Die Elemente der Functionenlehre.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle a/S.)

Das Fortschreiten der Functionenlehre ist wesentlich durch den Umstand gehemmt, dass gewisse elementare Sätze derselben, obgleich von einem scharfsinnigen Forscher bewiesen, noch immer bezweifelt werden, so dass die Resultate einer Untersuchung nicht überall als richtig gelten, wenn sie auf diesen unentbehrlichen Fundamentalsätzen beruhen. Die Erklärung finde ich darin, dass zwar die Principien des Herrn *Weierstrass*, direct durch seine Vorlesungen und andere mündliche Mittheilungen, indirect durch Abschriften von Heften, welche nach diesen Vorlesungen gearbeitet wurden, selbst in weiteren Kreisen sich verbreitet haben, dass sie aber nicht von ihm selbst in authentischer Fassung durch den Druck veröffentlicht sind, so dass es keine Stelle giebt, an welcher man die Sätze *im Zusammenhange entwickelt* findet. Ihre Wahrheit beruht aber auf der nicht völlig feststehenden Definition der irrationalen Zahlen, bei welcher Vorstellungen der Geometrie, nämlich über die *Erzeugung* einer Linie *durch Bewegung*, oft verwirrend eingewirkt haben. *Die Sätze sind für die unten zu Grunde gelegte Definition der irrationalen Zahlen gültig, bei welcher Zahlen gleich genannt werden, die sich um keine noch so kleine angebbare Zahl unterscheiden, bei welcher ferner der irrationalen Zahl eine wirkliche Existenz zukommt*, so dass eine einwerthige Function für jeden *einzelnen* Werth der Veränderlichen, sei er rational oder irrational, gleichfalls einen *bestimmten* Werth besitzt. Von einem anderen Standpunkte aus können allerdings mit Recht Einwände gegen die Wahrheit der Sätze erhoben werden.

Nicht ohne Bedenken veröffentliche ich diese Arbeit, deren erster, wesentlichster Theil „Ueber Zahlen" bereits seit längerer Zeit vollendet ist. Abgesehen von der erheblichen Schwierigkeit, einen solchen Stoff darzustellen, trug ich Bedenken, eine Arbeit zu veröffentlichen, welche vorzugsweise die mir durch mündliche Mittheilung überkommenen Gedanken Anderer, besonders des Herrn *Weierstrass* enthält, so dass mir wenig mehr als die Durchführung angehört, bei der es darauf ankam, keine irgendwie erhebliche Lücke zu lassen. Hauptsächlich ist es die Nothwendigkeit, mich in einer späteren Abhandlung auf die Fundamentalsätze der Functionenlehre zu beziehen, welche mich dennoch zur Veröffentlichung der gegenwärtigen veranlasste, in der ich schliesslich diese Sätze beweise.

Zu besonderem Danke bin ich dem Herrn *Cantor* in Halle für seine mündlichen Mittheilungen verpflichtet, welche einen bedeutenden Einfluss auf die Gestaltung meiner Arbeiten ausübten, indem ich von ihm den Gedanken entlehnte, die allgemeinen Zahlen vermittelst jener besonders geeigneten Reihen einzuführen, die hier (A, §. 1, Def. 1) Zahlenreihen genannt werden. Es scheint mir dies eine, besonders für die Anwendungen auf die Functionenlehre (B, §. 2, Lehrs. 1), glückliche Fortbildung der ursprünglichen Einführungsart, bei welcher die allgemeineren Zahlen durch die in ihnen enthaltenen Vielfachen gewisser Grössen in unendlicher Anzahl bestimmt werden. Die Berechtigung, das durch die Reihen Eingeführte als Zahlengrösse zu betrachten, findet Herr *Cantor* darin, dass es möglich sei, auch hier die Begriffe des Grösser-, Kleiner- und Gleichseins festzustellen.

Die Frage, was eine Zahl sei, beantworte ich, wenn ich nicht bei den rationalen positiven stehen bleiben will, nicht dadurch dass ich die Zahl begrifflich definire, die irrationalen etwa gar als Grenze einführe, deren *Existenz* eine Voraussetzung wäre. Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt *), *indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne*, so dass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht. *Ein Hauptgewicht ist auf die Rechenoperation zu legen*, und das Zahlzeichen muss so gewählt, oder mit einem solchen Apparate ausgerüstet werden, dass es einen Anhalt zur Definition der Operationen gewährt.

Rechenoperationen heissen Regeln, nach welchen zwei Zahlen, die durch das Operationszeichen verbunden sind, gegen eine einzige umgetauscht werden können. Diese Regeln werden zunächst so festgesetzt, dass sie das Resultat der gewöhnlichen Rechnung geben, wenn die eingeführten Zahlen allein 0, 1, 2, 3, etc. waren. Die Unmöglichkeit der Subtraction in vielen Fällen veranlasst zur Einführung neuer Zeichen oder Zahlen: für jedes schon vorhandene Zeichen a führt man noch ein Zeichen $\operatorname{neg}(a)$ ein, und erweitert die Definition der Operationen in geeigneter Art, so dass sie für die neuen Zeichen noch ein Resultat liefern, an die früheren angebracht, dasselbe wie früher. Dann zeigt

*) Auf die in dieser Einleitung mitgetheilte Art leite ich seit vielen Jahren meine Vorlesungen über algebraische Analysis ein.

sich, nach zweckmässiger Definition der Subtraction, dass $\mathrm{neg}(a) = 0 - a$ sein muss. Die Unmöglichkeit der Division zweier Zeichen a und b, wenn der Quotient nicht eine ganze Zahl ist, veranlasst, Doppelzeichen (a, b) den früheren hinzuzufügen, wobei man die Verbindung mit diesen dadurch herstellt, dass es erlaubt sein soll, $(a, 1)$ mit a zu vertauschen. Erweitert man dann die Erklärung der Multiplication, so zeigt sich, dass (a, b) nichts anderes ist, als das Resultat der Division von $(a, 1)$ durch $(b, 1)$, oder von a durch b. Nunmehr sind für die eingeführten Zahlen die Addition, Subtraction, Multiplication, und im Allgemeinen die Division möglich — nämlich letztere ist in einem Falle unmöglich, wenn der Nenner Null und der Zähler nicht Null ist. Die Unmöglichkeit, die Wurzelausziehung in allen Fällen, dann auch noch andere transcendente Operationen an den bisher eingeführten Zahlen vorzunehmen, veranlasst zur Einführung neuer Zeichen, der reellen irrationalen und der imaginären Zahlen. Wie die ersteren gewählt werden, um eine Handhabe für die Operationen zu geben, sieht man im Abschnitte A. Ich habe mich in demselben auf die reellen Zahlen beschränkt, da man von ihnen ohne Mühe zu den complexen gelangen kann, indem man zu den Zeichen der reellen Zahlen a, b, etc. noch zusammengesetzte einführt. Statt der complexen Zahl $a + b\sqrt{-1}$ tritt nämlich als Zeichen (a, b_ι) ein, welches, nach geeigneter Erklärung der Addition, gleich $a + b_\iota$ wird, nach der Erklärung der Multiplication zunächst gleich $a + b . 1_\iota$, und endlich, da aus derselben Erklärung folgt, dass 1_ι eine Wurzel aus -1 ist, gleich $a + b\sqrt{-1}$.

A. Ueber Zahlen.

§. 1. Die Zahlenreihen.

1. *Definition. Zahlenreihe* heisst eine Reihe von Zahlen a_1, a_2, etc., a_n, etc., wenn für jede noch so klein gegebene von Null verschiedene Zahl η ein Werth n existirt, der bewirkt, dass $a_n - a_{n+\nu}$ für alle ganzen positiven ν unter η liegt.

Anmerkung. Das Wort *Zahl,* ohne weiteren Zusatz, bedeutet im Abschnitte A. immer *rationale Zahl.* Die Null wird hierbei wie eine rationale Zahl angesehen.

2. *Definition.* Jede Zahlenreihe, in welcher die Zahlen a_n, mit wachsendem Index n, unter jede angebbare Grösse herabsinken, heisst *Elementarreihe.*

Folgerung. Die Glieder a jeder einzelnen Zahlenreihe bleiben unter einer endlichen Grösse. Ist die Reihe nicht eine elementare, so bleiben sie, von einem gewissen Werthe des Index n an, auch *sämmtlich* über einer von Null verschiedenen Grösse.

Bezeichnung. Der besseren Uebersicht halber sollen griechische Buchstaben für die Glieder nur bei Elementarreihen verwendet werden. Es ist also η_1, η_2, etc. eine Elementarreihe.

1. *Lehrsatz.* Ist sowohl a_1, a_2, etc. als auch b_1, b_2, etc. eine Zahlenreihe, so sind auch a_1+b_1, a_2+b_2, etc., ferner a_1-b_1, a_2-b_2, etc. und $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, etc. Zahlenreihen.

Beweis. Es ist

$$(a_n \pm b_n)-(a_{n+\nu} \pm b_{n+\nu}) = (a_n - a_{n+\nu}) \pm (b_n - b_{n+\nu}),$$

wenn die oberen Zeichen zusammen gehören und ebenso die unteren. Dieser Ausdruck wird mit wachsendem n beliebig klein, da die a und die b eine Zahlenreihe bilden, also (§. 1, Def. 1) $a_n - a_{n+\nu}$ und $b_n - b_{n+\nu}$ mit wachsendem n beliebig klein werden.

Aehnliches gilt für

$$a_n b_n - a_{n+\nu} b_{n+\nu} = a_n(b_n - b_{n+\nu}) + b_{n+\nu}(a_n - a_{n+\nu}),$$

da a_n und $b_{n+\nu}$ unter einer endlichen Grösse bleiben (§. 1, Folg.).

2. *Lehrsatz.* Unter den Voraussetzungen des ersten Lehrsatzes, und wenn noch ausserdem die a keine Elementarreihe bilden, ist auch

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \ldots$$

eine Zahlenreihe.

Beweis. Es ist

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+\nu}}{a_{n+\nu}} = \frac{b_n a_{n+\nu} - a_n b_{n+\nu}}{a_n a_{n+\nu}} = \frac{b_n(a_{n+\nu} - a_n) + a_n(b_n - b_{n+\nu})}{a_n a_{n+\nu}}.$$

Da der Zähler des Ausdruckes auf der rechten Seite mit wachsendem n beliebig klein wird, der Nenner aber über einer von Null verschiedenen Grösse bleibt (§. 1, Folg.), so wird auch die linke Seite mit wachsendem n beliebig klein.

3. *Definition. Zahlenreihen* a_1, a_2, *etc. und* b_1, b_2, *etc. heissen nur und immer gleich, wenn die Zahlenreihe* a_1-b_1, a_2-b_2, *etc. eine elementare ist.*

3. *Lehrsatz. Alle Elementarreihen sind einander gleich,* und umgekehrt ist eine Elementarreihe keiner anderen Zahlenreihe als einer elementaren gleich.

Beweis. Sind ε_n und η_n Glieder von zwei Elementarreihen, so sinkt $\varepsilon_n - \eta_n$ mit wachsendem n unter jeden Grad der Kleinheit. Es ist daher

$\varepsilon_1 - \eta_1$, $\varepsilon_2 - \eta_2$, etc. eine elementare Reihe, also (§. 1, Def. 3) wirklich die Elementarreihe ε_1, ε_2, etc. gleich der anderen η_1, η_2, etc.

Eine nicht elementare Reihe mit dem n^{ten} Gliede a_n kann aber nicht gleich der elementaren mit dem n^{ten} Gliede ε_n sein, weil $a_n - \varepsilon_n$ mit wachsendem n über einer angebbaren Grösse bleibt (§. 1, Folg.).

§. 2. Einführung der allgemeineren Zahlen oder Zahlzeichen.

Forderung. Einer jeden Zahlenreihe ein Zeichen hinzuzufügen.

Man führt als Zeichen die Reihe selbst ein, diese in eckige Parenthesen gesetzt, so dass z. B. das zur Reihe a, b, c, etc. gehörende Zeichen $[a, b, c, \text{etc.}]$ ist.

1. *Definition. Allgemeinere Zahl oder Zahlzeichen* heisst das zu einer Zahlenreihe gehörende Zeichen.

2. *Definition. Zahlzeichen heissen gleich* oder sind vertauschbar, wenn sie zu gleichen, ungleich oder nicht vertauschbar, wenn sie zu ungleichen Zahlenreihen gehören (§. 1, Def. 3.).

Bezeichnung. Sind $[a, b, \text{etc.}]$ und $[a', b', \text{etc.}]$ einander gleich, so wird dies durch $[a, b, \text{etc.}] = [a', b', \text{etc.}]$, oder durch $[a', b', \text{etc.}] = [a, b, \text{etc.}]$ bezeichnet.

Abkürzung. Als Zahlzeichen, welches zu einer Zahlenreihe gehört, deren Glieder mit den gleichen kleinen Buchstaben gebildet sind, soll auch der entsprechende grosse genommen werden können, daher als Zeichen von $[a_1, a_2, \text{etc.}]$ auch A, von $[\eta_1, \eta_2, \text{etc.}]$ auch H.

Festsetzung. Das Zahlzeichen, welches zu einer Zahlenreihe gehört, die nur gleiche Glieder a enthält, sei die rationale Zahl a selbst.

1. *Folgerung.* Es ist also (§. 2, Bezeichn.)

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots] = A,$$
$$[a, a, a, \ldots] = a.$$

1. *Lehrsatz. Das Zeichen jeder Elementarreihe ist* 0.

Beweis. Alle Elementarreihen sind gleich (§. 1, Lehrs. 3), also sind die Zeichen aller Elementarreihen gleich (§. 2, Def. 2), also gleich dem Zeichen $[0, 0, 0, \text{etc.}]$, also (§. 2, Folg. 1) gleich Null.

Erläuterung. Man rechnet nicht mit Zahlenreihen, sondern mit Zahlzeichen. Die Rechenoperationen werden unten (§. 3) durch die Zahlenreihen definirt, und zwar so definirt, dass sie die bekannten Resultate für rationale

Zahlen liefern, wenn die Glieder a_1, a_2, etc. sämmtlich gleich, also die Zahlzeichen rationale Zahlen werden; die obige *Festsetzung* ist daher gestattet.

3. *Definition.* Es heisst $A > B$, wenn $a_n - b_n$ von einem gewissen Werthe der Zahl n an immer angebbar positiv, und $A < B$, wenn $a_n - b_n$ von einem gewissen n an angebbar negativ bleibt.

Erläuterung. Das Gleichsein schliesst ein Grösser- oder Kleinersein aus. Ist nämlich $A = B$, so gehören die Glieder $a_n - b_n$ einer Elementarreihe an; ist aber nicht $A = B$ so gehören die Glieder $a_n - b_n$ nicht einer Elementarreihe an, bleiben also, absolut genommen, (§. 1, Folg. 1) über einer von Null verschiedenen Grösse, so dass dann entweder $A > B$ oder $A < B$.

2. *Folgerung.* Wenn $A > B$, so ist auch $B < A$.

2. *Lehrsatz.* Die Zeichen der beiden Reihen

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad \ldots;$$
$$a_1,\quad a_2,\ \text{etc.},\quad a_\varrho,\quad b_\mu,\quad b_{\mu+1},\quad b_{\mu+2},\ \text{etc.},$$

sind einander gleich.

Beweis. Die beiden Reihen sind einander gleich, da die Reihe der Differenzen

$$a_1 - b_1,\quad a_2 - b_2,\ \text{etc.},\quad a_\varrho - b_\varrho,\quad b_\mu - b_{\varrho+1},\quad b_{\mu+1} - b_{\varrho+2},\ \text{etc.}$$

eine Elementarreihe ist. (§. 2, Def. 2; §. 1, Def. 3).

3. *Folgerung.* *) Ein Zahlzeichen bleibt ungeändert, wenn man von der Reihe, zu der es gehört, eine beliebige endliche Anzahl von Gliedern fortlässt.

§. 3. Rechnen mit allgemeineren Zahlen.

1. *Definition.* $A \pm B$ ist dasjenige Zeichen, welches zur Zahlenreihe (§. 1, Lehrs. 1) $a_1 \pm b_1$, $a_2 \pm b_2$, etc., und AB dasjenige, welches zur Zahlenreihe $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, etc. gehört. Ist nicht $A = 0$ (§. 1, Lehrs. 2; §. 2, Lehrs. 1), so gehört $\frac{B}{A}$ zur Zahlenreihe

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{b_2}{a_2},\quad \frac{b_3}{a_3},\quad \ldots.$$

---

*) Man ersieht hieraus, dass es genügt hätte, in das zur Reihe gehörende Zeichen nicht ihre ersten Glieder, sondern nur das allgemeine Gesetz aufzunehmen, so dass man als zur Reihe a_1, a_2, etc. gehörendes Zeichen auch $[a_n]$ wählen durfte. Dies führt auf die auch sonst übliche Bezeichnung, indem man nur noch die Parenthesen mit Punkten vertauscht, und z. B. nicht, was erlaubt ist (§. 4, Beispiel), $\frac{1}{9} = [0.1, 0.11, 0.111, \text{etc.}]$, sondern $= 0,111\ldots$ setzt. Es wird übrigens im Folgenden die bisherige Bezeichnung überall beibehalten.

1. *Folgerung.* Ist $A \pm B = C$, oder $AB = C$, oder, vorausgesetzt, dass A nicht den Werth Null besitzt, $\frac{C}{A} = B$, so hat man resp.

$$a_n \pm b_n + \eta_n = c_n; \qquad a_n b_n + \eta_n = c_n; \qquad \frac{c_n}{a_n} + \eta_n = b_n.$$

Umgekehrt folgen aus den letzten drei Gleichungen die ersten.

2. *Folgerung.* Es ist $A \pm 0 = A$.

3. *Folgerung.* Das Zeichen, welches zu $-a_1$, $-a_2$, etc. gehört, ist gleich $0 - A$.

Anmerkung. Man ist überein gekommen, $-A$ statt $0-A$ zu setzen; man rechnet mit $-A$ so, als ob der vollständige Ausdruck, den es vertritt, vorliegt.

2. *Definition.* *Zahlwerth* oder absoluter Werth eines Zeichens A ist das Zeichen, welches man erhält, wenn man statt der a in der Reihe ihre Zahlwerthe setzt.

Lehrsatz. Wenn $A \pm B = C$, oder $AB = C$ und dann nicht zugleich $A = 0$, so wird resp. $A = C \mp B$ oder $B = \frac{C}{A}$.

Beweis. Im ersten Falle ist (§. 3, Folg. 1) $a_n \pm b_n + \eta_n = c_n$, folglich $a_n + \eta_n = c_n \mp b_n$. Also hat man

$$[a_1 + \eta_1,\ a_2 + \eta_2,\ \text{etc.}] = [c_1 \mp b_1,\ c_2 \mp b_2,\ \text{etc.}].$$

Die linke Seite giebt (§. 3, Def. 1; §. 2, Lehrs. 1) $A + 0$ oder (§. 3, Folg. 2) A, die rechte (§. 3, Def. 1) $C \mp A$. Der Beweis im zweiten Falle wird ähnlich geführt.

§. 4. Verhalten der allgemeineren Zahlen zu den rationalen.

1. *Definition.* Giebt es für (rationale) Zahlen a_1, a_2, etc. eine (rationale) Zahl $\mathfrak{A}$ von der Beschaffenheit, dass $\mathfrak{A} - a_n$ mit wachsendem n unter jeden angebbaren Werth sinkt, so heisst $\mathfrak{A}$ die Grenze der a.

1. *Lehrsatz.* Besitzen die Glieder der Zahlenreihe a_1, a_2, etc. eine (rationale) Grenze $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ auch das zur Reihe a_1, a_2, etc. gehörende Zeichen.

Beweis. Nach dem Begriffe der Grenze (§. 4, Def. 1) bilden die Glieder

$$\mathfrak{A} - a_1, \quad \mathfrak{A} - a_2, \quad \mathfrak{A} - a_3, \quad \ldots$$

eine Elementarreihe, deren Zeichen Null ist (§. 2, Lehrs. 1). Dieses ist aber andererseits (§. 3, Def. 1) auch

$$= [\mathfrak{A},\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{A},\ \text{etc.}] - [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \text{etc.}],$$

also (§. 2, Festsetz.) gleich $\mathfrak{A}-A$. Hieraus folgt in der That

$$\mathfrak{A} = [a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Beispiel. Da die Brüche 0.1, 0.11, 0.111, etc. der (rationalen) Zahl $\frac{1}{9}$ beliebig nahe kommen, so ist (Man vgl. die Bemerkung zu §. 2, Folg. 3)

$$\tfrac{1}{9} = [0.1,\ 0.11,\ 0.111,\ \text{etc.}].$$

2. *Definition.* Von Zahlzeichen C_1, C_2, etc., C_n, etc. sagt man, dass sie mit wachsendem n unter jeden angebbaren Werth sinken, wenn für jedes, von Null verschiedene, Zahlzeichen D ein solcher Werth von n existirt, dass für dieses n und alle positiven ganzen Zahlen ν der Zahlwerth von $C_{n+\nu}$ (§. 3, Def. 2) kleiner ist (§. 2, Def. 3) als der von D.

Folgerung. Ist dies für jedes D der Fall, so tritt es auch für jede rationale Zahl d ein, indem eine rationale Zahl ein specieller Fall des Zahlzeichens ist (§. 2, Fests.). Aber auch umgekehrt: tritt es für jede rationale Zahl d ein, so ist es für jedes Zahlzeichen D der Fall. Soll es nämlich für ein bestimmtes D eintreten, dessen Zahlwerth gleich $[d_1, d_2, \text{etc.}]$ und nicht Null ist, so dass also auch d_n angebbar über Null bleibt, so giebt es eine positive rationale Zahl d, die kleiner ist als alle Zahlen d_m von einem bestimmten m an. Sinken nun die Zahlwerthe der $C_{n+\nu}$ unter d, so dass, wenn ein solcher Zahlwerth durch $[c_1, c_2, \text{etc.}]$ dargestellt wird, $d-c_m$ mit wachsendem m immer positiv bleibt, so wird, da $d_m > d$, auch $d_m - c_m$ positiv bleiben. *Es genügt also, wenn das Criterium für die rationalen Zahlen D erfüllt ist.*

3. *Definition.* Ist A ein bestimmtes Zahlzeichen, und sinkt $A-B_n$ mit wachsendem n unter jedes angebbare Zahlzeichen, *so heisst A die Grenze der B.*

2. *Lehrsatz. Das Zahlzeichen A ist die Grenze der Glieder a der Reihe, zu welcher es gehört.*

Beweis. Man hat zu zeigen (§. 4, Def. 3), dass $A-a_n$ unter jedes angebbare Zahlzeichen, also nur (§. 4, Folg.), dass es unter jede rationale Zahl d sinkt. Nun ist $A-a_n$ gleich

$$[a_1-a_n,\ a_2-a_n,\ \text{etc.},\ a_n-a_n,\ a_{n+1}-a_n,\ \text{etc.}],$$

oder (§. 2, Lehrs. 2) gleich

$$[a_{n+1}-a_n,\ a_{n+2}-a_n,\ \ldots].$$

Nimmt man n hinreichend gross, so bleiben in dem vorstehenden Ausdrucke die einzelnen Glieder der Reihe unter d, also liegt das Zahlzeichen unter $[d, d, d, \text{etc.}]$, d. h. unter d.

§. 5. Die irrationalen Zahlen beliebiger Ordnungen.

Bezeichnung. Die allgemeineren Zahlen, wenn sie auch in besonderen Fällen rationale werden, sollen irrationale Zahlen erster Ordnung heissen. Wie aus den rationalen Zahlen diese Irrationalen erster Ordnung A gebildet wurden, so lassen sich aus diesen wiederum Irrationale zweiter Ordnung A', aus diesen Irrationale dritter Ordnung A'', etc. bilden. Die Irrationalen $m+1^{\text{ter}}$ Ordnung werden durch $A^{(m)}$ bezeichnet.

Irrational, ohne Hinzufügung der Ordnung, steht dem Rationalen gegenüber. Dass irrationale Zahlen existiren, dass also nicht alle Grössen $A^{(m)}$ rationale Zahlen sein können, wird im Abschnitte B, §. 3, Folg. 2 gezeigt.

Lehrsatz. Die Irrationalitäten $m+2^{\text{ter}}$ Ordnung sind keine neuen, sondern stimmen mit denen erster Ordnung überein.

Beweis *). Es sei

$$A^{(m+1)} = [A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, A_3^{(m)}, \ldots].$$

Ferner mögen a_1, a_2, a_3, etc. rationale Zahlen vorstellen, die resp. unter $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$, $A_3^{(m)}$, etc. liegen, und sich von diesen um weniger als resp. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. unterscheiden. Heisst das zu a_1, a_2, a_3, etc. gehörende Zeichen, welches also eine irrationale Zahl erster Ordnung ist, A, so wird $A^{(m+1)}-A$ das Zeichen einer Elementarreihe oder Null, d. h. es ist $A^{(m+1)}$ gleich A.

B. Ueber Functionen.

§. 1. Functionen im allgemeinen.

Definition. Einwerthige Function einer Veränderlichen x heisst ein Ausdruck, der für jeden einzelnen rationalen oder irrationalen Werth von x eindeutig definirt ist.

Erläuterung. Der Werth der Function für einen irrationalen Werth der Veränderlichen darf also nicht so definirt sein, dass er von der speciellen Zahlenreihe abhängt, durch die gerade jener irrationale Werth gegeben wird, *er muss vielmehr derselbe bleiben, welches von den gleichen Zahlzeichen auch zur Feststellung des irrationalen Werthes x gewählt war.*

---

*) Es wird vorausgesetzt, dass man die Irrationalitäten höherer Ordnungen ebenso behandelt, wie im Früheren die erster Ordnung behandelt wurden. Dann ergeben sich ganz ähnliche Beziehungen, die ich hier ohne weiteres voraussetze, da ihre Entwickelung wesentlich eine Wiederholung des Früheren sein würde.

1. *Lehrsatz.* Jede ganze Potenz von x ist eine einwerthige Function.

Beweis. Es sei irgend ein bestimmter, rationaler oder irrationaler Werth von x, der X heissen möge, sowohl durch $[x_1, x_2, \text{etc.}]$ als auch durch das demselben X gleiche Zeichen $[y_1, y_2, \text{etc.}]$ gegeben, *) so dass also (A, §. 2, Def. 2) $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$, etc. eine Elementarreihe η_1, η_2, etc. bilden. Nach m maliger Multiplication von X mit sich selbst (A, §. 3, Def. 1) wird erhalten resp.

$$[x_1^m,\ x_2^m,\ \text{etc.}],\quad [y_1^m,\ y_2^m,\ \text{etc.}],$$

welche Zahlen übereinstimmen, da ihre Differenz

$$[(x_1+\eta_1)^m - x_1^m,\ (x_2+\eta_2)^m - x_2^m,\ \text{etc.}]$$

das Zahlzeichen einer Elementarreihe ist.

Folgerung. Jede sogenannte ganze Function von x ist eine Function von x.

2. *Lehrsatz.* Es sind $\sin x$ und $\cos x$ Functionen von x.

Beweis der ersten Behauptung. Als Erklärung von $\sin x$ gilt die bekannte Potenzreihe, was man so fassen muss, dass $\sin x$ das Zeichen ist, welches der Zahlenreihe

$$x,\quad x - \frac{x^3}{6},\quad x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},\quad \text{etc.}$$

angehört. Jedes Glied, wie weit man auch geht, ist eine ganze Function von x, hat also, unabhängig von der Entstehung von x, einen völlig bestimmten Werth. Sind die Glieder der Zahlenreihe vollständig bestimmt, so ist es auch das zu ihr gehörende Zeichen, nämlich $\sin x$.

Anmerkung. Es sollte hier kein Mittel gegeben werden, $\sin x$ für einen irrationalen Werth von x, etwa durch Annäherung, zu berechnen, indem man Näherungswerthe $\sin x_1$, $\sin x_2$, etc. bildet, wo x_1, x_2, etc. Glieder der Zahlenreihe für den irrationalen Werth vorstellen. Bisher wurde hier noch nicht einmal untersucht, ob der Sinus dieses Werthes mit $\sin x_1$, $\sin x_2$, etc. zusammenhängt. (M. vgl. B, §. 2, Erläut.). Wie eine irrationale Zahl eine völlig bestimmte Bedeutung besitzt, so kommt auch dem Sinus jeder Zahl eine solche zu, — nur dies ist bisher bewiesen. Es hat also einen Sinn, wenn man von der *Summe einer Fourierschen Reihe,* in welche man eine endliche Function entwickelt hat, *auch an den Sprungstellen* handelt. Der Einwand, dass ein

---

*) Nach den im §. 5 angedeuteten Erweiterungen wird man unter den Grössen x und y nicht mehr rationale Zahlen verstehen müssen; sie können auch sämmtlich oder theilweise irrational sein. Da das Folgende nur von Functionen handelt, die einwerthig sind, so wird es überflüssig sein, diese Bezeichnung jedes Mal hinzuzufügen.

Werth dort nicht existire, wenn die Abscisse, durch π getheilt, eine irrationale Zahl ist, konnte nur so lange als berechtigt gelten, als man den Irrationalitäten nicht eine selbständige Existenz beilegte. (Durch die numerische Berechnung der Summe wird man sich übrigens bei Berücksichtigung einer geringeren Anzahl n von Gliedern dem Mittelwerthe, bei einer beliebig grossen dem Werthe vor oder nach dem Sprunge nähern. Die Annäherung an den Mittelwerth kann man durch ein grösseres n nur dann vergrössern, wenn man für die kritische irrationale Abscisse einen solchen rationalen Werth gesetzt hat, der dem wahren Werthe derselben hinlänglich nahe kommt).

§. 2. Bedingungen der Continuität.

1. *Definition.* Eine Function $f(x)$ heisst *bei einem bestimmten einzelnen Werthe $x = X$ continuirlich,* wenn, für jede noch so klein gegebene Grösse ε, eine andere positive Zahl η_0 von solcher Beschaffenheit existirt, dass für keine positive Grösse η, die kleiner als η_0 ist, der Zahlwerth von $f(X \pm \eta) - f(X)$ das ε überschreitet.

1. *Folgerung.* Zwei Functionswerthe für Argumente x, welche zwischen $X - \eta$ und $X + \eta$ liegen, können sich höchstens um 2ε unterscheiden.

Erläuterung. Eine Function ist nur ein Aggregat von einzelnen Werthen (A, §. 1, Def.); ein Zusammenhang zwischen denselben, so dass ein Werth sich aus den Werthen in der Umgebung ergiebt, wird erst durch die Continuität hergestellt.

1. *Lehrsatz.* *) Ist eine Function $f(x)$ bei $x = X$ continuirlich, so bilden für jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc., die das Zeichen X besitzt, auch $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. eine Zahlenreihe mit dem Zahlzeichen $f(X)$; *und umgekehrt,* wenn für jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc., die das Zeichen X besitzt, auch $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. eine Zahlenreihe mit dem Zeichen $f(X)$ bilden, so ist $f(x)$ bei $x = X$ continuirlich.

---

*) Den Satz, dass die Function nur und immer continuirlich ist, wenn $f(X) - f(x_n)$, für jede Zahlenreihe von X beliebig klein wird, mit seinem Beweise, entlehne ich dem Herrn *Cantor.* Während ich mich hier auf Functionen mit einer Veränderlichen beschränke, hat Herr *Cantor* allgemein Functionen mehrerer Veränderlichen behandelt; er wird zeigen, dass diese Functionen die Continuität, welche ich an einer anderen Stelle (Dieses Journal, Bd. 71, S. 361) eine gleichmässige nannte, besitzen, wenn sie *in jedem einzelnen Punkte* gewisse Bedingungen erfüllen. Den allgemeinen Gang des Beweises einiger Sätze im §. 3 nach den Principien des Herrn *Weierstrass* kenne ich durch mündliche Mittheilungen von ihm selbst, von Herrn *Schwarz* und *Cantor,* so dass bei diesen Beweisen nur die Durchführung im Einzelnen von mir herrührt.

Beweis. Erstens. Jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc. lässt sich mit Hülfe einer Elementarreihe als $X+\eta_1$, $X+\eta_2$, etc. darstellen. Ist nun die Function continuirlich, so werden für jede gegebene Grösse ε (B, §. 2, Def. 1) die Glieder der Reihe η_1, η_2, etc. unter η_0 herabsinken, so dass, von einem gewissen Werthe von n an, $f(X+\eta_n)-f(X)$, d. h. $f(x_n)-f(X)$ nicht mehr ε überschreitet. Diese Differenz ist, da man ε beliebig klein nehmen kann, das allgemeine Glied einer Elementarreihe, $f(x_1)-f(X)$, $f(x_2)-f(X)$, etc., deren Zahlzeichen daher Null wird. Andererseits ist es auch (A, §. 3, Def. 1) gleich

$$[f(x_1),\ f(x_2),\ \text{etc.}]-f(X),$$

wodurch der erste Theil bewiesen ist, nämlich die Gleichheit

$$f(X) = [f(x_1),\ f(x_2),\ \text{etc.}].$$

Zweitens. Erfüllt nun die Function die vorstehende Bedingung, welche besagt, dass für jede Zahlenreihe x_1, x_2, etc. ohne irgend eine Ausnahme, deren Zahlzeichen X ist, $f(x_1)-f(X)$, $f(x_2)-f(X)$, etc. beliebig klein werden, so folgt daraus ihre Continuität. Würde nämlich, wenn man eine bestimmte Zahl ε festhält (B, §. 2, Def. 1), wie klein man auch eine Zahl η_0 nimmt, niemals die Bedingung der Continuität erfüllt sein, würden also noch immer Werthe η unter η_0 existiren, für welche $f(X+\eta)-f(X)$ über ε bleibt, so sei für irgend eine Grösse von η_0 ein solcher Werth von η (unter diesem η_0), für welchen obige Differenz nicht kleiner als ε ist, gleich η'. Für einen halb so grossen Werth von η_0 möge die Differenz bei $\eta=\eta''$ nicht kleiner als ε sein; für ein η_0 gleich der Hälfte des früheren (dem Viertel des ersten) möge dies bei $\eta=\eta'''$ geschehen, u. s. f. Da die Werthe von η_0 eine Elementarreihe bilden, so ist dasselbe mit (den kleineren) η', η'', η''', etc. der Fall; es würden also $X+\eta'$, $X+\eta''$, etc. eine Zahlenreihe x_1, x_2, etc. mit dem Zeichen X vorstellen, ohne dass doch $f(x_1)-f(X)$, $f(x_2)-f(X)$, etc. unter ε sinken — gegen die Voraussetzung.

2. *Lehrsatz.* Eine continuirliche Function $f(x)$ ist für jedes x bekannt, wenn sie für jeden rationalen Werth dieser Veränderlichen gegeben ist.

Beweis. Es sei X eine irrationale, durch die Reihe x_1, x_2, x_3, etc. gegebene Grösse; ferner mögen y_1, y_2, y_3, etc. rationale Zahlen vorstellen, die sich von x_1, x_2, x_3, etc. um weniger als 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. unterscheiden. Da die x von den gleichnamigen y nur um Glieder einer Elementarreihe verschieden sind, so ist auch (A, §. 2, Def. 2) X gleich $[y_1, y_2, \text{etc.}]$, also (B, §. 2, Lehrs. 1)

$$f(X) = [f(y_1), f(y_2), \text{etc.}],$$

folglich bekannt.

3. *Lehrsatz.* Jede ganze Potenz x^m ist bei jedem einzelnen Werthe $x = X$ continuirlich.

Beweis. Es sei wiederum $X = [x_1, x_2, \text{etc.}]$, woraus folgt (A, §. 3, Def. 1) dass

$$X^m = [x_1^m, x_2^m, \ldots]$$

sei. Dies ist aber (B, §. 2, Lehrs. 1) die Bedingung der Continuität für eine Function $f(x) = x^m$ bei X.

2. *Folgerung.* Jede ganze Function ist bei jedem einzelnen Werthe der Veränderlichen continuirlich.

4. *Lehrsatz.* Es ist $\sin x$ bei jedem einzelnen Werthe $x = X$ continuirlich.

Beweis. Man hat nachzuweisen, dass $\sin x_1$, $\sin x_2$, etc. eine Zahlenreihe bilden, und zweitens, dass das Zeichen derselben $\sin X$ ist. Beides folgt, wenn man gezeigt hat, dass die Reihe $\sin X - \sin x_1$, $\sin X - \sin x_2$, etc. eine elementare ist. In der That wird aber $\sin X - \sin x_n$ oder

$$\left[X - x_n,\ X - x_n - \frac{X^3 - x_n^3}{6},\ \text{etc.}\right]$$

mit wachsendem n beliebig klein.

§. 3. Eigenschaften continuirlicher Functionen.

1. *Definition.* Eine Function $f(x)$ heisst *continuirlich* von $x = a$ bis $x = b$, wenn sie bei jedem einzelnen Werthe $x = X$ zwischen $x = a$ und $x = b$, mit Einschluss der Werthe a und b, continuirlich ist (B, §. 2, Def. 1); sie heisst *gleichmässig continuirlich* von $x = a$ bis $x = b$, wenn für jede noch so kleine gegebene Grösse ε eine solche positive Grösse η_0 existirt, dass für alle positiven Werthe η, die kleiner als η_0 sind, $f(x \pm \eta) - f(x)$ unter ε bleibt. Welchen Werth man auch x geben möge, nur vorausgesetzt, dass x und $x \pm \eta$ dem Gebiete von a bis b angehören, muss *dasselbe* η_0 das Geforderte leisten.

1. *Lehrsatz.* Jede ganze Potenz von x ist zwischen irgend welchen gegebenen Grenzen gleichmässig continuirlich.

Beweis. Da $(x \pm \eta)^m - x^m$, jedenfalls unter dem Producte aus η und einer in den gegebenen Grenzen festen Grösse bleibt, so lässt sich diese Differenz offenbar für alle x durch denselben Werth von η beliebig klein machen.

1. *Folgerung.* Jede ganze Function ist zwischen beliebig gegebenen Grenzen gleichmässig continuirlich.

2. *Lehrsatz.* Besitzt eine (für jedes einzelne x) von a bis b continuirliche Function $f(x)$ für zwei zwischen a und b liegende Zahlen $x = x_1$ und $x = x_2$ entgegengesetzte Vorzeichen, so verschwindet sie für einen dazwischen liegenden Werth von x.

Beweis. *) Es mögen $x_2 - x_1 = \delta$ und $f(x_1)$ positiv sein. Man bilde nun die Zahlen

$$x_3 = x_2 - \frac{\delta}{2}, \quad x_4 = x_3 \pm \frac{\delta}{4}, \quad x_5 = x_4 \pm \frac{\delta}{8},$$

allgemein

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{\delta}{2^{n-1}},$$

und zwar gilt, bei der Bildung von x_{n+1} aus x_n das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem $f(x_n)$ das positive oder negative Vórzeichen besitzt; — ist der Functionswerth $f(x_n)$ für irgend ein n Null, so bedarf der Satz keines weiteren Beweises, weshalb dieser Fall ausgeschlossen bleibt.

Die Zahlen x_1, x_2, etc. bilden eine Zahlenreihe, da (A, §. 1, Def. 1) $x_{n+\nu} - x_n$, wie aus den vorstehenden Gleichungen durch eine ganz elementare Rechnung hervorgeht, selbst im ungünstigsten Falle, wenn nämlich die Functionswerthe für x_{n-1}, x_n, etc., $x_{n+\nu-1}$ sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen, mit wachsendem n beliebig klein wird. Das Zahlzeichen dieser Zahlenreihe sei X; ich zeige, dass $f(X)$ Null ist.

Wäre dies nicht Null, so ist es eine bestimmte Zahl, die 4ε heisse. Man bilde nun eine solche Grösse η_0, dass $f(X \pm \eta) - f(X) < \varepsilon$ (B, §. 2, Def. 1), und nehme n so gross, dass x_n, x_{n+1}, etc. sich von X um weniger als η_0 unterscheiden, wodurch $f(X)$ sich von $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$, etc. um weniger als ε unterscheidet. Dann ist die Differenz $f(x_n) - f(x_{n+\nu})$ kleiner als 2ε. Nimmt man nun ν so gross, dass $f(x_n)$ und $f(x_{n+\nu})$ entgegengesetzte Vorzeichen haben (dass dies immer erreicht werden kann, wird unten gezeigt), so leuchtet ein, dass $f(x_n)$ selbst kleiner als 2ε, mithin $f(X)$ kleiner als 3ε, also nicht gleich 4ε ist.

Würde aber, wie gross man auch für ein bestimmtes n die Zahl ν nimmt, $f(x_{n+\nu})$ immer dasselbe Vorzeichen wie x_n behalten, so sei x_m diejenige Zahl der Reihe mit dem niedrigsten Index, von welcher an die Vorzeichen

*) Es schien zweckmässig, selbst auf Kosten der Kürze, beim Beweise geometrische Anschauungen auszuschliessen.

der Function $f(x)$ nicht mehr wechseln, so dass sie also für x_m, x_{m+1}, etc. dieselben bleiben. Da $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so ist m wenigstens gleich 2; folglich haben sicher $f(x_{m-1})$ und $f(x_m)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Bezeichnet α die positive oder negative Einheit, je nachdem $f(x_{m-1})$ positiv oder negativ ist, so wird, nach diesen Voraussetzungen,

$$x_m = x_{m-1} + \alpha\delta 2^{2-m}, \quad x_{m+1} = x_m - \alpha\delta 2^{1-m}, \quad x_{m+2} = x_{m+1} - \alpha\delta 2^{-m}, \text{ etc.},$$

folglich

$$x_{m+\mu} - x_{m-1} = -\alpha\delta 2^{2-m}\left(-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^\mu}\right).$$

Mit wachsendem μ sinkt die rechte Seite, welche das Zeichen von α besitzt, unter jeden Grad der Kleinheit, so dass das Zahlzeichen X der oben gebildeten Zahlenreihe genau x_{m-1} wäre. Es würde das allgemeine Glied x_n dieser Zahlenreihe sich also x_{m-1} beliebig nähern, und dabei hätte die ganz bestimmte Grösse $f(x_{m-1})$ das Zeichen von α, $f(x_n)$ das entgegengesetzte. Dies ist, wegen der Continuität von $f(x)$, nicht möglich.

2. *Folgerung.* Sobald a eine positive ganze nicht quadratische Zahl bezeichnet, besitzt die Gleichung $x^2 - a = 0$ keine ganze, folglich keine rationale Wurzel. Es hat aber die linke Seite für gewisse verschiedene Werthe von x entgegengesetzte Vorzeichen, also die Gleichung eine irrationale Wurzel. Hierdurch ist bewiesen, dass nicht alle Zahlzeichen sich auf rationale Zahlen reduciren, sondern *dass es auch irrationale Zahlen giebt.* (A, §. 5).

3. *Lehrsatz.* Eine Function $f(x)$, die von $x = a$ bis $x = b$ so beschaffen ist, dass zwischen je zwei Zahlen x_1 und x_2, wie nahe sie auch gewählt werden, noch andere liegen, für welche $f(x)$ verschiedene Zeichen besitzt, ist discontinuirlich.

Beweis. Wäre sie continuirlich, so sei sie für einen bestimmten Werth ξ von x gleich 2ε. Es lässt sich dann eine Grösse η_0 so bestimmen, dass

$$f(\xi \pm \eta) - f(\xi) < \varepsilon,$$

für jeden Werth η unter η_0. Zwischen $x = \xi$ und $x = \xi + \eta_0$ ändert $f(x)$ das Zeichen, muss demnach dazwischen, für einen Werth $x = \xi + \eta$, verschwinden (B, §. 3, Lehrs. 2), so dass $f(\xi)$ sich von Null höchstens um ε unterscheidet, also nicht 2ε sein kann.

4. *Lehrsatz.* Wenn die (für jedes einzelne x) von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ nie negativ, aber zwischen diesen Grenzen kleiner wird als jede angebbare Grösse, so *erreicht* sie auch den Werth Null.

Beweis. Da $f(x)$ für jedes bestimmte x auch einen bestimmten Werth besitzt, so kann es für ein solches x nur dann kleiner als jede angebbare

Grösse sein, wenn es dort verschwindet. Es seien nun x_1 und x_2 zwei derartige Zahlen, dass zwischen ihnen andere liegen, für welche $f(x)$ beliebig klein wird; behält man die Bezeichnung im Beweise des zweiten Lehrsatzes bei, bildet also Zahlen x_3, x_4, etc. durch die dort angeführten Recursionsformeln, in denen über die Wahl des unbestimmt gelassenen Vorzeichens noch das Nähere angegeben werden soll, so könnten zunächst $x = x_3$, oder $x = x_4$, etc., $x = x_n$, solche Stellen sein, an denen $f(x)$ beliebig klein wird. Dann verschwindet es aber an diesen Stellen, wie aus dem Eingange dieses Beweises ersichtlich ist, und der Satz wäre bewiesen. Es handelt sich also nur noch um den Beweis, wenn die Function weder für x_3, noch für x_4, etc. verschwindet, wie viele von diesen Zahlen man auch bilden möge.

Die Zahlen x, für welche $f(x)$ beliebig klein wird, sind entweder grösser als x_3, oder kleiner als x_3, oder zum Theil grösser, zum Theil kleiner. Im ersten Falle bilde man x_4 aus x_3 mit Hülfe des positiven Vorzeichens, im zweiten mit dem negativen, im dritten, wie willkürlich festgesetzt wird, mit dem positiven. In ähnlicher Art wird x_5 aus x_4 gebildet, u. s. f., so dass eine Zahlenreihe x_1, x_2, etc. mit dem Zahlzeichen X entsteht; ich zeige, dass $f(X)$ Null ist.

Wäre es nicht Null sondern 3ε, so bilde man, wie im zweiten Lehrsatze, η_0 und nehme n so gross wie dort, d. h. so gross, dass x_n, x_{n+1}, etc. sich von X um weniger als η_0 unterscheiden. Sind nun x_n und $x_{n+\nu}$ Werthe, zwischen denen Zahlen x liegen, für welche $f(x)$ beliebig klein, z. B. $< \varepsilon$, wird, so kann $f(X)$, welches sich von allen Zahlen $f(x)$, wo $X-\eta_0 < x < X+\eta_0$, um weniger als ε unterscheidet, höchstens 2ε und nicht 3ε sein. Würde es aber kein ν geben, würde man also von x_n an immer zu grösseren oder immer zu kleineren Werthen x_{n+1}, x_{n+2}, etc. gelangen, so sei x_m das letzte von den zu bildenden x, welches resp. einen kleineren oder grösseren Werth besitzt, als das vorhergehende; x_{m+1}, x_{m+2}, etc. sind dann sämmtlich resp. grösser oder kleiner als x_m und bilden eine wachsende oder abnehmende Reihe von Gliedern, welche aber immer unter oder über x_{m-1} bleiben. Man findet durch dieselbe Rechnung wie bei dem zweiten Lehrsatze in dem entsprechenden Falle, $X = x_{m-1}$. Während $f(X) = f(x_{m-1})$ einen bestimmten Werth 3ε besitzt, würde daher $f(x)$ beliebig klein sein müssen für Werthe x, die beliebig nahe an x_{m-1} liegen, nämlich zwischen $X = x_{m-1}$ und x_n, wie gross man auch n nimmt. Dieses ist aber, wegen der Continuität von $f(x)$, nicht möglich.

3. *Folgerung.* Wenn eine (für alle einzelnen Werthe) von $x=a$ bis $x=b$ continuirliche Function nicht überall gleiche Werthe besitzt, so erreicht sie für einen bestimmten Werth von x ein Maximum und ebenso ein Minimum.

5. *Lehrsatz.* Wenn die von $x=a$ bis $x=b$ (für alle einzelnen Werthe) continuirliche Function $f(x)$ für jeden einzelnen Werth, der zwischen a und einer rationalen oder irrationalen Zahl X liegt, wo $a<X<b$, wie nahe man auch X kommt, nicht positiv, über X hinaus aber positiv wird, so ist $f(X)=0$.

Beweis. Es sei x_1, x_2, etc. eine Zahlenreihe für X, deren Glieder sämmtlich unter X liegen sollen. Dann wird

$$f(X) = [f(x_1), f(x_2), \text{etc.}]$$

nicht positiv; negativ kann es wegen der Continuität von $f(x)$ unmöglich sein, weil es dann einen bestimmt angebbaren, von Null verschiedenen negativen Werth besässe, während $f(x)$ selbst für den kleinsten Werth, der x grösser als X macht, nach der Voraussetzung, positiv ist. Es bleibt daher nur übrig, dass $f(X)$ Null ist.

6. *Lehrsatz.* Eine von $x=a$ bis $x=b$ (für alle einzelnen Werthe) continuirliche Function $f(x)$ ist auch gleichmässig continuirlich. (B, §. 3, Def. 1).

Beweis. Bezeichnet 3ε eine beliebige Grösse, so existirt eine solche Zahl, dass von $x=a$ bis zu ihr hin $f(x)-f(a)$ absolut $\leqq 3\varepsilon$ ist. Ein Werth, der dies leistet, ist der grösste und macht zugleich $f(x)-f(a)-3\varepsilon=0$. (B, §. 3, Lehrs. 5). Dieser Werth sei x_1. In ähnlicher Art findet man eine Zahl x_2 als die grösste, welche bewirkt, dass von $x=x_1$ bis $x=x_2$ immer $f(x)-f(x_1)\leqq 3\varepsilon$ bleibt. So fährt man fort; kommt man nach einer endlichen Anzahl n von Operationen zu $x_n=b$ oder findet, dass $f(x)-f(x_{n-1})$, von $x=x_{n-1}$ bis $x=b$, noch nicht 3ε überschreitet, so ist der Satz bewiesen.

Es bliebe noch der Fall übrig, dass kein n existirt, dass also die Grössen x_1, x_2, etc. eine unendliche Reihe von wachsenden Grössen bilden, die unter b liegen. Diese Reihe wäre dann eine Zahlenreihe, deren Zahlzeichen X sei; hervorzuheben ist ihre Eigenschaft, nach der für jedes n die Gleichung besteht: $f(x_{n+1})-f(x_n)=3\varepsilon$. Nun sei η_0 von der Beschaffenheit, dass $f(X)$ sich von $f(X-\eta)$ um weniger als ε unterscheidet, so lange $\eta<\eta_0$. Zwischen die Zahlen $X-\eta_0$ und X mögen von der obigen Zahlenreihe x_n, x_{n+1}, etc. fallen, so dass (B, §. 2, Folg. 1) $f(x_{n+1})-f(x_n)$ kleiner als 2ε wäre, während es andererseits 3ε sein müsste. Die zu Grunde liegende Annahme ist daher unmöglich, und die Function eine gleichmässig continuirliche.

Halle, im October 1871.