Werk

Titel: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Autor: Thomé, L.W.

Jahr: 1872

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0074|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. W. Thomé.*)

1.

Es sei

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten p in der Umgebung eines Punktes $x=a$ einwerthige analytische Functionen sind. In einem um den Punkt $x=x_0$ geschlagenen Kreise, worin diese Coefficienten allenthalben einwerthig und stetig bleiben, genügt nach dem von Hrn. *Weierstrass* gegebenen Grundsatze dieser Theorie (vgl. die Abhandlung des Herrn *Fuchs:* Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten Bd. 66 d. J., S. 122) der vorliegenden Differentialgleichung eine und nur eine innerhalb des *ganzen* Kreises einwerthige und stetige analytische Function, die mit ihren $m-1$ ersten Ableitungen im Punkte x_0 vorgeschriebene Werthe annimmt. Nimmt man nun ein Gebiet, worin die Coefficienten p einwerthig sind, so wird das vollständige Integral der Differentialgleichung in demselben dargestellt durch den Ausdruck $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$, wo die Grössen c Constanten, y_1 bis y_m linearunabhängige particuläre Integrale sind, so dass eine Relation $k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_m y_m = 0$ mit constanten Coefficienten zwischen denselben nicht besteht. Die Form eines solchen Fundamentalsystems linearunabhängiger particulärer Integrale in der Umgebung des Punktes $x=a$, wenn in demselben nicht alle Coefficienten p stetig bleiben, hat Herr *Fuchs* gegeben (Bd. 66 d. J. S. 131). Derselbe stellt hierzu eine Fundamentalgleichung m^{ten} Grades auf, deren Coefficienten von der Wahl irgend eines Fundamentalsystems von Integralen unabhängig und deren Wurzeln ω_1 bis ω_m alle von Null verschieden sind. Kommt eine Wurzel ω_α dieser Gleichung einfach vor, so entspricht derselben ein Integral des Fundamentalsystems der Form

$$(2.)\quad y_\alpha = (x-a)^{k_\alpha} \varphi_\alpha,$$

wo $k_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log \omega_\alpha$ und φ_α eine in der Umgebung von $x=a$ einwerthige

Function ist. Kommt eine Wurzel ω_α λfach vor, so entspricht dieser Gruppe einander gleicher Wurzeln die Gruppe der Integrale im Fundamentalsysteme

$$(3.)\quad y_\alpha = (x-a)^{k_\alpha} \sum_1^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}\, \varphi_{\alpha\mathfrak{b}} [\log(x-a)]^{\mathfrak{b}-1} \quad (\mathfrak{a}=1,\ 2, \ldots \lambda),$$

wo k_α nur um ganze Zahlen sich unterscheidende Werthe von $\frac{1}{2\pi i}\log\omega_\alpha$, $\varphi_{\alpha\mathfrak{b}}$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthige Functionen sind. Diese Form der Integrale, die einer λfachen Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung entsprechen, kann man unmittelbar dadurch erhalten, dass man mit Hülfe irgend eines Fundamentalsystems zunächst ein Integral der Form $y_1 = (x-a)^{k_\alpha}\varphi_1$ bildet, wo φ_1 in der Umgebung von $x=a$ einwerthig ist, dieses in das Fundamentalsystem einführt, alsdann in der Differentialgleichung $y = y_1 \int z dx$ setzt, die Differentialgleichung für z aufstellt und unter Berücksichtigung, dass die Coefficienten der Fundamentalgleichung unabhängig von der Wahl irgend eines Fundamentalsystems sind, die Fundamentalgleichung für die neue Differentialgleichung des z bildet, die alsdann $\lambda - 1$ Wurzeln gleich 1 hat. Auf diese Weise wird eine Gruppe von Integralen hergeleitet von der Form

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1 = (x-a)^{k_\alpha}\varphi_1,\ y_2 = y_1 \int z dx,\ y_3 = y_1 \int dx\, z \int u dx, \\ \ldots y_i = y_1 \int dx\, z \int dx\, u \ldots \int w dx, \end{cases}$$

wo die Functionen z, u, $\ldots w$ alle in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind. Dass die so erhaltene Gruppe linearunabhängiger Integrale auch von den übrigen auf gleiche Weise gebildeten linearunabhängig ist, wird weiter unten in dieser Nummer nachgewiesen. Die Functionen φ in dem angegebenen Fundamentalsysteme (2.) und (3.), die also in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, lassen sich in dem um den Punkt $x=a$ geschlagenen Kreise, worin sie abgesehen von dem Punkte a endlich bleiben, durch die Summe zweier Potenzreihen darstellen, wovon die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet. Herr *Fuchs* untersucht nun im weiteren Verlaufe seiner Abhandlungen (Bd. 66 d. J., S. 139 und 68, S. 359) diejenige Differentialgleichung, deren *sämmtliche* Integrale mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt für $x=a$ endlich werden, wozu sich für die Functionen φ des Fundamentalsystems mittels der linearen Beziehungen zwischen denselben ergiebt, dass sie in ihren Entwickelungen Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher

Anzahl enthalten dürfen. Die Bestimmung der Coefficienten p_1 bis p_m dieser Differentialgleichung geschieht dabei dadurch, dass das System von m linearen Gleichungen mit m Unbekannten aufgelöst wird, welches aus der Differentialgleichung (1.) durch Einsetzen der m linearunabhängigen particulären Integrale der angegebenen Form entspringt.

Man kann darauf ausgehen, Untersuchungen über solche Differentialgleichungen anzustellen, die überhaupt unter ihren Integralen auch derartige besitzen, dass in ihren aus den particulären Integralen (2.) *und* (3.) *linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzten Ausdrücken die Entwickelungen der einwerthigen Functionen, die nach Potenzen von $x-a$ fortschreiten, Potenzen mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl enthalten.* Dies soll im Folgenden geschehen nach einer anderen Methode, als Herr *Fuchs* angewandt hat, die zugleich einen einfachen Beweis für die Differentialgleichung des Herrn *Fuchs* liefert.

Was die Definition jener Integrale angeht, so hat man zu bemerken, dass eine analytische Function des Ausdruckes:

$$(5.)\quad \begin{matrix} \{c_1(x-a)^{r_1}\varphi_{r_1 0}+c_2(x-a)^{r_2}\{\varphi_{r_2 0}+\varphi_{r_2 1}\log(x-a)+\cdots+\varphi_{r_2 k}(\log(x-a))^k\} \\ +\cdots+c_s(x-a)^{r_s}\{\varphi_{r_s 0}+\cdots+\varphi_{r_s k}[\log(x-a)]^k\}, \end{matrix}$$

worin die Grössen c Constanten in endlicher Anzahl sind, je zwei der Exponenten $r_1, \ldots r_s$ sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, die Potenzen von $\log(x-a)$ mit positiven ganzzahligen Exponenten nur in endlicher Anzahl vorkommen und die Grössen φ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, demnach durch die Summe zweier Potenzreihen entwickelt werden, wovon die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, sich nur auf *eine* Weise unter dieser Form darstellen lässt. Wenn also dieser Ausdruck einem zweiten dieser Form gleich sein soll, so müssen auf beiden Seiten die nämlichen Functionen $(x-a)^p[\log(x-a)]^q$ mit den nämlichen Coefficienten vorkommen. Dieses ist bewiesen, wenn man zeigt, dass ein solcher Ausdruck nicht identisch Null sein kann, ohne dass jede der Grössen φ gleich 0 ist, mithin die Coefficienten in der Entwickelung von φ, die durch bestimmte Integrale gegeben sind, verschwinden. Setzt man nun einen solchen Ausdruck gleich 0 und macht alsdann $s-1$ Umgänge um den Punkt $x=a$, so ist die Determinante dieses Systems von s in Bezug auf $c_1, \ldots c_s$ linearen Gleichungen nicht identisch gleich 0, wenn nicht die Grössen φ gleich 0 sind; woraus

folgen würde, dass $c_1 = c_2 = \ldots c_s = 0$ sein müssten. Diese Determinante ist nämlich

$$(x-a)^{r_1}(x-a)^{r_2}\ldots(x-a)^{r_s}D,$$

wo D, wenn $e^{2\pi i r_1} = w_1, \ldots e^{2\pi i r_s} = w_s$ gesetzt wird, gleich ist:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{r_1 0} & \cdots & \left\{\varphi_{r_s 0} + \cdots + \varphi_{r_s k}[\log(x-a)]^k\right\} \\ w_1\varphi_{r_1 0} & \cdots & w_s\left\{\varphi_{r_s 0} + \cdots + \varphi_{r_s k}[\log(x-a) + 2\pi i]^k\right\} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ w_1^{s-1}\varphi_{r_1 0} & \cdots & w_s^{s-1}\left\{\varphi_{r_s 0} + \cdots + \varphi_{r_s k}[\log(x-a) + (s-1)2\pi i]^k\right\} \end{vmatrix}.$$

Wird D auf die Form gebracht:

$$(6.) \quad P_0 + P_1\log(x-a) + \cdots + P_r[\log(x-a)]^r,$$

wo die Grössen $P_0, \ldots P_r$ einwerthig sind, so müssten diese einzeln verschwinden, wenn D identisch gleich Null wäre, weil sonst wegen der Vieldeutigkeit von $\log(x-a)$ die Gleichung $P_0 + P_1 z + \cdots + P_r z^r = 0$ unzählig viele Wurzeln hätte. P_r ist aber gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & w_2 & & w_s \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ w_1^{s-1} & w_2^{s-1} & & w_s^{s-1} \end{vmatrix} \varphi_{r_1 0}\varphi_{r_2 h}\cdots\varphi_{r_s k},$$

und da hier die Determinante nicht verschwindet, so müsste eine der Grössen $\varphi_{r_1 0}, \varphi_{r_s h}, \ldots \varphi_{r_s k}$ gleich 0 sein, also einer der Coefficienten der höchsten Potenzen der Logarithmen in (5.) verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist. Ein Ausdruck der Form (5.) kann also nicht identisch gleich 0 sein, ohne dass die Grössen φ gleich 0 sind. Damit ist alsdann zugleich bewiesen, dass die oben abgeleitete Gruppe (4.) linearunabhängiger Integrale und die übrigen in gleicher Weise gebildeten von einander linearunabhängig sind.

Man kann demnach mittels der particulären Integrale (2.) und (3.) jedem Integrale der Differentialgleichung (1.) in der Umgebung von $x = a$ die Form des Ausdruckes (5.) geben und letzteres nur auf eine Weise. Wir

wollen nun im Folgenden solche Differentialgleichungen untersuchen, unter deren Integralen der Form (5.) es welche giebt, wo die Functionen φ in ihren Entwickelungen Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthalten. Aus dem Umstande, dass der Ausdruck (6.) nicht identisch gleich Null sein kann, ohne dass die einwerthigen Coefficienten P gleich Null sind, ergiebt sich ein Satz, den Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 68, S. 356) bewiesen hat, von dem wir Gebrauch machen werden, dass, wenn ein Ausdruck der Form

$$V=(x-a)^{\alpha}[\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\cdots+\varphi_r(\log(x-a))^r]$$

worin die Grössen φ einwerthig sind, die Differentialgleichung (1.) erfüllt, die alsdann die Form annimmt

$$(x-a)^{\alpha}\{P_0+P_1\log(x-a)+\cdots+P_r[\log(x-a)]^r\}=0,$$

auch $(x-a)^{\alpha}P_r=0$ ist, oder dass auch $(x-a)^{\alpha}\varphi_r$, der Coefficient der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ in V, die Differentialgleichung erfüllt.

2.

Ein Integral der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0,$$

in welcher die Coefficienten p in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, setzt sich aus den particulären Integralen (2.) und (3.) der Nr. 1 linear mit constanten Coefficienten zusammen und nimmt nur auf eine Weise die Form des Ausdruckes (5.) in Nr. 1 an. Demnach muss jede in dem Ausdrucke des Integrals vorkommende Summe der Form

$$(x-a)^r\{\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\cdots+\varphi_h[\log(x-a)]^h\},$$

die sämmtliche Summanden enthält, in welchen sich die Exponenten der Potenzen von $x-a$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, für sich die Differentialgleichung erfüllen, und in dieser Summe der Coefficient der höchsten Potenz des Logarithmus nach dem zu Ende des Nr. 1 angegebenen Satze des Herrn *Fuchs* ebenfalls. Hierin liegt der Satz:

I. *Hat die Differentialgleichung* (1.) *unter ihren Integralen überhaupt ein solches, in dessen Ausdruck der Form* (5.) *in* Nr. 1. *die Functionen φ in ihren Entwickelungen Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Zahl enthalten, so hat sie auch eines der Form $(x-a)^r\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ ein-*

werthig ist und in der Entwickelung nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält.

Daran schliessen sich zunächst folgende Sätze:

II. *Hat die Differentialgleichung* (1.) *s linearunabhängige Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl, und ist s die grösste Zahl solcher Integrale, die unter einander linearunabhängig sind, wo also $s \leqq m$ ist, so lassen sich alle Integrale derselben Art durch diese linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. Und umgekehrt, wenn sich durch s linearunabhängige alle derselben Art ausdrücken lassen, so giebt es nicht mehr linearunabhängige, als s,* weil man die ursprünglichen s durch eben so viele neuen ausdrücken könnte, und dann auch alle übrigen durch letztere.

III. *Hat die Differentialgleichung* (1.) *s linearunabhängige Integrale der angegebenen Art, so hat nach* I. *dieser Nummer eines die Form*

$$y_1 = (x-a)^r \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi(a)$ von 0 verschieden ist. Setzt man in (1.) $y = y_1 \int z dx$, *so dass man die Differentialgleichung*

$$(2.) \quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \cdots + q_{m-1} z = 0$$

mit in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten erhält, so hat diese $s-1$ linearunabhängige Integrale genannter Art und umgekehrt.

Denn sind die der Differentialgleichung (1.)

$$y_1, y_2, \cdots y_s,$$

so sind die der Differentialgleichung (2.)

$$\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1}, \cdots \frac{d}{dx}\frac{y_s}{y_1};$$

aus einer Relation

$$c_2 \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} + \cdots + c_s \frac{d}{dx}\frac{y_s}{y_1} = 0$$

mit constanten Coefficienten würde

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_s y_s = 0$$

folgen. Und sind die der Differentialgleichung (2.)

$$z_1, z_2, \cdots z_{s-1},$$

so sind die der (1.)

$$y_1, \; y_2 = y_1 \int z_1 dx, \; \ldots \; y_s = y_1 \int z_{s-1} dx;$$

eine Relation mit constanten Coefficienten

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_s y_s = 0$$

ist nicht möglich, weil aus dieser

$$c_2 \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} + \cdots + c_s \frac{d}{dx}\frac{y_s}{y_1} = 0$$

folgen würde.

3.

Wenn die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten p der Differentialgleichung

$$(1.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0$$

Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in ihren Entwickelungen in endlicher Anzahl enthalten und die Coefficienten auf die Form $\frac{f(x)}{(x-a)^s}$ gebracht sind, wo $s \geqq 0$ ist, $f(x)$ nur Potenzen mit positiven Exponenten enthält, wenn alsdann die gemeinschaftlichen Factoren $x-a$ in Zähler und Nenner weggehoben sind, so werde der Grad des Nenners in p_1 durch π_1 bezeichnet, in p_2 durch π_2, etc., in p_m durch π_m.

Im Folgenden sind es die positiven ganzen Zahlen

$$\pi_1 + m - 1, \ \pi_2 + m - 2, \ \ldots \ \pi_{m-1} + 1, \ \pi_m,$$

die eine wesentliche Bedeutung haben.

Man hat hier zunächst den Satz:

I. *Wenn in der Differentialgleichung* (1.) *mit in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten die Coefficienten p_1 bis p_{m-1} Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten und diese Differentialgleichung überhaupt ein Integral hat, in dessen Ausdruck Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl vorkommen, so enthält der Coefficient p_m ebenfalls nur eine endliche Anzahl Potenzen von $(x-a)^{-1}$ und zwar, wenn g die grösste der Zahlen $\pi_1 + m - 1$, $\pi_2 + m - 2$, $\ldots$ $\pi_{m-1} + 1$ bezeichnet, höchstens bis zu dem Exponenten g, wenn $g > m$, und höchstens bis zu dem Exponenten m, wenn $g \leqq m$ ist; also $\pi_m \leqq g$, wenn $g > m$ und $\pi_m \leqq m$, wenn $g \leqq m$ ist.*

Die Differentialgleichung hat nämlich nach Nr. 2, I. ein Integral der Form $(x-a)^r \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen mit positiven Exponenten ent-

hält, $\varphi(a)$ von 0 verschieden ist. Setzt man dieses in die Differentialgleichung ein und bringt dieselbe auf die Form:

$$\frac{1}{y}\left\{\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_{m-1}\frac{dy}{dx}\right\}=-p_m,$$

so sieht man sofort, dass p_m Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthält und der Grad des Nenners in p_m der im Satze angegebene ist.

4.

Es soll jetzt zuerst untersucht werden, wie die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+p_m y=0$$

beschaffen sein müssen, damit die Differentialgleichung nur solche Integrale hat, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl vorkommen. Es ist dies die Differentialgleichung, deren Form Herr *Fuchs* bestimmt hat (d. J. Bd. 66, S. 139, Bd. 68, S. 359), indem er das System von m Gleichungen mit den m Unbekannten p_1 bis p_m auflöst, welches man durch Einsetzen der linearunabhängigen particulären Integrale (2.) und (3.) in Nr. 1 erhält. Wir wenden hier die Schlussweise von $m-1$ auf m an. Die Differentialgleichung (1.) hat unter der gemachten Voraussetzung jedenfalls ein Integral der Form $y_1=(x-a)^r\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi(a)$ von 0 verschieden ist. Setzt man $y=y_1\int z\,dx$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$(2.)\quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+q_1\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}+\cdots+q_m z=0,$$

wo

$$q_1=\frac{1}{y_1}\left\{m\frac{dy_1}{dx}+p_1 y_1\right\},$$

$$q_2=\frac{1}{y_1}\left\{\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^2y_1}{dx^2}+(m-1)p_1\frac{dy_1}{dx}+p_2 y_1\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_r=\frac{1}{y_1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}\dfrac{d^r y_1}{dx^r}+\dfrac{(m-1)(m-2)..(m-r+1)}{1.2\ldots(r-1)}p_1\dfrac{d^{r-1}y_1}{dx^{r-1}}\\ +\dfrac{(m-2)(m-3)..(m-r+1)}{1.2\ldots(r-2)}p_2\dfrac{d^{r-2}y_2}{dx^{r-2}}+\cdots+(m-r+1)p_{r-1}\dfrac{dy_1}{dx}+p_r y_1\end{array}\right\}.$$

Die Differentialgleichung (2.) mit einwerthigen Coefficienten hat alsdann auch nur Integrale, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl vorkommen (Nr. 2, III.).

Die Differentialgleichung der Ordnung $m=1$

$$(3.)\quad \frac{dy}{dx}+p_1 y=0,$$

die von der vorgeschriebenen Art sein soll, muss nun nach Nr. 3, I. den Coefficienten p von der Form $\frac{f(x)}{x-a}$ haben, wo $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält. Diese Form von p kann man unmittelbar aus dem Ausdrucke des vollständigen Integrals der Differentialgleichung

$$y=Ce^{-\int p_1 dx},$$

wo C eine Constante ist, verificiren.

Setzt man nun $m=2$, und sollen die Integrale der Differentialgleichung (1.) die verlangte Eigenschaft haben, dann muss dieses auch für die Differentialgleichung (2.) stattfinden. Nun ist nach dem eben Bewiesenen $q_1=m\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}+p_1=\frac{f(x)}{x-a}$, wo in $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen; daher ist p_1 von derselben Form gleich $\frac{f_1(x)}{x-a}$, und dann muss nach Nr. 3, I. p_2 die Form haben $\frac{f_2(x)}{(x-a)^2}$, wo in $f_2(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen.

Es sei jetzt bereits bewiesen, dass eine Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten einwerthig sind, und die nur Integrale der angegebenen Art hat, die Form haben muss:

$$(4.)\quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{F_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\frac{F_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}+\cdots+\frac{F_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}}y=0,$$

wo in den Functionen F nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen.

Wir beweisen dies alsdann für die m^{te} Ordnung. Wenn die Differentialgleichung (1.) also nur Integrale der angegebenen Eigenschaft hat, so muss dies auch bei der Differentialgleichung (2.) der Fall sein. Diese hat alsdann die Form (4.). Aus den Ausdrücken der Coefficienten q ergiebt sich hierauf, dass

$$p_1=\frac{f_1(x)}{x-a},\ p_2=\frac{f_2(x)}{(x-a)^2},\ \cdots p_{m-1}=\frac{f_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}}$$

sein muss, wo in den Functionen f nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen. Nach Satz I. Nr. 3 muss dann

$$p_m=\frac{f_m(x)}{(x-a)^m}$$

sein, wo $f_m(x)$ ebenfalls nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält.

Damit ist also für eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (1.) *die die vorgeschriebene Eigenschaft haben soll, bewiesen, dass die Coefficienten p Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthalten dürfen, und dass die in* Nr. 3 *definirten Zahlen*

$$\pi_\mathfrak{a}+m-\mathfrak{a}\gtreqless m \quad (\mathfrak{a}=1, 2, \ldots m)$$

sein müssen.

5.

Die in den Nummern 2 und 3 angegebenen Sätze und die in der vorigen Nummer angewandte Methode geben die Mittel, überhaupt Differentialgleichungen zu untersuchen, die unter ihren Integralen solche haben, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl vorkommen. Man kann anschliessend an den Satz in Nr. 3 sofort folgenden allgemeineren aufstellen:

I. *Wenn die Differentialgleichung*

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0,$$

deren Coefficienten in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind, in den Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_h$ Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl hat, und wenigstens $m-h$ linearunabhängige Integrale, deren Ausdrücke Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten, haben soll, so müssen die übrigen Coefficienten ebenfalls Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl enthalten, ferner, wenn von den in Nr. 3 *definirten Zahlen*

$$\pi_1+m-1,\ \pi_2+m-2,\ \ldots\ \pi_h+m-h$$

die grösste $g>m$ ist, so müssen

$$\pi_{h+1}+m-h-1,\ \ldots\ \pi_{m-1}+1,\ \pi_m\gtreqless g;$$

wenn aber $g\lessgtr m$ ist, so müssen

$$\pi_{h+1}+m-h-1, \ \ldots \ \pi_m \leqq m.$$

sein.

Zu dem Beweise fangen wir mit einer Differentialgleichung an, worin $m=h+1$. Alsdann gilt der Satz nach Nr. 3. Nehmen wir ihn alsdann für die $(m-1)^{\text{te}}$ Ordnung bereits als bewiesen und beweisen ihn für die m^{te}. Die Differentialgleichung (1.) hat nach Nr. 2, I. wenigstens ein Integral von der Form $y_1=(x-a)^r\varphi(x)$, worin $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi(a)$ von Null verschieden ist.

Setzen wir $y=y_1\int z dx$ in (1.), so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(2.) \quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+q_1\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}}+\cdots+q_{m-1}z=0,$$

wo die einwerthigen Coefficienten q die in der vorigen Nummer angegebene Form haben. Diese Differentialgleichung hat alsdann nach der über die Differentialgleichung (1.) gemachten Voraussetzung und nach Satz III. Nr. 2 wenigstens $m-1-h$ linearunabhängige Integrale genannter Art. Die Coefficienten q_1 bis q_h enthalten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl; dasselbe findet demnach, da der Satz I. dieser Nummer für die $(m-1)^{\text{te}}$ Ordnung bereits als bewiesen vorausgesetzt wird, für alle Coefficienten q statt. Bezeichnet man die in Nr. 3 definirten Zahlen π_1, π_2, etc. bei der Differentialgleichung (2.) durch π'_1, π'_2, $\ldots$ π'_{m-1} und die grösste der Zahlen $\pi'_1+(m-1)-1, \ldots \pi'_h+(m-1)-h$ durch g', so findet sich Folgendes:

a) Die Zahl g bei der Differentialgleichung (1.) sei $>m$.

Wenn aus der Reihe der Zahlen

$$\pi_1+m-1, \ \pi_2+m-2, \ \ldots \ \pi_h+m-h$$

zuerst

$$\pi_c+m-c=g>m$$

wird, so ist auch aus der Reihe

$$\pi'_1+(m-1)-1, \ \pi'_2+(m-1)-2, \ \ldots \ \pi'_h+(m-1)-h$$

zuerst

$$\pi'_c+(m-1)-c=g'=g-1>m-1.$$

Da ferner der Satz I. dieser Nummer für die Differentialgleichung (2.) als bewiesen vorausgesetzt wird, so sind

$$\pi'_{h+1}+(m-1)-h-1, \ \ldots \ \pi'_{m-1}\leqq g'.$$

Daraus folgt, dass die Coefficienten p_{h+1} bis p_{m-1} Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten und

$$\pi_{h+1}+m-h-1,\ \ldots\ \pi_{m-1}+1 \gtreqless g'+1=g$$

sind; und nun ergiebt sich aus Satz I. Nr. 3, dass auch p_m eine endliche Zahl Potenzen von $(x-a)^{-1}$ enthält und $\pi_m \gtreqless g$ ist.

b) Die Zahl g sei $\gtreqless m$.

Man findet dann, wie vorhin, dass

$$\pi'_1+(m-1)-1,\ \ldots\ \pi'_h+(m-1)-h \gtreqless m-1$$

sind und daher auch

$$\pi_{h+1}+(m-1)-h-1,\ \ldots\ \pi'_{m-1} \gtreqless m-1;$$

daraus folgt, dass

$$\pi_\mathfrak{a}+m-\mathfrak{a} \gtreqless m \quad (\mathfrak{a}=1, 2, \ldots m \quad 1)$$

ist und nach Satz I. Nr. 3 auch $\pi_m \gtreqless m$.

Damit ist der angegebene Satz bewiesen. Aus demselben ergiebt sich unmittelbar der den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegende Satz:

II. *Wenn alle in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten p_1 bis p_m der Differentialgleichung* (1.) *Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten und von den in* Nr. 3 *definirten Zahlen π_1+m-1, π_2+m-2, $\ldots\ \pi_m$ die grösste $g>m$ ist, wenn ferner aus der Reihe dieser Zahlen π_h+m-h zuerst gleich g wird, so hat die Differentialgleichung höchstens $m-h$ linearunabhängige Integrale, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl vorkommen.*

6.

In der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0$$

sollen die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ nur in endlicher Anzahl haben. Wenn alsdann von den in Nr. 3 definirten Zahlen $\pi_1+m-1,\ \ldots\ \pi_m$ die grösste $g \gtreqless m$ ist, so hat nach einem Satze, den Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 66, S. 148) bewiesen hat, die Differentialgleichung m linearunabhängige, also überhaupt nur Integrale, in deren Ausdrücken Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl vorkommen. Wenn $g>m$ ist und π_h+m-h zuerst gleich g, so hat sie nach Satz II. der vorigen Nummer deren höchstens $m-h$ linearunabhängige.

Man kann nun zunächst immer die Differentialgleichung (1.), in der $p_1, \ldots p_h$ willkürlich gegeben sind, und von den Zahlen $\pi_1+m-1, \ldots$

π_h+m-h letztere die grösste ist und grösser als m, in den Coefficienten $p_{h+1}, \ldots p_m$ so bestimmen, dass sie wirklich $m-h$ linearunabhängige Integrale jener Art hat. Dazu braucht man nur $m-h$ Functionen der Form

$$y_1=(x-a)^{r_1}f_1(x), \quad \ldots y_{m-h}=(x-a)^{r_{m-h}}f_{m-h}(x)$$

in die Differentialgleichung einzusetzen, worin die Grössen f in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich und für $x=a$ von Null verschieden, die Exponenten r keine positiven ganzen Zahlen kleiner als $m-h-1$ sind und je zwei derselben sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Denn die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \ldots & \frac{d^{m-h-1}y_1}{dx^{m-h-1}} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_{m-h} & \frac{dy_{m-h}}{dx} & \ldots & \frac{d^{m-h-1}y_{m-h}}{dx^{m-h-1}} \end{vmatrix}$$

ist alsdann nicht identisch Null, weil sie gleich

$$(x-a)^{r_1-(m-h-1)} \ldots (x-a)^{r_{m-h}-(m-h-1)}(x-a)^{\frac{1}{2}(m-h)(m-h-1)}\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$$

ist, wo

$$c_0=f_1(a)f_2(a)\ldots f_{m-h}(a)D$$

und

$$D=\begin{vmatrix} 1 & r_1 & \ldots & r_1(r_1-1)\ldots(r_1-m+h+2) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & r_{m-h} & \ldots & r_{m-h}(r_{m-h}-1)\ldots(r_{m-h}-m+h+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & \ldots & r_1^{m-h-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & r_{m-h} & \ldots & r_{m-h}^{m-h-1} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Die Coefficienten p_{h+1} bis p_m werden einwerthig, enthalten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Zahl, und es ist nach Satz I. der vorigen Nummer $\pi_\alpha+m-\alpha\leqq g\,(\alpha=1, 2, \ldots m)$; nach Satz II. derselben Nummer hat die Differentialgleichung nicht mehr linearunabhängige Integrale der genannten Art.

Es giebt aber auch, wie in den folgenden Nummern gezeigt werden wird, Differentialgleichungen (1.), die die Bedingung, dass π_h+m-h zuerst gleich $g>m$ wird, erfüllen und weniger als $m-h$ linearunabhängige derartige Integrale haben. Wir wollen nun voraussetzen, dass in der Differentialgleichung (1.) $g>m$ und π_h+m-h zuerst gleich g sei, alsdann die allgemeine Form der linearunabhängigen Integrale der angegebenen Eigenschaft bestimmen, deren Anzahl s, falls überhaupt welche vorkommen, $\leqq m-h$ ist.

Zunächst ergiebt sich aus den Sätzen I. und III. der Nr. 2, dass die s Integrale der angegebenen Art, die die Differentialgleichung (1.) der Nr. 2 hat, unter der Form dargestellt werden können:

$$y_1,\ y_2=y_1\int z dx,\ y_3=y_1\int dx\, z\int u dx,\ \ldots\ y_s=y_1\int dx\, z\int dx\, u\ldots\int w dx,$$

wo

$$y_1=(x-a)^{r_1}\varphi_1(x),\ z=(x-a)^{r_2}\varphi_2(x),\ \ldots\ w=(x-a)^{r_s}\varphi_s(x)$$

ist, in den Grössen φ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten vorkommen und

$$\varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \ldots\ \varphi_s(a)$$

von Null verschieden sind. Nach geschehener Integration nehmen alle Integrale die Form an:

$$(x-a)^r\left\{f_0+f_1\log(x-a)+\cdots+f_k(\log(x-a))^k\right\},$$

worin die Grössen f in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich sind. Fasst man diejenigen, worin die Exponenten r sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden, zu einer Gruppe zusammen, so enthält dasjenige Integral, welches in der Reihe $y_1, y_2, \ldots y_s$ zuerst auftritt, keinen Logarithmus. Die Anzahl der Integrale in dieser Gruppe sei gleich λ'. Aus den Sätzen der Nr. 2 ergiebt sich, dass diese Gruppe durch eine der Form

$$y_1=(x-a)^r\varphi_1,\ y_2=y_1\int z dx,\ \ldots\ y_{\lambda'}=y_1\int dx\, z\int dx\, u\ldots\int t dx$$

ersetzt werden kann, worin φ_1, z, u, $\ldots$ t in der Umgebung von $x=a$ einwerthig sind und Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl enthalten. *Diese Gruppe kann also an die Spitze der entsprechenden Gruppe* (4.) Nr. 1 *des Fundamentalsystems gestellt werden.*

Wir wollen die Form der Integrale dieser Gruppe jetzt bei der Differentialgleichung (1.) dieser Nummer näher untersuchen und haben dazu dasselbe Verfahren anzuwenden, welches Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 66, S. 146) bei der Bestimmung der Form der Integrale der von ihm untersuchten Differentialgleichung gebraucht hat.

Setzt man in der Differentialgleichung (1.)

$$y_1=(x-a)^r\varphi_1(x)=(x-a)^r u,$$

wo $\varphi_1(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält und $\varphi_1(a)$ von Null verschieden ist, so geht (1.) über in

$$(2.)\quad \frac{d^m u}{dx^m}+p_1'\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m' u=0,$$

wo

$$p'_\alpha = \frac{m(m-1)\dots(m-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot \alpha} r(r-1)\dots(r-\alpha+1)\frac{1}{(x-a)^\alpha}$$
$$+\frac{(m-1)\dots(m-\alpha+1)}{1\cdot 2 \dots (\alpha-1)} r(r-1)\dots(r-\alpha+2)\frac{p_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+p_\alpha$$

ist. Bezeichnet man die in Nr. 3 definirten Zahlen π bei (2.) durch $\bar{\pi}$, so ist von $\bar{\pi}_1+m-1$ bis $\bar{\pi}_m$ die grösste zuerst $\bar{\pi}_h+m-h$ gleich der Zahl g bei der Differentialgleichung (1.), und zwar ist

$$\left[p'_h(x-a)^{\pi_h}\right]_{x=a} = \left[p_h(x-a)^{\pi_h}\right]_{x=a}.$$

Es muss nun, damit der Differentialgleichung (2.) eine Entwickelung

$$u = \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha,$$

wo c_0 von Null verschieden ist, genügen kann,

$$\left[p'_m(x-a)^g\right]_{x=a} = 0$$

sein.

Dies giebt die Gleichung $(m-h)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(3.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-h)+1)\left[p_h(x-a)^{\pi_h}\right]_{x=a} \\ +r(r-1)\dots(r-(m-h)+2)\left[p_{h+1}(x-a)^{\pi_h+1}\right]_{x=a} \\ \qquad +\dots+\left[p_m(x-a)^{\pi_h+m-h}\right]_{x=a} = 0. \end{cases}$$

Der Gleichung (3.) genügt der Exponent r in $y_1=(x-a)^r u$; es sei diese Wurzel der Gleichung (3.) durch r_1 bezeichnet, und die übrigen Wurzeln seien $r_2, r_3, \dots r_{m-h}$.

Setzt man

$$y = y_1 \int z dx$$

in der Differentialgleichung (1.), so geht dieselbe über in:

$$(4.)\quad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \dots + q_{m-1} z = 0,$$

welche Differentialgleichung $\lambda'-1$ linearunabhängige Integrale der Form

$$(x-a)^r(f_0+f_1\log(x-a)+\dots+f_k(\log(x-a))^k)$$

hat, wo r ganzzahlig ist, die Grössen f in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich sind.

Bezeichnet man die in Nr. 3 definirten Zahlen π_1 etc. bei der Differentialgleichung (4.) durch $\pi'_1, \dots \pi'_{m-1}$, so ist die grösste aus der Reihe

$$\pi'_1+(m-1)-1,\ \pi'_2+(m-1)-2,\ \ldots\ \pi'_{m-1},$$

hier wiederum zuerst

$$\pi'_h+(m-1)-h$$

und zwar gleich $g-1$.

Die Differentialgleichung hat ein Integral der Form

$$z_1=(x-a)^{r'}\varphi_2(x),$$

wo r' ganzzahlig ist und $\varphi_2(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $\varphi_2(a)$ von Null verschieden ist. r' ist alsdann Wurzel der Gleichung $(m-1-h)^{\text{ten}}$ Grades

$$(5.)\quad \left\{\begin{array}{l} r'(r'-1)\ldots(r'-(m-1-h)+1)\left[q_h(x-a)^{\pi'_h}\right]_{x=a} \\ +r'(r'-1)\ldots(r'-(m-1-h)+2)\left[q_{h+1}(x-a)^{\pi'_{h+1}}\right]_{x=a} \\ +\cdots+\left[q_{m-1}(x-a)^{\pi'_h+m-1-h}\right]_{x=a}=0. \end{array}\right.$$

Setzt man in dieser Gleichung für

$$\left[q_{h+\alpha}(x-a)^{\pi'_h+\alpha}\right]_{x=a}$$

seinen Ausdruck

$$\frac{(m-h)(m-h-1)\ldots(m-h-\alpha+1)}{1\,.\,2\ldots\alpha}\left[p_h(x-a)^{\pi_h}\right]_{x=a}r_1(r_1-1)\ldots(r_1-\alpha+1)$$
$$+\frac{(m-h-1)\ldots(m-h-\alpha+1)}{1\,.\,2\ldots(\alpha-1)}\left[p_{h+1}(x-a)^{\pi_h+1}\right]_{x=a}r_1(r_1-1)\ldots(r_1-\alpha+2)+\cdots$$
$$+\left[p_{h+\alpha}(x-a)^{\pi_h+\alpha}\right]_{x=a},$$

so ergiebt sich, dass die Gleichung (5.) zu Wurzeln

$$(6.)\quad r_2-r_1-1,\ r_3-r_1-1,\ \ldots\ r_{m-1}-r_1-1$$

hat. Eine dieser Wurzeln ist r', es sei diese durch r_2-r_1-1 bezeichnet. Man setze dann in der Differentialgleichung (4.)

$$z=z_1\int u\,dx$$

und reducire weiter. Auf diese Weise erhält man successive die λ' Integrale der vorliegenden Gruppe unter der Form

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{l} y_1,\ y_2=y_1\int z\,dx,\ \ldots y_{\lambda'}=y_1\int dx\,z\int dx\,u\ldots\int t\,dx,\ y_1=(x-a)^{r_1}\varphi_1(x), \\ z=(x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi_2(x),\ u=(x-a)^{r_3-r_2-1}\varphi_3(x),\ \ldots\ t=(x-a)^{r_\lambda-r_{\lambda'-1}-1}\varphi_{\lambda'}(x), \end{array}\right.$$

wo

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ \varphi_{\lambda'}(x)$$

in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich und für $x=a$ von Null verschieden und die Exponenten $r_1, r_2, \ldots r_{\lambda'}$ die sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden, Wurzeln der Gleichung (3.) sind.

Wenn man nun von einem Ausdrucke

$$(8.)\quad F=(x-a)^k\{\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\varphi_2(\log(x-a))^2+\cdots+\varphi_n(\log(x-a))^n\},$$

wo die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Grössen φ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthalten, und worin k so genommen ist, dass der Ausdruck für $x=a$ nicht Null wird und unendlich wie

$$a+b\log(x-a)+\cdots+l[\log(x-a)]^s$$

mit constanten Coefficienten a, b, ... l, die Bezeichnung gebraucht, die Herr *Fuchs* (d. J. Bd. 66, S. 155) gewählt hat, *„er gehöre zum Exponenten k“*, und die beiden von Herrn *Fuchs* (l. c.) gegebenen Sätze anwendet, 1) dass, wenn $G(x)$ eine wie F beschaffene Function ist, die zum Exponenten r gehört, alsdann $\int G(x)dx$ (wo die Integrationsconstante gleich Null genommen wird) ebenso beschaffen ist und zum Exponenten $r+1$ gehört, und 2) dass, wenn $G(x)$ zum Exponenten r und $G'(x)$ zu r' gehört, das Product $G(x)\cdot G'(x)$ zum Exponenten $r+r'$ gehört, so ergiebt sich: Die Integrale (7.) y_1 bis $y_{\lambda'}$ gehören zu den Wurzeln der Gleichung (3.) als zu ihren Exponenten.

Die Gleichung (3.) ist die nämliche, welche die Exponenten der Integrale in der Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(9.)\quad \frac{d^{m-h}y}{dx^{m-h}}+\frac{p_{h+1}}{p_h}\frac{d^{m-h-1}y}{dx^{m-h-1}}+\cdots+\frac{p_m}{p_h}=0$$

bestimmt. Diese Differentialgleichung (9.) hat nämlich die Form derjenigen, die nur Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl besitzen. Die Exponenten dieser Integrale werden nach einem von Herrn *Fuchs* (d. J. B. 66, S. 147) für diese Differentialgleichungen gegebenen Satze durch eine Gleichung bestimmt, welche bei der Differentialgleichung (9.) mit der Gleichung (3.) zusammenfällt.

Man kann nun die Resultate dieser Nummer in folgender Weise zusammenfassen:

I. *Die Differentialgleichung* (1.), *in welcher von den Zahlen*

$$\pi_1+m-1,\ \pi_2+m-2,\ \ldots\ \pi_m$$

die grösste $g>m$ sein soll und π_h+m-h zuerst gleich g, hat höchstens $m-h$ linearunabhängige Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl. Hat sie deren nun wirklich s, so zerfallen dieselben in Gruppen von folgender Form:

$$y_1,\ y_2=y_1\int z\,dx,\ y_3=y_1\int dx\,z\int u\,dx,\ \ldots\ y_{\lambda'}=y_1\int dx\,z\int dx\,u\ldots\int t\,dx,$$
$$y_1=(x-a)^{r_1}\varphi_1(x),\ z=(x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi_2(x),\ \ldots\ t=(x-a)^{r_{\lambda'}-r_{\lambda'-1}-1}\varphi_{\lambda'}(x),$$

wo die Grössen φ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich und für $x=a$ von Null verschieden sind.

Die λ' Exponenten r_1 bis $r_{\lambda'}$ unterscheiden sich bloss um ganze Zahlen; die Integrale nehmen die Form des Ausdruckes (8.) *an und gehören zu den Exponenten r_1 bis $r_{\lambda'}$.*

Eine Gruppe umfasst alle Integrale, deren Exponenten sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden.

Alle Exponenten, zu denen die verschiedenen Integrale gehören, sind Wurzeln der Gleichung $(m-h)^{\text{ten}}$ Grades (3.).

II. *Die Gleichung* (3.) *ist die nämliche, deren Wurzeln die Exponenten der Integrale der Differentialgleichung $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung* (9.) *bestimmen, die nur Integrale mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl hat.*

7.

Die Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0,$$

worin die in der Umgebung von $x=a$ einwerthigen Coefficienten Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl haben, und wo von den Zahlen π_1+m-1 bis π_m die grösste g grösser als m sein soll und zuerst $\pi_h+m-h=g$, hat nach Nr. 5, Satz II. höchstens $m-h$ linearunabhängige Integrale mit einer endlichen Anzahl Potenzen von $(x-a)^{-1}$ und die Form derjenigen, die sie wirklich hat, ist in der vorigen Nummer gegeben. Nach dem im Anfange der vorigen Nummer Gesagten wird sie nun zwar im Allgemeinen auch so viele haben; insofern man die Coefficienten p_1 bis p_h willkürlich wählen kann, so dass π_h+m-h zuerst $=g>m$ wird, und dann durch Einsetzen von $m-h$ linearunabhängigen Functionen $(x-a)^r f(x)$, wo $f(x)$ in der Umgebung von $x=a$ einwerthig und endlich bleibt, die übrigen so bestimmt, dass allgemein

$$\pi_\mathfrak{a}+m-\mathfrak{a}\gtrless g\ (\mathfrak{a}=1,\ 2,\ \ldots\ m)$$

ist und die Differentialgleichung diese Functionen zu Integralen hat.

Jedoch giebt es auch Differentialgleichungen von der Form (1.), *deren Coefficienten die angegebenen Bedingungen erfüllen, die aber weniger als m—h linearunabhängige Integrale jener Art haben.* In der folgenden Nummer wird gezeigt werden, wie man auf solche Differentialgleichungen kommt. Um aber gleich hier allgemeinere zu bilden, benutzen wir den Zusammenhang einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung

$$(2.)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y + q = Y + q = 0$$

mit einer homogenen von einer um eine Einheit höheren Ordnung, den Herr *Fuchs* (d. J. B. 68, S. 368) angegeben hat, indem er die Gleichung aufstellt

$$(3.)\quad \frac{dY}{dx} q - Y \frac{dq}{dx} = 0,$$

oder

$$(4.)\quad \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + r_1 \frac{d^m y}{dx^m} + \cdots + r_{m+1} y = 0,$$

wo

$$(5.)\quad r_{\alpha+1} = \left\{ \frac{dp_\alpha}{dx} + p_{\alpha+1} - p_\alpha \frac{d\log q}{dx} \right\},\ r_{m+1} = \frac{dp_m}{dx} - p_m \frac{d\log q}{dx}$$

ist. Aus (3.) folgt alsdann

$$(6.)\quad Y = Cq,$$

wo C eine Constante ist, und verbindet man hiermit noch die Gleichung

$$(7.)\quad Y = 0,$$

so genügt ein Integral y von Gl. (2.) oder (7.) der Gleichung (4.) und umgekehrt ein Integral y von (4.) der Gl. (7.) oder $-\frac{y}{C}$ der Gl. (2.). Wenn nun die Gleichung (2.) ein Integral mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Anzahl haben soll, muss (4.) von derartigen Integralen, die linearunabhängig sind, eines mehr enthalten, als (7.). Und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so genügt eines davon, mit einer gewissen Constanten multiplicirt, der Gleichung (2.), und das allgemeinste dieser Art von (2.) wird erhalten, wenn man zu diesem das allgemeinste derselben Art, welches der Gleichung (7.) genügt, addirt.

Wir wollen nun zunächst m gleich 1 setzen, alsdann (2.) und (7.) so bestimmen, dass diese keine derartigen Integrale haben.

Die Gleichungen (2.) und (7.) werden

$$(8.)\quad \frac{dy}{dx}+p_1y+q=0,$$

$$(9.)\quad \frac{dy}{dx}+p_1y=0.$$

Wenn r_1 willkürlich genommen wird gleich $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$, $n>1$, wo $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $f(a)$ von Null verschieden ist, so wird

$$p_1=r_1+\frac{d\log q}{dx}.$$

Die Gleichung (8.) hat zum vollständigen Integrale

$$y=e^{-\int p_1dx}\left\{C-\int qe^{\int p_1dx}dx\right\}$$

und (9.)

$$y=Ce^{-\int p_1dx},$$

wo C eine Constante ist. Nehmen wir q von der Form $(x-a)^r\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten hat, so hat das Integral von (9.) Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in unendlicher Zahl; bestimmen wir dann q näher, so dass

$$\int qe^{\int p_1dx}dx=\int q^2e^{\int r_1dx}dx$$

einen Logarithmus enthält, wozu q von der Form $(x-a)^r$ sein könnte, so enthält auch das Integral von (8.) für beliebige Werthe von C Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in unendlicher Zahl. Die Gleichung (4.) hat dann auch nur solche Integrale; sie hat aber die Form

$$(10.)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^n}\frac{dy}{dx}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{n+1}}y=0,\quad n>1,$$

wo f_1 und f_2 nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthalten, $f_1(a)$ von Null verschieden ist.

Man kann ferner in der Differentialgleichung (1.) p_1 willkürlich nehmen, so dass $\pi_1+m-1>m$ ist, und die übrigen Coefficienten so bestimmen, dass $\pi_1+m-1=g$ wird, die Differentialgleichung aber nur $m-2$ linearunabhängige Integrale der früher angegebenen Art hat. Für $m=2$ ist eine solche vorhin gebildet. Gesetzt nun, man könnte für die $(m-1)^{te}$ Ordnung bereits eine solche darstellen. Man nehme dann in der Gleichung (1.) Nr. 4 für p_1 den willkürlich gegebenen Werth und setze $y_1=(x-a)^r\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, und bestimme dadurch in der Gleichung (2.) derselben Nummer q_1 und alsdann, was nach der Voraussetzung möglich ist, diese Gleichung (2.) so,

dass sie $m-1-2$ solcher Integrale hat. Dadurch werden $p_1, \ldots p_{m-1}$ bestimmt, und wenn man y_1 in (1.) einsetzt, auch p_m, so dass

$$\pi_1+m-1=g>m$$

ist, (1.) nur $m-2$ linearunabhängige Integrale genannter Eigenschaft hat.

Es lässt sich dann auch die Differentialgleichung (1.) dieser Nummer so bestimmen, dass zuerst

$$\pi_h+m-h=g>m$$

wird und nur $m-h-1$ solcher Integrale vorhanden sind. Man nehme hierzu zuerst eine Differentialgleichung $(m-h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung und bestimme sie nach dem Vorhergehenden so, dass von den Zahlen

$$\pi_1+(m-h+1)-1, \ \ldots \ \pi_{m-h+1}$$

die erste die grösste und $>m-h+1$ wird und die Differentialgleichung $m-h-1$ solcher Integrale hat. Nimmt man diese Gleichung alsdann zur Gleichung (7.) dieser Nummer, setzt in (2.)

$$y=e^{w}(x-a)^{r}$$

ein, wo $w=\frac{f(x)}{(x-a)^{n}}$ ist, $n\geqq 1$, $f(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, $f(a)$ von Null verschieden ist, und bestimmt dadurch

$$q=e^{w}(x-a)^{r+\alpha}\varphi(x),$$

wo α eine ganze Zahl ist, $\varphi(x)$ nur Potenzen von $x-a$ mit positiven Exponenten enthält, so hat die Differentialgleichung (4.) in der Umgebung von $x=a$ einwerthige Coefficienten mit Potenzen von $(x-a)^{-1}$ in endlicher Zahl. Von den Zahlen

$$\pi_1+(m-h+2)-1, \ \ldots \ \pi_{m-h+2}$$

ist hier $\pi_2+(m-h+2)-2$ zuerst die grösste $>m-h+2$. Die Differentialgleichung (4.) hat das Integral

$$e^{w}(x-a)^{r}$$

mit unendlich vielen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, und wenn man r so wählt, dass es sich von den Exponenten von $x-a$, die in den Integralen von (7.) vorkommen, nicht um eine ganze Zahl unterscheidet, so hat (4.) jedenfalls nur die früheren $m-h-1$ linearunabhängigen Integrale der verlangten Eigenschaft. Und dieses Verfahren kann man fortsetzen bis zu einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung.

Man ersieht hieraus, dass die Differentialgleichung (1.), worin die Coefficienten die angegebene Bedingung erfüllen, nicht immer $m-h$ linearunabhängige Integrale der angegebenen Art hat.

8.

Wenn man nun der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer durch eine Reihenentwickelung der Form

$$y=(x-a)^r \cdot \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$$

zu genügen sucht, wo c_0 von Null verschieden ist, und man setzt $y=(x-a)^r \cdot u$, so nimmt die Differentialgleichung für u die Form (2.) Nr. 6 an; r ist alsdann Wurzel der Gleichung $(m-h)^{\text{ten}}$ Grades (3.) derselben Nummer. Diese Wurzel werde durch r_1 bezeichnet, die übrigen seien $r_2, \ldots r_{m-h}$. Setzt man dann in den Coefficienten p'_α der Gleichung (2.) in Nr. 6

$$r=r_1 \quad \text{und} \quad p'_\alpha (x-a)^{\varrho-m+\alpha} = Q_\alpha(x) = Q_\alpha(a) + (x-a)\, Q'_\alpha(x),$$

so kann man die Differentialgleichung auf die Form bringen;

$$\text{(1.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_h(a)\,(x-a)^{m-h-1} \dfrac{d^{m-h}u}{dx^{m-h}} + Q_{h+1}(x-a)^{m-h-2} \dfrac{d^{m-h-1}u}{dx^{m-h-1}} + \cdots + Q_{m-1}(a) \dfrac{du}{dx} = \\ -(x-a)^{\varrho-1} \dfrac{d^m u}{dx^m} - (x-a)^{m-1} Q'_1(x) \dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} - \cdots - (x-a)^{m-h} Q'_{m-h}(x) \dfrac{d^{m-h}u}{dx^{m-h}} \\ \qquad\qquad - \cdots - Q'_m(x) \cdot u. \end{array} \right.$$

Hieraus ergiebt sich von $k=0$ an für alle positiven ganzen Zahlen k:

$$\text{(2.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{k+1} \Big\{ Q_h(a)(k+1)k \ldots (k-m+h+2) + Q_{h+1}(a)(k+1)k \ldots (k-m+h+3) + \cdots + Q_{m-1}(a)(k+1) \Big\} \\ \qquad = A_{k0} c_k + A_{k1} c_{k-1} + \cdots + A_{kk} c_0, \end{array} \right.$$

wo die Grössen A sich aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen, die auf der rechten Seite der Gleichung (1.) vorkommen, und positiven Zahlen durch Addition und Multiplication zusammensetzen.

Die Gleichung

$$\text{(3.)} \quad Q_h(a)k..(k-m+h+2) + Q_{h+1}(a)k..(k-m+h+3) + \cdots + Q_{m-1}(a) = 0$$

stimmt mit Gleichung (5.) Nr. 6 überein und hat zu Wurzeln

$$r_2 - r_1 - 1, \ \ldots \ r_{m-h} - r_1 - 1.$$

Ist nun die Wurzel r_1 so beschaffen, dass sie sich von keiner der übrigen $r_2, \ldots r_{m-h}$ bloss um eine ganze Zahl unterscheidet, so verschwindet der Factor von c_{k+1} in Gleichung (2.) nicht für $k=0$ oder irgend eine positive ganze Zahl, und alle Coefficienten der Reihenentwickelung sind demnach vollständig bestimmt. Wenn man nun aber die Convergenz dieser formell bestimmten Reihe nachzuweisen versuchen wollte, so könnte man nicht das gewöhnliche Mittel anwenden, dass man statt der Reihen auf der rechten Seite der Differentialgleichung (1.) andere einsetzt, deren Coefficienten alle positiv sind und grösser als die Moduln der entsprechenden

Coefficienten in den ursprünglichen Reihen, um dadurch das Nämliche für die Grössen A in der Gleichung (2.) zu erreichen, und dass man ferner die Grössen Q in dem Factor von c_{k+1} in der Gleichung (2.) durch solche ersetzt, welche diesen Factor immer positiv und von einem gewissen Werthe von k an kleiner machen, als der Modul des ursprünglichen Factors von c_{k+1} beträgt, um hierdurch und noch mit Hülfe der willkürlichen Grösse c_0 statt der ursprünglichen Entwickelung eine andere zu erhalten, deren Coefficienten alle positiv und grösser als die Moduln der entsprechenden in der ursprünglichen Reihe sind. Die auf diese Weise gebildete neue Reihe muss divergiren, da in Gleichung (2.) auf der rechten Seite höhere Potenzen von k vorkommen als auf der linken; und demnach, wenn die neuen Coefficienten ebenfalls durch c bezeichnet werden, der Modul des Verhältnisses $\frac{c_{k+1}}{c_{k+m-g+1}}(x-a)^{g-m}$ ins Unendliche wächst. Die durch die genannte Umformung aus der Differentialgleichung (1.) hervorgehende Differentialgleichung giebt hier direct ein Beispiel einer Differentialgleichung von der Form (1.) Nr. 7 von speciellerer Beschaffenheit der Coefficienten, die für y eine formelle Entwickelung $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ zulässt, welche nicht convergirt. Weitere Beispiele von Differentialgleichungen, die Ausnahmen bilden und in den Coefficienten allgemeiner sind, liefern die in der vorigen Nummer angegebenen Differentialgleichungen, unmittelbar die der 2. Ordnung (10.), wo nach dem Vorhergehenden der Exponent r und die Coefficienten in der Entwickelung $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ vollständig bestimmt sind, diese Reihe aber nicht convergiren kann. Daraus folgt:

I. *Wenn die Wurzel r in der Gleichung* (3.) Nr. 6 *sich von keiner der übrigen um eine ganze Zahl unterscheidet, so existirt für y eine in den Coefficienten vollständig bestimmte Entwickelung* $(x-a)^r\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$, *worin* c_0 *von Null verschieden ist, die der Differentialgleichung* (1.) Nr. 7 *formell genügt, aber nicht immer convergirt.*

Wenn nun eine Gruppe von Wurzeln $r_1, \ldots r_\lambda$ in der Gleichung (3.) Nr. 6 vorkommt, die sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden und dieselben so angeordnet sind, dass der reelle Theil der folgenden nicht grösser, als der der vorhergehenden ist, so sind zunächst die Coefficienten in der Entwickelung $(x-a)^{r_1}\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ wieder vollständig

bestimmt. Falls aber diese Reihe nicht convergirt, so ist zuzusehen, ob bei der folgenden Wurzel, in welcher zuerst der reelle Theil kleiner, als in r_1 ist, sich die Coefficienten der Gleichung (2.) gemäss bestimmen lassen. Es sei diese Wurzel gleich $r_1 - k_1$, so verschwindet in der Gleichung (2.) der Factor von c_{k_1}, und es muss demnach die rechte Seite ebenfalls verschwinden. Alsdann bleibt c_{k_1} zunächst unbestimmt und die Coefficienten nehmen die Form an $c_\alpha = B_\alpha c_0$ für $\alpha < k_1$ und $c_\alpha = B'_\alpha c_{k_1} + B_\alpha c_0$ für $\alpha \gtrless k_1$. Die Reihe $c_0 \Sigma \frac{c_\alpha}{c_0} (x-a)^\alpha$ kann nun höchstens für einen einzelnen Werth von $\frac{c_{k_1}}{c_0}$ convergiren, weil man sonst durch Subtraction zweier solcher Reihen eine convergente Reihenentwickelung der Form $(x-a)^{r'} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo c_0 von Null verschieden wäre, für die Differentialgleichung herleiten könnte. Dass dieser Fall überhaupt vorkommt, kann man durch ein Beispiel nachweisen. Wählt man nämlich die Differentialgleichung zweiter Ordnung (10.) der vorigen Nummer so, dass die Wurzel der zugehörigen Gleichung (3.) Nr. 6 eine positive ganze Zahl k wird, was leicht geschehen kann, und bildet man nun nach den weiter folgenden Angaben der vorigen Nummer eine Differentialgleichung dritter Ordnung, in der $\pi_1 + m - 1 = g > m$ ist, die aber nur ein Integral der früher definirten Art hat, so ist dieses Integral von der Form $(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo c_0 von Null verschieden ist, während die zugehörige Gleichung (3.) Nr. 6 die Wurzeln $r+k+1$ und r haben muss.

Aus der Reihe der Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ existire nun zuerst für r_k eine convergente Entwickelung der Form $y_1 = (x-a)^{r_k} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo c_0 nicht verschwindet, während also in den vorhergehenden Wurzeln $r_1, \ldots r_{k-1}$ der reelle Theil grösser als in r_k ist. Man setze dann $y = y_1 \int z dx$ und bilde die Differentialgleichung (4.) der Nr. 6. Die zu dieser gehörige Gleichung (5.) Nr. 6 hat unter ihren Wurzeln folgende

$$r_1 - r_k - 1, \ \ldots \ r_{k-1} - r_k - 1, \ r_{k+1} - r_k - 1, \ \ldots \ r_\lambda - r_k - 1.$$

Ein Integral der Form $(x-a)^{r'} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, worin c_0 von Null verschieden und r' aus der vorstehenden Reihe von Wurzeln genommen ist, kann für diese Differentialgleichung zuerst nur für $r' = r_{k+1} - r_k - 1$ oder eine folgende Wurzel existiren, weil sonst der Ausdruck $y_1 \int z dx$ ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung der Form $(x-a)^{r_\alpha} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo

c_0 nicht verschwindet, liefern würde, worin $\alpha < k$ wäre. Wendet man weiter das nämliche Verfahren wie bei (7.) Nr. 6 an, so ergiebt sich:

II. *Wenn aus der Gruppe von Wurzeln* $r_1, r_2, \ldots r_{\bar{\lambda}}$ *in der Gleichung* (3.) Nr. 6, *die sich bloss um ganze Zahlen unterscheiden und so angeordnet sind, dass der reelle Theil der folgenden nicht grösser als der der vorhergehenden ist, zuerst bei* r_k *eine convergente Entwickelung der Form* $y = (x-a)^{r_k} \Sigma c_\alpha (x-a)^\alpha$, *wo* c_0 *von Null verschieden ist, der Differentialgleichung* (1.) *der vorigen Nummer genügt, so liefert diese Gruppe jedenfalls nicht mehr als* $\bar{\lambda} - k$ *linearunabhängige Integrale der vorgeschriebenen Art, die zu Exponenten aus der Reihenfolge* $r_k, r_{k+1}, \ldots r_{\bar{\lambda}}$ *gehören. Die* λ' *Exponenten* r *in Satz* I. Nr. 6 *nehmen daher die Anordnung an, dass der reelle Theil des folgenden nicht grösser als der des vorhergehenden ist.*

Auf diese Weise erhält man also für die gesuchten linearunabhängigen Integrale der Differentialgleichung (1.) Nr. 7, *die Potenzen von* $(x-a)^{-1}$ *in endlicher Anzahl enthalten, formelle Entwickelungen, von welchen diejenigen, die convergiren, die Integrale, die wirklich vorhanden sind, liefern.* Die Beurtheilung der Convergenz dieser Entwickelungen wird in dem Falle, wo die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) dieser Nummer rational sind, dadurch vereinfacht, dass man die Nenner wegmultiplicirt und statt der Gleichung (2.) eine andere Recursionsformel für die Coefficienten der Entwickelung aufstellt, die nur eine constante Anzahl derselben enthält. Aus dieser Formel lässt sich vielfach direct die Convergenz oder Divergenz der Reihenentwickelung erkennen. Es bleibt nun weiter zu untersuchen, inwiefern es für diese Convergenz allgemeinere Kennzeichen giebt, und ob durch weitere theoretische Betrachtungen sich noch andere Hülfsmittel finden lassen, die Integrale der angegebenen Art, die die Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer besitzt, zu bestimmen.

Berlin, im August 1871.