Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées.

(Par. M. *P. du Bois-Reymond* à Fribourg-en-Brisgau.)

Aux observations sur les *types infinitaires* des fonctions que j'ai communiquées dans le second article du mémoire: *Sur la grandeur relative des infinis des fonctions* (Annali di Matematica, Tom. IV. pag. 338) j'en ajouterai quelques-unes, qui serviront à compléter la théorie de ces types. De cette théorie résulte finalement un théorème très-général (No. 6) qui établit comment une seule fonction v, vérifiant les relations $\lim \frac{v^M}{f(x)} = \lim \frac{f(x)}{v^m} = \infty$, régit les infinis de toutes les dérivées de la fonction $f(x)$ pour $x = \infty$, supposé que ces dérivées n'aient pas un nombre infini de maxima et minima.

1. Énumération des notations et expressions employées dans ce mémoire.

Conformément au mémoire cité les notations $f(x) > \varphi(x)$, $f_1(x) \sim \varphi_1(x)$, $f_2(x) < \varphi_2(x)$ signifient que les rapports $\frac{f(x)}{\varphi(x)}, \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$ ont pour $x = \infty$ respectivement une limite infinie, finie, zéro, sans savoir égard au signe.

Les fonctions f et φ devenant infinies pour $x = \infty$, on dira que $f(x)$ a un infini supérieur, égal, inférieur à celui de $\varphi(x)$, selon que $f(x) \begin{smallmatrix} > \\ \sim \\ < \end{smallmatrix} \varphi(x)$. Et si f et φ s'annulent pour $x = \infty$, on dira encore que le zéro de f est ou supérieur ou égal, ou bien inférieur à celui de $\varphi(x)$ suivant que l'on trouve $f(x) \begin{smallmatrix} > \\ \sim \\ < \end{smallmatrix} \varphi(x)$.

Enfin, quand pour deux fonctions $f(x)$ et $v = v(x)$, qui deviennent infinies à la limite $x = \infty$, on a $v^M > f(x) > v^m$, la fonction $t = \frac{1}{\frac{dlv}{dx}}$ sera appelé le *type infinitaire* de $f(x)$, qui, comme nous l'avons démontré, jouit de la propriété caractéristique:

$$tf'(x) \sim f(x).$$

Il va sans dire que les notations $>$ $<$ conservent leur valeur quand une des fonctions séparées par ces signes a une limite finie, et la notation $\sim$, quand les deux fonctions qu'elle sépare ont une limite finie: Mais alors il ne pourra plus être question d'infinis ou de zéros plus grands ou moins grands.

2. Rapport entre les types des fonctions à limite infinie et à limite zéro.

Si dans le mémoire cité nous ne nous sommes guère occupé que de fonctions à limite infinie, il est pourtant évident que tous les théorèmes sur les types que nous y avons proposés, sont également applicables aux cas où les fonctions séparées par les signes $>$ $\sim$ $<$ s'annulent pour $x = \infty$.

Soit en effet t_0, t_1, ... la série de tous les types de toutes les fonctions qui deviennent infinies pour $x = \infty$, il faudra de même considérer ... t_1, t_0 comme la série des types de toutes les fonctions qui s'annulent pour $x = \infty$. Car si $v^M > f(x) > v^m$, on aura toujours une fonction correspondante $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ qui satisfait à l'inégalité $v^{-M} < f_1(x) < v^{-m}$. Et alors en posant $t = \frac{1}{\frac{dlv}{dx}}$, on a en même temps $tf'(x) \sim f(x)$ et $tf_1'(x) \sim f_1(x)$; parce que cette dernière égalité, qui peut s'écrire $-t\frac{f'(x)}{f(x)^2} \sim \frac{1}{f(x)}$, se transforme, par un changement de signe et en la multipliant par $f(x)^2$, en $tf'(x) \sim f(x)$. De même aux fonctions à limite zéro correspondent les fonctions à limite infinie.

3. Considérations générales sur les infinis des fonctions correspondant à des types donnés.

Entre les valeurs infinitaires (pour $x = \infty$) des types et celles des fonctions correspondantes il est facile de constater les rapports que voici.

Les types ayant des limites finies ou s'annulant pour $x = \infty$, les fonctions correspondantes auront toujours des infinis égaux ou supérieurs à celui de $e^{\mu x}$, ou bien des zéros égaux ou inférieurs à celui de $e^{-\mu x}$, μ étant supposé aussi petit qu'on voudra.

Pour tout le reste des fonctions les types deviennent infinis. Or les fonctions ayant des types à limite infinie sont de deux espèces, ce qu'il importe de distinguer nettement.

Supposons que les types satisfassent à l'inégalité infinitaire

$$\text{const.} < t \underset{\sim}{<} x\,lx\,l_2x\ldots l_nx^{\mu}.$$

Si l'on fait:

$$\frac{1}{\frac{dlv}{dx}} = x\,lx\,l_1x\ldots l_nx^{\mu},$$

on trouve en intégrant:

$$v = e^{\frac{(l_nx)^{1-\mu}}{1-\mu}}$$

et pour $\mu = 1$:

$$v = e^{l_{n+1}(x)}.$$

Une fonction $f(x)$ qui satisfait à $v^M > f(x) > v^m$ ou bien à $v^{-m} > f(x) > v^{-M}$, aura donc une limite infinie ou zéro pour $\mu \leqq 1$, et une limite finie pour $\mu > 1$.

Soit en particulier:

$$t \underset{\sim}{>} x^{1+\nu},$$

ν étant imaginé aussi petit qu'on voudra, les fonctions correspondantes auront toujours une limite finie. Car de

$$\frac{1}{\frac{dlv}{dx}} = x^{1+\nu}$$

on tire

$$v = e^{-\frac{x^{-\nu}}{\nu}}.$$

4. Sur la différentiation des inégalités infinitaires.

L'algorithme des inégalités infinitaires admet différentes transformations, qui en font un instrument commode de calcul. Nous rappelons d'abord la multiplication et la division des inégalités, et ensuite leur *réduction,* qui revient à retrancher des deux expressions séparées par un des signes $> \sim <$ certaines fonctions superflues. Par exemple, quand on a $F(x) \sim \varphi(x)f(x)+\psi(x)$, où $\psi(x) < f(x)$ et où $\varphi(\infty)$ est finie, cette égalité s'écrira simplement $F(x) \sim f(x)$. A ces transformations ajoutons la différentiation des inégalités infinitaires, qui est permise d'après le théorème suivant:

Théorème. *Lorsque les fonctions continues $f(x)$, $\varphi(x)$ n'ont point de limite finie différente de zéro, et que ni ces fonctions ni leurs dérivées n'ont un nombre infini de maxima et de minima, on aura toujours:*

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \text{etc. in inf.}$$

Démonstration. Soit d'abord $f(x) \sim \varphi(x)$, et soit t le type de $f(x)$, il sera nécessairement aussi le type de $\varphi(x)$, donc $f'(x) \sim \varphi'(x)$. Soit en second lieu $f(x) \succ \varphi(x)$. En différentiant l'égalité: $f(x) \sim \varphi(x).\psi(x)$, où $\psi(x) \succ 1$, on obtient:

$$f'(x) \sim \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x).$$

Si $\varphi(x)\psi'(x) \succ \varphi'(x)\psi(x)$, on a évidemment $f'(x) \succ \varphi'(x)\psi(x)$, et $f'(x) \succ \varphi'(x)$. Si $\varphi'(x)\psi(x) \succ \varphi(x)\psi'(x)$, on trouve encore $f'(x) \succ \varphi'(x)$. Si enfin $\varphi'(x)\psi(x) \sim \varphi(x)\psi'(x)$, ces deux quantités étant positives, on aura toujours $f'(x) \succ \varphi'(x)$. Mais si $\varphi'(x)\psi(x)$ est négative, il faut supposer $f(x) \prec 1$. Car alors on pourra faire $\varphi = v^{-M}\varphi_1$, $\psi = v^m \psi_1$, φ_1, ψ_1 et $\varphi_1\psi_1$ ayant des infinis inférieurs à celui d'une puissance de v, et il est facile de reconnaître que l'inégalité $f'(x) \succ \varphi'(x)$, qui se transforme en $\frac{d}{dx} v^{-M+m}\varphi_1\psi_1 \succ \frac{d}{dx} v^{-M}\varphi_1$, a lieu, parce que les infinis de v', φ_1', ψ_1' restent inférieurs à celui d'une puissance de v (Théor. 14, 15 du Mém. cité). Si au contraire $f(x) \sim 1$, le théorème n'a plus lieu, comme par exemple pour $1+\frac{1}{x} \succ \frac{1}{\log x}$. Pour déterminer la valeur de $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, quand $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x)$ a une limite finie, faisons:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \psi(x)\left(1 + \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right).$$

Posons $\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \chi(x)$, et $\log \varphi(x) + c = \int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{\chi(x)}$. Cette équation est absurde, si $\chi(x)$ ne s'évanouit pas à la limite, car alors l'intégrale qui forme le second membre serait convergente pour $x = \infty$, tandis que pour $\varphi(x) \gtrless 1$, le premier membre serait infini à la limite. On a donc $\chi(x) \prec 1$, et $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \psi(\infty)$.

C. Q. F. D.

Remarque. La théorie des types est en réciprocité avec la différentiabilité des inégalités infinitaires. Car en supposant celle-ci démontrée *), on en conclut facilement le théorème principal des types. Soit en effet:

$$v^{\mu} f_1(x) \sim f(x),$$

$f_1^{\pm 1}(x)$ ayant un infini moindre qu'une puissance de v. En prenant des deux côtés les logarithmes et en réduisant, il vient

$$lv \sim lf(x),$$

et en différentiant $\frac{dlv}{dx} \sim \frac{f'(x)}{f(x)}$. Multipliant ensuite par $f(x)$ et divisant par $\frac{dlv}{dx}$ on obtient:

$$\frac{1}{\frac{dlv}{dx}} f'(x) \sim f(x).$$

5. Sur les fonctions à limite finie.

Remarquons d'abord que $\lim v$ étant finie, à cause du sens attaché aux signes $>$ $\sim$, on ne pourra plus écrire $v^M > f(x) > v^m$. Plutôt on aurait $v^M \sim f(x) \sim v^m$, mais cette formule ne serait d'aucune valeur dans ce cas, parce qu'elle ne servirait plus à distinguer les fonctions. Néanmoins l'égalité $tf'(x) \sim f(x)$, ou ce qui est ici la même chose: $tf'(x) \sim 1$, déterminerait encore le type t, et resterait propre à distinguer les fonctions. Aussi le théorème du no. 6 de ce mémoire s'étend-il aux fonctions à limite finie, comme l'on s'en assurera par la démonstration que nous en donnerons.

Mais pour chaque fonction $f(x)$ à limite finie il en existe bien sûrement une

---

*) Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'évanouissent pour $x = 0$, et que $f^{(m)}(x)$, $\varphi^{(m)}(x)$ soient leurs premières dérivées qui ne s'annulent pas à la limite, on peut aisément démontrer la formule $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(m)}(0)}{\varphi^{(m)}(0)}$ au moyen du reste de *Lagrange*, comme l'a fait voir *Cauchy*. Et cette formule sert de base aux formules semblables pour $x = \infty$ et pour les rapports de fonctions à limite infinie. Mais quand les dérivées ne cessent de s'annuler ou de devenir infinies à la limite, on ne pourra plus démontrer de cette manière $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f^{(m)}(x)}{\varphi^{(m)}(x)}$. Car supposons par exemple que les dérivées de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ s'évanouissent à la limite. On pourra écrire

$$f(x) = \frac{x^m}{\Pi m} f^{(m)}(\xi), \quad 0 < \xi < x,$$

$$\varphi(x) = \frac{x^m}{\Pi m} \varphi^{(m)}(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < x \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(m)}(\xi)}{\varphi^{(m)}(\xi_1)}.$$

Or de cette expression on ne pourra pas conclure $\lim \frac{f^{(m)}(\xi)}{\varphi^{(m)}(\xi_1)} = \lim \frac{f^{(m)}(x)}{\varphi^{(m)}(x)}$, parce qu'on ne connaît pas la vitesse relative avec laquelle ξ et ξ_1 s'approchent de leur limite.

autre v qui lui est caractéristique, parfaitement comme les fonctions v définies dans le numéro 1 caractérisaient les fonctions $f(x)$ à limite infinie ou zéro. En effet, la fonction v définie jusqu'à présent par l'inégalité $v^M > f(x) > v^m$, mesure la vitesse avec laquelle $f(x)$ s'approche de sa limite nulle ou infinie. Nommons donc, quand $\lim f(x)$ est finie, v la fonction qui mesure la vitesse avec laquelle $f(x)$ s'approche de sa limite finie. On aura ainsi, pour définir v, l'inégalité:

$$v^M > f(x) - f(\infty) > v^m.$$

Il s'agit maintenant d'établir un rapport entre le type t satisfaisant à $tf'(x) \backsim 1$, et le type T vérifiant l'égalité $Tf'(x) \backsim f(x)-f(\infty)$, ou bien entre l'un de ces types et la fonction v. En divisant l'une par l'autre les égalités:

$$Tf'(x) \backsim f(x) - f(\infty),$$
$$tf'(x) \backsim 1,$$

on obtient:

$$\frac{T}{t} \backsim f(x) - f(\infty),$$

et en différentiant

$$\frac{d\frac{T}{t}}{dx} \backsim f'(x) \backsim \frac{1}{t}$$

ou bien $t\dfrac{d\frac{T}{t}}{dx} \backsim 1$. Cette égalité infinitaire équivaut à l'équation

$$t\frac{d\frac{T}{t}}{dx} = \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction à limite finie. Quand pour un t donné on voudra trouver T ou vice versa, on pourra faire $\psi(x) = 1$, et par conséquent

$$T = t\int_x^\infty \frac{dx}{t}, \quad t = Te^{\int^x \frac{dx}{T}},$$

les limites des intégrales étant prises de manière que $T < t$. Enfin puisqu'on a $T = \dfrac{1}{\frac{dlv}{dx}}$, on a aussi la relation cherchée entre t et v.

Soit par exemple $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, on trouve $t = x^2$, donc

$$T = x^2\int_x^\infty \frac{dx}{x^2} = -x,$$

ce qui est exact, car $x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ a une limite finie, et de $x^2 f'(x) \backsim x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ on tire, en divisant par x, $xf'(x) \backsim e^{\frac{1}{x}}-1$.

Faisant encore $f(x)=1+\frac{1}{xlx}$, il est facile de voir qu'on a $x^2 lx f'(x) \backsim 1$, $xf'(x) \backsim f(x)-f(\infty)$. En introduisant les deux valeurs $t=x^2 lx$, $T=x$ dans l'équation $t\frac{d\frac{T}{t}}{dx}=\psi(x)$, on trouve $x^2 lx\frac{lx+1}{x^2 l^2 x}=1+\frac{1}{lx}=\psi$. Donc $\psi(x)$ a la limite 1.

6. Théorème sur le rapport entre l'infini d'une fonction et les infinis de toutes ses dérivées.

Ce théorème distingue les trois cas $t<x$, $t>x$, $t \backsim x$.

1) *Pour* $t<x$, *on a:*

$$f(x) \backsim tf'(x) \backsim t^2 f''(x) \backsim \text{ etc. in inf.}$$

2) *Pour* $t>x$, *on a:*

$$f(x) \backsim f'(x)\frac{1}{t^{-1}} \backsim f''(x)\frac{1}{\frac{dt^{-1}}{dx}} \backsim f'''(x)\frac{1}{\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}} \backsim \text{ etc. in inf.}$$

3) *Soit* $t \backsim x$. *On pourra mettre* $f(x)$ *sous la forme* $x^\mu f_1(x)$ (Théor. 8 et 10 du Mém. cit.), *où* $f_1(x)$ *ou bien* $\frac{1}{f_1(x)}$ *a un infini moindre qu'une puissance quelconque de* x. *Il y a ici encore deux cas à distinguer. Si* μ *n'est pas un entier, on aura comme pour* $t<x$:

$$f(x) \backsim tf'(x) \backsim t^2 f''(x) \backsim \text{ etc. in inf.}$$

Si au contraire μ *est un entier, en nommant* t_1 *le type de* $f_1(x)$, *on a:*

$$f(x) \backsim tf'(x) \backsim t^2 f''(x) \ldots \backsim t^\mu f^{(\mu)}(x) \backsim t^\mu t_1 f^{(\mu+1)}(x)$$

$$\backsim t^\mu \frac{1}{\frac{dt_1^{-1}}{dx}} f^{(\mu+2)}(x) \backsim t^\mu \frac{1}{\frac{d^2 t_1^{-1}}{dx^2}} f^{(\mu+3)}(x) \backsim \text{ etc. in inf.}$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord et simultanément les deux premières parties du théorème, et ensuite la troisième.

En premier lieu, la différentiation de $f'(x) \backsim f(x)\frac{1}{t}$ donne:

$$f''(x) \backsim f'(x)\frac{1}{t} - f(x)\frac{t'}{t^2}.$$

Au lieu de $f'(x)$ écrivons $f(x)\frac{1}{t}\cdot$ Nous aurons donc:

$$f''(x) \sim f(x)\frac{1}{t^2} - f(x)\frac{t'}{t^2}\cdot$$

D'après le théorème 3. du mémoire cité, selon que $t \lessgtr x$, on a $\lim t' = {0 \atop \infty}$.
Donc pour $t < x$ on trouve

$$f(x)\frac{1}{t^2} > f(x)\frac{t'}{t^2}$$

et par conséquent

$$t^2 f''(x) \sim f(x).$$

Pour $t > x$ on trouve au contraire

$$f(x)\frac{t'}{t^2} > f(x)\frac{1}{t^2},$$

d'où l'on tire:

$$f''(x)\frac{1}{\frac{dt^{-1}}{dx}} \sim f(x).$$

En second lieu, t étant supposé premièrement $< x$, la différentiation de $f''(x) \sim f(x)\, t^{-2}$ donne au moyen du même raisonnement

$$t^3 f'''(x) \sim f(x).$$

Pour $t > x$, la différentiation de $f''(x) \sim f(x)\frac{t'}{t^2}$ donne:

$$f'''(x) \sim f'(x)\frac{t'}{t^2} + f(x)\frac{t''t - 2t'^2}{t^3}\cdot$$

Au lieu de $f'(x)$ écrivons $\frac{1}{t}f(x)$. A cause de

$$f(x)\frac{t'}{t^3} < f(x)\frac{t'^2}{t^3}$$

cette égalité se simplifie ainsi:

$$f'''(x) \sim f(x)\frac{d^2 t^{-1}}{dx^2},$$

d'où:

$$f'''(x)\frac{1}{\frac{d^2 t^{-1}}{dx^2}} \sim f(x).$$

En différentiant troisièmement $f'''(x) \sim f(x)\frac{1}{t^3}$ on trouve $t' f^{\mathrm{IV}}(x) \sim f(x)$, etc. En différentiant $f'''(x) \backsim f(x)\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}$, on trouve d'abord:

$$f^{\text{IV}}(x) \backsim f'(x)\frac{d^2t^{-1}}{dx^2} + f(x)\frac{d^3t^{-1}}{dx^3}.$$

Or $f'(x)\frac{d^2t^{-1}}{dx^2} \backsim f(x)\frac{1}{t}\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}$ peut être négligé relativement à $f(x)\frac{t'}{t}\frac{d^2t^{-1}}{dx^2}$, qui constitue une partie de $\frac{d^3t^{-1}}{dx^3}$, de là $f^{\text{IV}}(x)\frac{1}{\frac{d^3t^{-1}}{dx^3}} \backsim f(x)$, etc. Et voilà démontrées les deux premières parties du théorème.

Dans l'hypothèse $t \backsim x$, il faut que $f(x)$ soit de la forme $x^\mu f_1(x)$, où $f_1(x)$ ou bien sa réciproque $\frac{1}{f_1(x)}$ a un infini moindre qu'une puissance de x, quelque petit que soit son exposant (Théor. 8 et 10 du Mém. cit.). Donc en posant $t_1 f_1'(x) \backsim f_1(x)$, on aura $t_1 > x$ (précisément parce qu'on ne peut avoir $t_1 \backsim x$, et qu'on a $f_1(x) < f(x)$, Théor. 12 du Mém. cit.).

Nous supposerons d'abord que μ n'est pas un nombre entier. De $xf'(x) \backsim x^\mu f_1(x)$ nous tirons:

$$f'(x) \backsim x^{\mu-1} f_1(x)$$

et en différentiant:

$$f''(x) \backsim (\mu-1)x^{\mu-2} f_1(x) + x^{\mu-1} f_1'(x).$$

En mettant $x^{\mu-1} t_1^{-1} f_1(x)$ au lieu du second terme du second membre, parce qu'à cause de $t_1 > x$, on a

$$x^{\mu-1} t_1^{-1} f_1(x) < x^{\mu-2} f_1(x),$$

nous trouvons $f''(x) \backsim (\mu-1)x^{\mu-2} f_1(x)$, ou bien

$$x^2 f''(x) \backsim f(x).$$

Une seconde différentiation donnerait par le même raisonnement $x^3 f'''(x) \backsim f(x)$ et ainsi de suite.

Supposons maintenant μ entier. Alors après $\mu-2$ différentiations on obtient

$$x^{\mu-1} f^{(\mu-1)}(x) \backsim f(x) \backsim x^\mu f_1(x)$$

ou bien

$$f^{(\mu-1)}(x) \backsim x f_1(x),$$

et en différentiant de nouveau:

$$f^{(\mu)}(x) \backsim f_1(x) + x f_1'(x);$$

on pourra encore négliger $xf_1'(x) \backsim \frac{x}{t_1} f_1(x)$ relativement à $f_1(x)$, ce qui donnera:

$$x^\mu f^{(\mu)}(x) \backsim f(x).$$

Maintenant, de $f^{(\mu)}(x) \backsim f_1(x)$ on tire en différentiant $f^{(\mu+1)}(x) \backsim \frac{1}{t_1} f_1(x)$, ou bien

$$x^\mu t_1 f^{(\mu+1)}(x) \backsim f(x).$$

Nous avons exposé dans la première partie de cette démonstration que, à cause de $t_1 > x$, $\lim t_1' = \infty$, la différentiation de $f^{(\mu+1)}(x) \backsim \frac{1}{t_1} f_1(x)$ donne

$$x^\mu \frac{1}{\frac{dt_1^{-1}}{dx}} f^{(\mu+2)}(x) \backsim f(x),$$

puis il vient:

$$x^\mu \frac{1}{\frac{d^2 t_1^{-1}}{dx^2}} f^{(\mu+3)}(x) \backsim f(x),$$

etc. de sorte que le théorème est démontré dans toutes ses parties.

Exemple. Soit, pour donner un exemple,

$$f(x) = x\, lx\, l_2 x \dots l_n x.$$

On aura $t = x$, $t_1 = x\, lx$, on devra donc trouver:

$$f(x) \backsim x f'(x) \backsim x^2 \log x\, f''(x) \backsim x \cdot \frac{1}{\frac{d(x\log x)^{-1}}{dx}} f'''(x) \backsim \quad \text{etc.}$$

Maintenant de $f(x) = x\, lx\, l_2 x \dots l_n x$ on tire en différentiant:

$$f'(x) = lx\, l_2 x \dots l_n x + l_2 x\, l_3 x \dots l_n x + \dots + l_n x + 1$$

et par conséquent:

$$f'(x) \backsim lx\, l_2 x \dots l_n x.$$

En différentiant cette égalité on trouve:

$$f''(x) \backsim \frac{1}{x} l_2 x\, l_3 x \dots l_n x + \frac{1}{x} l_3 x \dots l_n x + \dots$$

ou bien:

$$f''(x) \backsim \frac{1}{x} l_2 x\, l_3 x \dots l_n x.$$

En différentiant on trouve encore:

$$f'''(x) \sim -\frac{1}{x^2} l_2x \ldots l_nx + \frac{1}{x^2\, lx} l_3x \ldots l_nx + \frac{1}{x^2\, lx} l_4x \ldots l_nx + \cdots$$

ou bien:

$$f'''(x) \sim \frac{1}{x^2} l_2x\, l_3x \ldots l_nx.$$

Nous avons donc:

$$f(x) \sim x f'(x) \sim x^2 \log x f''(x) \sim x^3 \log x f'''(x).$$

Le théorème exige que l'on ait: $x^3 \log x \sim x \cdot \frac{1}{\frac{d(x\log x)^{-1}}{dx}}$, ce qui s'accorde en effet très-bien, puisqu'on a:

$$x \cdot \frac{1}{\frac{d(x\log x)^{-1}}{dx}} = \frac{x^3 \log^2 x}{1 + \log x},$$

et que dans l'égalité infinitaire le dénominateur du second membre se réduit à $\log x$.

Fribourg, octobre 1871.