Zur Theorie der trigonometrischen Reihe.

Von Herrn *Felix Bernstein* in Halle.

In der Theorie der divergenten Reihen einer komplexen Veränderlichen sind drei Methoden üblich. Die erste beruht auf einer einfachen oder wiederholten Bildung der arithmetischen Mittel der Partialsummen, wobei noch die Glieder mit geeigneten Gewichten versehen werden können. Die zweite beruht auf den Konvergenzeigenschaften der kontinuierlichen Kettenbrüche. Die dritte und umfassendste ist auf die Anwendung der nach Reihen von Polynomen fortschreitenden Entwicklung gegründet und erlaubt die allgemeine Lösung des Problems, wie *Mittag-Leffler* gezeigt hat.

Herr *Féjer* hat die erste dieser Methoden, die einfache Summation mit Erfolg auf die Untersuchung der trigonometrischen Reihen übertragen.

Im folgenden wird die dritte Methode zur Anwendung kommen, und es werden sich mit Hilfe derselben weitgehende Verallgemeinerungen ergeben. Die Basis der dritten Methode bildet die Theorie der *Approximation* durch endliche Reihen.

Bekanntlich hat *Weierstraß* bewiesen, daß sich jede stetige Funktion im Intervall von 0 bis 2π durch eine endliche trigonometrische Reihe mit vorgegebener Genauigkeit approximieren läßt.

Ferner hat *Tschebyscheff* die Bemerkung gemacht, daß die Reihen nach Orthogonalfunktionen sämtlich im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate die beste Annäherung bewirken.

Das erste dieser Theoreme, welches *Volterra* sehr einfach bewiesen hat, gestattet eine wesentliche Ausdehnung, und wir erhalten mittelst dieser eine Darstellung einer nur an den Stetigkeitsstellen gewissen Beschränkungen der Schwankung unterworfenen Funktion an den Stetigkeitsstellen durch eine konvergente Reihe endlicher trigonometrischer Ausdrücke (Analogon des Hauptsatzes von *Féjer*).

Zweitens erhalten wir aus dem verallgemeinerten Satze von *Weierstraß* das für die Annäherung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate fundamentale Resultat, daß mittels der endlichen *Fourier*schen Reihe stets das Integral des Fehlerquadrats unter eine vorgegebene Grenze herabgedrückt werden kann. Hieraus folgt sofort ein von *de la Vallé-Poussin* und *Hurwitz**) bewiesener Satz über die *Fourier*schen Konstanten. Alle Betrachtungen beruhen ausschließlich auf dem klassischen Resultat von *Dirichlet*, welches wir nur für eine stetige aus einer endlichen Zahl linearer Stücke bestehende Funktion anwenden.

Infolge dessen gestatten die bewiesenen Sätze Verallgemeinerungen auf höhere Reihenentwicklungen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.

§ 1.

Erster Approximationssatz:

Es sei $f(x)$ eine eindeutige endliche Funktion der Periode 2π, welche in jedem Intervalle einer endlichen Menge l_n von Intervallen, die in den Grenzen 0 bis 2π gegeben seien, eine Schwankung erleidet, die kleiner als ω ist, dann kann eine endliche trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$ so angegeben werden, daß innerhalb der Menge l_n gleichmäßig für alle x

$$\text{(I)} \qquad |f(x) - \varphi_m(x)| < \omega + \varepsilon$$

ist, wo ε eine beliebig kleine vorgegebene Größe bedeutet.

Zusatz. Ist M die obere Grenze der absoluten Werte von $f(x)$ in l_n, so ist $\varphi_m(x)$ zugleich so zu bestimmen, daß für alle x

$$\text{(a)} \qquad |\varphi_m(x)| \leqq M + \varepsilon$$

wird.

In dieser Form reicht der Satz aus, um die auf die Integration im *Riemann*schen Sinne bezüglichen Sätze des § 4 zu beweisen.

*) S. Math. Ann. Bd. 57. Literaturangaben in Math. Ann. Bd. 59, S. 553 über Beweise von *E. Fischer*, *Stehloff*, *Lebesgue*. Von den verschiedenen Beweisen ist der gegenwärtige, der der allgemeinste ist, dem zweiten Beweise von *A. Hurwitz* am nächsten verwandt.

Beweis: Es sei $(a\,b)$ eins der genannten Intervalle der Menge l_n; wir haben für ein x in diesem Intervalle

$$f(x)-f(a)=\eta, \quad |\eta|<\omega,$$
$$f(x)-f(b)=\eta', \quad |\eta'|<\omega.$$

Der lineare Ausdruck

$$F(x)=f(a)+(x-a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ist enthalten zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und infolge dessen ist $F(x)-f(x)$ enthalten zwischen $f(a)-f(x)$ und $f(b)-f(x)$. Also ist

$$|F(x)-f(x)|<\omega \qquad (x \text{ in } (a\,b)).$$

Die Menge der linearen Ausdrücke $F(x)$ verbinden wir zu einer stetigen periodischen Funktion $f_1(x)$, indem wir in den noch fehlenden Intervallen L_n des Bereiches 0 bis 2π die Funktion $f_1(x)$ gleichfalls linear interpolieren und ihr die Periode 2π geben. Es stellt $f_1(x)$ die Funktion $f(x)$ mit einer Genauigkeit größer als ω dar. Andrerseits hat $f_1(x)$ eine begrenzte Zahl von Maxima und Minima, da l_n und L_n eine endliche Menge ist, infolge dessen können wir nach dem Theorem von *Dirichlet* $f_1(x)$ durch eine *gleichmäßig* konvergente Reihe darstellen, d. h. wir können eine endliche trigonometrische Reihe von m Gliedern $\varphi_m(x)$ so angeben, daß

$$|f_1(x)-\varphi_m(x)|<\varepsilon$$

ist, wo ε eine beliebig vorgegebene Größe ist. Wir haben also eine endliche trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$, für die

$$|f(x)-\varphi_m(x)|<\omega+\varepsilon$$

ist, womit der Satz bewiesen ist. Man sieht überdies, daß in der Tat stets

$$|f_1(x)|\leqq M$$

ist. Infolge dessen ist auch

$$|\varphi_m(x)|\leqq M+\varepsilon.$$

§ 2.

Zum Zweck der Darstellung der Funktion brauchen wir den folgenden Satz:

Verallgemeinerter erster Approximationssatz. Es seien

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$$

eine endliche Anzahl sich nicht überdeckender Intervalle, sämtlich zwischen 0 und 2π liegend, und es seien in diesen Intervallen (mit Einschluß der Grenzen) irgendwie solche endlichen Funktionswerte $f(x)$ gegeben, daß die dem Intervall δ entsprechende Schwankung ω_δ endlich ist. Es läßt sich dann stets die trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$ so angeben, daß

$$\text{(I*)} \qquad | f(x) - \varphi_m(x) | < \omega_\delta + \varepsilon \qquad (x \text{ in } \delta)$$

ist, wo ε eine gleichmäßig für alle δ vorgegebene Größe bedeutet.

Die Funktionswerte brauchen nicht in allen Punkten des δ zu existieren, wir müssen sie nur immer so vervollständigen können, daß sie für alle Punkte existieren, ohne daß die Schwankung sich vergrößert. *Hierzu ist offenbar nötig anzunehmen, daß an jedem gemeinsamen Grenzpunkt a zweier Intervalle δ ein Wert $f(a)$ angegeben werden kann, welcher die Schwankung in keinem der beiden Intervalle vergrößert. Wir machen diese Voraussetzung.*

Beweis: Wir ersetzen wiederum in *jedem* δ die vervollständigte Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $F(x)$, welche mit $f(x)$ an den Intervallendpunkten übereinstimmt und bilden die stückweise lineare Funktion $f_1(x)$, indem wir in den noch fehlenden Intervallen linear interpolieren. Infolge unserer Voraussetzung ist $f_1(x)$ überall stetig, und es ist

$$| f(x) - f_1(x) | < \omega_\delta \qquad (x \text{ in } \delta).$$

Wenn wir jetzt $\varphi_m(x)$ so bestimmen, daß

$$| f_1(x) - \varphi_m(x) | < \varepsilon$$

für jedes x wird, so haben wir

$$| f(x) - \varphi_m(x) | < \omega_\delta + \varepsilon \qquad (x \text{ in } \delta),$$

q. e. d.

§ 3.

Darstellungssatz. Es sei $f(x)$ eine Funktion im Intervalle von 0 bis 2π, welche Stetigkeitsstellen besitzt und deren Werte an diesen Stellen im ganzen Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ die endliche Schwankung Ω erleiden. Dann läßt sich eine Reihe, bestehend aus endlichen trigonometrischen Ausdrücken, *angeben, welche an jeder Stetigkeitsstelle, von $f(x)$ konvergiert und dort $f(x)$ darstellt.*

Beweis: Wir teilen das Intervall $(0 \dots 2\pi)$ in n *gleiche* Teile)

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n,$$

und es sei ω_δ die jedenfalls endliche Schwankung der Werte an den Stetigkeitsstellen $\bar{x}$ in δ. Es gibt dann eine endliche trigonometrische Reihe $\varphi^{(n)}(x)$, wie der verallgemeinerte Approximationssatz zeigt, so daß

$$| f(\bar{x}) - \varphi^{(n)}(\bar{x}) | < \omega_\delta + \varepsilon \qquad (\bar{x} \text{ in } \delta)$$

ist, wo $\varepsilon = \varepsilon_n$ für jedes n beliebig vorgegeben sein kann. Wir wählen $\varepsilon_n > \varepsilon_{n-1}$ und $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Für jede Stetigkeitsstelle $\bar{x}$ läßt sich N so groß wählen, daß die Schwankung ω_δ für alle $n \geqq N$ unterhalb einer vorgegebenen Größe ω liegt. Es läßt sich daher ein n_1 bestimmen, von welchem ab, bei vorgegebenem ω und ε für alle $n \geqq n_1$

$$| f(\bar{x}) - \varphi^{(n)}(\bar{x}) | < \omega + \varepsilon$$

ist. Infolge dessen konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \psi_{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n-1)}(x) \right)$$

an jeder Stetigkeitsstelle und stellt dort die gegebene Funktion dar.

§ 4.

Es sei jetzt $f(x)$ eine im Sinne *Riemanns* integrierbare Funktion der Periode 2π. Es sei also, unter M_1 und M_2 zwei endliche Zahlen verstanden,

1. $$M_1 \leqq f(x) \leqq M_2,$$

und es sei

2. bei vorgegebenen ω und η stets eine solche Teilung des Intervalles $(0 \dots 2\pi)$ in Intervalle

$$\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$$

möglich, daß die Summe der Menge L_n derjenigen, in denen die Schwankung von $f(x)$ größer als ω ist, kleiner als η ausfällt. Es sei mit l_n die Menge der Intervalle bezeichnet, in denen die Schwankung kleiner als ω ausfällt.

Nach dem ersten Approximationssatz läßt sich die endliche trigonometrische Reihe $\varphi_m(x)$ so angeben, daß

$$|f(x)-\varphi_m(x)| < \omega+\varepsilon \qquad (x \text{ in } l_n)$$

ist, unter ε eine vorgegebene Größe verstanden, und daß außerdem für alle x

$$|\varphi_m(x)| \leqq M+\varepsilon$$

ist, wo M die obere Grenze des absoluten Betrages von $f(x)$ bedeutet. Mit $f(x)$ zugleich ist im Sinne *Riemanns* auch $(f(x))^2$ und $(f(x)-\varphi_m(x))^2$ integrierbar. Wir bilden

$$\int_0^{2\pi}(f(x)-\varphi_m(x))^2\,dx$$

und zerteilen dasselbe in zwei Integrale, von denen das eine über die Punkte von l_n, das andere über die Punkte von L_n erstreckt wird. Für das erstere gilt die Ungleichung

$$\int_{l_n}(f(x)-\varphi_m(x))^2\,dx < (\omega+\varepsilon)^2\, l_n.$$

Für das zweite gilt, indem wir berücksichtigen, daß

$$|f(x)| \leqq M$$

und also

$$|f(x)-\varphi_m(x)| \leqq 2M+\varepsilon$$

ist,

$$\int_{(L_n)}(f(x)-\varphi_m(x))^2\,dx \leqq (2M+\varepsilon)^2\, L_n.$$

Mithin ist

$$\int_0^{2\pi}(f(x)-\varphi_m(x))^2\,dx \leqq (\omega+\varepsilon)^2\, l_n + (2M+\varepsilon)^2\, L_n.$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung können sowohl L_n als $\omega+\varepsilon$ kleiner als vorgegebene Größen angenommen werden. Es kann also der Wert des Integrals beliebig klein gemacht werden.

Es bedeute jetzt andrerseits $\psi_m(x)$ die *Fourier*sche Entwicklung von m Gliedern, deren Koeffizienten infolge des Umstandes, daß $f(x)$ integrierbar ist, sämtlich existieren. Dann ist nach dem fundamentalen Theorem von *Tschebyscheff* für jedes m

$$\int_0^{2\pi}(f(x)-\psi_m(x))^2\,dx < \int_0^{2\pi}(f(x)-\varphi_m(x))^2\,dx.$$

Infolge dessen kann, unter η eine beliebig vorgegebene Größe verstanden, m so gewählt werden, daß für alle x

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \psi_m(x))^2 \, dx < \eta$$

ist. Diese Ungleichung gilt, da aus dem Theorem von *Tschebyscheff* folgt, daß das Integral des Rest quadratsständig abnimmt, auch für alle größeren m. Wir formulieren den Satz:

Zweiter Approximationssatz. Ist $f(x)$ eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion im Intervall $(0 \dots 2\pi)$, so läßt sie sich nach der Methode der kleinsten Quadrate derart durch die endliche Fouriersche Reihe $\psi_m(x)$ approximieren, daß das Restintegral

$$\text{(II)} \qquad \int_0^{2\pi} (f(x) - \psi_m(x))^2 \, dx < \eta \qquad (m \geqq M)$$

für alle x bei beliebig vorgegebenen η wird.

Die Existenz der *Fourier*schen Konstanten erweist sich daher als die notwendige und hinreichende Bedingung für die Annäherung einer Funktion mittels der Methode der kleinsten Quadrate, und es findet diese selbst dann statt, wenn die zugehörige *Fourier*sche Reihe divergent sein sollte. *Harnack* (Über die trigonometrische Reihe und die Darstellung der willkürlichen Funktionen. Math. Ann. 17, S. 12) hat diese letztere Eventualität nicht erkannt, indem er fälschlich annimmt, daß $\lim\limits_{m=\infty} \psi_m(x)$ nur für eine Wertmenge divergieren kann, welche den Inhalt Null besitzt. Dies gilt jedoch nur für diejenigen Stellen, wo $\psi_m(x)$ *gleichmäßig* über jede gegebene Grenze wächst, während sich allgemein nichts aussagen läßt.

Es existiert daher die von ihm eingeführte durch die *Fourier*sche Reihe definierte Funktion möglicherweise nicht, und seine Resultate sind nur unter Voraussetzung der Konvergenz der *Fourier*schen Reihe bewiesen.

Wir erhalten aus unserem zweiten Approximationssatz sofort den von *Hurwitz* und *de la Vallé-Poussin* bewiesenen *Satz.* Es ist

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx = \tfrac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + a_k'^2).$$

In der Tat brauchen wir nur

$$\psi_m(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{k=m} (a_k \cos bx + a_k' \sin bx)$$

zu setzen und das Restintegral gliedweise zu integrieren, wodurch wir dasselbe in der Form

$$\int_0^{2\pi}(f(x))^2 dx - \pi\left[\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{k=n}(a_k^2 + a_k'^2)\right]$$

erhalten, und dann zur Grenze überzugehen. Hieraus folgt, wie bekannt, für zwei beliebige integrierbare Funktionen das Fundamentaltheorem der *Fourier*schen Konstanten

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \tfrac{1}{2}a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k + a_k' b_k'),$$

wenn die Größen b_k die *Fourier*schen Konstanten von $g(x)$ bedeuten. (Siehe *Hurwitz* a. a. O.)

§ 5.

Alle diese Resultate benutzen *nur* die folgenden Eigenschaften der trigonometrischen Reihe:

1. sie ist eine Entwicklung nach Orthogonalfunktionen;
2. es läßt sich eine aus einer endlichen Anzahl linearer Stücke bestehende stetige Funktion $f_1(x)$ im Fundamentalintervall $(0 \ldots 2\pi)$ gleichmäßig durch die Reihe approximieren.

Diese beiden Eigenschaften sind noch von einer großen Zahl anderer Reihen z. B. den sogenannten *Sturm-Liouville*schen Reihen sichergestellt (vgl. die zusammenfassende Arbeit von *Kneser*, Math. Ann., Bd. 58 u. 60). Wir formulieren die beiden wichtigsten Sätze:

Darstellungssatz: Bedeutet

$$V_1, V_2, \ldots V_n, \ldots$$

eine Reihe von Orthogonalfunktionen, mit deren Hilfe in einem Intervall $(a \ldots b)$ *die Funktion* $f_1(x)$ *durch eine gleichmäßig konvergente Reihe dargestellt werden kann, so läßt sich jede Funktion* $f(x)$, *welche an den Stetigkeitsstellen im Intervall die endliche Gesamtschwankung* Ω *besitzt, durch eine nach endlichen linearen Verbindungen der* $V_1, V_2, \ldots$ *fortschreitende konvergente Reihe an allen Stetigkeitsstellen im Intervall* $(a \ldots b)$ *darstellen.*

Zweiter Approximationssatz. Ist $f(x)$ eine im Sinne Riemanns integrierbare Funktion im Intervall $(a \dots b)$, so läßt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine endliche Reihe $A_1 V_1 + \cdots + A_m V_m = \psi_m(x)$ so approxmieren, daß das Quadrat des Restintegrals

$$\int_a^b (f(x) - \psi_m(x))^2 g(x)\, dx < \eta \qquad (m > M)$$

für alle x bei beliebig vorgegebenen η wird. $g(x)$ bedeutet dabei in bekannter Weise das Gewicht, welches zu der Reihe der V gehört.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß auch für einen Teil der Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen, die aus einer linearen Integralgleichung entspringen, die hier erforderliche Eigenschaft 2. bewiesen ist. Wendet man den Entwicklungssatz von *Hilbert* (Gött. Nachr. 1904, S. 75) und *E. Schmidt* (Diss. Gött. § 9) an, so ist die Darstellbarkeit von $f_1(x)$ in der Form

$$f_1(x) = \int_0^1 k(s, t)\, p(t)\, dt$$

die hier über den Kern $k(s, t)$ zu machende Voraussetzung. Diese ist für eine große Anzahl Kerne als erfüllbar erkannt (s. Enzyklopädie der Math. Wiss. *Pincherle* II, A 11. Funktionaloperationen und -Gleichungen 29).

Halle a. d. S., Juli 1906.