# Ueber einige Abbildungsaufgaben.

Aus einer Mittheilung an Herrn *Richelot* in Königsberg.

(Von Herrn *H. A. Schwarz* in Halle.)

---

Der Umstand, dass das Verständniss mehrerer Arbeiten *Riemanns* anfänglich nur einem kleinen Leserkreise zugänglich war, findet wohl darin seine Erklärung, dass *Riemann* es verschmäht hat, bei der Veröffentlichung seiner allgemeinen Untersuchungen das Eigenthümliche seiner Betrachtungsweise an der vollständigen Durchführung specieller Beispiele ausführlich zu erläutern.

Dies gilt auch von dem in *Riemanns* Dissertation Art. 21 hergeleiteten Satze, welcher mir zu Betrachtungen über Abbildungsaufgaben überhaupt den Anstoss gab, nämlich, dass es möglich sei, die Fläche einer einfach zusammenhängenden Figur auf die Fläche eines Kreises zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden und zwar nur auf eine Art so, dass dem Mittelpunkte ein beliebig gegebener innerer Punkt und einem beliebigen Punkte der Peripherie ein beliebig gegebener Punkt der Begrenzung jener Figur entspricht.

Herr *Mertens*, mit dem ich im Wintersemester 1863—64 die Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* über die Theorie der analytischen Functionen hörte, machte gelegentlich mir gegenüber die Bemerkung, es sei doch eigenthümlich, dass *Riemann* von einer Function, welche z. B. die Fläche eines Kreises auf die Fläche eines ebenen geradlinigen Dreiecks conform abbilde, bereits die Existenz nachgewiesen habe, während die wirkliche Bestimmung einer solchen Function wegen der in den Ecken liegenden Unstetigkeiten der Begrenzungslinie die Kräfte der Analysis zur Zeit noch zu übersteigen scheine.

Damals war mir kein specieller Fall einer Fläche mit vorgeschriebener Begrenzung bekannt, für den die Aufgabe der Abbildung dieser Fläche auf die Fläche des Kreises bereits mit Erfolg angegriffen worden.

Indem ich als nahe liegende Specialisirung die auf die Fläche eines Kreises abzubildende Figur als von geraden Linien begrenzt und speciell als Quadrat annahm, glaubte ich einen speciellen Fall der allgemeinen Aufgabe gefunden zu haben, dessen vollständige Lösung auch bei dieser Specialisirung wissenschaftlichen Werth hätte und jedenfalls als eine anschauliche Illustration zum Art. 21 der *Riemann*schen Dissertation willkommen wäre.

Zur Lösung dieser und vieler anderer Abbildungsaufgaben führt das fruchtbare Theorem:

Entspricht bei einer analytischen Function einer stetigen Folge reeller Werthe des complexen Argumentes eine stetige Folge reeller Werthe der Function, so entsprechen je zwei conjugirten Werthen des Argumentes conjugirte Werthe der Function.

In der Ebene der complexen Grösse $u$ sei abgegrenzt ein einfach zusammenhängender Bereich $U'$, dessen Begrenzungslinie ein endliches Stück $l$ der reellen Axe enthält.

Eine analytische Function $t$ des complexen Argumentes $u$, $t = f(u)$, sei eindeutig definirt mit dem Charakter einer ganzen Function für alle dem Innern von $U'$ angehörenden Werthe von $u$; d. h. wenn $u_0$ einen beliebigen im Innern von $U'$ liegenden Werth von $u$ bezeichnet, so ist $f(u)$ für die in der Umgebung desselben liegenden Werthe von $u$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von $u - u_0$ fortschreitende Reihe entwickelbar, welche für alle, dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werthe von $u - u_0$ convergirt. Bei der Annäherung von $u$ an die Begrenzungslinie bleibe der Werth von $t$ stets endlich und sei für alle Punkte der Linie $l$ reell; während die Variable $u$ die Linie $l$ durchläuft, ändere sich der zugehörende reelle Werth der Function $t$ stetig.

Dem Gebiete $U'$ entspricht ein Gebiet $U''$, dessen Punkte zu den Punkten von $U'$ in Bezug auf die reelle Axe symmetrisch liegen.

Für alle Punkte des Bereiches $U''$ werde eine analytische Function $t$ dadurch erklärt, dass in den Bereichen $U'$ und $U''$ conjugirten Werthen von $u$ conjugirte Werthe von $t$ zugeordnet werden. Denkt man sich die beiden Gebiete $U'$ und $U''$ längs der Strecke $l$ mit einander verbunden, so entsteht ein einfach zusammenhangender Bereich $U' + U''$. Für alle dem Innern desselben angehörenden Werthe von $u$ ist der Werth der Grösse $t$ eindeutig definirt und zwar für die im Innern von $U'$ und für die im Innern von $U''$ liegenden Werthe von $u$ als analytische Function dieses Argumentes, mit dem Charakter einer ganzen Function. Beim Ueberschreiten der Linie $l$ und längs derselben ändert sich der Werth von $t$ stetig. Hieraus folgt, dass die für den Bereich $U''$ erklärte Function $t$ eine analytische Fortsetzung der für den Bereich $U'$ erklärten Function ist und zwar eine Fortsetzung derselben über die

Linie $l$ hinaus. Wenn, wie vorausgesetzt werden mag, der Bereich $U'+U''$ die Ebene $(u)$ überall nur einfach bedeckt, kann der Beweis dieser Behauptung folgendermassen geführt werden.

Nach einem Satze von *Cauchy* hat, wenn $u_0$ einen dem Innern von $U'$ angehörenden Werth von $u$ bezeichnet, das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u-u_0}\,du,$$

wenn dasselbe im positiven Sinne über die Begrenzungslinien des Bereiches $U'$ oder über diejenige des Bereiches $U''$ erstreckt wird, im ersten Falle den Werth $f(u_0)$, im zweiten den Werth Null. Bei der Addition dieser beiden Integrale heben sich die längs der Linie $l$ zweimal und in entgegengesetztem Sinne auszuführenden Integrationen weg, und es stellt die Gleichung

$$f(u_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u-u_0}\,du,$$

wobei das Integral im positiven Sinne über die Begrenzung des Bereiches $U'+U''$ zu erstrecken ist, für alle im Innern dieses Bereiches liegenden Werthe von $u_0$ eine stetige Function dieses Argumentes dar, deren Werthe mit den Werthen der Function $t=f(u)$ überall übereinstimmen.

Hieraus folgt, dass die so erklärte Function auch für alle dem Innern der Strecke $l$ angehörenden Werthe von $u$ den Charakter einer ganzen Function besitzt.

Es entsprechen also unter den gemachten Voraussetzungen conjugirten Werthen des Argumentes conjugirte Werthe der Function oder geometrisch: die Abbildung der Ebene $(u)$ auf die Ebene $(t)$ ist symmetrisch in Bezug auf die reellen Axen beider Ebenen; symmetrischen Punkten entsprechen symmetrische Bilder.

Macht man analytische Fortsetzungen der Function $t=f(u)$ symmetrisch auf beiden Seiten der reellen Axe der Ebene $(u)$, so gelangt man zu dem Resultate, dass singuläre Punkte irgend welcher Art entweder einzeln auf der reellen Axe oder paarweise symmetrisch zu beiden Seiten derselben liegen. Dieser Satz lässt sich sofort auf den Fall ausdehnen, dass bei der Abbildung durch eine analytische Function einem Stücke einer in dem Bereiche des Argumentes liegenden oder einen Theil der Begrenzung desselben bildenden geraden Linie wieder ein Stück einer geraden Linie in derjenigen Ebene entspricht, deren Punkte die Werthe der analytischen Function geometrisch darstellen.

Bei der speciellen Aufgabe der conformen Abbildung der Fläche eines Quadrates auf die Fläche eines Kreises lag die Vermuthung nahe, dass, wenn festgesetzt wurde, es solle dem Mittelpunkte des Quadrates der Mittelpunkt des Kreises entsprechen, die Bilder der vier Geraden, welche Symmetrieaxen des Quadrates sind, ebenfalls gerade Linien sein möchten. Diese Ueberlegung ergab die Lage der den vier Ecken des Quadrates bei der speciellen Festsetzung entsprechenden auf der Peripherie des Kreises liegenden vier singulären Punkte.

Nun konnte die Lösung der angegebenen Aufgabe dadurch augenscheinlich vereinfacht werden, dass an die Stelle der Fläche des Kreises die Fläche einer Halbebene gesetzt wurde, welche aus jener durch Verwandlung mittelst reciproker Radii vectores erhalten werden kann; und zwar liegt die Vereinfachung, welche hierdurch herbeigeführt wird, in dem Umstande, dass nun die Begrenzungen beider auf einander abzubildenden Bereiche geradlinig sind.

Nach dem oben angegebenen allgemeinen Gesetze kann demnach die abbildende Function über den Bereich des Innern des Quadrates hinaus, für welchen sie ursprünglich als erklärt gedacht wird, analytisch fortgesetzt werden.

Wird der Mittelpunkt der Transformation in einem der singulären Punkte auf der Peripherie des Kreises angenommen, so ergiebt sich, dass die Punkte der reellen Axe $t=\infty$, $t=-1$, $t=0$, $t=+1$ als singuläre Punkte angenommen werden können, während die auf der positiven Seite der reellen Axe liegende Halbebene eine conforme Abbildung des Innern des Kreises ist.

Die gestellte Aufgabe verlangt, wenn die Lage eines Punktes im Innern des gegebenen Quadrates durch die complexe Grösse $u$ bestimmt wird, dass die Variable $t$ für alle im Innern des gegebenen Quadrates liegenden Werthe von $u$ als analytische Function von $u$ mit dem Charakter einer ganzen Function eindeutig definirt sei, und dass die Werthe von $t$, welche den auf dem Umfange des Quadrates liegenden Werthen von $u$ entsprechen, reell sind.

Der Bereich des Argumentes $u$ kann nun nach dem oben angegebenen Gesetze zunächst auf das Innere von vier an das gegebene Quadrat anstossenden symmetrisch liegenden Quadraten und durch wiederholte Anwendung auf einen beliebig grossen Bereich der Ebene ($u$) ausgedehnt werden.

Es ergiebt sich hierbei, dass die Function $t$ auch bei dieser Erweiterung des Gebietes ihres Argumentes eine für alle endlichen Werthe von $u$ eindeutige und zwar doppelt periodische Function von $u$ sein muss, während das Verhältniss zweier Fundamentalperioden gleich $\sqrt{-1}$ ist.

Hiermit ist schon auf die lemniscatischen Functionen hingewiesen. —

Die Begrenzung des Quadrates hat in den vier Ecken desselben singuläre Punkte. Diese Punkte müssen bei der Forderung, dass die Fläche des Quadrates in den kleinsten Theilen ähnlich auf die Fläche des Kreises oder der Halbebene abgebildet werden soll, ausgenommen werden, sonst würde die gestellte Aufgabe eine nicht zu erfüllende Forderung enthalten.

Jedes in der Nähe einer Ecke des Quadrates liegende Stück der Fläche desselben, ein in der Nähe des Scheitels liegendes Stück der Fläche eines rechten Winkels, muss durch die abbildende Function auf einen flachen Winkel abgebildet werden.

Es entsteht hieraus die Aufgabe, die allgemeinste Function aufzufinden, durch welche der in der Nähe des Scheitels $u=0$ liegende Theil der Fläche eines Winkels $\alpha\pi$ $[\alpha > 0]$ in der Ebene $u = re^{i\varphi}$; $0 \leqq \varphi \leqq \alpha\pi$; $0 < r < r_0$ auf die Ebene $t = \varrho e^{i\psi}$, $0 \leqq \psi \leqq \pi$ conform so abgebildet wird, dass innerhalb der angegebenen Grenzen jedem Punkte $u = re^{i\varphi}$ ein stetig mit ihm fortrückender Punkt $t = \varrho e^{i\psi}$ entspricht, während die Werthe

$$r=0,\ \varrho=0;\quad \varphi=0,\ \psi=0;\quad \varphi=\alpha\pi,\ \psi=\pi$$

einander entsprechen.

Die einfachste Function, welche eine solche Abbildung vermittelt, ist $v = u^{\frac{1}{\alpha}}$, und jede andere Function $t$, welche eine Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften ebenfalls herbeiführt, besitzt, als Function von $v$ betrachtet, nach dem obigen Theoreme für den Werth $v=0$ und die in seiner Umgebung liegenden Werthe von $v$ den Charakter einer ganzen Function. Ebenso ergiebt sich auch umgekehrt $v$ als eine für den Werth $t=0$ und die in seiner Umgebung liegenden Werthe von $t$ eindeutige Function dieser Grösse mit dem Charakter einer ganzen Function.

Man erhält daher folgende analytische Darstellungen:

$$v = u^{\frac{1}{\alpha}};\quad t = Cv\,(1+a_1 v+a_2 v^2+\cdots),$$

$$v = \frac{1}{C}\cdot t\,(1+b_1 t+b_2 t^2+\cdots),$$

$$u = v^{\alpha};\quad u = \frac{1}{C^{\alpha}}\cdot t^{\alpha}\,(1+c_1 t+c_2 t^2+\cdots).$$

**Die Constante $C$ ist von Null verschieden und positiv; die Coefficienten $a$, $b$, $c$ haben sämmtlich reelle Werthe; letzteres folgt daraus, dass allen hinreichend kleinen positiven Werthen von $u$, beziehlich von $v$ wieder positive Werthe von $t$ entsprechen sollen.**

Bei einer Abbildungsaufgabe ist die Lage und absolute Grösse der Figur in der Ebene $(u)$, auf welche eine gegebene Figur in der Ebene $(t)$ abgebildet wird, im Allgemeinen gleichgültig. Hierdurch werden in die allgemeine Lösung der Abbildungsaufgabe zwei willkürliche Constanten eingeführt, welche diese Lage und absolute Grösse bestimmen: Ist $u = f(t)$ eine Function, welche die Figur $T$ in der Ebene $(t)$ auf eine Figur $U$ in der Ebene $(u)$ abbildet, so ist auch $u' = C_1 u + C_2$ eine solche Function, nur liegt die entsprechende Figur $U'$ in der Ebene $(u')$ an einer anderen Stelle, ist in einem anderen Massstabe ausgeführt und gegen die vorige Lage gedreht. Wenn es nun darauf ankommt, die charakteristischen Eigenschaften der Abbildung einer Figur $T$ auf eine Figur $U$ auszudrücken, so muss eine Abhängigkeit zwischen den Grössen $u$ und $t$ aufgesucht werden, welche von der besonderen Lage und der absoluten Grösse der Figur $U$ in der Ebene $(u)$ unabhängig ist, d. h. es ist eine Differentialgleichung aufzustellen, in deren allgemeinem Integrale die Constanten $C_1$ und $C_2$ als Integrationsconstanten auftreten.

Es ergiebt sich

$$\frac{du'}{dt} = C_1 . \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}.$$

Diese Function ist also von der besonderen Lage und absoluten Grösse der Figur $U$ in der Ebene $(u)$ unabhängig.

Der Uebergang von $u$ zu $\frac{du}{dt}$ und $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ ist insofern ein wichtiger Schritt, weil alle diejenigen Werthe von $t$, für welche $\frac{du}{dt}$ gleich Null oder unendlich, $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ unendlich gross wird, für die Abbildungsaufgabe als singuläre aufzufassen sind, in denen von einer ähnlichen Abbildung im eigentlichen Sinne nicht mehr die Rede sein kann.

In dem eben betrachteten Falle der Abbildung eines Winkels $\pi$ auf einen Winkel $\alpha\pi$ ist

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} = \frac{\alpha-1}{t} + d_1 + d_2 t + \cdots.$$

Diese Function hat also in der Umgebung des Werthes $t = 0$ den Charakter einer gebrochenen rationalen Function. Die Coefficienten $d_1 \ldots$ haben sämmtlich reelle Werthe, und es ist mithin der Werth von $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ für diejenigen reellen Werthe von $t$, für welche die Reihe convergirt, ebenfalls reell. —

Handelt es sich darum, die Fläche einer Figur $T$ in der Ebene $(t)$ auf einen von einer einfachen (d. h. durch keinen Punkt mehr als einmal gehenden) Linie begrenzten, ganz im Endlichen liegenden Bereich $U$ in der Ebene $(u)$ abzubilden, so ist im Voraus bekannt, dass $\frac{du}{dt}$ für keinen im Innern von $T$ liegenden Punkt gleich Null oder unendlich gross werden kann, dass daher $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ für alle diese Werthe von $t$ den Charakter einer ganzen Function besitzen muss.

Im vorliegenden Falle sind $t=-1$, $t=0$, $t=+1$ die im Endlichen liegenden singulären Werthe der Grösse $t$; $\alpha$ ist gleich $\frac{1}{2}$. Die Function

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\Big),$$

welche für alle reellen Werthe von $t$ ebenfalls reelle endliche Werthe besitzt, hat für alle endlichen Werthe von $t$, deren imaginärer Theil positiv ist, den Charakter einer ganzen Function, also hat dieselbe für alle endlichen Werthe von $t$ den Charakter einer ganzen Function. Für die unendlich grossen Werthe von $t$ ergiebt sich die Entwickelung

$$u-u_\infty = -C'i\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\Big(1+c_1'\cdot\frac{1}{t}+c_2'\cdot\frac{1}{t^2}+\cdots\Big),$$

mithin

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} = -\tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}+d_1'\cdot\frac{1}{t^2}+d_2'\cdot\frac{1}{t^3}+\cdots,$$

also wird die Function $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ für alle unendlich grossen Werthe von $t$ unendlich klein, es ist daher $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ eine rationale Function von $t$ und zwar gleich $-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\Big)$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$\log\frac{du}{dt} = -\tfrac{1}{2}\log 4t(1-t^2)+\log C_1,$$

$$u = C_1\int^t\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass in der That durch das lemniscatische Integral

$$u' = \int_0^t\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}$$

das Innere jeder der beiden Halbebenen, in welche die Ebene $(t)$ durch die reelle Axe getheilt wird, auf das Innere je eines Quadrates mit der Seite $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}$ conform abgebildet wird. Durch die Substitution $s = \frac{t-i}{t+i}$ geht man von der auf der positiven Seite der reellen Axe der Ebene $t$ liegenden Halbebene auf die Fläche des in der Ebene $(s)$ liegenden mit dem Radius 1 um den Punkt $s = 0$ beschriebenen Kreises über.

Durch die Functionen

$$u = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}, \qquad s = \sin \mathrm{am}\, u, \qquad (k = \sqrt{-1})$$

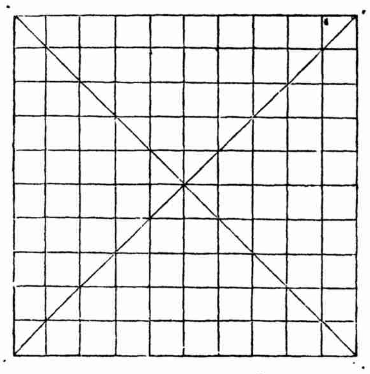
werden die in der Ebene $(s)$ liegende Fläche des um den Punkt $s = 0$ mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises und die Fläche des in der Ebene $(u)$ liegenden Quadrates mit den Ecken $K$, $Ki$, $-K$, $-Ki$, wo $K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$, zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf einander abgebildet.

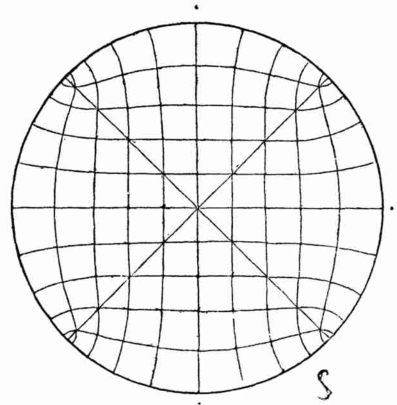
Um diese Abbildung durch eine Zeichnung zu veranschaulichen, habe ich für die aus $\frac{1}{10}K$ und $\frac{1}{10}Ki$ ganzzahlig zusammengesetzten Werthe von $u$, soweit sie für diesen Zweck in Betracht kommen, die entsprechenden Werthe von $s$ berechnet *) und danach die folgende Zeichnung entworfen, in welcher die Figur des Quadrates und die des Kreises um $45^0$ gedreht erscheinen.

---

*) Tabelle der Werthe, welche die Function $\sin \mathrm{am}\, u$ $(k = \sqrt{-1})$ für die aus $\frac{1}{10}K$ und $\frac{1}{10}Ki$ ganzzahlig zusammengesetzten Werthe $u = \frac{m+ni}{10}K$ annimmt, wenn $m \geqq n \geqq 0$, $m + n \overline{\overline{<}} 10$.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | 0,7071 +0,7071$i$ | | | | | | |
| 4 | | | | | 0,5407 +0,5407$i$ | 0,6978 +0,5336$i$ | 0,8633 +0,5047$i$ | | | | | |
| 3 | | | | 0,3971 +0,3971$i$ | 0,5366 +0,3941$i$ | 0,6792 +0,3815$i$ | 0,8209 +0,3525$i$ | 0,9537 +0,3008$i$ | | | | |
| 2 | | | 0,2627 +0,2627$i$ | 0,3956 +0,2617$i$ | 0,5291 +0,2571$i$ | 0,6608 +0,2455$i$ | 0,7866 +0,2235$i$ | 0,8995 +0,1877$i$ | 0,9906 +0,1367$i$ | | | |
| 1 | | 0,1311 +0,1311$i$ | 0,2624 +0,1309$i$ | 0,3934 +0,1299$i$ | 0,5228 +0,1268$i$ | 0,6481 +0,1202$i$ | 0,7649 +0,1084$i$ | 0,8671 +0,0903$i$ | 0,9476 +0,0653$i$ | 0,9994 +0,0344$i$ | | |
| 0 | 0 | 0,1311 | 0,2621 | 0,3924 | 0,5205 | 0,6436 | 0,7574 | 0,8563 | 0,9335 | 0,9830 | 1 | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $m$ |





Durch diese Abbildung erhält der von *Abel* bewiesene Satz, dass der Werth von $\sin\mathrm{am}\,\frac{K}{2^n \pm i}$, überhaupt von $\sin\mathrm{am}\,\frac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$ sich durch Auflösung von quadratischen Gleichungen ergiebt, wenn $2^{2n}+1$ eine Primzahl, $p$ und $q$ ganze Zahlen sind, die geometrische Bedeutung, dass die den Punkten im Innern des Quadrates $u = \frac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$ entsprechenden Punkte $s$ im Innern des Kreises durch geometrische Constructionen, welche nur die Anwendung des Zirkels und Lineals erfordern, gefunden werden können.

Tritt an die Stelle des Quadrates ein Rechteck, dessen Seiten sich wie $2K$ zu $K'$ verhalten, so wird die Abbildung der Halbebene $T$ auf ein dem vorgelegten Rechtecke ähnliches Rechteck vermittelt durch das elliptische Integral

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

wenn der Modul $k$ aus der Gleichung

$$k = 4\sqrt{q}\cdot\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right\}^4$$

bestimmt wird, in welcher $q = e^{-\frac{K'}{K}\pi}$ zu setzen ist.

---

Wenn es sich darum handelt, das Innere einer Halbebene $T$ auf das Innere eines geradlinigen Dreiecks mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ conform abzubilden, so erhält man durch eine der angegebenen Schlussfolgerung ganz analoge für die die Abbildung vermittelnde Function die Form

$$C_1 u + C_2 = \int^t (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}\,dt.$$

Hierbei sind die drei reellen Grössen $a$, $b$, $c$ übrigens willkürlich, wenn sie nur auf der Begrenzung der Halbebene $T$ in Beziehung auf das Innere derselben in demselben Sinne auf einander folgen, wie die Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ des Dreiecks auf dem Umfang desselben in Beziehung auf das Innere.

Mit diesem Resultate war die Form derjenigen Function gefunden, durch welche die Fläche einer Halbebene auf die einfach zusammenhangende Fläche irgend eines ebenen geradlinig begrenzten Polygons abgebildet wird. Nur können in dem allgemeinen Falle eines $n$-Ecks von den $n$ Grössen $a$, $b$, $c$, $d\ldots$ nur drei willkürlich gewählt werden, die übrigen $n-3$ sind durch die gegebenen Verhältnisse der Längen der einzelnen Seiten bestimmt.

Ist das Vieleck ein reguläres $n$-Eck und wird die Fläche der Halbebene durch die Fläche eines Kreises ersetzt, so wird diejenige Abbildung der Fläche des Kreises auf die Fläche des $n$-Ecks, bei welcher die Mittelpunkte beider Figuren einander entsprechen, durch die Function

$$u = \int_0^s \frac{ds}{(1-s^n)^{\frac{2}{n}}}$$

herbeigeführt.

Diese hier angegebenen Resultate habe ich im Frühjahre 1864 im mathematischen Seminar der Berliner Universität vorgetragen und bei meiner Promotion der philosophischen Facultät derselben Universität vorgelegt.

Im August 1866 sind dieselben von Herrn *Weierstrass* der Berliner Akademie mitgetheilt worden.

In Beziehung auf die Aufgabe der Abbildung der Fläche eines geradlinigen Polygons auf die Fläche eines Kreises hatte ich die Freude, die Untersuchungen des Herrn *Christoffel* über diesen Gegenstand: Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Annali di Matematica, Tomo I° 1867, den meinigen begegnen zu sehen.

Den Nachweis der Möglichkeit der Constantenbestimmung streng zu führen, ist mir für den Fall $n=4$ gelungen; für den allgemeinen Fall verdanke ich einen strengen Beweis hierfür einer gütigen Mittheilung des Herrn *Weierstrass*.

Die angegebene Formel lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, dass das geradlinig begrenzte Polygon in seinem Innern Windungspunkte oder den unendlich fernen Punkt der Ebene enthält.

So wird z. B. das Innere des Kreises in der Ebene $(s)$ mit dem Mittelpunkte $s=0$ und dem Radius 1 durch die Formel

$$u = \int^s \frac{\sqrt{1+s^4}}{s^2}\, ds$$

auf das Aeussere eines Quadrates conform abgebildet; dem Mittelpunkte $s=0$ entspricht der unendlich weit entfernte Punkt der Ebene $(u)$.

Hiermit ist zugleich die Wärmeaufgabe für das Aeussere eines Quadrates als im Princip gelöst zu betrachten. —

Es lag nun der Wunsch nahe, auch für die Abbildung einer von einer stetig gekrümmten Linie begrenzten Fläche auf die Fläche eines Kreises ein einfaches Beispiel zu besitzen, und welche Figur konnte sich hierzu eher darbieten als die Ellipse?

Hier führte die Untersuchung der durch die einfacheren analytischen Functionen vermittelten Abbildungen auf einem befriedigenden Wege zum Ziel.

Das Innere einer Parabel in der Ebene $(u)$ mit dem Brennpunkte $u=0$ und dem Scheitel $u=1$ wird auf das Innere eines Kreises in der Ebene $(s)$ mit dem Mittelpunkte $s=0$ und dem Radius 1 abgebildet durch die Function

$$s = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{u}\right).$$

Das Innere einer Ellipse mit den Brennpunkten $u=\pm 1$ und den Scheiteln $u=\pm a,\ \pm bi$ wird durch die Function

$$s = \sin\operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin u\right)$$

auf das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkte $s=0$ und dem Radius $\frac{1}{\sqrt{k}}$ abgebildet, wenn der Modul $k$ durch die Gleichungen

$$q = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2, \qquad k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right\}^4$$

bestimmt wird.

---

Die einfachste krumme Linie ist der Kreis. Bei der Aufgabe, die Fläche einer von Kreisbogenstrecken begrenzten Figur in der Ebene $(u)$ auf die Fläche einer Halbebene $T$ abzubilden, führt eine der oben für die Abbildung geradlinig begrenzter Polygone angegebenen ganz analoge Schlussfolgerung zum Ziele.

Wenn die von Kreisbogen begrenzte Figur in der Ebene $(u)$ durch die Function

$$u' = \frac{C_1 u + C_2}{C_3 u + C_4}$$

auf eine Ebene $(u')$ abgebildet wird, so ist die entsprechende Figur in der Ebene $(u')$ ebenfalls von Kreisbogen begrenzt, unter denen sich auch geradlinige Strecken befinden können.

Um ein für alle diese Abbildungen, welche aus einander durch Transformation mittelst reciproker Radii vectores abgeleitet werden können, zugleich geltendes Resultat zu erhalten, eliminire man die Constanten $C$.

Es ist

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} - 2\frac{C_3}{C_3 u + C_4}\cdot\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} + 2\frac{C_3^2}{(C_3 u + C_4)^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\frac{C_3}{C_3 u + C_4}\frac{d^2 u}{dt^2}$$

Bezeichnet man die Function cfr Band 71, p

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}\right)^2 \text{ mit } \Psi(u, t),$$

so folgt hieraus, dass $\Psi(u', t) = \Psi(u, t)$ ist, dass mithin der Ausdruck $\Psi$ von den Constanten $C$ unabhängig ist.

Zwei eine Ecke der Begrenzungslinie der Figur bildende Kreisbogen mögen mit einander den im Innern der Figur liegenden Winkel $\alpha\pi$ einschliessen. Die Constanten $C$ lassen sich so wählen, dass dieser von zwei Kreisbogenstrecken gebildeten Ecke in der Ebene $(u)$ eine von zwei geradlinigen Strecken gebildete Ecke in der Ebene $(u')$ entspricht.

Dann hat, wenn dem Eckpunkte der Werth $t = t_0$ entspricht, die Function $\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt}$ für die in der Umgebung des Werthes $t = t_0$ liegenden Werthe von $t$ nach dem Obigen die Entwickelung

$$\frac{\alpha - 1}{t - t_0} + d_1 + d_2(t - t_0) + \cdots,$$

in welcher die Coefficienten $d$ reell sind.

Also hat die Function $\Psi(u, t) = \Psi(u', t)$ die Entwickelung

$$\tfrac{1}{2}\frac{1 - \alpha^2}{(t - t_0)^2} + \frac{\delta_1}{t - t_0} + \delta_2 + \delta_3(t - t_0) + \cdots,$$

in welcher die Coefficienten $\delta$ ebenfalls reell sind.

Enthält das Kreisbogenpolygon in seinem Innern keinen Windungspunkt, so hat die Function $\Psi(u,t)$ für alle im Innern der Halbebene liegenden Werthe von $t$ den Charakter einer ganzen Function; da sie für alle reellen Werthe von $t$ ebenfalls reelle Werthe hat und den Charakter einer rationalen Function besitzt, so ist dieselbe eine rationale Function $F(t)$ von $t$.

Die Aufgabe der Abbildung der Fläche eines von Kreisbogen gebildeten Polygons auf die Fläche einer Halbebene ist also zurückgeführt auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\Psi(u,t) = F(t)$$

und die Bestimmung einer Anzahl Constanten.

Diese Lösung lässt sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, dass Windungspunkte im Innern des Kreisbogenpolygons enthalten sind; es wird die rationale Function $F(t)$ in diesem Falle auch für complexe Werthe von $t$ unendlich gross, und die Anzahl der zu bestimmenden Constanten und der zu erfüllenden Bedingungsgleichungen wird vergrössert.

Es ist leicht zu zeigen, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung $\Psi(u,t) = F(t)$ sich als Quotient zweier Lösungen derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Functionen als Coefficienten darstellen lässt. Diese Bemerkung verdanke ich einer gütigen Mittheilung des Herrn *Weierstrass.*

Ist die abzubildende Figur ein Kreisbogendreieck, so ist die lineare Differentialgleichung diejenige der hypergeometrischen Reihe, und die Bestimmung der Constanten ist ohne Auflösung transcendenter Gleichungen ausführbar.

---

Vermittelst des als Function der oberen Grenze betrachteten Integrals

$$u-u_0 = \int^t (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}\,dt,$$

in welchem $a$, $b$, $c$ reelle, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ positive Constanten bezeichnen, welche der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma = 1$ genügen, wird das Innere der beiden Halbebenen $T'$ und $T''$, in welche die Ebene $(t)$ durch die reelle Axe getheilt wird, auf das Innere zweier geradlinigen und einander symmetrischen Dreiecke $U'$ und $U''$ mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ conform abgebildet.

Die Ebene $(t)$ möge durch Verwandlung mittelst reciproker Radii vectores auf die Oberfläche einer Kugel conform so abgebildet werden, dass der reellen Axe der Ebene ($t$) ein grösster Kreis der Kugel entspricht. Es entsprechen dann symmetrischen Punkten auf beiden Halbkugeln symmetrische Bilder in den Flächen der beiden ebenen Dreiecke.

Bringt man nun die beiden Dreiecke in eine solche Lage, dass ihre entsprechenden Ecken zusammenfallen, und denkt sich, dass ihre in der Vorstellung von einander verschiedenen und getrennten Flächen die Punkte der Begrenzungslinie gemeinsam haben und längs derselben eine Falte bildend zusammenhangen, so erhält man eine geschlossene einfach zusammenhangende, ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ überall doppelt bedeckende Fläche $U$. Längs der Begrenzung dieses Dreiecks besitzt die Fläche $U$ eine Falte, längs welcher die beiden Blätter mit einander stetig zusammenhangen. Dieselbe kann auch aufgefasst werden als Oberfläche eines dreiseitigen Prisma mit unendlich kleiner Höhe.

Dieser Fläche entspricht nun eindeutig die ganze Kugelfläche. In allen Punkten mit Ausnahme der den Ecken entsprechenden ist die Abbildung in den kleinsten Theilen ähnlich, in diesen Punkten ist die Abbildung eindeutig und stetig.

Wenn über den Integrationsweg nichts festgesetzt ist, so ist die Integralfunction $u$ eine unendlich vieldeutige Function der oberen Grenze $x$, und auch $x$ ist im Allgemeinen eine unendlich vieldeutige Function von $u$.

(Ausnahmen treten nur für folgende Werthsysteme von $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ ein:

$$\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6},\quad \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3},\quad \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{6}.$$

Vergl. *Christoffel* a. a. O. pag. 99 und *Briot* et *Bouquet,* Théorie des fonctions doublement périodiques, pag. 306 u. 308.)

Die verschiedenen Werthe, welche $u$ bei irgendwie angenommenem Integrationswege für einen bestimmten Werth von $x$ erlangen kann, lassen sich stets aus einem dieser Werthe mit Hülfe der Fläche $U$ geometrisch ableiten, indem man sich vorstellt, dass das Netz der Fläche $U$ durch Abwickelung derselben unendlich oft auf die Ebene ($u$) ausgebreitet wird.

Es ergiebt sich auf dieselbe Weise aus der Abbildung der Fläche eines Kreises auf die Fläche eines geradlinigen $n$-Ecks die Abbildung der Oberfläche einer Kugel auf die beiden Seiten der Fläche dieses $n$-Ecks.

Die Umkehrung dieser Aufgabe ist ein specieller Fall folgender allgemeineren Aufgabe: Die geschlossene einfach zusammenhängende Oberfläche eines von ebenen Flächen begrenzten Polyeders auf die Oberfläche einer Kugel eindeutig so abzubilden, dass mit Ausnahme der den Ecken entsprechenden Punkte die Abbildung überall in den kleinsten Theilen ähnlich, in diesen Punkten aber die Stetigkeit nicht unterbrochen sei.

Unter der Voraussetzung, dass eine Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften überhaupt möglich ist, gelangt man zu folgender Lösung: Die Oberfläche des Polyeders wickele man auf eine Ebene ab und bezeichne die complexe Coordinate eines Punktes innerhalb des auf die Ebene ausgebreiteten Netzes der Polyederoberfläche mit $u$. Die Oberfläche der Kugel bilde man direct eindeutig auf eine Ebene $(x)$ ab, so ist zu setzen

$$\frac{du}{dx} = C\Pi(x-x_\nu)^{\alpha_\nu-1}.$$

In dieser Formel, welche ich Herrn *Weierstrass* im Jahre 1866 mitgetheilt habe, bedeutet $x_\nu$ den einer Ecke des Polyeders entsprechenden Werth von $x$, während die Summe der in dieser Ecke zusammenstossenden Kantenwinkel gleich $2\alpha_\nu\pi$ ist und das Product $\Pi$ über alle Ecken des Polyeders zu erstrecken ist. Die über alle Ecken des Polyeders erstreckte Summe $\Sigma(\alpha_\nu-1)$ hat den Werth $-2$, wenn der Werth $x=\infty$ nicht einer Ecke des Polyeders entspricht, wie aus dem *Euler*schen Satze über Polyeder folgt.

Die Richtigkeit dieser Formel lässt sich — die Möglichkeit einer solchen Abbildung immer noch vorausgesetzt — durch die Betrachtung der Function $\frac{d}{dx}\log\frac{du}{dx}$ beweisen, auch lässt sich zeigen, dass die Constanten $x_\nu$ bis auf drei willkürliche Constanten einer gebrochenen Substitution ersten Grades durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt sind; es ist mir indessen bis jetzt nicht gelungen, den strengen Nachweis zu führen, dass es für jedes vorgegebene Polyeder möglich ist, diese Constanten den Bedingungen der Aufgabe gemäss wirklich zu bestimmen. In einigen Fällen ist diese Constantenbestimmung a priori ausführbar, z. B. wenn das vorgegebene Polyeder ein reguläres ist.

So wird die Abbildung der Kugeloberfläche auf die Oberfläche eines Würfels vermittelt durch das Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{1-14x^4+x^8}}.$$

(Vergl. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1865, p. 150.) Mit der Abbildung der Oberflächen der regulären Polyeder auf die Kugel lässt sich eine Anzahl analytischer Probleme in Verbindung bringen, unter denen ich hier folgendes namhaft mache: Alle sphärischen Dreiecke zu finden, welche durch algebraische Functionen der Coordinaten auf die Fläche eines Kreises abgebildet werden können.

---

Dass es stets möglich ist, die einfach zusammenhängende Fläche, welche von einer aus Stücken analytischer Curven bestehenden einfachen Linie begrenzt ist, auf die Fläche eines Kreises zusammenhangend und in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden, hat *Riemann* mit Zuhülfenahme des sogenannten *Dirichlet*schen Principes zu beweisen gesucht.

Da gegen die Zulässigkeit dieses Principes bei einem Existenzbeweise hinsichtlich der Strenge gegründete Einwendungen geltend gemacht worden sind, war es wünschenswerth, ein Beweisverfahren zu besitzen, gegen welches die bezüglich des *Dirichlet*schen Principes geltend gemachten Bedenken nicht erhoben werden konnten.

Für den Fall, dass die Begrenzungslinie der abzubildenden Figur in allen Punkten nach aussen convex ist, habe ich einen solchen Beweis in einer im November v. J. Herrn *Weierstrass* überreichten Abhandlung zu führen versucht.

Halle a. S., im Februar 1869.