Werk

Titel: Note sur la transformation de la cubique ternaire en sa forme canonique.

Autor: Spottiswoode, William

Jahr: 1864

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0063|log22

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Note sur la transformation de la cubique ternaire en sa forme canonique.

(Par M. *William Spottiswoode* à Londres.)

En effectuant cette transformation bien connue, on fait usage ordinairement de sa forme canonique elle même et de son Hessien pour éviter les expressions plus longues qu'on trouve en suivant la méthode directe. Je me propose içi d'indiquer une route par laquelle en partant de la transformation directe on retrouve l'équation biquadratique de *Hesse* et de *Aronhold* pour déterminer le coefficient du produit des variables dans la forme canonique.

En effet en posant

$$(1.)\quad U = ax^3+by^3+cz^3+3(fy^2z+f_1yz^2+gz^2x+g_1zx^2+hx^2y+h_1xy^2)+6kxyz$$

on peut écrire pour U, pour les dérivées partielles du premier ordre de U et pour son Hessien les expressions abrégées:

$$(2.)\quad \begin{cases} U = (a,\ b,\ \ldots)(x,y,z)^3, \\ \frac{1}{3}\frac{\partial U}{dx} = (a,\ h_1,\ldots)(x,y,z)^2, \\ \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial y} = (h,\ b,\ \ldots)(x,y,z)^2, \\ \frac{1}{3}\frac{\partial U}{dz} = (g_1, f,\ \ldots)(x,y,z)^2, \\ \frac{1}{6^3}H(U) = (\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \ldots)(x,y,z)^3. \end{cases}$$

Puis en introduisant de nouvelles variables par les formules de transformation linéaire

$$(3.)\quad \begin{cases} x = \alpha\ \xi+\beta\ \eta+\gamma\ \zeta, \\ y = \alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta, \\ z = \alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta, \end{cases} \qquad \nabla = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

on a pour la transformée de U

$$\begin{aligned} (a,b,\ldots)(x,y,z)^3 = {} & (a,b,\ldots)(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)^3\xi^3+\cdots \\ & +3(a,b,\ldots)(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)^2(\beta,\beta_1,\beta_2)\xi^2\eta+\cdots \\ & +6(a,b,\ldots)(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)\ (\beta,\beta_1,\beta_2)(\gamma,\gamma_1,\gamma_2)\xi\eta\zeta \end{aligned}$$

et les conditions qui doivent être remplies pour que l'expression en ξ, η, ζ soit une forme canonique sont contenues dans les équations

$$(4.) \quad (a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^2(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = 0,$$
$$(5.) \quad (a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)^2 = 0,$$
$$(6.) \quad (a, b, \ldots)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)^2(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) = 0,$$
$$(7.) \quad (a, b, \ldots)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 0,$$
$$(8.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2(\beta, \beta_1, \beta_2) = 0,$$
$$(9.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)(\beta, \beta_1, \beta_2)^2 = 0,$$
$$(10.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^3 = (a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^3 = (a, b, \ldots)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)^3 = 1.$$

En écrivant

$$(11.) \quad (a, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = K$$

on déduit de (4.) et (5.)

$$(a, h, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{K}{\nabla}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1),$$
$$(h_1, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{K}{\nabla}(\beta_2\gamma - \beta\gamma_2),$$
$$(g_1, f, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)(\gamma, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{K}{\nabla}(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma),$$

d'où, en éliminant γ, γ_1, γ_2, on trouve

$$\begin{vmatrix} a\beta + h\beta_1 + g_1\beta_2, & h\beta + h_1\beta_1 + \left(k + \frac{K}{\nabla}\right)\beta_2, & g_1\beta + \left(k - \frac{K}{\nabla}\right)\beta_1 + g\beta_2 \\ h\beta + h_1\beta_1 + \left(k - \frac{K}{\nabla}\right)\beta_2, & h_1\beta + b\beta_1 + f\beta_2, & \left(k + \frac{K}{\nabla}\right)\beta + f\beta_1 + f_1\beta_2 \\ g_1\beta + \left(k + \frac{K}{\nabla}\right)\beta_1 + g\beta_2, & \left(k - \frac{K}{\nabla}\right)\beta + f\beta_1 + f_1\beta_2, & g\beta + f\beta_1 + c\beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant cette dernière équation on peut la présenter sous la forme suivante

$$(a, b, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^3\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots)(\beta, \beta_1, \beta_2)^3,$$

que je désigne par la notation abrégée $B\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{B}$. On obtient deux équations semblables dans lesquelles les coëfficients β, β_1, β_2 sont remplacés par α, α_1, α_2 et par γ, γ_1, γ_2. Je réunis ces résultats et je les écris sous la forme abrégée du système

$$(12.) \quad A\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{A}, \quad B\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{B}, \quad C\left(\frac{K}{\nabla}\right)^2 = \mathrm{C}.$$

En opérant sur les deux côtés de ces équations avec les facteurs

$$\left(\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta_1\frac{\partial}{\partial\gamma_1}+\beta_2\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right)=\left(\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}+\cdots\right)\text{ etc.}$$

on trouve, en vertu de (4.) ... (9.), les six équations suivantes

$$\left(\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}+\cdots\right)\mathrm{C}=0,\quad\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}+\cdots\right)\mathrm{B}=0,$$

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\cdots\right)\mathrm{A}=0,\quad\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\cdots\right)\mathrm{C}=0,$$

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}+\cdots\right)\mathrm{B}=0,\quad\left(\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}+\cdots\right)\mathrm{A}=0,$$

c'est-à-dire un système que l'on déduit de (4.) ... (9.) en écrivant a, b, ... au lieu de *a, b,* .... Je désigne ce système par les numéros (4.)'... (9.)'.

En éliminant d'un côté entre (7.) et (8.), et de l'autre entre (7.)' et (8.)' on trouve les relations

$$\begin{aligned}&(a, h_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (h, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (g_1, f, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2\\ =\ &(\mathrm{a}, \mathrm{h}_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (\mathrm{h}, \mathrm{b}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 : (\mathrm{g}_1, \mathrm{f}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2\\ =\ &\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1 \quad : \quad \beta_2\gamma-\beta\gamma_2 \quad : \quad \beta\gamma_1-\beta_1\gamma.\end{aligned}$$

Au moyen d'une nouvelle indéterminée $\frac{1}{6}\lambda$ que l'on introduit, ces proportions peuvent être remplaçées par les équations

$$(13.)\quad\begin{cases}\lambda(a, h_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 6(\mathrm{a}, \mathrm{h}_1, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2,\\ \lambda(h, b, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 6(\mathrm{h}, \mathrm{b}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2,\\ \lambda(g_1, f, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2 = 6(\mathrm{g}_1, \mathrm{f}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^2.\end{cases}$$

Par conséquent on trouvera les valeurs de la quantité λ, en égalant à zéro le discriminant de la forme

$$(\lambda a-6\mathrm{a}, \lambda b-6\mathrm{b}, \ldots)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)^3.$$

Mais (Voyez A third Memoir on Quantics, by *A. Cayley,* Philosophical transactions, Vol. 146, p. 645) ce discriminant est

$$=(\lambda^4-24S\lambda^2+8T\lambda-48S^2)^2R,$$

R désignant le discriminant de U; de sorte que λ se détermine par l'équation

$$(14.)\quad\lambda^4-24S\lambda^2+8T\lambda-48S^2=0.$$

Il n'est pas nécessaire de suivre plus loin la solution bien connue du problème parce qu'en retombant sur l'équation (14.) on a mis en évidence le rapport entre les conditions (4.) ... (9.) et la biquadratique d'*Aronhold.*

Londres, décembre 1863.