß ist $k \leqq 2n$. Falls $k > n$ ist, nehmen wir wieder unbeschadet der Allgemeinheit an, daß die ersten k Koeffizienten von 0 und 1 verschieden sind. Setzen wir

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k, \tag{29.}$$

so folgt aus Satz 1., daß auch eine Gleichung

$$\gamma = a_1'\alpha_1 + \cdots + a_k'\alpha_k \tag{30.}$$

besteht, in welcher alle Koeffizienten a' zwischen 0 und 1 liegen und höchstens n unter ihnen von 0 und 1 verschieden sind. Aus (28.), (29.), (30.) folgt die Gleichung

$$a_1'\alpha_1 + \cdots + a_k'\alpha_k + a_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + a_p\alpha_p = 0,$$

deren p Koeffizienten wieder die Bedingungen 1) und 2) erfüllen, überdies aber noch die folgende:

3) *nicht mehr als n von ihnen sind von 0 und 1 verschieden.*

Wir können daher bei der Fortsetzung unseres Beweises annehmen, daß die p Koeffizienten in (28.) den Bedingungen 1), 2), 3) genügen.

*) Ist $p \leqq 2n$, so existiert eine solche Gleichung immer, da wir den Fall, daß in (28.) alle Koeffizienten verschwinden, nicht ausschließen wollen.

Wenn nun ein Koeffizient a_i verschwindet, so stellt die Gleichung (28.) selbst, wenn wir das Glied mit α_i streichen, die Gleichung zwischen den übrigen Zahlen α dar, deren Existenz unser Satz 2. behauptet. — Wir brauchen uns also nur noch mit dem Fall zu beschäftigen, daß in (28.) alle Koeffizienten positiv sind. Aus 3) folgt jetzt, daß höchstens n Koeffizienten von 1 verschieden sind. Dividieren wir Gleichung (28.) durch $a_1 + \cdots + a_p$, so sehen wir, daß sich die Zahl 0 aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ mittels positiver Koeffizienten von der Summe 1 komponieren läßt. Dann aber folgt (§ 10, Satz 2.), daß man unter den Zahlen α $n+1$ oder weniger als $n+1$ solche finden kann, aus denen sich die 0 mittels positiver Koeffizienten komponieren läßt. Wir denken uns diese Zahlen α wieder an den Anfang gestellt, haben dann also eine Gleichung von der Form

$$b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r = 0 \quad (b_1 > 0, \ldots b_r > 0;\ 1 \leqq r \leqq n+1).$$

Aus dieser und (28.) folgt

$$(31.)\quad (a_1 - b_1 x)\alpha_1 + \cdots + (a_r - b_r x)\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_p\alpha_p = 0$$

bei beliebigem x. Von den Koeffizienten in (28.) sind höchstens n, von den Koeffizienten in (31.) also höchstens $2n+1$ von 1 verschieden. Nehmen wir für x die kleinste der Zahlen $\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_r}{b_r}$, so liegen in (31.) alle Koeffizienten zwischen 0 und 1, und wenigstens einer von ihnen, etwa der von α_i, ist 0. Lassen wir jetzt in (31.) das Glied mit α_i fort, so haben wir eine Gleichung zwischen den übrigen Zahlen α, welche den Bedingungen 1) und 2) genügt. — Damit ist Satz 2. bewiesen.

3. *Bezeichnet* A *ein System von* p *Zahlen* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$, *so besteht* $\overline{\mathsf{A}}_*$ *aus allen Zahlen, die sich aus* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ *mittels Koeffizienten komponieren lassen, die zwischen* 0 *und* 1 *liegen.**)

Beweis: Wir bezeichnen mit Γ das System aller Zahlen von der Form

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \qquad (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p \leqq 1);$$

unsere Aufgabe ist dann der Nachweis der Identität $\Gamma = \overline{\mathsf{A}}_*$. — Zunächst erkennt man, daß $\overline{\mathsf{A}}_*$ in Γ enthalten ist, weil, wie man sofort sieht, jede Partialsumme aus A zu Γ gehört und Γ konvex ist. Denn wenn

*) Die geometrische Deutung des Satzes ist die, daß man $\overline{\mathsf{A}}_*$ als Projektion eines p-dimensionalen Parallelepipeds auffassen kann, wobei die Elemente von A_* die Projektionen der Ecken werden.

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \quad (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p \leqq 1),$$
$$\gamma' = c_1'\alpha_1 + \cdots + c_p'\alpha_p \quad (0 \leqq c_1' \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p' \leqq 1)$$

Punkte aus Γ sind und δ zwischen γ und γ' liegt, so hat man

$$\delta = a\gamma + (1-a)\gamma' \quad (0 \leqq a \leqq 1),$$

also

$$\delta = (ac_1 + (1-a)c_1')\alpha_1 + \cdots + (ac_p + (1-a)c_p')\alpha_p,$$

wobei

$$0 \leqq (ac_i + (1-a)c_i') \leqq a + (1-a) = 1 \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots p)}$$

ist. δ ist also Punkt von Γ. — Es bleibt noch zu zeigen, daß $\overline{A}_*$ alle Punkte aus Γ enthält. Diesen Nachweis führen wir durch Induktion. Im Falle $p = 1$ besteht A_* aus den beiden Punkten 0 und α_1, $\overline{A}_*$ also aus den zwischen 0 und α_1 gelegenen Punkten, d. h. aus allen Punkten $c_1\alpha_1$ $(0 \leqq c_1 \leqq 1)$, wie es unser Satz behauptet. Ist $p > 1$, so bezeichnen wir mit B das aus den Punkten $\alpha_1, \ldots \alpha_{p-1}$ bestehende System. Dann ist als erwiesen anzusehen, daß $\overline{B}_*$ alle Punkte γ' von der Form

$$\gamma' = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{p-1}\alpha_{p-1} \quad (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_{p-1} \leqq 1)$$

umfaßt. Das System A_* besteht aus den Punkten der beiden Systeme B_* und $B_* + \alpha_p$; in $\overline{A}_*$ sind daher alle Punkte von $\overline{B}_*$, ebenso alle Punkte der kleinsten konvexen $B_* + \alpha_p$ enthaltenden Punktmenge, d. i. $\overline{B}_* + \alpha_p$, enthalten. Ist nun

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \quad (0 \leqq c_1 \leqq 1, \ldots 0 \leqq c_p \leqq 1)$$

irgendein Punkt von Γ, so gehört

$$\gamma' = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{p-1}\alpha_{p-1}$$

dem System $\overline{B}_*$, $\gamma' + \alpha_p$ dem System $\overline{B}_* + \alpha_p$ an. Beide Punkte sind demnach in $\overline{A}_*$ enthalten, und da $\overline{A}_*$ konvex ist, so ist auch der zwischen γ' und $\gamma' + \alpha_p$ gelegene Punkt $(1-c_p)\gamma' + c_p(\gamma' + \alpha_p) = \gamma' + c_p\alpha_p = \gamma$ Punkt von $\overline{A}_*$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

I. *Ist* A *ein- endliches oder unendliches System komplexer Zahlen, deren absolute Werte die positive Zahl* m *nicht überschreiten, so gibt es zu jeder Zahl* γ *aus* $\overline{A}_*$ *wenigstens eine Zahl* σ *aus* A_*, *für welche*

$$|\gamma - \sigma| \leqq nm$$

*wird.**)

*) Man kann noch weitergehen und die angegebene Zahl nm durch $\frac{1}{2}\sqrt{n}\cdot m$ ersetzen. Dies ist die kleinste Zahl, für welche der obige Satz noch allgemein richtig ist.

Beweis: Es sei γ eine Zahl aus $\bar{\mathsf{A}}_*$. Dann kann man (§ 10, Satz 4.) ein System Γ von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Zahlen aus A_* finden derart, daß γ der Punktmenge $\bar{\Gamma}$ angehört. Jedes Element aus Γ ist eine Summe von endlichvielen Elementen aus A. Daher gibt es ein endliches Teilsystem B von A derart, daß B_* alle Elemente aus Γ enthält. γ gehört dann der Punktmenge $\bar{\mathsf{B}}_*$ an. Es bestehe B aus den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_p$. Dann ist nach Satz 3. γ in der Form

$$(32.)\qquad \gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p \qquad (0 \leqq c_1 \leqq 1, \dots 0 \leqq c_p \leqq 1)$$

darstellbar, und nach Satz 1. dürfen wir voraussetzen, daß unter den Koeffizienten c in (32.) nicht mehr als n von 0 und 1 verschieden sind. Setzen wir jetzt

$$\gamma = \sigma + \tau,$$

wo σ diejenigen Glieder aus (32.), deren Koeffizient 0 oder 1 ist, τ die übrigen umfaßt, so stellt σ eine Partialsumme des Systems A dar, τ besteht aus höchstens n Gliedern $c_i\alpha_i$; und da $|\alpha_i| \leqq m$, $0 < c_i < 1$ ist, folgt $|\tau| \leqq nm$, also

$$|\gamma - \sigma| \leqq nm,$$

w. z. b. w.

4. *Hat man eine endliche Anzahl komplexer Zahlen, deren absolute Werte $\leqq m$ sind und deren Summe 0 ist, so lassen dieselben eine solche Anordnung*

$$\alpha_1, \dots \alpha_p$$

zu, daß die absoluten Werte der Zahlen

$$(33.)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \sigma_k \qquad {\scriptstyle (k=1,\dots p)}$$

sämtlich $\leqq 2nm$ sind.

Beweis: Nach Voraussetzung besteht zwischen den gegebenen Zahlen, deren Anzahl p sein möge, eine lineare Relation, in welcher alle Koeffizienten gleich 1 sind, also den Bedingungen 1) und 2) des Satzes 2. entsprechen. Nach diesem Satze können wir daher aus den gegebenen Zahlen nacheinander erst eine Zahl — sie heiße α_p —, dann eine zweite Zahl — sie heiße α_{p-1} — usf. fortlassen in der Weise, daß jedesmal zwischen den noch übrigen Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_k$ wieder eine Relation besteht, deren Koeffizienten den Bedingungen 1) und 2) genügen. Ziehen wir diese zwischen $\alpha_1, \dots \alpha_k$ bestehende Relation von der Gleichung (33.) ab, so erhalten wir rechts σ_k, während auf der linken Seite höchstens $2n$ Glieder (mit nicht verschwindenden Koeffizienten) übrig bleiben. Jedes dieser

Glieder hat die Form $c_i \alpha_i$, wo $0 < c_i \leqq 1$, $|\alpha_i| \leqq m$ ist. Hieraus folgt $|\sigma_k| \leqq 2nm$, wie behauptet wurde.

Hat man ein System A von p Zahlen, deren absolute Werte $\leqq m$ sind, und hat ihre Summe σ einen absoluten Wert $\leqq qm$, wo q eine natürliche Zahl bedeutet, so erhält man, indem man noch q-mal die Zahl $-\frac{\sigma}{q}$ hinzunimmt, ein System B, dessen Zahlen absolut wieder $\leqq m$ sind und die Summe 0 haben. Die Zahlen von B kann man nach Satz 4. zu einer solchen Folge

$$(34.) \qquad \beta_1, \dots \beta_{p+q}$$

anordnen, daß die absoluten Werte der Summen

$$(35.) \qquad \beta_1 + \dots + \beta_r \qquad (r=1, \dots p+q)$$

$\leqq 2nm$ sind. Läßt man aus der Folge (34.) wieder die q Zahlen $-\frac{\sigma}{q}$ fort, so bleibt das System A in einer solchen Anordnung

$$\alpha_1, \dots \alpha_p$$

zurück, daß jede Summe

$$(36.) \qquad \alpha_1 + \dots + \alpha_k \qquad (k=1, \dots p)$$

aus einer Summe (35.) durch Fortlassung von höchstens q Zahlen $-\frac{\sigma}{q}$ erhalten werden kann. Daraus folgt, daß die absoluten Werte der Summen (36.) die Zahl $2nm + q\left|\frac{\sigma}{q}\right|$, also auch die Zahl $(2n+q)m$ nicht überschreiten können, und wir erhalten den Satz:

II. *Hat man eine endliche Anzahl komplexer Zahlen, deren absolute Werte $\leqq m$ sind, und hat ihre Summe σ einen absoluten Wert $\leqq q\,m$, wo q eine ganze nicht negative Zahl bedeutet*), so lassen die gegebenen Zahlen eine solche Anordnung*

$$\alpha_1, \dots \alpha_p$$

zu, daß die absoluten Werte der Summen

$$\sigma_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \qquad (k=1, \dots p)$$

sämtlich $\leqq (2n+q)m$ sind.

§ 16. Beweis der Behauptung B).

Auf Grund der Sätze I, II des vorigen Paragraphen ist der Beweis für die Behauptung B) leicht zu erbringen. Es sei also jetzt Γ ein ele-

---

*) Man sieht leicht, daß die Beschränkung auf einen ganzzahligen Wert nicht nötig ist.

mentares abzählbares System komplexer Zahlen, Γ_* total unbeschränkt. Dann ist zu zeigen, daß sich Γ zu einer konvergenten Reihe von beliebig vorgeschriebener Summe anordnen läßt.

Zunächst ist klar, daß, wenn man aus Γ endlichviele Elemente fortläßt, die Partialsummen des zurückbleibenden Systems B noch immer total unbeschränkt sind. Daraus folgt, daß $\bar{B}_*$ alle Punkte des Raumes umfaßt, und hieraus, wenn σ einen beliebigen Punkt, g die obere Grenze der absoluten Werte der Zahlen aus B bedeutet, daß es eine Partialsumme π des Systems B gibt, welche der Bedingung $|\sigma - \pi| \leqq ng$ genügt (§ 15, I). Von dieser Partialsumme π können wir überdies verlangen, daß sie ein gegebenes Element β aus B (als Summanden) enthält. Denn wir können ja aus den übrigen Elementen von B eine Partialsumme π' herausgreifen, welche der Bedingung $|(\sigma - \beta) - \pi'| \leqq ng$ genügt. Dann besitzt die Partialsumme $\pi = \beta + \pi'$ die verlangten Eigenschaften.

Wir denken uns nun eine beliebige Anordnung

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_p, \ldots \tag{37.}$$

des Systems Γ zugrunde gelegt und wollen aus dieser eine bestimmte neue Anordnung herleiten, bei welcher die Summe nach einem vorgeschriebenen Wert σ konvergiert. Zu diesem Zweck nehmen wir mit den Partialsummen eine Numerierung vor. (Das leere System lassen wir beiseite.) Als Nummer einer Partialsumme π bezeichnen wir die natürliche Zahl, welche wir erhalten, wenn wir jeden Summanden γ_k durch 2^k ersetzen. Da jede natürliche Zahl sich auf eine Weise im dyadischen System schreiben, d. h. als Summe verschiedener Potenzen von 2 mit ganzen, nicht negativen Exponenten darstellen läßt, so ist jede natürliche Zahl Nummer einer bestimmten Partialsumme. Auf diese Anordnung der Partialsummen nehmen wir im folgenden Bezug.

Bezeichnen wir mit g_k ($k = 0, 1, \ldots$ in inf.) die obere Grenze der Zahlenmenge

$$|\gamma_k|, |\gamma_{k+1}|, \ldots |\gamma_{k+p}|, \ldots,$$

so ist

$$g_k > 0, \quad g_k \geqq g_{k+1}, \qquad (k=0,1,\ldots) \tag{38.}$$

$$\lim_{k=\infty} g_k = 0, \tag{39.}$$

und es gibt unter den Partialsummen π, die γ_0 enthalten, solche, welche der Bedingung $|\pi - \sigma| \leqq ng_0$ genügen. Die erste Partialsumme, welche diese Eigenschaft besitzt, sei mit π_0 bezeichnet, mit Γ_1 das System, welches zurückbleibt, wenn aus Γ die in π_0 eintretenden Elemente fortgelassen werden. Die obere Grenze der absoluten Werte der Elemente von Γ_1 ist dann $\leqq g_1$. Wir können daher aus Γ_1 eine Partialsumme π herausgreifen, welche das erste Element von Γ_1 enthält und der Bedingung $|\pi_0 + \pi - \sigma| \leqq n g_1$ genügt. Es sei π_1 die erste solche Partialsumme, Γ_2 das System, welches zurückbleibt, wenn wir aus Γ_1 die Elemente von π_1 entfernen, π_2 die erste Partialsumme aus Γ_2, welche das erste Element von Γ_2 enthält und der Bedingung $|\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 - \sigma| \leqq n g_2$ genügt usf. Wir erhalten so eine Folge von Partialsummen

$$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$$

von der Beschaffenheit, daß jedes Element aus Γ in einer und nur einer dieser Partialsummen auftritt und daß

$$(40.) \qquad |\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_k - \sigma| \leqq n g_k \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots)}$$

ist. Aus $\pi_k = (\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_k - \sigma) - (\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_{k-1} - \sigma)$ und (40.) folgt

$$(41.) \qquad \pi_k \leqq n(g_k + g_{k-1}) \leqq 2 n g_{k-1}. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots)}$$

Es sei p_k die Anzahl der Summanden, aus denen sich π_k zusammensetzt. Ist dann $k \geqq 1$, so folgt aus (41.) und § 15, II, da die in π_k enthaltenen Elemente γ absolut $\leqq g_k \leqq g_{k-1}$ sind, daß man diesen Elementen eine solche Anordnung

$$(42.) \qquad \gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \cdots \gamma_{kp_k}$$

geben kann, daß die Ungleichungen

$$(43.) \qquad |\gamma_{k1} + \gamma_{k2} + \cdots + \gamma_{kl}| \leqq 4 n g_{k-1} \qquad {\scriptstyle (l=1,\ldots p_k)}$$

bestehen. Natürlich kann es mehrere Anordnungen dieser Art geben. Um eine bestimmte zu fixieren, denken wir uns die $p_k!$ Permutationen der Elemente aus π_k lexikographisch angeordnet, wobei die Anordnung (37.) die Rolle des Alphabets spielen soll, und nehmen an, daß die unter (42.) angegebene Permutation die erste ist, welche den Bedingungen (43.) genügt. Die Elemente von π_0 nehmen wir in der Anordnung an, die sie in (37.) haben. So erhalten wir eine bestimmte Anordnung der Elemente von Γ zu einer unendlichen Reihe

$$(44.) \qquad \gamma_{01} + \cdots + \gamma_{0p_0} + \gamma_{11} + \cdots + \gamma_{1p_1} + \cdots + \gamma_{k1} + \cdots + \gamma_{kp_k} + \cdots.$$

Bezeichnet σ_{kl} die Summe des mit dem Gliede γ_{kl} schließenden Abschnitts dieser Reihe, so folgt aus (40.), (43.), falls $k \geqq 1$ ist,

$$|\sigma_{kl} - \sigma| \leqq 5\, n\, g_{k-1},$$

und hieraus und aus (39.) ergibt sich, daß die Reihe (44.) konvergiert und die Summe σ hat.

Hiermit ist nun auch der Satz A) vollständig bewiesen, und wir sehen, daß der Summenbereich eines Systems komplexer Zahlen immer eine lineare Mannigfaltigkeit sein muß. — Um zu zeigen, daß jede lineare Mannigfaltigkeit als Summenbereich auftreten kann, braucht man die vorangehenden Entwicklungen nicht; vielmehr ergibt sich dies leicht aus dem *Riemann*schen Satze, nach welchem ein reelles abzählbares und elementares System, dessen Partialsummen nach oben und unten unbeschränkt sind, das ganze reelle Gebiet zum Summenbereich hat. Es bezeichne nämlich C ein solches System, A irgendein unbedingt summierbares System von der Summe 1. Ist dann eine beliebige Mannigfaltigkeit $\mathsf{\Lambda}$ gegeben, so kann man $\mathsf{\Lambda} = \sigma + \mathsf{N}$ setzen, wo N der zu $\mathsf{\Lambda}$ parallele Modul ist und σ dem zu N komplementären Modul angehört. Ist r die Dimension von N, und stellen die r orthogonalen Richtungen $\varepsilon_1', \ldots \varepsilon_r'$ eine Basis von N dar, so zeigt eine einfache Überlegung, daß die $r+1$ komplexen Zahlsysteme $A\sigma, C\varepsilon_1', \ldots C\varepsilon_r'$ insgesamt ein abzählbares System $\mathsf{\Gamma}$ konstituieren, welches summierbar ist und die Mannigfaltigkeit $\sigma + \mathsf{N} = \mathsf{\Lambda}$ zum Summenbereich hat.

(Fortsetzung folgt.)