Werk

Titel: Ueber ein fundamentale Begründung der Invariantentheorie.

Autor: Aronhold, S.

Jahr: 1863

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0062|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie.

(Von Herrn *Aronhold*.)

Schon im Jahre 1851 hatte ich in einer der philosophischen Facultät zu Königsberg überreichten Abhandlung die Prinzipien entwickelt, welche die Grundlage der hier vorliegenden Invariantentheorie bilden, zu einer Zeit, als die gegenwärtige Theorie und Terminologie noch gar nicht vorhanden war. Wiewohl nun seitdem auf diesem Gebiete umfangreiche und schätzbare Untersuchungen veröffentlicht worden sind, auch viele Resultate, in deren Besitz ich mich bereits befand, so ist doch auf eine feste Begründung der Theorie im Allgemeinen bisher nicht Rücksicht genommen worden. Nur in speciellen Fällen sind erschöpfende Darstellungen gegeben, während im Allgemeinen bei einer grossen Mannigfaltigkeit von Methoden zur Bildung von Invarianten und analogen algebraischen Grössen von einer Definition ausgegangen werden muss, welche die allgemeine Existenz derselben unbewiesen lässt. In den folgenden Entwickelungen gebe ich eine feste Begründung der Theorie, so wie die Vereinigung verschiedener scheinbar auseinander gehender Grundgesetze zu einem organischen Ganzen. Das Prinzip, welches ich hier benutze, muss nothwendig zu solchen Functionen führen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, und zum Beweise derjenigen Grundeigenschaft, welche gewöhnlich als Definition dient. Ich glaube aber hervorheben zu müssen, dass die Anwendung desselben Prinzipes ebenso gut diejenigen Functionen liefern muss, welche durch Substitutionen *höherer* Ordnung unverändert bleiben, doch geht eine Anwendung desselben in dieser Weise über die hier gesteckten Grenzen. In Bezug auf die Terminologie habe ich die von dem Herrn *Sylvester* eingeführten Benennungen Invariante, Covariante und Discriminante, welche im Laufe der Untersuchung erklärt werden, beibehalten. Es war mir jedoch nicht möglich, den in vorhandenen Arbeiten enthaltenen umfangreichen und sehr zerstreuten Stoff zu ordnen und mit der gegenwärtigen Darstellung überall in Zusammenhang zu bringen, was bei einer vollständigen Bearbeitung der Invariantentheorie sehr wünschenswerth wäre. Indessen lege ich einigen Werth nur darauf, die Theorie im grossen Ganzen auf eine consequente Weise entwickelt und auf einige wenige Grundprinzipien zurückgeführt zu haben, so dass der Leser, welcher die ausgezeichneten Untersuchungen anderer Autoren auf diesem Gebiete, wie der Herren *Betti, Boole, Brioschi, Cayley, Clebsch, Hermite, Hesse, Salmon, Sylvester, etc.*, oder meine eigenen Arbeiten in dieser Richtung benutzen will, sich ohne Weiteres zurecht finden wird.

§. 1.

Ueber ein allgemeines Transformationsproblem mit linearen Substitutionen.

Eine bekannte, charakteristische Eigenschaft der homogenen Functionen zweiter Ordnung jeder Anzahl von Variabeln besteht darin, dass sie sich durch lineare Substitutionen in specielle Formen transformiren lassen, über deren sämmtliche Coefficienten von vorne hinein verfügt worden ist. Diese Eigenthümlichkeit findet, mit Ausnahme der binären Formen dritter Ordnung, für Functionen höherer Ordnung nicht mehr Statt. Man überzeugt sich hiervon sehr leicht, wenn man die Anzahl der zur Ausführung der Transformation aufzustellenden Gleichungen mit der Anzahl der zu bestimmenden Substitutions-Coefficienten vergleicht. In der That, wenn p die Ordnung der homogenen Function, n die Anzahl der Variabeln bezeichnet, so ist die Anzahl dieser Gleichungen, übereinstimmend mit der Anzahl der Coefficienten:

$$(1.)\qquad (n,p) = \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{1.2\dots p},$$

während die Anzahl der Substitutionscoefficienten n^2 beträgt, und es ist nur für $n=2$, $p=3$, $(n,p)=n^2$, sonst aber

$$(n,p) > n^2,$$

sobald p grösser als 2 ist.

Es geht hieraus hervor, dass die sogenannten canonischen Formen, sobald man den zweiten Grad überschritten hat, immer nur die Theorie einer speciellen Klasse von Functionen liefern können, und dass man, um zur Ausführung aller verschiedenen Transformationen durch lineare Substitutionen zu gelangen, zunächst die transformirte Form gar nicht specialisiren darf.

In Rücksicht hierauf entsteht daher das folgende Problem:

„Es seien

$$(1^a.)\qquad \begin{cases} F(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma\dots}\, x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots, \\ F'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \Sigma a'_{\alpha\beta\gamma\dots}\, \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots \end{cases}$$

zwei beliebige und beide ganz allgemeine homogene Functionen der p^{ten} Ord-

nung, respective von den n Variabeln x_1 bis x_n und ξ_1 bis ξ_n, man soll die Bedingungen zwischen ihren Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ und $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ finden, unter welchen beide Functionen durch lineare Substitutionen in einander transformirt werden können."

Diese Bedingungen werde ich in der Folge die Transformationsrelationen nennen.

Bezeichnet man die Substitutionen durch

$$(2.)\quad \begin{cases} x_1 = x_1^{(1)}\xi_1 + x_1^{(2)}\xi_2 + \cdots + x_1^{(n)}\xi_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n = x_n^{(1)}\xi_1 + x_n^{(2)}\xi_2 + \cdots + x_n^{(n)}\xi_n, \end{cases}$$

so soll die einzige Beschränkung, welcher dieselben unterworfen werden, darin bestehen, dass sie von einander unabhängig sind, d. h. dass ihre Determinante

$$(3.)\quad r = \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(n)}$$

nicht verschwindet. Denkt man sich alsdann die Substitution (2.) in die erste der Functionen (1^a.) eingesetzt, und nimmt an, dass dadurch

$$(4.)\quad F(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma F_{\alpha\beta\gamma\dots} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots$$

entsteht, so erhält man zur Ausführung der Transformation die Gleichungen

$$(5.)\quad F_{\alpha\beta\gamma\dots} = a'_{\alpha\beta\gamma\dots},$$

deren Anzahl durch (n, p) unter (1.) gegeben ist.

Die Functionen $F_{\alpha\beta\gamma\dots}$ sind in Bezug auf die Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ von F linear und homogen, und betrachtet man dieselben in den Gleichungen (5.) als Unbekannte, so lässt sich leicht zeigen, dass die Determinante dieser Gleichungen eine Potenz der Determinante der Substitutionscoefficienten ist. Hieraus folgt, dass diese Determinante nicht verschwinden darf, wenn die Gleichungen (5.) von einander unabhängig d. h. wenn die Coefficienten beider Functionen F und F' ganz allgemein sein sollen.

Man könnte nun zur Lösung des Problemes gelangen, wenn man aus den Gleichungen (5.) die Substitutionscoefficienten eliminirte, allein man überzeugt sich leicht davon, dass diese Elimination zu verwickelt ist, um auf diesem Wege die Transformationsrelationen ableiten zu können. Ich werde daher die Gleichungen (5.) in der Folge nur als Beweismittel gebrauchen und nicht allein die Transformationsrelationen aus einer anderen Quelle ableiten, sondern auch andere Gleichungen zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten aufstellen und zwar solche, welche die für die Ausführung der Transformation wichtige Form haben, dass sie sämmtlich die Coefficienten jeder Verticalreihe der Substitution separirt enthalten.

§. 2.

Grundeigenschaften der Transformationsrelationen.

Wenn man die Gleichungen §. 1 (5.) sämmtlich durch eine derselben dividirt, so erhält man ein System von $(n, p)-1$ Gleichungen, welche nur noch die (n^2-1) Verhältnisse der unbekannten Substitutionscoefficienten enthalten. Dieses folgt aus dem Umstand, dass die Functionen $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ homogene Functionen der p^{ten} Ordnung in Bezug auf erstere sind. Bezeichnet man daher durch $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$ constante Indices, so vertreten bei der Elimination der Substitutionscoefficienten die $(n, p)-1$ Gleichungen:

$$(1.)\qquad \frac{F_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{F_{\varkappa\lambda\mu\ldots}} = \frac{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{a'_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}$$

vollständig die Gleichungen §. 1 (5.). Die rechten Seiten der Gleichungen (1.) enthalten aber nur die Verhältnisse der Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ unter sich und die linken Seiten sind Functionen der Verhältnisse $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ unter sich, weil die Functionen $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ homogen in Bezug auf letztere sind. Erwägt man daher, dass jedes Eliminationsresultat aus algebraischen Gleichungen sich unter der Form

$$R = 0$$

darstellen lässt, wo R eine ganze Function der Constanten ist, so folgt, *dass in dem vorliegenden Falle R eine ganze Function der Systeme $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ werden muss, welche in Bezug auf jedes System einzeln homogen ist.*

Man kann daher die sämmtlichen Transformationsrelationen in der Form:

$$(2.)\qquad R = PQ' + P_1Q'_1 + P_2Q'_2 + \cdots = 0$$

darstellen, wo $P, P_1, P_2, \ldots$ Terme bedeuten, welche nur Functionen der Constanten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$, $Q', Q'_1, Q'_2, \ldots$ Terme, welche nur Functionen der Constanten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sind, und in welchen sämmtliche $P, P_1, P_2, \ldots$ homogen und von ein und derselben Ordnung in Bezug auf die Constanten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und sämmtliche $Q', Q'_1, Q'_2, \ldots$ homogen und von ein und derselben Ordnung in Bezug auf die Constanten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sind.

Man denke sich nun die Gleichung (2.) nach einer der Functionen P aufgelöst, so dass aus (2.) z. B.

$$(3.)\qquad P = \Pi'$$

folgt, wo der Kürze halber

$$\Pi' = -\frac{P_1 Q'_1 + P_2 Q'_2 + \cdots}{Q'}$$

gesetzt worden ist, dann bedeutet Π' eine gebrochene rationale Function der Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$, deren Zähler und Nenner in Bezug auf letztere von gleicher Ordnung sind, oder kürzer ausgedrückt eine homogene rationale Function der 0^{ten} Ordnung in Bezug auf diese Grössen, *welche die Eigenschaft hat von den Substitutionscoefficienten unabhängig zu werden, sobald man für die Argumente $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ ihre Werthe in Functionen der Substitutionscoefficienten und der Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ substituirt,* denn sie wird alsdann wegen (3.) identisch gleich P, welches nur noch die Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ enthält. Offenbar lassen sich aus den Transformationsrelationen unendlich viele solcher von den Substitutionscoefficienten unabhängigen Functionen Π' der $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ ableiten, *es wird aber die Anzahl der von einander unabhängigen eine beschränkte sein, da sich rückwärts aus jeder Function Π' ein Eliminationsresultat* (2.) *ableiten lässt.* Um dieses einzusehen, bemerke man, dass Π', als von den Substitutionscoefficienten unabhängig, ungeändert bleiben muss, wenn man irgend eine specielle Substitution anwendet, deren Determinante nicht verschwindet, eine solche ist aber die evidente Substitution:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad \dots \quad x_n = \xi_n,$$

in welcher alle Coefficienten in der Diagonale 1, die anderen 0 sind. Durch diese Substitution gehen aber alle $F_{\alpha\beta\gamma\dots}$ §. 1 (5.) in die Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ von F über. *Bezeichnet man daher durch Π die Function, in welche Π' durch Substitution der $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ für die entsprechenden $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ übergeht, so folgt, dass der constante Werth P in* (3.), *welchen Π' annimmt, gleich Π ist, oder dass*

$$(4.) \qquad \Pi' - \Pi = 0$$

die entsprechende Transformationsrelation ist.

Es ist daher unser Problem auf das folgende zurückgeführt:

Die sämmtlichen von Null verschiedenen Functionen der Constanten $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ zu finden, welche von einander und von *den Substitutionscoefficienten unabhängig sind.*

Es ist selbstverständlich, dass auch die Functionen R (2.) selbst, welche die linken Seiten der Transformationsrelationen

$$R = 0$$

darstellen, von den Substitutionscoefficienten unabhängig sind, weil sie identisch gleich 0 werden, aber diese Functionen sind auszuschliessen, weil sie mit jedem beliebigen Factor multiplicirt die angegebene Eigenschaft beibehalten, während andererseits aus (3.) und (4.) folgt, dass man sämmtliche Transformationsrelationen vermittelst der oben definirten von Null verschiedenen Functionen Π' darstellen kann.

§. 3.

Grundgleichungen, welchen alle von den Substitutionscoefficienten unabhängigen Functionen genügen.

Wenn eine Function verschiedener Grössen von mehreren derselben unabhängig wird, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung, welche sie erfüllen muss, darin, dass ihre ersten partiellen Ableitungen nach den genannten Grössen verschwinden. Es folgt daher, dass die vorliegenden Functionen Π' den folgenden n^2 Bedingungen

$$(1.)\qquad \frac{d\Pi'}{dx_k^{(\varrho)}} = 0$$

genügen müssen, wenn sie von den n^2 Substitutionscoefficienten $x_k^{(\varrho)}$ (§. 1 (2.)) unabhängig sein sollen. Nach Ausführung der in (1.) angezeigten Differentiationen treten die Substitutionscoefficienten sowohl explicite in den Gleichungen auf, als auch implicite, insofern die Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ Functionen der $x_k^{(\varrho)}$ sind. Ich werde nun zeigen, dass sich die Gleichungen (1.) in solche verwandeln lassen, welche die Substitutionscoefficienten nicht enthalten.

Da

$$(2.)\qquad \frac{d\Pi'}{dx_k^{(\varrho)}} = \Sigma \frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}} \, \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_k^{(\varrho)}}$$

ist, so wäre hierzu erforderlich die Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ in Functionen der Substitutionscoefficienten wirklich auszudrücken. Diese etwas beschwerliche Rechnung lässt sich auf folgende elegante Weise vermeiden.

Man bemerke, dass die Gleichung

$$(3.)\qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = F'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$$

identisch stattfindet, sobald man links statt der Variabeln x_k ihre Werthe aus den Substitutionsgleichungen in Functionen der ξ_k, und rechts statt der $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ihre Werthe in Functionen der Substitutionscoefficienten einsetzt. Differentiirt man daher die Gleichung (3.) unter dieser Voraussetzung nach irgend einem der Substitutionscoefficienten $x_k^{(\varrho)}$, so erhält man

$$\frac{dF}{dx_k^{(\varrho)}} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{d(x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots)}{dx_k^{(\varrho)}} = \Sigma \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_k^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots,$$

aber es ist

$$\frac{dF}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dx_k^{(\varrho)}} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dx_k^{(\varrho)}} + \dots + \frac{dF}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{dF}{dx_k}\xi_\varrho,$$

weil $x_k^{(\varrho)}$ nur in x_k vorkommt, daher folgt, wenn man k allmälig die Werthe 1 bis n beilegt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \xi_\varrho \dfrac{dF}{dx_1} = \Sigma \dfrac{da'_{\alpha\beta\gamma\dots}}{dx_1^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots, \\ \xi_\varrho \dfrac{dF}{dx_2} = \Sigma \dfrac{da'_{\alpha\beta\gamma\dots}}{dx_2^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \xi_\varrho \dfrac{dF}{dx_n} = \Sigma \dfrac{da'_{\alpha\beta\gamma\dots}}{dx_n^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots. \end{cases}$$

Nun ist wegen (3.)

$$\begin{aligned} \frac{dF'}{d\xi_\sigma} &= \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{d\xi_\sigma} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{d\xi_\sigma} + \dots + \frac{dF}{dx_n}\frac{dx_n}{d\xi_\sigma} \\ &= \frac{dF}{dx_1}x_1^{(\sigma)} + \frac{dF}{dx_2}x_2^{(\sigma)} + \dots + \frac{dF}{dx_n}x_n^{(\sigma)}, \end{aligned}$$

multiplicirt man daher die Gleichungen (4.) der Reihe nach mit $x_1^{(\sigma)}$ bis $x_n^{(\sigma)}$ und addirt sie, so erhält man

$$(5.)\quad \xi_\varrho \frac{dF'}{d\xi_\sigma} = \Sigma\left(\frac{da'_{\alpha\beta\gamma\dots}}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)} + \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\dots}}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)} + \dots + \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\dots}}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)}\right)\xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots,$$

woraus man n^2 Gleichungen ableitet, wenn man allmälig für ϱ und σ alle ganzen Zahlen von 1 bis n setzt. Die Gleichungen (5.) stellen aber identische Umformungen dar, d. h. man kann aus denselben ebenso viel Relationen entnehmen als sich von einander verschiedene Potenzen und Producte $\xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots$ der p^{ten} Ordnung auf beiden Seiten befinden, indem man die Coefficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt. Man kann daher auch statt dieser Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichungen ganz beliebige Grössen setzen. Es sollen nun statt $\xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots$ die Ableitungen von Π' nämlich $\dfrac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\dots}}$ nach den entsprechenden Coefficienten $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ auf beiden Seiten substituirt werden, dann entsteht, wenn man das Resultat dieser Substitution auf der linken Seite vorläufig durch

$$(6.)\quad D_{\varrho\sigma}(\Pi') = \xi_\varrho \frac{dF'}{d\xi_\sigma}$$

NB! Das Gleichheitszeichen ist hier in Strenge genommen unrichtig!

bezeichnet:

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi') = \Sigma\left\{\frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)}+\frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)}+\cdots+\frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)}\right\}\frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}},$$

oder wegen (2.):

$$(7.)\qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi') = \frac{d\Pi'}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)}+\frac{d\Pi'}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)}+\cdots+\frac{d\Pi'}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)}.$$

Man beachte hierbei, dass $D_{\varrho\sigma}(\Pi')$ nicht gleich $D_{\sigma\varrho}(\Pi')$ ist.

Die Gleichung (7.) giebt eine *vollständige* Umformung der Gleichungen (1.), denn setzt man einerseits $\frac{d\Pi'}{dx_k^{(\varrho)}} = 0$, so entstehen die Gleichungen

$$(8.)\qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi') = 0,$$

deren Anzahl ebenfalls gleich n^2 ist, und nimmt man an, dass die Gleichungen (8.) erfüllt sind, so folgen aus (7.) die Gleichungen (1.) oder es müsste die Determinante der Substitutionscoefficienten verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist.

Die Gleichungen (8.), welche jetzt zur Definition der Functionen Π' gewonnen sind, werden demnach wegen (6.) auf folgende Weise erhalten:

Man bilde die Differentialquotienten von F' nach den Variabeln

$$\frac{dF'}{d\xi_1},\quad \frac{dF'}{d\xi_2},\quad \ldots\quad \frac{dF'}{d\xi_n},$$

multiplicire sie sämmtlich mit jeder der Variabeln ξ_k einzeln, substituire in die so entstehenden n^2 homogenen Functionen der p^{ten} Ordnung statt der Potenzen und Producte $\xi_1^\alpha\xi_2^\beta\xi_3^\gamma\ldots$ die entsprechenden partiellen Ableitungen $\frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ und setze die Resultate gleich Null.

Die Gleichungen (8.) sind daher lineare partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und auch linear in ihren Coefficienten, indem jede derselben von der Form

$$(9.)\qquad \Sigma\frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}a'_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots} = 0$$

ist, wenn man die Indices $\alpha\beta\gamma\ldots$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ auf eine sofort aus der Definition hervorgehende und später noch näher anzugebende Weise passend wählt. Die Form (9.) der Gleichungen (1.) zeigt, dass sie, wie verlangt wurde, von den explicite stehenden Substitutionscoefficienten befreit sind.

§. 4.

Ueber die Form der Transformationsrelationen.

Es ist hervorzuheben, dass mit der Elimination der Substitutionscoefficienten aus den partiellen Differentialgleichungen auch die explicite stehenden Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ der ursprünglichen homogenen Function F entfernt sind, indem in den Gleichungen §. 3 (9.) nur die Coefficienten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von F' vorkommen. Dieses führt zu einer merkwürdigen Form, welche die Transformationsrelationen annehmen können.

Geht man nämlich von einer derselben §. 2 (2.)

$$R = PQ'+P_1Q'_1+P_2Q'_2+\cdots = 0$$

aus und entwickelt, wie dort angegeben, aus derselben eine der Functionen:

$$\Pi' = -\left(P_1\frac{Q'_1}{Q'}+P_2\frac{Q'_2}{Q'}+\cdots\right),$$

nachdem man jedoch in R die Anzahl der Terme auf die geringstmögliche zurückgeführt hat, so dass zwischen den P, P_1, P_2, ... keine linearen Relationen mehr stattfinden, dann muss nicht allein Π' den Gleichungen

$$(1.)\qquad \Sigma\frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}a'_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots} = 0$$

Genüge leisten, sondern auch die Coefficienten von P_1, P_2, ... in Π', nämlich $\frac{Q'_1}{Q'}$, $\frac{Q'_2}{Q'}$, ... *einzeln* genommen, weil die Grössen P_1, P_2, ... nur Functionen der $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sind, und letztere in den partiellen Differentialgleichungen nicht vorkommen, also als willkürliche Constanten ihrer Integrale zu betrachten sind.

Bildet man daher die *analogen* Functionen

$$\frac{Q_1}{Q},\quad \frac{Q_2}{Q},\ \ldots$$

aus den Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von F und bezeichnet irgend eine derselben durch Π (was immer durch Fortlassung des Accentes angedeutet werden soll), so müssen dieselben nicht allein den Gleichungen

$$(2.)\qquad \Sigma\frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}}a_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots} = 0$$

genügen, sondern es müssen auch, nach dem der Gleichung §. 2 (4.) zu Grunde liegenden Prinzip,

$$\frac{Q'_1}{Q'}-\frac{Q_1}{Q} = 0,\quad \frac{Q'_2}{Q'}-\frac{Q_2}{Q} = 0,\quad \ldots$$

Transformationsrelationen sein. Es folgt daher zunächst, wenn man eine *vollständige* specielle Transformation eine solche nennt, in welcher genau über so viele Coefficienten der transformirten Form auf eine erlaubte Weise verfügt ist, als die Anzahl der Substitutionscoefficienten beträgt:

Theorem I.

Wenn man irgend eine vollständige specielle Transformation einer homogenen Function beliebiger Ordnung vermittelst linearer Substitutionen ausführen kann, und man ordnet die Gleichungen, welche zur Bestimmung der zu ermittelnden Coefficienten der transformirten Form dienen, nach den Potenzen und Producten dieser Coefficienten, so dass Gleichungen von der Form

$$(3.)\quad \Sigma Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots} G_\varkappa G_\lambda G_\mu \ldots = 0$$

entstehen, in welcher G_1, G_2, ... *die zu ermittelnden Coefficienten der transformirten Form, und* $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ *Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Form bedeuten, so sind die sämmtlichen Transformationsrelationen für jede andere lineare Transformation derselben Function in den Gleichungen*

$$(4.)\quad \frac{Q'_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}{Q'_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}} - \frac{Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}{Q_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}} = 0$$

enthalten, wofern man die Coefficienten $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ *und* $Q_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}$ *ein und derselben Gleichung* (3.) *entnimmt und durch Accente die zu denselben analogen Functionen einer beliebigen transformirten Form bezeichnet.*

Nach der bisherigen Annahme war p die Ordnung der homogenen Function, n die Anzahl der Variabeln, also n^2 die Anzahl der Substitutionscoefficienten und (n,p) §. 1 (1.) die Anzahl der Coefficienten von F. Setzt man daher die Anzahl der oben eingeführten G_1, G_2, ... $= \omega$, so ist

$$(5.)\quad \omega = (n,p) - n^2,$$

und die Anzahl der Gleichungen (3.) muss, soweit sie von einander unabhängig sind, ebenso gross sein. Wenn man nun nach dem Theorem I. die Transformationsrelationen (4.) ableitet, so kann die Gesammtzahl derselben zwar grösser werden, man sieht aber leicht, dass einerseits die Anzahl der *von einander unabhängigen* nicht grösser als ω sein kann, und dass andererseits auch wirklich ω von einander unabhängige Functionen $\frac{Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}{Q_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}}$ existiren müssen, welche aus den Coefficienten der Gleichungen (3.) gebildet sind, widrigenfalls die letzteren von einander abhängig wären, was gegen die Voraussetzung ist. Aus diesen Entwickelungen geht ferner hervor:

Theorem II.

a) Alle von einander unabhängigen Transformationsrelationen lassen sich in ihrer einfachsten Gestalt durch Gleichungen von der Form

$$\Pi'-\Pi = 0$$

darstellen, in welchen Π' *eine Function der Constanten* $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *der transformirten Form allein und* Π *eine Function der Constanten* $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *der ursprünglichen Form allein ist, und beide auf analoge Weise aus ihren Argumenten zusammengesetzt sind.*

b) Diese Gleichungen sind, obwohl sie die Coefficienten der ursprünglichen und transformirten Form separirt enthalten, dennoch rational und zwar ist jede der Functionen Π' *oder* Π *eine homogene gebrochene Function ihrer Argumente mit Zähler und Nenner von gleicher Ordnung in Bezug auf dieselben.*

c) Die Anzahl der von einander unabhängigen Transformationsrelationen oder der von einander unabhängigen Functionen Π *oder* Π' *ist gleich der Anzahl der Coefficienten der homogenen Function weniger der Anzahl der Substitutionscoefficienten.*

d) Die Functionen Π' *oder* Π *sind vollständig definirt durch ein System von* n^2 *simultanen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und zwar für die Functionen* Π *durch die Gleichungen:*

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi) = x_\varrho \frac{dF}{dx_\sigma} = 0,$$

in welchen die Potenzen und Producte $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma\ldots$ *der* p^{ten} *Ordnung symbolisch durch die entsprechenden* $\dfrac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ *ersetzt und statt* ϱ *und* σ *allmälig alle Zahlen von 1 bis n substituirt werden müssen.*

Das Theorem I. wird im Allgemeinen zur Ermittelung der Functionen Π nicht verwendet werden. Wenn man aber auf eine aus dem Theorem II. hervorgehende Weise zu irgend einem System von Functionen Π gelangt ist, und man bildet aus den entsprechenden Gleichungen $\Pi'-\Pi = 0$ die Relationen Theorem I. (3.):

$$\Sigma Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots} G_\varkappa G_\lambda G_\mu \ldots = 0,$$

so haben die Coefficienten $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ in dieser Form offenbar die Eigenschaft, sich aus dem System der angegebenen Π unter blosser Vermittelung von numerischen Coefficienten zusammensetzen zu lassen. Dieses hat eine andere sehr wichtige Verwendung der *speciellen* transformirten Formen zur Folge. Man kann nämlich in Folge dessen entscheiden, ob ein solches System von Functionen Π von einander abhängige enthält oder nicht, und für den ersteren Fall die Zusammensetzung der abhängigen aus den unabhängigen kennen lernen, es gilt nämlich

Theorem III.

Wenn man ein System von Functionen Π in Bezug auf ihre Abhängigkeit von einander untersuchen soll, so bilde man aus den entsprechenden Gleichungen $\Pi'-\Pi = 0$, für eine passend gewählte specielle transformirte Form, die Relationen:

$$\Sigma Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots} G_\varkappa G_\lambda G_\mu \ldots = 0,$$

deren Coefficienten $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ reine Functionen der angegebenen Π sind, und untersuche die Abhängigkeit dieser Gleichungen von einander in Bezug auf die Constanten $G_\varkappa$, G_λ, G_μ, ... Findet eine solche nicht statt, so sind auch die Functionen Π von einander unabhängig, sind hingegen die Gleichungen in Bezug auf die Constanten $G_\varkappa$, G_λ, G_μ, ... von einander abhängig, so findet man durch Elimination derselben aus den vorstehenden Gleichungen das Abhängigkeitsgesetz der Functionen $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ und somit auch der Functionen Π von einander.

Mit Hülfe dieser Principien sind die in §. 1 (5.) angegebenen Gleichungen, welche zur Transformation gewöhnlich benutzt werden, überflüssig gemacht, und es ist die weitere Untersuchung von der Behandlung der partiellen Differentialgleichungen abhängig.

§. 5.

Eigenschaften der partiellen Differentialgleichungen.

Um die entwickelten partiellen Differentialgleichungen

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi) = x_\varrho \frac{dF}{dx_\sigma} = 0$$

aus ihrer symbolischen Form in die explicite zu übertragen, ist es zweckmässig, die Bezeichnung der gegebenen homogenen Function dahin abzuändern, dass man

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots,$$

wo Σ eine einfache Summation über alle von einander verschiedenen Glieder anzeigt, auf folgende Weise:

$$(1.) \quad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$$

schreibt, wo $\Sigma\Sigma$ eine mehrfache Summation über alle möglichen Zahlenwerthe 1 bis n für $\varkappa$, λ, μ, ... andeutet. Wenn man beachtet, dass bei dieser Bezeichnungsweise durch die Substitution $a_\varkappa a_\lambda a_\mu \ldots$ für $a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ die Gleichung (1.) in

$$(2.) \quad (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^p = \Sigma a_\varkappa a_\lambda a_\mu \ldots x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$$

übergeht, so folgt ohne Weiteres, dass nach der Ausführung der mehrfachen Summation die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ die entsprechenden Polynomialcoefficienten als numerische Factoren enthalten. Man kann auch bei anderen Operationen die Gleichung (2.) als symbolische Form von (1.) benutzen und ersieht dann zunächst durch Differentiation derselben nach einer der Variabeln x_σ, dass

$$(3.)\qquad \frac{dF}{dx_\sigma} = p.\Sigma\Sigma a_{\sigma\lambda\mu\dots} x_\lambda x_\mu \dots$$

wird, wo die mehrfache Summation sich nur über alle Werthe 1 bis n für λ, μ ... erstreckt, während der Index σ constant bleibt. Multiplicirt man alsdann die Gleichung (3.) mit x_ϱ, und betrachtet ϱ ebenfalls als constanten Index, so wird

$$x_\varrho \frac{dF}{dx_\sigma} = p\Sigma\Sigma a_{\sigma\lambda\mu\dots} x_\varrho x_\lambda x_\mu \dots,$$

und hierin ist für $x_\varrho x_\lambda x_\mu \dots$ der entsprechende Differentialquotient von Π zu setzen, welcher gleich $\frac{d\Pi}{(\varrho\lambda\mu\dots)da_{\varrho\lambda\mu\dots}}$ ist, wenn man der Kürze halber durch $(\varrho\sigma\mu\dots)$ den zugehörigen Polynomialcoefficienten bezeichnet und beachtet, dass $(\varrho\lambda\mu\dots)a_{\varrho\lambda\mu\dots}$ der vollständige Coefficient von $x_\varrho x_\lambda x_\mu \dots$ in F ist. Es folgt daher

$$(4.)\qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi) = p\Sigma\Sigma \frac{1}{(\varrho\lambda\mu\dots)} \frac{d\Pi}{da_{\varrho\lambda\mu\dots}} a_{\sigma\lambda\mu\dots}.$$

Ich werde noch

$$(5.)\qquad \frac{1}{(\varrho\lambda\mu\dots)} \frac{d\Pi}{da_{\varrho\lambda\mu\dots}} = \Pi_{\varrho\lambda\mu\dots}$$

schreiben, dann ist das System von partiellen Differentialgleichungen das folgende:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \Sigma\Sigma\Pi_{1\lambda\mu\dots}a_{1\lambda\mu\dots} = 0, & \Sigma\Sigma\Pi_{2\lambda\mu\dots}a_{1\lambda\mu\dots} = 0, & \dots & \Sigma\Sigma\Pi_{n\lambda\mu\dots}a_{1\lambda\mu\dots} = 0, \\ \Sigma\Sigma\Pi_{1\lambda\mu\dots}a_{2\lambda\mu\dots} = 0, & \Sigma\Sigma\Pi_{2\lambda\mu\dots}a_{2\lambda\mu\dots} = 0, & \dots & \Sigma\Sigma\Pi_{n\lambda\mu\dots}a_{2\lambda\mu\dots} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma\Sigma\Pi_{1\lambda\mu\dots}a_{n\lambda\mu\dots} = 0, & \Sigma\Sigma\Pi_{2\lambda\mu\dots}a_{n\lambda\mu\dots} = 0, & \dots & \Sigma\Sigma\Pi_{n\lambda\mu\dots}a_{n\lambda\mu\dots} = 0. \end{cases}$$

Das vorstehende System von simultanen partiellen Differentialgleichungen ist ein sehr merkwürdiges, auch wenn man es für sich allein betrachtet. Es ist bekannt, dass simultane partielle Differentialgleichungen neben einander nicht bestehen, wenn nicht gewisse Bedingungen erfüllt sind. Wenn man nämlich von einer der Gleichungen alle particularen Integrale, deren Anzahl um 1 geringer ist als die Anzahl der Variabeln, ermittelt hat, so muss es möglich sein, diese Integrale als neue Variabeln in die übrigen Gleichungen einzuführen und dadurch das System auf ein anderes zurückzuführen, welches eine Gleichung weniger und eine Variable weniger hat, und man muss diesen Process so lange fortsetzen können, bis man nur eine Gleichung mit einer Variabeln mehr übrig behält, als die Anzahl der Variabeln des Systemes weniger der Anzahl der Gleichungen beträgt, so dass dann im günstigsten Falle die Anzahl der gemeinschaftlichen particularen Integrale gleich dieser Differenz wird. Bei einem beliebigen System simultaner partieller Differentialgleichungen wird die angegebene Reduction der Variabeln nicht zu erreichen sein. Für das vorstehende folgt aber aus seinem Zusammenhang mit dem algebraischen Problem:

1. *Dass die Bedingungen der Coexistenz wirklich erfüllt sind und dass also das angegebene Verfahren anwendbar ist.*
2. *Dass die grösstmögliche Zahl von Lösungen in demselben erreicht ist, nämlich die Anzahl der Variabeln, weniger der Anzahl der Gleichungen, übereinstimmend mit der Anzahl* ω (§. 4 (5.)) *der Functionen, welche die Transformationsrelationen bilden.*
3. *Dass sämmtliche particularen Integrale durch rationale Functionen ihrer Argumente dargestellt werden können, welche in Bezug auf die letzteren homogen und von der 0^{ten} Ordnung sind.*

Man kann den letzten Umstand an den Gleichungen selbst verificiren. Bildet man nämlich die Summe derjenigen partiellen Differentialgleichungen, in welchen beide Indices einander gleich sind, so wird

$$D_{11}(\Pi)+D_{22}(\Pi)+\cdots+D_{nn}(\Pi) = 0.$$

Es ergiebt sich aber in symbolischer Form:

$$D_{11}(\Pi)+D_{22}(\Pi)+\cdots+D_{nn}(\Pi) = x_1\frac{dF}{dx_1}+x_2\frac{dF}{dx_2}+\cdots+x_n\frac{dF}{dx_n},$$

was nach dem Satz über die homogenen Functionen in

$$p.F(x_1, x_2, \ldots x_n) = p.\Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots = p.\Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots}\frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$$

übergeht, wenn man noch $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots = \frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ setzt.

Nun sei Π in Bezug auf die Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von der γ^{ten} Ordnung, so folgt nach demselben Satz über die homogenen Functionen:

$$(7.)\qquad p\Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots}\frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}} = \gamma p\Pi = D_{11}(\Pi)+D_{22}(\Pi)+\cdots+D_{nn}(\Pi),$$

folglich ist entweder $\Pi = 0$, oder $\gamma = 0$. Da aber Null als Lösung nicht angesehen werden kann, so bleibt nur $\gamma = 0$ übrig, d. h. die Functionen Π sind von der 0^{ten} Ordnung.

Wenn man die Gleichungen (6.) als gewöhnliche lineare Gleichungen behandelt, deren Unbekannte die Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ sind, so hat man ein System von n^2 Gleichungen zwischen (n,p) Unbekannten, welche demnach $\omega = (n,p) - n^2$ Lösungen liefern, also ebenso viel als die Anzahl der Integrale beträgt. Bezeichnet man jene Lösungen durch $\Pi^{(1)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}, \Pi^{(2)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}, \ldots \Pi^{(\omega)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ und mit $M_1, M_2, \ldots M_n$ beliebige constante Multiplicatoren, so kann man als allgemeinste Lösung der linearen Gleichungen

$$(8.)\qquad \Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots} = M_1\Pi^{(1)}_{\varrho\lambda\mu\ldots} + M_2\Pi^{(2)}_{\varrho\lambda\mu\ldots} + \cdots + M_\omega\Pi^{(\omega)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}$$

setzen. Es folgt daher:

4. *Die Auflösungen der linearen Gleichungen*

$$\Sigma\Sigma\,\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}\,a_{\sigma\lambda\mu\ldots} = 0,$$

in Bezug auf die Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ als Unbekannte, lassen sich in ihrer allgemeinsten Form durch die partiellen Ableitungen einer mit ω willkürlichen constanten Parametern behafteten Function der Grössen $a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ nach denselben darstellen, dividirt durch die entsprechenden Polynomialcoefficienten.

Die Anwendung dieses Satzes auf die homogenen Functionen dritter Ordnung von drei Variabeln hat mich zu den Resultaten meiner Abhandlung in diesem Journal Bd. 39, pag. 155 geführt.

Da jede der Functionen Π die Form eines ächten Bruches hat, der durch

$$\Pi = \frac{P}{Q}$$

bezeichnet werden soll, so wird

$$\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots} = \frac{P_{\varrho\lambda\mu\ldots}Q - Q_{\varrho\lambda\mu\ldots}P}{Q^2},$$

wo $P_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ und $Q_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ eine mit $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ (5.) analoge Bedeutung haben. Es sind aber die Gleichungen (6.) in Bezug auf die $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ homogen, daher kann man nur die Verhältnisse der letzteren ermitteln, und demnach mit Fortlassung des Nenners als Auflösung der Gleichungen

$$\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots} = P_{\varrho\lambda\mu\ldots}Q - Q_{\varrho\lambda\mu\ldots}P$$

schreiben, welche alsdann *ganze* Functionen sind. Betrachtet man die auf diese Weise definirten Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ als die Coefficienten einer neuen homogenen Function der p^{ten} Ordnung, so will ich eine solche *die conjugirte Form zur ursprünglichen* nennen. Es folgt aus dem Obigen, dass die Anzahl der in Bezug auf die Coefficienten von einander unabhängigen conjugirten Formen ω beträgt. Diese conjugirten Formen bilden eine *specielle* Classe der später zu entwickelnden zugehörigen Formen, und zeichnen sich vor den übrigen durch eine Eigenthümlichkeit aus, welche aus der Ansicht der Gleichungen (6.) sofort ersichtlich wird. Letztere bleiben nämlich unverändert, wenn man die Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ mit den entsprechenden $a_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ vertauscht. Betrachtet man daher in denselben die Grössen $a_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ als Unbekannte und stellt ihre Lösungen in Functionen der $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ dar, so sind dieselben genau dieselben Functionen der letzteren, welche früher die letzteren von den ersteren waren, daher folgt:

5. *Die conjugirten Formen haben die Eigenschaft, dass sich die ursprüngliche Form als eine conjugirte zu jeder derselben darstellen lässt, wenn man letztere als eine ursprüngliche ansieht.*

Und

6. *Es giebt ein ganzes System von* $(\omega-1)$ *in Bezug auf die Coefficienten unabhängigen Formen, welche, der ursprünglichen coordinirt und mit ihr in Bezug auf die Variabeln von derselben Ordnung, die Eigenschaft haben, dass sie neben der ursprünglichen zu jeder conjugirten Form der letzteren conjugirt sind, und welche man, wenn die unter* (8.) *angegebenen ursprünglich conjugirten bekannt sind, sofort dadurch bilden kann, dass man die letzteren aus den Coefficienten einer der conjugirten zusammensetzt.*

Ich habe die Wichtigkeit der conjugirten Formen für die homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln in meiner Abhandlung (dieses Journal Bd. 55, pag. 68) dargethan, anderweitig sind dieselben als selbstständige Formen noch gar nicht untersucht, noch viel weniger ist ihre Existenz im Allgemeinen, welche durch die vorstehenden Entwickelungen klar hervortritt, irgendwo erwiesen worden.

§. 6.

Ueber die Invarianten der homogenen Functionen.

Die weitere Entwickelung der Theorie hängt davon ab, dass man die Zähler und Nenner der betrachteten Functionen Π selbstständig definirt. Diese Zähler und Nenner sind, wie ich jetzt zeigen werde, diejenigen ganzen Functionen der Coefficienten einer homogenen Function, welche mit dem Namen ***Invarianten*** bezeichnet werden. Zuvor bemerke ich jedoch, dass diese Benennung eigentlich im wahren Sinne des Wortes den Functionen Π selbst zukommt, insofern als durch die vorstehende Theorie gezeigt worden ist, dass die Transformationsrelationen in den Formen

$$\Pi' - \Pi = 0$$

dargestellt werden, was nichts Anderes aussagt, als *dass die Functionen Π die Eigenschaft haben, absolut unverändert zu bleiben, wenn man dieselben aus den Coefficienten irgend einer transformirten Form bildet;* es dürfte daher die Benennung *absolute Invarianten,* welche ich in der oben citirten Abhandlung über die cubischen Functionen für dieselben vorgeschlagen habe, zweckmässig sein, um sie von den vorher definirten Invarianten zu unterscheiden. Die Definition der letzteren als Zähler und Nenner der absoluten Invarianten ist aber viel naturgemässer als die übliche, weil mit derselben auch ihre Existenz dargethan ist, und es wird nach dem Gange der gegenwärtigen Entwickelungen die sonst übliche Definition, welche ihre Existenz nur empirisch voraussetzt, als eine ihrer Haupteigenschaften erwiesen werden.

Es ist gezeigt worden, dass jede absolute Invariante Π die Form

$$(1.)\qquad \Pi = \frac{P}{Q}$$

hat, worin P und Q ganze homogene Functionen der Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ von F sind, welche den partiellen Differentialgleichungen

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0,$$

oder wenn man den Werth für Π aus (1.) substituirt, den folgenden:

$$(2.)\qquad QD_{\varrho\sigma}(P) - PD_{\varrho\sigma}(Q) = 0$$

Genüge leisten. Sollen Zähler und Nenner von Π bestimmt definirbare Functionen sein, so muss man sie von jedem gemeinschaftlichen Factor befreit denken, denn mit einem Factor versehen können sie jeden beliebigen Werth annehmen. Beachtet man nun, dass (2.) eine identische Gleichung ist, ferner dass $D_{\varrho\sigma}(P)$ und $D_{\varrho\sigma}(Q)$ nach ihrer Definition zugleich mit P und Q ganze Functionen sind und zwar respective von derselben Ordnung wie P und Q, so folgt, wenn man zufolge (2.):

$$(3.)\qquad \frac{D_{\varrho\sigma}(P)}{P} = \frac{D_{\varrho\sigma}(Q)}{Q} = \lambda_{\varrho\sigma}$$

setzt, dass nicht allein diese Quotienten ohne Rest aufgehen müssen, sondern auch *dass ihr Werth $\lambda_{\varrho\sigma}$ von den Argumenten $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ der Functionen P und Q unabhängig ist.* Die Beschränkung, dass P und Q keinen gemeinschaftlichen Factor haben, kann in Ansehung solcher Factoren, welche selbst Zähler oder

Nenner der übrigen Functionen Π sind, aufgehoben werden, denn wenn P_1 einen solchen bezeichnet, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{D_{\varrho\sigma}(PP_1)}{PP_1} = \frac{D_{\varrho\sigma}(P)}{P} + \frac{D_{\varrho\sigma}(P_1)}{P_1},$$

dass mit $\frac{D_{\varrho\sigma}(P)}{P}$ und $\frac{D_{\varrho\sigma}(P_1)}{P_1}$ zugleich $\frac{D_{\varrho\sigma}(PP_1)}{PP_1}$ von den Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ unabhängig wird. Im Uebrigen ist klar, dass, welche Werthe auch die Grössen $\lambda_{\varrho\sigma}$ sonst haben mögen, die zur Darstellung von Π erforderlichen Functionen P und Q immer aus den Gleichungen (3.) entnommen werden können. Aber die Gleichungen (3.) sind wiederum simultane partielle Differentialgleichungen, welche neben einander bestehen sollen, und es lässt sich nachweisen, *dass die Bedingungen der Coexistenz nur für ganz bestimmte Werthe der Grössen $\lambda_{\varrho\sigma}$ erfüllt sind.* Um diese Werthe auf dem einfachsten Wege zu erhalten, schlage ich folgendes Verfahren ein. In Folge der Constanz der Grössen $\lambda_{\varrho\sigma}$ müssen dieselben Werthe auch für die zu (3.) analogen Differentialgleichungen:

$$(4.)\qquad \frac{D_{\varrho\sigma}(P')}{P'} = \lambda_{\varrho\sigma}$$

gelten, welche aus den Coefficienten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ der transformirten Form gebildet sind. Diese Gleichungen kann man vermittelst der identischen Gleichung §. 3 (7.), welche auf die Function P' angewandt die folgende ist:

$$(5.)\qquad D_{\varrho\sigma}(P') = \frac{dP'}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)} + \frac{dP'}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{dP'}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)},$$

umformen. Setzt man nämlich der Kürze halber

$$(6.)\qquad L = \log P',$$

so gehen wegen (5.) die Gleichungen (4.) über in

$$(7.)\qquad \frac{dL}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)} + \frac{dL}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{dL}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)} = \lambda_{\varrho\sigma},$$

welche Gleichungen nach einem bekannten Theorem der Determinantentheorie nebeneinander bestehen und sofort integrirt werden können, wenn man

$$\lambda_{\varrho\sigma} = 0$$

setzt, so oft ϱ und σ von einander verschieden sind, und ausserdem

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \cdots = \lambda_{nn}.$$

Alsdann aber zeigen die Gleichungen, dass L nur eine Function der Substitutionscoefficienten ist.

In der That, wenn

$$(8.)\qquad r = \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(n)}$$

die Determinante der Substitution bezeichnet, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$(9.)\quad \frac{dr}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)}+\frac{dr}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)}+\cdots+\frac{dr}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)} = r \text{ oder } 0,$$

je nachdem ϱ und σ gleich oder verschieden sind, und wenn man der Kürze halber

$$(10.)\quad l = \lambda \log r$$

schreibt, wo λ einen beliebigen Zahlenfactor bedeutet, so gehen dieselben in

$$(11.)\quad \frac{dl}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)}+\frac{dl}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)}+\cdots+\frac{dl}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)} = \lambda \text{ oder } 0$$

über; es stimmt aber (11.) mit (7.) überein, nachdem man auch in (7.):

$$(12.)\quad \begin{cases} \lambda_{\varrho\varrho}=\lambda_{\sigma\sigma}=\cdots=\lambda, \\ \lambda_{\varrho\sigma}=0 \end{cases}$$

gesetzt hat, und es ist alsdann:

$$L = l+C.$$

Man setze jetzt in die letzte Gleichung die Werthe für L und l aus (6.) und (10.), so entsteht:

$$P' = C.r^{\lambda},$$

wo C von den Substitutionscoefficienten unabhängig ist. Die Bestimmung von C erfolgt leicht vermittelst der schon in §. 2 angewandten evidenten Substitution:

$$x_1=\xi_1,\quad x_2=\xi_2,\quad \ldots\quad x_n=\xi_n,$$

für welche die Determinante gleich 1 ist, und welche daher die Gleichung

$$P = C$$

liefert, also giebt die vorstehende Theorie schliesslich die Gleichung:

$$(13.)\quad P'=P.r^{\lambda}=P.(\Sigma\pm x_1^{(1)}x_2^{(2)}\ldots x_n^{(n)})^{\lambda}.$$

Es bleibt noch der Beweis zu führen, dass man auf keine andere Weise als durch die Gleichungen (12.) den Bedingungen der Coexistenz genügen kann. Zu diesem Ende entnehme man aus (7.) das System von n Gleichungen, welches die Unbekannten $\frac{dL}{dx_1^{(\varrho)}}, \frac{dL}{dx_2^{(\varrho)}}, \ldots \frac{dL}{dx_n^{(\varrho)}}$ enthält, und löse es nach denselben auf, dann erhält man bekanntlich:

$$\frac{dL}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{1}{r}\left\{\frac{dr}{dx_k^{(1)}}\lambda_{\varrho 1}+\frac{dr}{dx_k^{(2)}}\lambda_{\varrho 2}+\cdots+\frac{dr}{dx_k^{(n)}}\lambda_{\varrho n}\right\}.$$

Ebenso aus dem System σ:

$$\frac{dL}{dx_k^{(\sigma)}} = \frac{1}{r}\left\{\frac{dr}{dx_k^{(1)}}\lambda_{\sigma 1}+\frac{dr}{dx_k^{(2)}}\lambda_{\sigma 2}+\cdots+\frac{dr}{dx_k^{(n)}}\lambda_{\sigma n}\right\}.$$

Die Bedingungen der Integrabilität erfordern, dass die erste nach $x_k^{(\sigma)}$ die zweite nach $x_k^{(\varrho)}$ differentiirt identisch übereinstimmende Resultate liefern. Es muss daher

$$(14.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\dfrac{d\log r}{dx_k^{(\sigma)}}}{dx_k^{(1)}}\lambda_{1\varrho}+\cdots+\dfrac{d\dfrac{d\log r}{dx_k^{(\sigma)}}}{dx_k^{(\varrho)}}\lambda_{\varrho\varrho}+\cdots \\ \qquad -\left(\dfrac{d\dfrac{d\log r}{dx_k^{(\varrho)}}}{dx_k^{(1)}}\lambda_{1\sigma}+\cdots+\dfrac{d\dfrac{d\log r}{dx_k^{(\varrho)}}}{dx_k^{(\sigma)}}\lambda_{\sigma\sigma}+\cdots\right) = 0 \end{array}\right.$$

sein, und dieser Gleichung muss durch Werthe für $\lambda_{\varrho\sigma}$ genügt werden, welche wegen ihrer Definition (3.) auch von den Substitutionscoefficienten unabhängig sind. Man überzeugt sich nun leicht davon, dass mit Ausnahme der einander gleichen Coefficienten von $\lambda_{\varrho\varrho}$ und $\lambda_{\sigma\sigma}$ die $2n-2$ übrigen Coefficienten der $\lambda_{\varrho\sigma}$ in (14.) gänzlich von einander unabhängige Grössen sind, denn die Coefficienten der $\lambda_{\varrho\sigma}$ in $\dfrac{dL}{dx_k^{(\varrho)}}$ und $\dfrac{dL}{dx_k^{(\sigma)}}$ sind als erste Unterdeterminanten überhaupt von einander unabhängig, durch die Differentiation derselben nach nur zwei Constanten $x_k^{(\varrho)}$ und $x_k^{(\sigma)}$ entsteht aber eine zu geringe Zahl von zweiten Unterdeterminanten, um zwischen denselben eine lineare Relation herbeizuführen. Aus diesen Gründen kann die Gleichung (14.) nur erfüllt werden, wenn man $\lambda_{\varrho\varrho}=\lambda_{\sigma\sigma}$ und $\lambda_{\varrho\sigma}=0$ setzt.

Mit Berücksichtigung dieser Werthe zerfallen die Differentialgleichungen (3.) in zwei Gruppen, je nachdem sie mit gleichen oder ungleichen Indices gebildet werden, d. h. es ist:

$$(15.)\quad \left\{\begin{array}{l} D_{11}(P)=D_{22}(P)=\cdots=D_{nn}(P)=\lambda.P, \\ \qquad\qquad D_{\varrho\sigma}(P)=0. \end{array}\right.$$

Die Grösse λ bleibt in diesen Gleichungen völlig unbestimmt; in der That wird man, da die Anzahl der von einander unabhängigen Functionen P um 1 grösser sein muss, als die Anzahl der Functionen Π, auch nur noch n^2-1 Gleichungen zur Definition gebrauchen können, und daher in (15.) von dem gemeinschaftlichen Werthe λP der Grössen $D_{\varrho\varrho}(P)$ absehen. Will man hingegen über die Ordnung der Function P verfügen und setzt dieselbe gleich γ, so kann man hier ganz dieselbe Gleichung ableiten, welche in §. 5 (7.) gegeben ist, nämlich

$$(16.)\quad D_{11}(P)+D_{22}(P)+\cdots+D_{nn}(P) = p\gamma P.$$

Diese Gleichung geht wegen (15.) in

$$n\lambda P = p\gamma P$$

über und giebt alsdann

$$(17.) \quad \lambda = \frac{p\gamma}{n}.$$

Es entspricht also jeder Invariante bestimmten Grades ein durch (17.) bestimmtes λ, aber sie werden sämmtlich den Gleichungen (15.) ohne das letzte Glied λP genügen.

Die Gleichung (13.) in Verbindung mit (16.), ferner die Gleichungen (15.) geben aber das folgende

Theorem IV.

a) Alle Invarianten haben die Eigenschaft, bis auf einen von den Substitutionscoefficienten abhängigen Factor, welcher eine Potenz der Determinante der letzteren ist, unverändert zu bleiben, wenn man sie aus den Coefficienten einer beliebigen transformirten Form bildet, und zwar ist

$$P' = r^{\frac{p\gamma}{n}}.P,$$

wenn γ die Ordnung der Invariante P, p die Ordnung der homogenen Function und n die Anzahl ihrer Variabeln bezeichnet.

b) Dieselben Invarianten genügen dem System von partiellen simultanen Differentialgleichungen:

$$D_{11}(P) = D_{22}(P) = \cdots = D_{nn}(P),$$
$$D_{\varrho\sigma}(P) = 0,$$

deren Anzahl n^2-1 beträgt, und sind durch dasselbe bestimmt, so dass die Anzahl der von einander unabhängigen Lösungen desselben mit der Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten übereinstimmt und gleich $(n,p)-n^2+1$ ist.

Der Theil *a)* des Theorems ist die übliche Definition der Invarianten, dasselbe als Definition zu gebrauchen ist aber nicht statthaft, weil die Existenz der Invarianten in allen Fällen dabei stillschweigend vorausgesetzt wird. Auch kann man aus der Form der Gleichungen:

$$P' = r^{\lambda}.P$$

nur beweisen, dass die Anzahl derselben nicht grösser sein kann als

$$\omega+1 = (n,p)-n^2+1,$$

indem man nach Aufstellung sämmtlicher Gleichungen dieser Art für irgend eine specielle aber vollständige Transformation wie in §. 4 Theorem I., die

Grössen P' durch $(n,p)-n^2$ von einander unabhängige Constanten G_k ausdrücken und daher nach Elimination von r aus sämmtlichen Gleichungen auch die Grössen G_k sämmtlich eliminiren könnte, wenn die Anzahl der Invarianten grösser als $\omega+1$ wäre.

Aus der vorstehenden Theorie folgt aber, dass die verlangte Anzahl von Invarianten wirklich existirt, da man den ω Functionen Π die Form $\frac{P_1}{Q}, \frac{P_2}{Q}, \dots \frac{P_\omega}{Q}$ geben kann, welche alle den gemeinschaftlichen Nenner Q haben, und die Functionen P_k nebst Q alsdann den Bedingungen des Theorems IV. genügen. Ich halte es hiernach nicht für überflüssig, das Theorem noch in folgender Fassung auszusprechen, welche dem Standpunkt der vorliegenden Untersuchung mehr angemessen ist.

Theorem V.

Wenn man, um zwei beliebige allgemeine homogene Functionen der p^{ten} Ordnung

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) \quad \text{und} \quad F'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$$

durch lineare Substitutionen in einander zu transformiren, die (n,p) Gleichungen:

$$F_{\alpha\beta\gamma\dots} = a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$$

bildet, welche nach Einsetzung der Substitution in F, durch Vergleichung mit den Coefficienten von F' entstehen, und zu denselben noch die Gleichung:

$$\Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(n)} = r$$

hinzufügt, in welcher r eine beliebig gegebene Constante bedeutet, so kann man aus sämmtlichen $(n,p)+1$ Gleichungen durch Elimination der Substitutionscoefficienten $(n,p)+1-n^2$ Relationen zwischen den Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$, $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ und r ableiten, welche sämmtlich die Form

$$P'-r^\lambda P = 0$$

haben, wo P nur eine Function der Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ und P' die analoge Function der Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$ ist, und beide ganze Functionen ihrer Argumente sind.

§. 7.

Ueber die Existenz einer Invariante der homogenen Functionen zweiter Ordnung und der binären Functionen dritter Ordnung.

Es ist bereits im §. 1 entwickelt worden, dass die ursprünglichen Transformationsgleichungen

$$(1.) \quad F_{\alpha\beta\gamma\dots} = a'_{\alpha\beta\gamma\dots}$$

von einander abhängig werden, wenn die Determinante der Substitutionscoefficienten verschwindet. Giebt man daher den Transformationsproblemen die Fassung des Theoremes V., fügt also den Gleichungen (1.) noch die folgende:

$$(2.)\qquad \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(n)} = r$$

als algebraische Gleichung hinzu, indem man r eine gegebene Constante bedeuten lässt, so kann der Fall eintreten, dass die Gleichungen (1.) und (2.) zusammen betrachtet von einander abhängig werden, während das System (1.) allein es nicht ist.

Die Criterien einer solchen Abhängigkeit liefert aber das System partieller linearer Differentialgleichungen:

$$(3.)\qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0, \qquad D_{\varrho\varrho}(\Pi) = \lambda \Pi,$$

welches immer aus den Gleichungen (1.) und (2.) abgeleitet werden kann, wenn sie von einander abhängig sind, und es bleibt in jedem Falle zu untersuchen, ob diese Gleichungen eine Lösung Π zulassen oder nicht. In dieser Lage befinden sich die drei Ausnahmefälle der allgemeinen Theorie, welche in §. 1 erwähnt sind, nämlich, wenn die gegebene homogene Function entweder eine lineare, oder eine quadratische für eine beliebige Anzahl von Veränderlichen, oder endlich eine binäre der dritten Ordnung ist.

Was nun zunächst den ersten Fall anbetrifft, so überzeugt man sich leicht durch Aufstellung der Gleichung (3.), dass die alleinige Lösung $\Pi = 0$ ist, *dass also eine einzige lineare Function keine Invariante hat,* ich gehe also gleich zum zweiten Falle über:

Es sei

$$(4.)\qquad F(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

eine gegebene homogene Function der zweiten Ordnung, dann gehen die Gleichungen (3.) zufolge §. 5 (4.) über in

$$(5.)\qquad 2\Sigma \Pi_{\varrho\mu} a_{\varrho\mu} = \lambda \Pi, \qquad \Sigma \Pi_{\varrho\mu} a_{\sigma\mu} = 0,$$

wo ϱ und σ immer constante und von einander verschiedene Indices sind, und wegen §. 5 (5.)

$$(6.)\qquad \Pi_{\varrho\varrho} = \frac{d\Pi}{da_{\varrho\varrho}}, \qquad \Pi_{\varrho\sigma} = \tfrac{1}{2} \frac{d\Pi}{da_{\varrho\sigma}}$$

ist. Die Anzahl der Gleichungen (5.) ist n^2, die der Grössen $\Pi_{\varkappa\lambda}$ gleich $\frac{n(n+1)}{2}$, aber aus dem bekannten Satze, dass die Auflösungen eines Systems von linearen Gleichungen, welches in Bezug auf die Diagonale symmetrisch ist, wiederum ein in Bezug auf die Diagonale symmetrisches System bilden, geht hervor, dass das folgende aus (5.) entnommene System von n Gleichungen:

$$\Pi_{\varrho 1} a_{\varkappa 1} + \Pi_{\varrho 2} a_{\varkappa 2} + \cdots + \Pi_{\varrho n} a_{\varkappa n} = \frac{\lambda}{2} \Pi \text{ oder } 0,$$

in welchen $\varkappa$ allmälig die Werthe 1 bis n annimmt, nach seiner Auflösung denselben Werth für $\Pi_{\varrho\sigma}$ giebt, den man durch Auflösung des analogen die Grössen $\Pi_{\sigma 1}, \Pi_{\sigma 2}, \ldots \Pi_{\sigma n}$ bestimmenden Systems für $\Pi_{\sigma\varrho}$ finden würde; daher reduciren sich die n^2 Gleichungen (5.) durch Auflösung nach den Grössen $\Pi_{\varkappa\lambda}$ auf $\frac{n(n+1)}{2}$, und wenn man nach sehr bekannter Weise

$$(7.) \quad \begin{cases} \Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}, \\ \Delta_{\varrho\varrho} = \dfrac{d\Delta}{da_{\varrho}}, \quad \Delta_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \dfrac{d\Delta}{da_{\varrho\sigma}} \end{cases}$$

setzt, so werden diese $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen:

$$(8.) \quad \Pi_{\varrho\sigma} = \frac{\lambda}{2} \frac{\Pi}{\Delta} \Delta_{\varrho\sigma}.$$

Mit Berücksichtigung von (6.) und (7.) folgt hieraus

$$d\Pi = \frac{\lambda}{2} \frac{\Pi}{\Delta} d\Delta,$$

wenn d totale Differentiation nach den Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ andeutet, also durch Integration:

$$(9.) \quad \Pi = \Delta^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Es existirt also eine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (5.), und sie ist eine beliebige Potenz der Determinante Δ, ausserdem ist erwiesen, dass es keine andere Lösung giebt. Soll Π rational sein, so muss für λ eine gerade Zahl genommen werden, und überdies ist zufolge §. 6 (17.)

$$\lambda = \frac{2\gamma}{n},$$

wenn γ die Ordnung von Π andeutet. Der einfachste Fall $\lambda = 2$ giebt selbstverständlich $\gamma = n$ und $\Pi = \Delta$, daher folgt, dass

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

die einzige einfache Invariante der quadratischen Formen ist, und dass die Gleichung

$$(10.) \quad \Delta' = r^2 . \Delta$$

das alleinige Eliminationsresultat der Substitutionscoefficienten aus den Gleichungen (1.) und (2.) im gegenwärtigen Falle ist.

Eine ähnliche Behandlung lassen die binären Formen dritter Ordnung zu, für welche man die Bezeichnung der Function dadurch erleichtern kann, dass man setzt:

$$(11.)\quad F(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3.$$

Die Anzahl der Gleichungen (1.) und (2.) reducirt sich auf fünf, die Anzahl der Substitutionscoefficienten auf vier, daher weiss man zum Voraus, dass mindestens eine Lösung existiren muss. Die Differentialgleichungen (3.) gehen in folgende über:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Pi_0 a_0 + 2\Pi_1 a_1 + \Pi_2 a_2 = \frac{\lambda}{3}\Pi, \\ \Pi_0 a_1 + 2\Pi_1 a_2 + \Pi_2 a_3 = 0, \\ \Pi_1 a_0 + 2\Pi_2 a_1 + \Pi_3 a_2 = 0, \\ \Pi_1 a_1 + 2\Pi_2 a_2 + \Pi_3 a_3 = \frac{\lambda}{3}\Pi, \end{cases}$$

wenn man nach §. 5 (5.)

$$\Pi_0 = \frac{d\Pi}{da_0},\quad \Pi_1 = \tfrac{1}{3}\frac{d\Pi}{da_1},\quad \Pi_2 = \tfrac{1}{3}\frac{d\Pi}{da_2},\quad \Pi_3 = \frac{d\Pi}{da_3}$$

setzt. Löst man zunächst die Gleichungen (12.) nach diesen Grössen auf, indem man zuerst aus der ersten und zweiten Π_0, aus der dritten und vierten Π_3 eliminirt und die alsdann sich ergebenden Werthe für Π_1 und Π_2 in die zweite und dritte substituirt, so erhält man, wenn der Kürze halber

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird:

$$\Pi_0 = \frac{\lambda}{3}\Pi\frac{2a_2C - a_3B}{4AC - B^2},\quad \Pi_1 = \frac{\lambda}{3}\Pi\frac{a_2B - 2a_1C}{4AC - B^2},\quad \Pi_2 = \frac{\lambda}{3}\Pi\frac{a_1B - 2a_2A}{4AC - B^2},$$

$$\Pi_3 = \frac{\lambda}{3}\Pi\frac{2a_1A - a_0B}{4AC - B^2}.$$

Aber es ist a priori erwiesen, dass diese vier Grössen die partiellen Ableitungen *einer* Function sind, daher müssen die Zähler derselben, abgesehen von constanten Factoren, die Ableitungen des Nenners sein, und es folgt in der That, wenn man

$$4AC - B^2 = \Delta$$

setzt:

$$\Pi_0 = \frac{\lambda}{6}\frac{\Pi}{\Delta}\frac{d\Delta}{da_0},\quad 3\Pi_1 = \frac{\lambda}{6}\frac{\Pi}{\Delta}\frac{d\Delta}{da_1},\quad 3\Pi_2 = \frac{\lambda}{6}\frac{\Pi}{\Delta}\frac{d\Delta}{da_2},\quad \Pi_3 = \frac{\lambda}{6}\frac{\Pi}{\Delta}\frac{d\Delta}{da_3},$$

wie man sich durch eine nachträgliche Rechnung überzeugen kann. Diese Gleichungen lassen sich in

$$d\Pi = \frac{\lambda}{6}\frac{\Pi}{\Delta}d\Delta$$

zusammenfassen und geben

$$(13.)\qquad \Pi = \Delta^{\frac{\lambda}{6}}$$

als einzige Lösung, welche demnach eine beliebige Potenz von $\Delta = 4AC-B^2$ ist. Soll sie rational sein, so muss λ durch 6 theilbar sein. Zufolge §. 6 (17.) ist $\lambda = \frac{3\gamma}{2}$, wenn γ die Ordnung von Π ist, und der einfachste Fall $\lambda = 6$, $\gamma = 4$, giebt

$$\Delta = 4AC-B^2$$

als einzige einfachste Invariante und

$$\Delta' = r^6\Delta$$

als alleiniges Eliminationsresultat der Substitutionscoefficienten aus den Gleichungen (1.) und (2.) im vorliegenden Fall.

§. 8.

Verallgemeinerung der Theorie für die gleichzeitige Transformation eines Systemes homogener Functionen.

Die bisher entwickelte Theorie bildet nur den speciellsten Fall einer viel allgemeineren, an welche sich die Entwicklungen gleich hätten anknüpfen lassen, wenn nicht der einfacheren Darstellungsweise wegen der eingeschlagene Weg den Vorzug verdiente. Die Verallgemeinerung ist aber jetzt nothwendig, um selbst den speciellen Fall weiter durchzuführen.

„Es seien gegeben die folgenden m homogenen Functionen von beliebigen Ordnungen, aber alle von denselben n Variabeln:

$$(1.)\qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots, \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a^{(m)}_{\alpha\beta\gamma\dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots, \end{cases}$$

ich will dieses System kurz das *Functionensystem F* nennen, ferner m andere Functionen der Variabeln ξ_k respective von denselben Ordnungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} F_1'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \Sigma a'_{\underset{(1)}{\alpha\beta\gamma\dots}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots, \\ F_2'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \Sigma a'_{\underset{(2)}{\alpha\beta\gamma\dots}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ F_m'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \Sigma a'_{\underset{(m)}{\alpha\beta\gamma\dots}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots, \end{cases}$$

welches System das *Functionensystem* F' genannt werden soll, sämmtliche Functionen in (1.) und (2.) seien ganz allgemein; man soll die Bedingungen zwischen ihren Coefficienten finden, unter welchen sich beide Functionensysteme durch dieselben linearen Substitutionen in einander transformiren lassen, so dass jede i^{te} Function des einen Systemes gleichzeitig in die i^{te} Function des anderen Systemes übergeht."

Bezeichnet man respective durch

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots \quad p_m$$

die Ordnungen der einzelnen Functionen und setzt, wie in §. 1,

$$(3.)\quad (n, p_i) = \frac{n(n+1)\dots(n+p_i-1)}{1.2.3\dots p_i},$$

so ist die Anzahl der ursprünglichen Transformationsgleichungen:

$$(4.)\quad F_{\underset{(i)}{\alpha\beta\gamma\dots}} = a'_{\underset{(i)}{\alpha\beta\gamma\dots}}$$

gleich

$$(n, p_1)+(n, p_2)+\dots+(n, p_m),$$

und daher die Anzahl der fraglichen Bedingungen:

$$(5.)\quad \Omega = (n, p_1)+(n, p_2)+\dots+(n, p_m)-n^2.$$

Diese Zahl ist im Allgemeinen positiv; wenn *alle* Functionen linear sind und $m < n$ angenommen wird, ist sie negativ; für $m = n$ wird sie in diesem Falle gleich Null; ausserdem ist sie nur noch in einem ganz speciellen Falle negativ, nämlich wenn das ganze Functionensystem aus nur zwei Functionen und zwar einer von der zweiten Ordnung und einer linearen besteht, und in diesem Falle für $n = 3$ wieder gleich Null.

Zu den Bedingungen, welche das Problem verlangt, gehören schon die im Vorhergehenden definirten Transformationsrelationen, nämlich diejenigen, welche die Coefficienten je eines Functionenpaares beider Systeme allein enthalten, ihre Anzahl beträgt für jede Function F_i:

$$\omega_i = (n, p_i)-n^2.$$

Daher bleiben nur noch

$$\Omega_1 = \Omega - ((n,p_1)-n^2) - ((n,p_2)-n^2) - \cdots - ((n,p_m)-n^2)$$

Bedingungen übrig, welche die Coefficienten von zwei oder mehreren Functionen gemischt enthalten, und welche *simultane Transformationsrelationen* genannt werden sollen. Mit Berücksichtigung von (5.) geht daher die Anzahl der simultanen Relationen in

$$(6.)\qquad \Omega_1 = (m-1)n^2$$

über, doch ist diese Zahl nur die geringste, weil sich diese Relationen mit den einfachen immer wieder verbinden lassen, und dadurch wieder andere, wenn auch von einander abhängige, simultane Relationen geben. Ausserdem ist bei dieser Bestimmung vorausgesetzt, dass jede Function des Systemes einfache Transformationsrelationen besitzt, also nach dem Früheren, dass keine derselben linear oder von der zweiten Ordnung ist. Auf analoge Weise kann man auch die Anzahl derjenigen simultanen Relationen bestimmen, welche nur die Coefficienten von zwei, drei oder mehreren der gegebenen Functionen gemischt enthalten.

Die Auflösung des vorliegenden Problemes erfolgt nun in ganz derselben Weise, wie die des einfachen und es bleiben alle in §. 2 und §. 3 dargestellten Sätze genau in derselben Fassung gültig, so dass eine Wiederholung derselben überflüssig wäre. Demzufolge gelangt man zu dem in §. 2 entwickelten analogen Probleme:

„Diejenigen Functionen Π' der Coefficienten des Functionensystemes F' zu ermitteln, welche von den Substitutionscoefficienten unabhängig sind.“

Hierzu ist wieder erforderlich, die folgenden n^2 Bedingungen

$$\frac{d\Pi'}{dx_\varrho^{(\sigma)}} = 0$$

zu erfüllen, welche jetzt auf Gleichungen von der Form:

$$(7.)\qquad \left\{ \Sigma \frac{d\Pi'}{d\underset{(1)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}} \frac{d\underset{(1)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}}{dx_\varrho^{(\sigma)}} + \Sigma \frac{d\Pi'}{d\underset{(2)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}} \frac{d\underset{(2)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}}{dx_\varrho^{(\sigma)}} + \cdots + \Sigma \frac{d\Pi'}{d\underset{(m)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}} \frac{d\underset{(m)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}}{dx_\varrho^{(\sigma)}} = 0 \right.$$

führen, während nach §. 3 (2.) nur einer dieser Summanden erforderlich war.

Bezeichnet man demnach mit

$$(8.)\qquad \underset{(1)}{D_{\varrho\sigma}}(\Pi'),\quad \underset{(2)}{D_{\varrho\sigma}}(\Pi'),\quad \ldots\quad \underset{(m)}{D_{\varrho\sigma}}(\Pi')$$

analoge Ausdrücke für sämmtliche Functionen des Systemes F', wie in §. 3 (6.)

$D_{\varrho\sigma}(\Pi')$ für eine derselben war, so erhält zufolge (7.) auch die umgeformte Gleichung §. 3 (7.), statt *eines* der unter (8.) gegebenen Ausdrücke mit partiellen Differentialquotienten, *die einfache Summe derselben,* nämlich

$$(9.)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\underset{(2)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi') \\ \qquad = \dfrac{d\Pi'}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)}+\dfrac{d\Pi'}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)}+\cdots+\dfrac{d\Pi'}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (9.) folgt nun, *dass zur Definition der Functionen Π' die partiellen Differentialgleichungen*

$$(10.)\quad \underset{(1)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\underset{(2)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi') = 0$$

an Stelle der früher aus einem Summanden derselben bestehenden eintreten.

Die Gleichungen (10.), welche weder die Substitutionscoefficienten noch die Coefficienten der ursprünglichen Formen enthalten, geben auch hier den Satz, *dass sämmtliche Transformationsrelationen die Form*

$$\Pi'-\Pi = 0$$

haben, wo Π' und Π analoge aus den Coefficienten beider Functionensysteme geformte Ausdrücke sind, von denen jeder nur die Coefficienten eines Systemes enthält und eine rationale gebrochene Function derselben ist.

Es genügen demnach die Functionen Π den Differentialgleichungen

$$(11.)\quad \underset{(1)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi)+\underset{(2)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi)+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0,$$

welche aus den Coefficienten des Functionensystemes F gebildet sind.

Aus §. 5 (4.) folgt, dass, in expliciter Form geschrieben, wenn man die Bezeichnung des §. 5

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma \underset{(i)}{a}_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$$

einführt,

$$(12.)\quad \underset{(i)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi) = p_i \Sigma\Sigma \underset{(i)}{\Pi}_{\varrho\lambda\mu\ldots} a_{\sigma\lambda\mu\ldots}$$

ist, wo

$$(13.)\quad \underset{(i)}{\Pi}_{\varkappa\lambda\mu\ldots} = \frac{1}{(\varkappa\lambda\mu\ldots)}\,\frac{d\Pi}{d\underset{(i)}{a}_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}$$

gesetzt ist, und $(\varkappa\lambda\mu\ldots)$ den zu $\underset{(i)}{a}_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ zugehörigen Polynomialcoefficienten bedeutet. Man kann daher die Gleichungen (11.) explicite auf folgende Weise darstellen:

$$(14.)\quad p_1\Sigma\Sigma \underset{(1)}{\Pi}_{\varrho\lambda\mu\ldots} \underset{(1)}{a}_{\sigma\lambda\mu\ldots}+p_2\Sigma\Sigma \underset{(2)}{\Pi}_{\varrho\lambda\mu\ldots} \underset{(2)}{a}_{\sigma\lambda\mu\ldots}+\cdots+p_m\Sigma\Sigma \underset{(m)}{\Pi}_{\varrho\lambda\mu\ldots} \underset{(m)}{a}_{\sigma\lambda\mu\ldots} = 0.$$

§. 9.

Ueber simultane Invarianten.

Es sollen, wie in §. 6, diejenigen Functionen Π, aus welchen sich die Transformationsrelationen eines Functionensystemes in der in §. 8 angegebenen Weise bilden lassen, *absolute simultane Invarianten* genannt werden, wenn sie aus den Coefficienten von zwei oder mehreren Functionen des Systemes zusammengesetzt sind. Die Anzahl sämmtlicher absoluten simultanen Invarianten des Functionensystemes, welche von einander und von den absoluten einfachen Invarianten unabhängig sind, bestimmt sich nach §. 8 aus der Anzahl der gesammten Coefficienten des Functionensystemes, weniger der Anzahl der Substitutionscoefficienten, wenn man die Anzahl der einfachen absoluten Invarianten in Abzug gebracht hat, und diese Zahl reducirt sich noch weiter auf eine übrigens leicht in jedem Falle ersichtliche Weise, wenn sich lineare oder quadratische Functionen im Systeme befinden.

Um die Zähler und Nenner von Π einzeln zu untersuchen, sei

$$\Pi = \frac{P}{Q},$$

wo P und Q ganze homogene Functionen der Coefficienten des Functionensystemes F bedeuten, dann ist zunächst klar, dass die Anzahl der von einander unabhängigen P und Q zusammengenommen immer um eine Einheit grösser ist als die Anzahl der Functionen Π, da man alle Functionen Π nöthigenfalls auf gleiche Benennung bringen kann, und alsdann zu den Zählern der absoluten Invarianten nur noch der gemeinschaftliche Nenner hinzutritt. Es sollen nun diejenigen Zähler und Nenner P oder Q, welche aus den Coefficienten von mehr als einer der Functionen des gegebenen Functionensystemes zusammengesetzt sind, *simultane Invarianten* genannt werden. Die Anzahl der von einander und von den einfachen Invarianten unabhängigen simultanen Invarianten ist aber immer gleich der Differenz der Gesammtzahl und der Anzahl der letzteren, und daher in jedem Falle leicht bestimmbar.

Geht man auf die Entwicklungen des §. 6 zurück, so folgt hier genau auf dieselbe Weise wie dort angegeben ist, die Umwandlung der Gleichungen §. 8 (11.), welche die absoluten Invarianten definiren, in solche, welchen alle genügen, nämlich

$$(1.)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{D}_{\varrho\varrho}(P)+\underset{(2)}{D}_{\varrho\varrho}(P)+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\varrho}(P) = \lambda P, \\ \underset{(1)}{D}_{\varrho\sigma}(P)+\underset{(2)}{D}_{\varrho\sigma}(P)+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\sigma}(P) = 0, \end{cases}$$

wo ϱ und σ von einander verschiedene Indices sind, und λ wieder eine constante Zahl ist. Ich werde diese Gleichungen in der Folge

$$(2.)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}\, D_{\varrho\varrho}(P) = \lambda P, \\ \mathfrak{S}\, D_{\varrho\sigma}(P) = 0 \end{cases}$$

schreiben, indem ich das Zeichen $\mathfrak{S}$ als Summirungszeichen gebrauche, wenn ein und dieselben Operationen für alle m Functionen des Functionensystemes F ausgeführt und alsdann alle addirt werden sollen.

Nach §. 6 (16.) ist

$$D_{11}(P)+D_{22}(P)+\cdots+D_{nn}(P) = p.\gamma.P,$$

wenn γ die Ordnung von P in Bezug auf die Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ist; bezeichnet man daher durch respective

$$\gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \ldots\quad \gamma_m$$

die Ordnungen von P in Bezug auf die Grössen

$$\underset{(1)}{a}_{\alpha\beta\gamma\ldots},\quad \underset{(2)}{a}_{\alpha\beta\gamma\ldots},\quad \ldots\quad \underset{(m)}{a}_{\alpha\beta\gamma\ldots},$$

so folgt

$$\mathfrak{S}\{D_{11}P+D_{22}P+\cdots+D_{nn}P\} = (p_1\gamma_1+p_2\gamma_2+\cdots+p_m\gamma_m)P.$$

Aber wegen (2.) ist dieselbe Summe gleich $n\lambda P$, daher folgt

$$(3.)\quad \lambda = \frac{p_1\gamma_1+p_2\gamma_2+\cdots+p_m\gamma_m}{n},$$

was zur Vervollständigung des Systemes (2.) dient.

Schliesslich ist aus §. 6 noch die Gültigkeit der Gleichung

$$(4.)\quad P' = r^\lambda P$$

zu entnehmen, in welcher λ aus (3.) folgt, und r wie immer die Substitutionsdeterminante bedeutet.

Aus der vorstehenden Theorie folgt, *dass die Determinanten linearer Gleichungen als die ersten speciellen Fälle simultaner Invarianten betrachtet werden können.*

In der That, wenn

$$(5.)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{F} = \underset{(1)}{a}_1 x_1+\underset{(1)}{a}_2 x_2+\cdots+\underset{(1)}{a}_n x_n, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \underset{(n)}{F} = \underset{(n)}{a}_1 x_1+\underset{(n)}{a}_2 x_2+\cdots+\underset{(n)}{a}_n x_n \end{cases}$$

ein gegebenes Functionensystem von n linearen Functionen ist, so gehen die partiellen Differentialgleichungen zur Definition der Invariante in folgende über:

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}\, D_{\varrho\varrho}(P) = \underset{(1)}{a_\varrho}\dfrac{dP}{d\underset{(1)}{a_\varrho}} + \underset{(2)}{a_\varrho}\dfrac{dP}{d\underset{(2)}{a_\varrho}} + \cdots + \underset{(n)}{a_\varrho}\dfrac{dP}{d\underset{(n)}{a_\varrho}} = \lambda P, \\ \mathfrak{S}\, D_{\varrho\sigma}(P) = \underset{(1)}{a_\varrho}\dfrac{dP}{d\underset{(1)}{a_\sigma}} + \underset{(2)}{a_\varrho}\dfrac{dP}{d\underset{(2)}{a_\sigma}} + \cdots + \underset{(n)}{a_\varrho}\dfrac{dP}{d\underset{(n)}{a_\sigma}} = 0, \end{cases}$$

welchen man, wie leicht ersichtlich, genügt durch

$$(7.)\quad P = \Delta^\lambda,$$

wo

$$\Delta = \Sigma \pm \underset{(1)}{a_1}\underset{(2)}{a_2}\ldots\underset{(n)}{a_n}$$

die Determinante des Systemes (5.) ist. Die Grundeigenschaft dieser Invariante

$$\Delta' = r.\Delta$$

ist alsdann der bekannte Satz von der Multiplication der Determinanten. Dass für ein System (5.), in welchem die Anzahl der Variabeln der Anzahl der Functionen gleich ist, eine und nur eine Invariante existirt; und dass bei einer geringeren Anzahl von linearen Functionen die Gleichungen (6.) keine andere Lösung als $P = 0$ liefern, folgt ohne Weiteres wie in §. 7 aus der Betrachtung des entsprechenden Transformationsproblemes.

§. 10.

Ueber ein einfaches Bildungsgesetz simultaner Invarianten.

Ich werde in den nächsten Paragraphen die Kenntniss einfacher Invarianten voraussetzen und zunächst zeigen, wie verschiedene andere zur allgemeinen Theorie erforderliche Formen aus denselben abgeleitet werden, und beginne mit einem einfachen bekannten Gesetz zur Bildung simultaner Invarianten.

Wenn das Functionensystem, dessen simultane Invarianten gesucht werden, aus Functionen ein und derselben p^{ten} Ordnung besteht, und wenn

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots$$

numerische Factoren bedeuten, vermittelst welcher

$$(1.)\quad F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 + \cdots$$

zusammengesetzt ist, so wird jede aus den Coefficienten von F gebildete einfache Invariante P nach den Potenzen und Producten der α_x entwickelt werden können, so dass, wenn γ die Ordnung von P bedeutet,

$$(2.)\quad P_{\alpha_1 F_1+\alpha_2 F_2+\alpha_3 F_3+\cdots} = \alpha_1^\gamma P_1 + \alpha_1^{\gamma-1}\alpha_2 P_2 + \cdots$$

gesetzt werden kann. Da nun

$$P'_{\alpha_1 F'_1+\alpha_2 F'_2+\alpha_3 F'_3+\cdots} = r^\lambda . P_{\alpha_1 F_1+\alpha_2 F_2+\alpha_3 F_3+\cdots}$$

ist, so müssen auch die Coefficienten der Potenzen und Producte von $\alpha_\varkappa$, auf der rechten Seite von (2.), welche gemischte Functionen der Coefficienten von F_1, F_2, ... sind, einzeln den Gleichungen

$$P'_\varkappa = r^\lambda . P_\varkappa$$

genügen, und daher *simultane Invarianten* sein.

Sind die Functionen F_1, F_2, F_3, ... in Bezug auf die Variabeln von verschiedenen Ordnungen, so kann man dasselbe Princip anwenden, nachdem man sie vorher durch Potenzirung oder Multiplication mit einander auf die kleinste *gemeinschaftliche* Ordnung gebracht hat, da mit F in F' auch F^q in F'^q übergeht. Beachtet man noch, dass (2.) nach dem *Taylor*schen Lehrsatz entwickelt werden kann, so folgt hieraus

Theorem VI.

Wenn man eine einfache Invariante P, welche aus den Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ einer homogenen Function gebildet ist, nach denselben differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Coefficienten $\underset{(1)}{a}_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ einer anderen homogenen Function derselbigen Ordnung substituirt, so erhält man eine simultane Invariante dieser Functionen und ebenso, wenn man diesen Differentiationsprocess öfter wiederholt und jedesmal die Coefficienten ein und derselben oder anderer homogenen Functionen derselben Ordnung statt der Incremente substituirt. Endlich kann man auch dasselbe Verfahren auf Functionen verschiedener Ordnungen anwenden, nachdem man letztere durch Potenzirung oder Multiplication mit einander auf gleiche Ordnung gebracht hat.

Dieses Theorem, welches ich gleich bei der Entstehung der jetzigen Invariantentheorie gefunden und (dieses Journal Bd. 39, pg. 150 und ff.) benutzt habe, findet in dem folgenden §. insofern Anwendung, als im Functionensystem eine Function als linear vorausgesetzt wird; in diesem Falle kann man nämlich aus jeder einfachen oder simultanen Invariante, welche das System ohne diese lineare Function besitzt, ohne Weiteres eine andere ableiten, welche auch die Coefficienten der linearen enthält, *wenn man erstere nach den Coefficienten irgend einer der gegebenen Functionen differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Producte der Coefficienten der linearen Function substituirt.*

§. 11.

Zugehörige Formen. Bestimmung der Substitutionscoefficienten.

Nach den bisherigen Entwickelungen wird man zur Bestimmung der Coefficienten der transformirten Form bei der Ausführung irgend einer speciellen Transformation die Gleichungen

$$(1.)\qquad P' = r^{\lambda}.P$$

ansetzen, von welchen die Anzahl der von einander unabhängigen gerade so gross ist als die Anzahl der zu bestimmenden Grössen einer vollständigen Transformation, wenn man zu den letzteren ausser den Coefficienten der transformirten Formen noch die Substitutionsdeterminante hinzurechnet. Die Gleichungen (1.) zeigen überdies sogleich, ob die allgemeinen Functionen in vorgelegte specielle Formen transformirbar sind, d. h. ob die über einen Theil der Coefficienten getroffene Verfügung erlaubt ist. Es ist nämlich sofort klar, *dass jede Verfügung statthaft ist, durch welche keine Invariante verschwindet,* denn geschähe das Letztere, so müsste, da P nicht verschwindet, wegen der Form der Gleichungen (1.), die Substitutionsdeterminante r verschwinden, also eine Abhängigkeit zwischen den neuen Variabeln eintreten, welche die Transformation illusorisch macht, während umgekehrt eine eintretende Abhängigkeit der Functionen P' von einander auf das Verschwinden einer zusammengesetzten Invariante hinauskommt.

Hat man also aus den Gleichungen (1.) die Coefficienten von der transformirten Form und die Substitutionsdeterminante bestimmt, so bleibt noch die Ermittelung der Substitutionscoefficienten übrig, und ich werde jetzt zeigen, dass auch zu diesem Zwecke die Benutzung der ursprünglichen Transformationsgleichungen (§. 1 (2.)) nicht erforderlich ist.

Wenn man nämlich zu der gegebenen Function oder zu dem gegebenen Functionensystem noch eine lineare Function

$$(2.)\qquad U = u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n$$

hinzufügt und verlangt, dass dieselbe gleichzeitig mit den gegebenen Functionen in

$$(3.)\qquad U' = v_1\xi_1+v_2\xi_2+\cdots+v_n\xi_n$$

transformirt wird, so treten zu den ursprünglichen Transformationsgleichungen noch diejenigen n Gleichungen hinzu, welche durch Einsetzen der Substitution

$$(4.)\qquad x_k = x_k^{(1)}\xi_1+x_k^{(2)}\xi_2+\cdots+x_k^{(n)}\xi_n$$

in (2.) durch Vergleichung mit (3.) entstehen, nämlich

$$(5.)\qquad v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + \cdots + x_n^{(k)} u_n.$$

Es folgt daher, dass die Anzahl der Gleichungen (1.) noch um n Gleichungen vermehrt werden muss, welche aus den simultanen Invarianten des gegebenen Functionensystemes mit der linearen U entspringen. Obwohl man durch Verbindung dieser n Gleichungen mit einander und mit den Gleichungen (1.) die Anzahl derselben beliebig vervielfältigen kann, so ist doch klar, dass die Anzahl der von einander in Bezug auf die Coefficienten von U unabhängigen n betragen muss, doch bleiben die oft erwähnten beiden Fälle ausgeschlossen, wenn entweder eine homogene Function zweiter Ordnung allein zur Transformation vorgelegt wird, oder ein System linearer Functionen, deren Anzahl die Anzahl der Variabeln nicht übersteigt. Man kann in der That in allen übrigen Fällen eine beliebige Anzahl dieser simultanen Invarianten vermittelst des Theoremes VI. §. 10 ableiten und jedenfalls n von einander unabhängige, wenn man das Theorem auf n von einander unabhängige Invarianten P angewendet hat.

Ich werde die auf diese Weise entstehenden simultanen Invarianten durch

$$\Psi_1,\quad \Psi_2,\quad \ldots\quad \Psi_n$$

bezeichnen, dann erhält man die Gleichungen

$$(6.)\qquad \Psi' = r^\lambda . \Psi,$$

welche den Gleichungen (1.) hinzugefügt werden müssen.

Ehe ich die Anwendung dieser Gleichungen zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten zeige, habe ich zuvörderst zu bemerken, dass die Functionen Ψ, als Functionen der Grössen u_k betrachtet, solche homogene ganze Functionen der letzteren sind, welche *Gauss* zuerst *zugehörige Formen* genannt hat. Betrachtet man nämlich die Gleichungen (5.) als ein lineares Substitutionssystem, durch welches Functionen der u_k in Functionen der v_k transformirt werden, so steht dieses Substitutionssystem zu dem ursprünglichen (4.) in der Beziehung, welche *Gauss* eine *transponirte Substitution* nennt. Die Transposition eines Substitutionssystemes besteht darin, dass die gleichvielten Horizontal- und Verticalreihen mit einander und die Variabeln der ursprünglichen Formen mit denen der transformirten vertauscht werden. In der That sind u_k die ursprünglichen, v_k die neuen Variabeln der Functionen Ψ, und sie stehen in (5.) in umgekehrter Ordnung als x_k und ξ_k in (4.).

Mit Berücksichtigung der Relation (6.), welche ausführlicher

$$(7.)\qquad \Psi'(v_1, v_2, \dots v_n) = r^{\lambda}\Psi.(u_1, u_2, \dots u_n)$$

lautet, folgt nun, dass sämmtliche Functionen $\Psi(u_1, u_2, \dots u_n)$ durch die transponirte Substitution in ihre entsprechenden $\Psi'(v_1, v_2, \dots v_n)$ übergehen, nachdem sie mit einer Potenz der Substitutionsdeterminante multiplicirt worden sind. Dieses ist aber die Grundeigenschaft der *zugehörigen Formen*.

Es folgt daher

Theorem VII.

Wenn eine homogene Function oder ein Functionensystem durch lineare Substitutionen transformirt wird, so giebt es immer ein System zugehöriger Formen, welche gleichzeitig aber durch die transponirte Substitution in ihre entsprechenden aus den Coefficienten der transformirten Functionen gebildeten Formen übergehen, nachdem sie vorher in eine Potenz der Substitutionsdeterminante multiplicirt worden sind. Diese Formen bilden gleichzeitig die simultanen Invarianten des Functionensystemes mit einer linearen Function, deren Coefficienten ihre Variabeln sind, und werden in Folge dessen erhalten, wenn man die Invarianten des Systemes nach den Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\dots}$ *einer der homogenen Functionen, aus denen sie gebildet ist, differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Producte der Variabeln substituirt. Ueberdies ist die Anzahl der in Bezug auf die Variabeln von einander unabhängigen zugehörigen Formen ebenso gross als die Anzahl der Variabeln, und reducirt sich nur in den beiden Fällen auf eine einzige, wenn sie entweder zu einer einzelnen homogenen Function der zweiten Ordnung oder zu einem System von* $(n-1)$ *linearen Functionen gehört.*

Um zu zeigen, in welcher Weise die zugehörigen Formen zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten führen, denke man sich n Gleichungen von der Form (7.) aufgestellt, und dieselben nach den Grössen v_k aufgelöst, so dass

$$(8.)\qquad v_k = X_k(u_1, u_2, \dots u_n)$$

entsteht, dann müssen durch Substitution der Werthe von v_k aus (5.) die Gleichungen (8.) identisch erfüllt sein, also die folgenden:

$$(9.)\qquad x_1^{(k)}u_1 + x_2^{(k)}u_2 + \dots + x_n^{(k)}u_n = X_k(u_1, u_2, \dots u_n)$$

für jeden Werth der Variabeln u_k gelten. Setzt man daher in (9.) allmälig

$$\begin{array}{llll} u_1 = 1, & u_2 = 0, & \dots & u_n = 0, \\ u_1 = 0, & u_2 = 1, & \dots & u_n = 0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 = 0, & u_2 = 0, & \dots & u_n = 1, \end{array}$$

so erhält man dadurch sofort die Werthe der Substitutionscoefficienten:

$$(10.)\quad x_1^{(k)} = X_k(1, 0, \dots 0),\quad x_2^{(k)} = X_k(0, 1, \dots 0),\quad \dots\quad x_n^{(k)} = X_k(0, 0, \dots 1),$$

also durch Auflösung eines Systemes von nur n Gleichungen alle n^2 Substitutionscoefficienten, was in allen bekannten ausgeführten Transformationen so ausgedrückt wird, dass man die Substitutionscoefficienten einer Zeile von denen der übrigen separirt hat.

Es folgt aber auch, weil die linke Seite von (9.) in Bezug auf die Grössen u_k rational und linear ist, das sehr merkwürdige und insbesondere für die Auflösung algebraischer Gleichungen sehr wichtige

Theorem VIII.

Wenn man von den n zugehörigen Formen, welche ein gegebenes Functionensystem mit einer linearen Function gemein hat, n von einander unabhängige auswählt und aus diesen die Gleichungen

$$\Psi'(v_1, v_2, \dots v_n) = r^\lambda . \Psi(u_1, u_2, \dots u_n)$$

bildet, so sind die Auflösungen derselben nach den Grössen v_k in Bezug auf die Grössen u_k nicht allein rational sondern sogar linear, und die Irrationalität der Auflösung haftet allein an den Coefficienten derselben.

Zur Darstellung der rationalen Auflösungen muss man sich entweder der durch (10.) ausgedrückten Methode bedienen, oder man muss die Coefficienten der transformirten Formen explicite in die Auflösung substituiren.

Diese wesentlichen Eigenthümlichkeiten der zugehörigen Formen, welche ich nirgends bis jetzt publicirt gefunden habe, auf welche sich aber verschiedene elegante Rechnungsresultate von bekannten ausgeführten Transformationen zurückführen lassen, will ich an einem elementaren Beispiel erläutern. Ich wähle hierzu ein bekanntes und möglichst einfaches, nämlich die gleichzeitige Transformation zweier homogenen Functionen zweiter Ordnung in andere, welche nur die Quadrate enthalten, und setze auch der grösseren Kürze halber nur drei Variable voraus. Sind

$$(11.)\quad F(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda,\qquad F_1(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

die beiden gegebenen Functionen, so hat man im Ganzen $12-9+1=4$ Invarianten zu bilden, und zwar:

$$(12.)\quad P = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33},\qquad Q = \Sigma \pm b_{11} b_{22} b_{33},$$

als die einfachen jeder der beiden Functionen, und nach §. 10 Theorem VI.:

$$(13.)\quad P_1 = \Sigma \frac{dP}{da_{\varkappa\lambda}} b_{\varkappa\lambda},\qquad Q_1 = \Sigma \frac{dQ}{db_{\varkappa\lambda}} a_{\varkappa\lambda},$$

als simultane.

Ebenso sind drei zugehörige Formen nach demselben Theorem:

$$(14.)\quad \begin{cases} \Psi(u_1 u_2 u_3) = \Sigma \dfrac{dP}{da_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda, \quad \Psi_1(u_1 u_2 u_3) = \Sigma \dfrac{dP_1}{da_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda = \Sigma \dfrac{dQ_1}{db_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda, \\ \Psi_2(u_1 u_2 u_3) = \Sigma \dfrac{dQ}{db_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda. \end{cases}$$

Nun seien

$$F'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_1\xi_1^2 + G_2\xi_2^2 + G_3\xi_3^2,$$
$$F_1'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

die transformirten Formen, so folgt, weil $\lambda = 2$ ist,

$$(15.)\quad \begin{cases} r^2 . P = G_1 G_2 G_3, \\ r^2 . P_1 = G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3, \\ r^2 . Q_1 = G_1 + G_2 + G_3, \\ r^2 . Q = 1, \end{cases}$$

und hieraus $r^2 = \frac{1}{Q}$, sowie die cubische Gleichung $\varDelta = G^3 Q - G^2 Q_1 + G P_1 - P = 0$ zur Bestimmung der drei Coefficienten G_1, G_2, G_3 der transformirten Form. Zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten hat man:

$$(16.)\quad \begin{cases} r^2 . \Psi = G_2 G_3 v_1^2 + G_1 G_3 v_2^2 + G_1 G_2 v_3^2, \\ r^2 . \Psi_1 = (G_2 + G_3) v_1^2 + (G_1 + G_3) v_2^2 + (G_1 + G_2) v_3^2, \\ r^2 . \Psi_2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \end{cases}$$

und die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$$(G_1 - G_2)(G_1 - G_3) v_1^2 = r^2(\Psi - G_1 \Psi_1 + G_1^2 \Psi_2),$$
$$(G_2 - G_3)(G_2 - G_1) v_2^2 = r^2(\Psi - G_2 \Psi_1 + G_2^2 \Psi_2),$$
$$(G_3 - G_1)(G_3 - G_2) v_3^2 = r^2(\Psi - G_3 \Psi_1 + G_3^2 \Psi_2).$$

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{(G_1 - G_2)(G_1 - G_3)}{r^2} = (G_1 - G_2)(G_1 - G_3) Q^2 = \varDelta_1,$$

wo $\varDelta_1$, beiläufig bemerkt, gleich $\frac{d\varDelta}{dG_1}$ ist, so wird nach Theorem VIII.:

$$(17.)\quad v_k^2 = \frac{\Psi(u_1, u_2, u_3) - G_k \Psi_1(u_1, u_2, u_3) + G_k^2 \Psi_2(u_1, u_2, u_3)}{\varDelta_k}$$

eine homogene Function zweiter Ordnung der Variabeln u_k, welche ein vollständiges Quadrat ist, worauf bekanntlich auch die gewöhnliche Behandlungsweise des Problemes führt, denn es ist

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) - G_k \Psi_1(u_1, u_2, u_3) + G_k^2 \Psi_2(u_1, u_2, u_3)$$

die zugehörige Form von $F - G_k F_1$, welche in zwei Factoren zerfällt.

Setzt man nun

$$v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + x_3^{(k)} u_3$$

in (17.) hinein, so folgt nach (10.):

$$x_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\Psi(1,0,0) - G_k \Psi_1(1,0,0) + G_k^2 \Psi_2(1,0,0)}{\Delta_k}},$$

$$x_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\Psi(0,1,0) - G_k \Psi_1(0,1,0) + G_k^2 \Psi_2(0,1,0)}{\Delta_k}},$$

$$x_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\Psi(0,0,1) - G_k \Psi_1(0,0,1) + G_k^2 \Psi_2(0,0,1)}{\Delta_k}},$$

was mit den bekannten Resultaten der gewöhnlichen Behandlungsweise übereinstimmt.

Ich will nur noch zeigen, wie man hieraus die Wurzeln der Gleichungen

$$F = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0, \quad F_1 = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0$$

in schliesslicher Endform angeben kann. Um eine symmetrische Auflösung zu erhalten ist es in allen Fällen zweckmässig, wenn x_1, x_2, x_3 die Wurzeln bedeuten, den Werth einer beliebigen linearen Function

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

derselben, oder vielmehr nur einer mit U proportionalen Grösse zu bestimmen, deren Coefficienten x_1, x_2, x_3 alsdann die Verhältnisse der Wurzeln sind. Nun ist für eine beliebige lineare Function, wie leicht ersichtlich, allemal

$$v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3;$$

kann man daher die linke Seite dieser Gleichung aus den transformirten Formen bestimmen, so ist nur die Uebertragung in die ursprüngliche erforderlich. In ersterer Form ergiebt sich aber sogleich aus

$$F' = G_1 \xi_1^2 + G_2 \xi_2^2 + G_3 \xi_3^2 = 0,$$

$$F_1' = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sqrt{G_2 - G_3} : \sqrt{G_3 - G_1} : \sqrt{G_1 - G_2},$$

also ist

$$v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = v_1 \sqrt{G_2 - G_3} + v_2 \sqrt{G_3 - G_1} + v_3 \sqrt{G_1 - G_2},$$

folglich sofort wegen (17.):

$$(18.) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= \sqrt{\frac{(G_2 - G_3)(\Psi - G_1 \Psi_1 + G_1^2 \Psi_2)}{\Delta_1}} \\ &+ \sqrt{\frac{(G_3 - G_1)(\Psi - G_2 \Psi_1 + G_2^2 \Psi_2)}{\Delta_2}} + \sqrt{\frac{(G_1 - G_2)(\Psi - G_3 \Psi_1 + G_3^2 \Psi_2)}{\Delta_3}}, \end{aligned} \right.$$

welche Function, weil sie linear ist, die Werthe von $x_1 : x_2 : x_3$ liefert, wenn man respective unter den Wurzelzeichen allmälig $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$; $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$; $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ setzt.

Dieses Prinzip gilt allgemein für die Auflösung aller Gleichungen, soweit sie algebraisch sind.

Indem ich nun wieder zur allgemeinen Theorie zurückkehre, habe ich nur noch hervorzuheben, dass für die zugehörigen Formen, weil sie simultane Invarianten sind, auch entsprechende Differentialgleichungen existiren, welche erhalten werden, wenn man den Gleichungen §. 9 (2.) die von den Coefficienten u_k herrührenden $D_{\varrho\sigma}$ hinzufügt, aber man sieht sofort, dass $D_{\varrho\sigma}(\Psi)$ in Bezug auf U genommen gleich $u_\varrho \frac{d\Psi}{du_\sigma}$ ist, daher sind

$$(19.)\quad \begin{cases} \mathfrak{S} D_{\varrho\varrho}(\Psi) + u_\varrho \dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = \lambda \Psi, \\ \mathfrak{S} D_{\varrho\sigma}(\Psi) + u_\sigma \dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = 0 \end{cases}$$

die Differentialgleichungen, denen alle zugehörige Formen genügen müssen, und es ist wegen §. 9 (3.)

$$(20.)\quad \lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m + q}{n},$$

wenn q die Ordnung der zugehörigen Form in Bezug auf ihre Variabeln u_k bedeutet. Ist $q = p$, und überdies nur eine Function im Functionensystem gegeben, so wird

$$(21.)\quad \lambda = \frac{p(\gamma+1)}{n},$$

und ist jene Form nach Theorem VI. §. 10 durch erste Differentiirung einer einfachen Invariante entstanden, so muss $\gamma+1$ die Ordnung der letzteren sein, also folgt, dass in diesem Falle die Werthe für λ für Invariante und zugehörige Form übereinstimmen.

Man kann aus den Gleichungen (19.) sehr leicht beweisen, dass eine homogene Function zweiter Ordnung eine und nur eine zugehörige Form besitzt. Wenn man nämlich, wie in §. 7, (5.), (6.),

$$D_{\varrho\sigma}(\Psi) = 2\Sigma \Psi_{\varrho\mu} a_{\varrho\mu}$$

schreibt, wo

$$\Psi_{\varrho\mu} = \tfrac{1}{2}\frac{d\Psi}{da_{\varrho\mu}}, \quad \Psi_{\varrho\varrho} = \frac{d\Psi}{da_{\varrho\varrho}}$$

ist, so gehen die Gleichungen (19.) in

$$(22.)\quad \begin{cases} 2\Sigma\Psi_{\varrho\mu}a_{\varrho\mu}+u_\varrho\dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = \lambda\Psi, \\ 2\Sigma\Psi_{\varrho\mu}a_{\sigma\mu}+u_\sigma\dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = 0 \end{cases}$$

über, und löst man dieselben ebenso wie in §. 7, (7.) auf, so folgt

$$\Delta\Psi_{\varrho\sigma} = -\tfrac{1}{2}(u_1\Delta_{1\sigma}+u_2\Delta_{2\sigma}+\cdots+u_n\Delta_{n\sigma})\frac{d\Psi}{du_\varrho}+\frac{\lambda}{2}\Delta_{\varrho\sigma}\Psi$$

oder, wenn

$$(22^a.)\qquad \Psi_1(u_1, u_2, \ldots u_n) = \Sigma\Delta_{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda$$

gesetzt wird,

$$\Delta\Psi_{\varrho\sigma} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\Psi_1}{du_\sigma}\,\frac{d\Psi}{du_\varrho}+\frac{\lambda}{2}\Delta_{\varrho\sigma}\Psi,$$

aber auch

$$\Delta\Psi_{\sigma\varrho} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\Psi_1}{du_\varrho}\,\frac{d\Psi}{du_\sigma}+\frac{\lambda}{2}\Delta_{\varrho\sigma}\Psi,$$

und da zur Coexistenz der Gleichungen (22.) erforderlich ist, dass beide Werthe übereinstimmen, so folgt, dass für jeden Werth der ϱ und σ

$$\frac{d\Psi_1}{du_\sigma}\,\frac{d\Psi}{du_\varrho} = \frac{d\Psi_1}{du_\varrho}\,\frac{d\Psi}{du_\sigma}$$

sein muss, also zunächst

$$\Psi = \Psi_1,$$

welches die bekannte zugehörige Form ist. Ausserdem ergiebt sich hieraus, dass Ψ nur noch eine beliebige Potenz von Ψ_1 sein kann.

Der zweite Fall, welcher eine Ausnahme von der allgemeinen Theorie macht, ist viel einfacher zu übersehen. Ich habe schon am Ende des §. 9 gezeigt, dass der einfachste Fall einer simultanen Invariante die gewöhnliche Determinante ist. Nimmt man nun an, dass wie dort $(n-1)$ lineare Functionen gegeben sind:

$$(23.)\quad \begin{cases} F_1 = \underset{(1)}{a_1}x_1+\underset{(1)}{a_2}x_2+\cdots+\underset{(1)}{a_n}x_n, \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F_{n-1} = \underset{(n-1)}{a_1}x_1+\underset{(n-1)}{a_2}x_2+\cdots+\underset{(n-1)}{a_n}x_n, \end{cases}$$

und fügt die lineare Function

$$U = u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n$$

hinzu, so ist die Determinante

$$(24.)\qquad \Gamma = \Sigma\pm\underset{(1)}{a_1}\underset{(2)}{a_2}\ldots\underset{(n-1)}{a_{n-1}}u_n$$

eine lineare Function der Variabeln u_k, welche schon wegen des Grundprincipes der Multiplication der Determinante der Bedingung

$$(25.)\qquad \Gamma' = r.\Gamma$$

Genüge leistet, sie ist daher die zugehörige Form des Systemes (23.) und sie ist die einzige, weil die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen für lineare Functionen nur eine einzige Lösung zulassen, wie schon früher erörtert ist.

Wenn die Anzahl der linearen Functionen geringer ist als $n-1$, so hat das System keine Determinante in Verbindung mit U, und daher auch keine zugehörige Form, ausserdem ergeben sich leicht Modificationen, wenn eine Function zweiter oder höherer Ordnung zu dem linearen System hinzutritt. Es gilt aber in dieser Beziehung und zur Darstellung der ersten zugehörigen Formen überhaupt ein Theorem, welches in etwas anderer Form bekannt ist, und in derselben alle anfänglichen Invariantenbestimmungen geliefert hat. Wenn man nämlich beachtet, dass mit

$$\underset{(k)}{a_1}x_1+\cdots+\underset{(k)}{a_n}x_n = \underset{(k)}{a'_1}\xi_1+\cdots+\underset{(k)}{a'_n}\xi_n$$

gleichzeitig

$$(\underset{(k)}{a_1}x_1+\cdots+\underset{(k)}{a_n}x_n)^p = (\underset{(k)}{a'_1}\xi_1+\cdots+\underset{(k)}{a'_n}\xi_n)^p$$

wird, und auf beiden Seiten die letzte Gleichung entwickelt, so folgt, dass mit der symbolischen Gleichung, in welcher $\alpha+\beta+\gamma\ldots=p$ ist,

$$(26.)\qquad \underset{(k)}{a_1^\alpha}\,\underset{(k)}{a_2^\beta}\,\underset{(k)}{a_3^\gamma}\ldots = \underset{(k)}{a_{\alpha\beta\gamma\ldots}},$$

auch die folgende

$$(27.)\qquad \underset{(k)}{a_1'^\alpha}\,\underset{(k)}{a_2'^\beta}\,\underset{(k)}{a_3'^\gamma}\ldots = \underset{(k)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$$

stattfindet. Es wird daher jede in Bezug auf die Potenzen und Producte p^{ter} Ordnung der linken Seiten von (26.) und (27.) lineare Gleichung bestehen bleiben, wenn man für dieselben die rechten Seiten substituirt. Es hat aber

$$\Gamma^p = (\Sigma\pm\underset{(1)}{a_1}\,\underset{(2)}{a_2}\ldots\underset{(n-1)}{a_{n-1}}u_n)^p$$

die angegebene Eigenschaft, und zufolge (25.) wird

$$(28.)\qquad \Gamma'^p = r^p.\Gamma^p,$$

daher wird durch die symbolischen Substitutionen von (26.) und (27.) die Gleichung (28.) noch gültig bleiben, und Γ^p symbolisch noch eine zugehörige Form des Functionensystemes (23.) sein, wenn eine der linearen Functionen durch eine Function F_k der p^{ten} Ordnung ersetzt wird.

Man kann auf dieselbe Weise ausserdem noch jede andere lineare Function durch eine der p^{ten} Ordnung ersetzen, und auf diese Weise fortfahren, so dass zuletzt eine zugehörige Form eines Functionensystemes entsteht, deren sämmtliche Functionen von ein und derselben p^{ten} Ordnung sind.

Setzt man alsdann alle diese Functionen einander gleich, so entsteht eine zugehörige Form der einen homogenen Function der p^{ten} Ordnung, oder I'^p wird identisch gleich Null, und zwar wird das Letztere jedesmal eintreten, wenn p ungerade ist, denn jede ungerade Potenz von der Determinante I' ist eine alternirende Function und verschwindet daher, wenn zwei Systeme einander gleich sind. Daher folgt:

Theorem IX.

Man erhält für jedes Functionensystem von $(n-1)$ Functionen derselben p^{ten} Ordnung eine zugehörige Form, wenn man

$$I'^p = \{\Sigma \pm \underset{(1)}{a_1}\, \underset{(2)}{a_2} \ldots \underset{(n-1)}{a_{n-1}} u_n\}^p$$

bildet, und statt der Potenzen und Producte $\underset{(k)}{a_1^\alpha}\,\underset{(k)}{a_2^\beta}\,\underset{(k)}{a_3^\gamma} \ldots$ der p^{ten} Ordnung die entsprechenden Coefficienten $\underset{(k)}{a_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ substituirt, und es bleibt dieselbe eine zugehörige Form auch für ein System einer geringeren Anzahl von Functionen, oder auch nur einer, wenn man ebenso viele Potenzen und Producte $\underset{(k)}{a_1^\alpha}\,\underset{(k)}{a_2^\beta}\,\underset{(k)}{a_3^\gamma} \ldots$ durch die Coefficienten ein und derselben Function ersetzt, bis erstere sämmtlich beseitigt sind, wenn nicht durch diese Substitution identisch Null entsteht.

Man kann dieses Theorem auch als einen speciellen Fall der von den Herren *Sylvester* und *Cayley* im grossartigen Massstabe aufgestellten symbolischen Invariantenbestimmungen betrachten, und findet aus demselben in der That die einfachste bekannte Invariante einer homogenen Function geraden Grades, wenn man nach dem im Theorem angegebenen Verfahren die zugehörige Form bildet und statt der Potenzen und Producte $u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma \ldots$ der p^{ten} Ordnung die entsprechenden Coefficienten der homogenen Function substituirt. Ist die Function ungeraden Grades, so entsteht auch hier aus dem angegebenen Grunde identisch Null.

§. 12.

Von den Covarianten. Bestimmung der inversen Substitution.

Man kann zu jeder zugehörigen Form, dieselbe als ursprünglich betrachtet, wieder die zugehörige bilden, dann erhält man ein System von

Functionen, welche in derselben Abhängigkeit zu einander stehen wie die zugehörigen Formen zu einander, und daher die Eigenschaft haben durch die transponirte Substitution der transponirten ebenso in ihre entsprechenden überzugehen, wie jene. Durch Transposition des transponirten Substitutionssystemes entsteht aber, wie aus der Definition desselben sofort hervorgeht, das ursprüngliche, wenn man nur wieder die ursprünglichen Variabeln schreibt, daher ist durch die vorstehende Betrachtung die Existenz eines Functionensystemes dargethan, welches der ursprünglich gegebenen Function respective den Functionen des ursprünglich gegebenen Functionensystemes coordinirt ist, und mit denselben zugleich und durch dieselbe Substitution in die analog gebildeten transformirten Formen übergeht, d. h. den Gleichungen

$$(1.)\qquad \Phi'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = r^\lambda . \Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Genüge leistet, wenn Φ eine solche Function andeutet. Wegen dieser Eigenschaft werden die Functionen Φ *Covarianten* genannt.

Aus der eben angegebenen Bildungsweise der Covarianten geht ohne Weiteres hervor, dass im Allgemeinen immer n in Bezug auf die Variabeln von einander unabhängige existiren müssen, zu denen jedoch schon die gegebene Function F, respective das gegebene Functionensystem selbst gehört. Man kann sie aber auch selbstständig definiren. In der That *denkt man sich zu den Gleichungen des Theoremes* V. §. 6

$$(2.)\qquad \begin{cases} \underset{(k)}{F}_{\alpha\beta\gamma\dots} = \underset{(k)}{a'}_{\alpha\beta\gamma\dots} \\ \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(n)} = r \end{cases}$$

noch die Substitutionsgleichungen

$$(3.)\qquad x_k = x_k^{(1)}\xi_1 + x_k^{(2)}\xi_2 + \dots + x_k^{(n)}\xi_n$$

hinzugefügt und verlangt, dass aus den Gleichungen (2.) *und* (3.) *die sämmtlichen Substitutionscoefficienten eliminirt werden, so muss man die Gleichungen* (1.) *erhalten, und wegen des Hinzutretens von n Gleichungen* (3.) *auch in derselben Anzahl.*

Sowohl aus dieser Fassung, wie überhaupt leuchtet ein, dass man auch *sämmtliche* Relationen dieses Eliminationsproblemes in Form von Covarianten darstellen kann, da man einerseits durch Verbindung von Covarianten mit Invarianten neue Covarianten erhält, andererseits aus der grossen Zahl zugehöriger Formen auf dem angedeuteten Wege die Anzahl der Covarianten beliebig vervielfältigen kann.

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) kann man sehr leicht den früheren analoge partielle Differentialgleichungen aufstellen, welchen alle Covarianten genügen. Es ist nämlich nach §. 3 (7.) für eine Function:

$$D_{\varrho\sigma}(\Phi') = \frac{d\Phi'}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{d\Phi'}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{d\Phi'}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)},$$

und ebenso nach §. 8 (9.) für ein Functionensystem:

$$(4.)\qquad \mathfrak{S} D_{\varrho\sigma}(\Phi') = \frac{d\Phi'}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{d\Phi'}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{d\Phi'}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)}.$$

Es wird aber, wenn man die Gleichung (1.) nach $x_k^{(\varrho)}$ differentiirt:

$$(5.)\qquad \frac{d\Phi'}{dx_k^{(\varrho)}} + \sum_h \frac{d\Phi'}{d\xi_h} \frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} = \lambda r^{\lambda-1} \frac{dr}{dx_k^{(\varrho)}} \Phi = \frac{\lambda\Phi'}{r} \frac{dr}{dx_k^{(\varrho)}},$$

indem man berücksichtigen muss, dass jetzt wegen (3.) die Substitutionscoefficienten auch in den Grössen ξ_h enthalten sind.

Bildet man aus (5.) die rechte Seite von (4.), so folgt hieraus:

$$(6.)\qquad \mathfrak{S} D_{\varrho\sigma}(\Phi') + \sum_{h,k} \frac{d\Phi'}{d\xi_h} \frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} x_k^{(\sigma)} = \frac{\lambda\Phi'}{r} \sum \frac{dr}{dx_k^{(\varrho)}} x_k^{(\sigma)},$$

und die rechte Seite dieser Gleichung ist, wie bekannt oder wegen §. 6 (9.) gleich 0, wenn ϱ und σ verschieden sind, oder gleich $\frac{\lambda\Phi'}{r}\cdot r = \lambda\Phi'$, wenn sie gleich sind; es bleibt also noch der zweite Summand der linken Seite zu bestimmen. Zu diesem Ende bilde man durch Auflösung der Gleichungen (3.) die inverse Substitution und bezeichne dieselbe durch

$$(7.)\qquad \xi_h = \xi_1^{(h)} x_1 + \xi_2^{(h)} x_2 + \cdots + \xi_n^{(h)} x_n,$$

alsdann kann man diese Gleichung entweder als identische wegen (3.) auffassen und erhält durch Differentiation nach $x_k^{(\varrho)}$ in diesem Sinne:

$$0 = \frac{d\xi_1^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_1 + \frac{d\xi_2^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_2 + \cdots + \frac{d\xi_n^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x^n + \xi_k^{(h)} \xi_\varrho,$$

oder, wenn man sie einfach differentiirt:

$$\frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{d\xi_1^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_1 + \frac{d\xi_2^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_2 + \cdots + \frac{d\xi_n^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_n,$$

und daher durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen von einander:

$$\frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} = -\xi_k^{(h)} \xi_\varrho.$$

Es folgt daher, wenn man diese Differentialquotienten in (6.) substituirt:

$$\mathfrak{S}\, D_{\varrho\sigma}(\Phi') - \xi_\varrho \sum_{h,k} \frac{d\Phi'}{d\xi_h} \xi_k^{(h)} x_k^{(\sigma)} = \lambda \Phi' \quad \text{oder} \quad = 0,$$

und endlich, weil wegen (3.) und (7.)

$$\Sigma \xi_k^{(h)} x_k^{(\sigma)} = 1 \text{ oder } = 0$$

ist, je nachdem $h = \sigma$ oder beide verschieden sind,

$$(8.) \qquad \mathfrak{S}\, D_{\varrho\sigma}(\Phi') - \xi_\varrho \frac{d\Phi'}{d\xi_\sigma} = \lambda\Phi' \quad \text{oder} \quad = 0.$$

Diese Differentialgleichungen enthalten explicite weder die Substitutionscoefficienten noch die Coefficienten der ursprünglichen Formen, daher gilt auch das System

$$(9.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}\, D_{\varrho\varrho}(\Phi) - x_\varrho \dfrac{d\Phi}{dx_\varrho} = \lambda\Phi, \\ \mathfrak{S}\, D_{\varrho\sigma}(\Phi) - x_\varrho \dfrac{d\Phi}{dx_\sigma} = 0 \end{cases}$$

zur Definition der Covarianten Φ.

Die Gleichungen (9.) unterscheiden sich von den analogen Gleichungen §. 11 (19.), welche die zugehörigen Formen definiren, dadurch, *dass hier die zweiten Glieder der linken Seiten negative Vorzeichen haben, und dass ϱ mit σ vertauscht ist.*

Die Bestimmung der Grösse λ ändert sich auf analoge Weise. Bildet man nämlich wie in §. 9

$$\mathfrak{S}(D_{11}(\Phi) + D_{22}(\Phi) + \cdots + D_{nn}(\Phi)) = (p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m)\Phi$$

und beachtet, dass, wenn Φ von der q^{ten} Ordnung in Bezug auf die Variabeln ist,

$$x_1 \frac{d\Phi}{dx_1} + x_2 \frac{d\Phi}{dx_2} + \cdots + x_n \frac{d\Phi}{dx_n} = q\Phi$$

wird, so folgt

$$p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m - q = n\lambda$$

oder

$$(10.) \qquad \lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m - q}{n}.$$

Die wesentlichste Anwendung der Covarianten besteht darin, dass sie ebenso wie die zugehörigen Formen die Substitutionscoefficienten bestimmen, aber mit dem Unterschiede, dass sie die *inverse* Substitution geben. Um die

Coefficienten $\xi_\lambda^{(k)}$ dieser Substitution nicht durch Auflösung der ursprünglichen zu finden, was sehr bedeutende überflüssige Factoren hineinziehen würde, könnte man die Gleichungen (7.) von §. 11 nach den *ursprünglichen* Variabeln u_k auflösen, aber diese sind in ganz allgemeinen Formen enthalten und würden daher erfordern, dass man mit den ganz allgemeinen Formen bei der Auflösung operiren müsste, was, abgesehen von der practischen Unausführbarkeit, zu jeder anderen als der jedesmal vorliegenden speciellen Transformation ebenso gut passen würde, wodurch der Vortheil der Specialisirung und ihr Charakter gänzlich unberücksichtigt bliebe, während die Auflösung der Gleichungen §. 11 (7.) nach den Grössen v_k diesen doppelten Zweck erreichen lässt und daher die genuine ist, wenn es sich um die Bestimmung der Substitutionscoefficienten $x_k^{(\lambda)}$ handelt.

Das Umgekehrte hiervon leisten die Covarianten. Stellt man n von einander unabhängige Gleichungen von der Form:

$$(11.)\qquad \Phi'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = r^\lambda \Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$$

aus denselben her, und löst diese nach den Grössen ξ_k, also wieder nach den Variabeln der *transformirten* Formen auf, so dass dadurch die Gleichungen

$$(12.)\qquad \xi_h = \Xi_h(x_1, x_2, \dots x_n)$$

entstehen, dann folgt aus (7.) die identische Gleichung:

$$(13.)\qquad \xi_1^{(h)} x_1 + \xi_2^{(h)} x_2 + \dots + \xi_n^{(h)} x_n = \Xi_h(x_1, x_2, \dots x_n),$$

und setzt man demnach, wie in §. 11, allmälig

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1, & x_2 = 0, & \dots & x_n = 0, \\ x_1 = 0, & x_2 = 1, & \dots & x_n = 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 = 0, & x_2 = 0, & \dots & x_n = 1, \end{array}$$

so folgt:

$$(14.)\quad \xi_1^{(h)} = \Xi_h(1, 0, \dots 0),\ \xi_2^{(h)} = \Xi_h(0, 1, \dots 0),\ \dots\ \xi_n^{(h)} = \Xi_h(0, 0, \dots 1).$$

Es werden also die Coefficienten der inversen Substitution ebenfalls durch Auflösung von nur n Gleichungen erhalten.

Ueberhaupt giebt die Gleichung (13.) das ebenso wichtige, dem Theorem VI. §. 11 entsprechende

Theorem X.

Wenn man von den Covarianten einer einzelnen homogenen Function oder eines Functionensystemes n von einander unabhängige auswählt und die *aus denselben gebildeten n Gleichungen von der Form:*

$$\Phi'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = r^\lambda . \Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$$

nach den Grössen ξ_k auflöst, so kann man die Werthe der ξ_k nicht allein als rationale sondern sogar als lineare Functionen der Grössen x_k darstellen und es haftet die Irrationalität der Auflösung allein an den Coefficienten der Variabeln.

Um die gegenwärtige Substitutionsbestimmung ebenfalls durch das elementare Beispiel §. 11 zu erläutern, seien wieder

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \qquad F_1(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

zwei homogene Functionen der zweiten Ordnung, welche in folgende:

$$(15.) \qquad F'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_1\xi_1^2 + G_2\xi_2^2 + G_3\xi_3^2, \qquad F_1'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

transformirt werden sollen. Entnimmt man aus §. 11 (14.) die drei zugehörigen Formen:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3), \qquad \Psi_1(u_1, u_2, u_3), \qquad \Psi_2(u_1, u_2, u_3),$$

von denen die mittlere die simultane ist, und bildet zu denselben nochmals die zugehörigen Formen, so reproducirt man, wie bekannt, durch die erste und dritte die ursprünglichen Functionen F und F_1 selbst als Covarianten, hingegen giebt die mittlere die noch fehlende dritte Covariante, welche durch $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnet werden soll. In der transformirten Form ist die zugehörige Function zu $\Psi_1(v_1, v_2, v_3) = (G_2+G_3)v_1^2 + (G_3+G_1)v_2^2 + (G_1+G_2)v_3^2$ die folgende:

$$\Phi'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (G_3+G_1)(G_1+G_2)\xi_1^2 + (G_1+G_2)(G_2+G_3)\xi_2^2 + (G_2+G_3)(G_3+G_1)\xi_3^2,$$

also erhält man, da

$$\Phi' = r^2\Phi, \quad F' = F, \quad F_1' = F_1$$

ist, die folgenden drei Gleichnngen:

$$(16.)\left\{\begin{array}{ll} r^2.\Phi(x_1,x_2,x_3) = (G_3+G_1)(G_1+G_2)\xi_1^2 + (G_1+G_2)(G_2+G_3)\xi_2^2 + (G_2+G_3)(G_3+G_1)\xi_3^2, \\ F(x_1,x_2,x_3) = G_1\xi_1^2 + G_2\xi_2^2 + G_3\xi_3^2, \\ F_1(x_1,x_2,x_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \end{array}\right.$$

und als Auflösung derselben nach ξ_1^2, ξ_2^2, ξ_3^2:

$$(17.)\left\{\begin{array}{l} (G_1-G_2)(G_1-G_3)\xi_1^2 = r^2.\Phi - (G_2+G_3)F - G_1(G_2+G_3)F_1, \\ (G_2-G_3)(G_2-G_1)\xi_2^2 = r^2.\Phi - (G_3+G_1)F - G_2(G_3+G_1)F_1, \\ (G_3-G_1)(G_3-G_2)\xi_3^2 = r^2.\Phi - (G_1+G_2)F - G_3(G_1+G_2)F_1. \end{array}\right.$$

Aus den Formeln §. 11 (15.) folgt

$$r^2 = \frac{1}{Q}; \quad G_2 + G_3 = r^2 Q_1 - G_1; \quad \Delta_1 = \frac{d\Delta}{dG_1} = (G_1 - G_2)(G_1 - G_3) Q^2$$

u. s. w.; daher ist

$$\Delta_k . \xi_k^2 = \Phi + (G_k Q - Q_1)(F - G_k F_1),$$

also

$$(18.) \quad \xi_k = \sqrt{\frac{\Phi(x_1, x_2, x_3) + (G_k Q - Q_1)\{F(x_1, x_2, x_3) - G_k F_1(x_1, x_2, x_3)\}}{\Delta_k}} = \Xi_k(x_1, x_2, x_3),$$

worin für k allmälig 1, 2, 3 zu setzen ist.

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen in (18.) muss nun nach dem entwickelten Princip in Bezug auf die Variabeln x_1, x_2, x_3 ein vollständiges Quadrat, d. h. Ξ eine lineare Function derselben sein, und daher nach (14.) die folgenden *inversen* Substitutionscoefficienten liefern:

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\Phi(1,0,0) + (G_k Q - Q_1)\{F(1,0,0) - G_k F_1(1,0,0)\}}{\Delta_k}},$$

$$\xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\Phi(0,1,0) + (G_k Q - Q_1)\{F(0,1,0) - G_k F_1(0,1,0)\}}{\Delta_k}},$$

$$\xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\Phi(0,0,1) + (G_k Q - Q_1)\{F(0,0,1) - G_k F_1(0,0,1)\}}{\Delta_k}}.$$

Die weitere Anwendung dieser Transformation giebt auch die Auflösung der Gleichungen

$$(19.) \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

in einer anderen Form als in §. 11 (18.), nämlich die Reduction derselben auf lineare Gleichungen. Löst man nämlich die Gleichungen (19.) in den transformirten Formen (15.) auf, so erhält man

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sqrt{G_2 - G_3} : \sqrt{G_3 - G_1} : \sqrt{G_1 - G_2}$$

und durch Substitution dieser Werthe in (18.):

$$\sqrt{G_2 - G_3} : \sqrt{G_3 - G_1} : \sqrt{G_1 - G_2} = \Xi_1(x_1, x_2, x_3) : \Xi_2(x_1, x_2, x_3) : \Xi_3(x_1, x_2, x_3),$$

welche Gleichungen nach dem Obigen in Bezug auf die Unbekannten x_1, x_2, x_3 *linear* sind.

Das höchst einfache Princip, welches in den Gleichungen (14.) und im Theorem X. enthalten ist, umfasst beinahe alle Probleme der rationalen Algebra, und man kann die grosse Reihe eleganter Darstellungen, welche an verschiedenen Orten für Probleme, welche dem behandelten Beispiel analog sind, gegeben worden sind, und welche jedesmal durch geeignete Formenbildungen bewiesen werden, auf obige Quelle zurückführen. Ich habe schon im §. 11 bemerkt, dass ich diese Vorstellungsweise von dem Charakter sowohl der zugehörigen Formen als der Covarianten bis jetzt nirgends vorgefunden habe, während ich denselben gleich von vorne hinein schon in meiner in der Einleitung citirten Abhandlung vom Jahre 1851 so aufgefasst habe. Ich glaube daher, dass es nicht überflüssig ist, als Resultat der in §. 11 und in diesem §. gegebenen Darstellungen hervorzuheben, dass jedesmal, wenn man die gegebene homogene Function oder das gegebene Functionensystem einer beliebigen linearen Transformation unterworfen hat,

1) die rechten Seiten der transponirten Substitution selbst:

$$v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + \cdots + x_n^{(k)} u_n$$

ein vollständiges System von n von einander unabhängigen zugehörigen Formen der ersten Ordnung in Bezug auf die Variabeln u_k,

2) die rechten Seiten der inversen Substitution selbst

$$\xi_k = \xi_1^{(k)} x_1 + \xi_2^{(k)} x_2 + \cdots + \xi_n^{(k)} x_n$$

ein vollständiges System von n von einander unabhängigen Covarianten der ersten Ordnung in Bezug auf die Variabeln x_k bilden,

3) dass diese Systeme im Allgemeinen irrationale Coefficienten haben, und dass alle übrigen rationalen zugehörigen Formen und Covarianten als symmetrische Functionen der respective unter 1) und 2) angegebenen aufzufassen sind.

Hierdurch tritt deutlich hervor, dass es von grosser Wichtigkeit ist, wenn man für eine gegebene Function oder für ein gegebenes Functionensystem *rationale* zugehörige Formen und Covarianten der *ersten* Ordnung finden kann; es hat in der That zuerst Herr *Hermite* in seiner schönen Abhandlung über die binären Formen der fünften Ordnung (Cambridge and Dublin Mathematical Journal Vol. IX) gezeigt, dass für diese binären Formen dergleichen existiren, und durch dieselben eine merkwürdige Transformation begründet. In einer späteren Abhandlung (dieses Journal Bd. 57, pag. 375) hat derselbe auch die linearen rationalen Covarianten für ein System von drei homogenen Functionen zweiter Ordnung von drei Variabeln aufgestellt, und endlich hat Herr *Salmon* in den Philosophical Transactions 1860 pag. 236 auch ihre Existenz für die cubischen Formen von vier Variabeln nachgewiesen. Sie finden sich überdies noch in vielen anderen Fällen, jedoch, wie man leicht aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{p\gamma - 1}{n},$$

welche den Exponenten der Substitutionsdeterminante nach (10.) in diesem Falle bestimmt, schliessen kann, in denjenigen Fällen sicher nicht, in welchen p d. h. die Ordnung der Function durch n theilbar ist, weil λ für rationale Covarianten offenbar eine positive ganze Zahl sein muss.

§. 13.

Von den Functionalinvarianten.

Ich habe nicht die Absicht bei den gegenwärtigen allgemeinen Entwickelungen die eigentliche Formenbildung mit zu berücksichtigen, welche man auf eine sehr ausführliche Weise in den bekannten Abhandlungen und Werken über diesen Gegenstand vorfindet. Indessen dürfte es doch zweckmässig sein mindestens ein Princip hier genauer zu verfolgen, welches eine *directe* Darstellung der Covarianten gewährt, und in seinen weiteren Consequenzen die ganze vorliegende Theorie umfasst. Dasselbe beruht auf einer weiteren Verallgemeinerung des Begriffes der *Jacobi*schen Functionaldeterminante, und datirt von der Determinante des Herrn *Hesse* her, dessen Untersuchungen überhaupt die ersten Principien der Invariantentheorie hervorgerufen haben. Es macht gleichzeitig eine Reihe von Operationen und Benennungen, welche man in englischen Werken findet, wie Evectant, Emanant, Cogredient überflüssig, indem es diese scheinbar verschiedenartigen Processe auf eine einzige Quelle zurückführt und überdies umfassender ist. Dasselbe findet sich bereits in meiner Abhandlung über die cubischen Formen (dieses Journal Bd. 55, pag. 86), soweit es dort erforderlich war, und ich glaube, dass die Benennung der Formen, welche das Princip liefert, wie ich sie in der Ueberschrift angegeben habe, sich durch die Analogie mit den entsprechenden *Jacobi*schen empfiehlt, und dadurch leicht verständlich wird.

Wenn man nach dem Satze von den homogenen Functionen eine homogene Function der p^{ten} Ordnung allmälig in den folgenden Formen schreibt:

$$(1.)\quad \begin{cases} F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \dfrac{1}{p}\left\{x_1 \dfrac{dF}{dx_1} + x_2 \dfrac{dF}{dx_2} + \cdots + x_n \dfrac{dF}{dx_n}\right\} \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{p(p-1)}\left\{x_1^2 \dfrac{d^2F}{dx_1^2} + 2x_1 x_2 \dfrac{d^2F}{dx_1 dx_2} + \cdots + x_n^2 \dfrac{d^2F}{dx_n^2}\right\} \\[2ex] \qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{p(p-1)\ldots(p-k+1)}\left\{x_1^k \dfrac{d^kF}{dx_1^k} + k x_1^{k-1} x_2 \dfrac{d^kF}{dx_1^{k-1} dx_2} + \cdots + x_n^k \dfrac{d^kF}{dx_n^k}\right\} \\[2ex] \qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

so stellt sich bei der Transformation dieser Functionen durch lineare Substitutionen heraus, dass es gleichgültig ist, ob man die Function F in einer dieser Formen, z. B.

$$F = \frac{1}{p(p-1)\dots(p-k+1)} \Sigma \frac{d^k F}{dx_1^\alpha\, dx_2^\beta\, dx_3^\gamma \dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots,$$

wo $\alpha+\beta+\gamma+\dots = k$ ist, als homogene Function in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln transformirt und nachher die Substitution in den Coefficienten $\frac{d^k F}{dx_1^\alpha\, dx_2^\beta\, dx_3^\gamma \dots}$ ausführt, oder ob man F gleich vollständig transformirt. Denn die Coefficienten einer transformirten Form der p^{ten} Ordnung werden nach dem *Taylor*schen Satze dadurch gebildet, dass man die Function p mal hintereinander differentiirt und statt der Incremente jedesmal gleiche oder verschiedene Systeme der Substitutionscoefficienten setzt, welche je einer Verticalzeile der Substitution angehören. Die oben angedeutete unterbrochene Transformation würde aber erfordern, dass man in diesem Sinne erst die k^{ten} Differentiale bildet und dann von denselben die $(p-k)^{\text{ten}}$ nimmt, was aber wieder die p^{ten} giebt und daher zu demselben Resultate führt.

Hieraus geht hervor, *dass jede einfache oder simultane Invariante des Functionensystemes* (1.), *welche aus den einstweilen als constant betrachteten Coefficienten der explicite stehenden Variabeln gebildet ist, eine Covariante der Function F werden muss,* denn bezeichnet Φ eine solche Invariante, so genügt sie der Gleichung

$$\Phi' = r^\lambda \Phi,$$

und diese Gleichung bleibt aus dem oben angegebenen Grunde noch bestehen, wenn jetzt Φ' und Φ als veränderlich gedacht werden und man auf Φ' die ursprüngliche Substitution anwendet.

Man überzeugt sich leicht davon, dass auf diese Weise unter der vielfältigen Anzahl der Covarianten sicher auch die normalmässige Anzahl der von einander unabhängigen gefunden wird, denn die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten des Systems (1.) ist mindestens grösser als die Anzahl der Variabeln, indem beispielsweise schon die einfachen Invarianten nur einer der Functionen des Systemes (1.) von einer gewissen Ordnung an diese Zahl überschreiten, und es sind auch die entsprechenden Covarianten, wenn man sie sowohl in Bezug auf die Coefficienten als in Bezug auf die Variabeln betrachtet, von einander unabhängig, nur kann man durch Elimination der n Variabeln aus je $n+1$ derselben das jedesmalige

System auf ein anderes reduciren, welches nur n mit Variabeln versehene Covarianten behält, während die übrigen, weil sie von den Variabeln befreit sind, Invarianten werden.

Wenn statt einer einzelnen Function ein ganzes Functionensystem ursprünglich gegeben ist, so gilt das vorstehende Gesetz offenbar in derselben Weise, d. h. man kann ebenso viele Systeme (1.) bilden als Functionen im Systeme gegeben sind und alle zu einem System verschmelzen, aus welchem alsdann gemeinschaftlich einfache und simultane Invarianten in der bezeichneten Weise entnommen werden. Der speciellste Fall hiervon tritt ein, wenn die Anzahl der gegebenen Functionen der Anzahl der Variabeln gleich ist, und jede Function nur in der Form der ersten Gleichung (1.) d. h. als lineare Function der explicite stehenden Variabeln geschrieben wird. Ein solches System hat nur eine Invariante, nämlich die Determinante, welche *Jacobi* die *Functionaldeterminante* genannt hat. Da hiernach eine Verallgemeinerung dieser Functionsclasse gewonnen ist, welche auch noch in anderer Beziehung mit derselben analog ist, so will ich alle in derselben enthaltenen Covarianten *Functionalinvarianten* nennen, und sogleich bemerken, dass, wenn auch nicht alle Covarianten von selbst Functionalinvarianten sind, dennoch, nach dem Vorhergehenden, sich jede aus Functionalinvarianten und constanten Invarianten zusammensetzen lässt. Es soll übrigens jener Beisatz auch jedesmal dem Namen einer besonderen Invariante, wenn sie einen solchen hat, beigefügt werden, sobald sie aus den Coefficienten eines oder mehrerer der Systeme (1.) gebildet wird. Wenn man also, nach der treffend gewählten Bezeichnungsweise des Herrn *Sylvester,* Discriminante diejenige Invariante nennt, welche durch ihr Verschwinden das Endresultat der Elimination der Variabeln aus den Gleichungen

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \quad \frac{dF}{dx_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{dF}{dx_n} = 0$$

ausdrückt, so nenne ich z. B. jede aus den p^{ten} Differentialquotienten der Function gebildete Discriminante eine *Functionaldiscriminante.* Die Functionaldiscriminanten besonders zeichnen sich durch Eigenschaften aus, welche sie mit den Functionaldeterminanten gemein haben, ich kann indessen hier nicht darauf eingehen.

Aber das angegebene Gesetz hat noch eine weitere Ausdehnung; *es gehört nämlich schon jede einzelne homogene Function zu einem Functionensystem, dessen Functionen gleichzeitig mit der gegebenen transformirt werden,* *nämlich zu dem System ihrer Covarianten,* mithin kann man das angegebene Gesetz auch auf jede Covariante anwenden, indem man selbige allmälig nach (1.) als homogene Function der ersten, zweiten u. s. w. k^{ten} Ordnung schreibt und zu dem vorhandenen System hinzufügt. Es gilt also alles zusammengefasst:

Theorem XI.

Wenn man nach dem Satze von den homogenen Functionen jede Function eines gegebenen Functionensystemes allmälig als homogene Function der ersten, zweiten u. s. w. k^{ten} Ordnung in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln betrachtet und aus den Coefficienten derselben einfache und simultane Invarianten bildet, so sind letztere eine bestimmte Classe von Covarianten — Functionalinvarianten —, aus welchen sich alle übrigen zusammensetzen lassen. Wenn man ferner jede ermittelte Covariante, nach demselben Satz, in den Formen der ersten, zweiten u. s. w. k^{ten} Ordnung in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln schreibt und dem angegebenen System beifügt, so sind die einfachen und simultanen Invarianten des vereinigten Systemes ebenfalls Covarianten derselben Art.

Ferner als Zusatz:

Wenn man aus den Coefficienten des durch Theorem XI. entstandenen Systemes in derselben Weise Covarianten bildet, so erhält man neue Covarianten.

Diese letzteren würden alsdann Functionalcovarianten genannt werden müssen.

Da endlich die letzten Ableitungen der gegebenen Functionen und der Covarianten constant sind, so erhält man auf dieselbe Weise auch Invarianten, so dass das Theorem in vielen Fällen hinreicht, um ein vollständiges System von einander unabhängiger Invarianten und Covarianten zu bilden, wenn man eine einzige Invariante kennt.

Die vorstehenden Sätze finden auch unmittelbar auf die *zugehörigen* Formen Anwendung. Da nämlich alle zugehörigen Formen eines Systemes ebenfalls durch ein und dieselbe Substitution, welche aber die transponirte ist, gleichzeitig in ihre entsprechenden transformirt werden, so folgt, dass sie in der Beziehung von Covarianten zu einander stehen, also gilt

Theorem XII.

Wenn eine einzige zugehörige Form bekannt ist, und man lässt dieselbe die Stelle der ursprünglich gegebenen Function im Theorem XI. vertreten, so kann man auf dieselbe Weise Systeme von neuen zugehörigen Formen ableiten, wie aus Theorem XI. Covarianten hervorgehen.

Die folgenden speciellen Sätze, welche hinlänglich bekannt sind, ergeben sich ohne Weiteres aus der vorstehenden Theorie, wenn man beachtet, dass die letzten Ableitungen einer homogenen Function ihre Coefficienten reproduciren:

a) Jede aus den Coefficienten einer Covariante gebildete Invariante, Covariante oder zugehörige Form ist respective auch eine solche für die ursprüngliche Function selbst.

b) Alle aus den Coefficienten einer zugehörigen Form gebildeten Invarianten sind wieder Invarianten, hingegen die Covarianten und zugehörigen Formen umgekehrt zugehörige Formen und Covarianten.

Der folgende §. wird weitere Ausdehnungen dieser Theoreme zeigen.

§. 14.

Von den Zwischenformen.

Wenn man auf eine lineare Function

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

gleichzeitig die ursprüngliche Substitution

$$(1.)\qquad x_k = x_k^{(1)}\xi_1 + x_k^{(2)}\xi_2 + \cdots + x_k^{(n)}\xi_n$$

und die transponirte

$$(2.)\qquad v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + \cdots + x_n^{(k)} u_n$$

anwendet, so ergiebt sich sehr leicht, dass U direct in die entsprechende:

$$U' = v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + \cdots + v_n\xi_n$$

übergeht. In der That setzt man (2.) in U' ein und ordnet nach den Grössen u_k, so entsteht wegen (1.):

$$(3.)\qquad U' = U.$$

Diese sehr evidente Gleichung ist nichts desto weniger sehr wichtig. Wenn man zunächst bemerkt, dass die Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten dadurch auf eine symmetrische Weise bewerkstelligt werden kann, dass man eine beliebige lineare Function U der Wurzeln sucht, so folgt aus (3.), dass nur erforderlich ist, eine derartige Auflösung in irgend welchen passend gewählten durch lineare Substitutionen transformirten speciellen Formen zu bewerkstelligen, d. h. eine lineare Function U' der transformirten Wurzeln zu finden, und die Coefficienten v_k durch zugehörige Formen nach §. 11 darzustellen, wie ich auch in dem Beispiel des §. 11 gezeigt habe. Mit welchen

Irrationabilitäten alsdann auch U' behaftet erscheint, so findet man dennoch die Coefficienten der u_k d. h. der Wurzeln ohne Weiteres, wenn man allmälig $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, ... $u_n = 0$; $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, ... $u_n = 0$ u. s. w. setzt, weil wegen (3.) für jeden beliebigen Werth der u_k, $U' = U$ ist. Sieht man von dem algebraischen Problem, also davon ab, dass die Variabeln x_k und ξ_k specielle Werthe annehmen, so wird man im Allgemeinen für jedes System gegebener Functionen eine lineare Function U durch die zugehörigen Formen desselben in Verbindung mit den Covarianten auf irrationale (wenn auch nicht immer explicite) Weise darstellen können, wenn man durch n von einander unabhängige Covarianten die $2n$ Variabeln ausdrückt und in U einsetzt. Es hat sich nun in mehreren Fällen herausgestellt, wie z. B. bei der von Herrn *Cayley* gegebenen Darstellung eines linearen Factors der cubischen und biquadratischen Gleichung vermittelst Covarianten (dieses Journal Bd. 50 p. 287), dass man hierbei zu complicirteren Resultaten gelangt, als sie die gewöhnliche Auflösung der Gleichungen ergiebt. Dasselbe findet in erhöhtem Masse statt, wenn analoge Probleme auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen, indem sogar die Irrationalität einen höheren Grad annehmen kann, als nothwendig ist. Den Grund hiervon habe ich darin gefunden, dass unter den mannigfach vorhandenen Formensystemen ein drittes Functionensystem existirt, welches als den zugehörigen Formen und Covarianten *coordinirt* angesehen werden muss, und welches überdies eine nothwendige Zwischenstufe zwischen den zugehörigen Formen und Covarianten einnimmt. Ich habe daher die Functionen dieses Systemes *Zwischenformen* genannt. *Bezeichnet man durch Θ eine Function gleichzeitig der Variabeln x_k und u_k, so ist dieselbe Zwischenform, wenn sie der Gleichung*

$$(4.)\qquad \Theta'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n; v_1, v_2, \dots v_n) = r^{\lambda}.\Theta(x_1, x_2, \dots x_n; u_1, u_2, \dots u_n)$$

genügt, sobald man auf die Variabeln x_k die ursprüngliche und auf die Variabeln u_k die transponirte Substitution anwendet.

Zu diesen Zwischenformen gehört von selbst die lineare Function U, weil sie der Gleichung $U' = U$ genügt, ferner jedes Product von Potenzen der zugehörigen Formen und Covarianten; eigentliche Zwischenformen sind aber die auf folgende doppelte Weise gebildeten Functionen:

a) Jede simultane Covariante, welche eine homogene Function oder ein Functionensystem mit der linearen Function U gemein hat.

b) Jede zugehörige Functionalform, d. h. jede Function, welche entsteht, wenn man nach dem Satze von den homogenen Functionen das gegebene

Functionensystem und dessen Covarianten in den verschiedenen Formen des Theoremes XI §. 13 schreibt und alsdann, statt Invarianten, zugehörige Formen aus den Coefficienten des Systemes zusammensetzt.

Hier tritt nun das Theorem IX. §. 11 zur vollen Geltung, nach welchem man wegen *b)* ganz direct vielfache Systeme von Zwischenformen ableiten kann, indem man nämlich aus den Functionensystemen:

$$F = \frac{1}{p(p-1)\dots(p-k+1)} \Sigma \frac{d^k F}{dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\gamma \dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots,$$

$$\Phi = \frac{1}{p_1(p_1-1)\dots(p_1-k+1)} \Sigma \frac{d^k \Phi}{dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\gamma \dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots$$

die zugehörigen Formen des Theorems IX §. 11 entweder simultan entnimmt, in welchem Falle k jeder ganze Zahlenwerth kleiner als die Ordnungen von F und Φ sein kann, oder aus jeder der Functionen einzeln, im letzteren Falle aber k *gerade* voraussetzt.

Es ist jedoch nach dem Früheren die Anzahl der in Bezug auf beide Systeme von Variabeln von einander unabhängigen Zwischenformen gleich $2n$, in Bezug auf jedes System einzeln gleich n, und eliminirt man aus je $(n+1)$ derselben *ein* System der Variabeln, so ist das Endresultat der Elimination entweder eine Covariante oder eine zugehörige Form, je nach der Wahl der eliminirten Variabeln.

Die Zwischenformen genügen selbstständig einem System von partiellen Differentialgleichungen, welches sofort aus §. 12 (9.) abgeleitet werden kann, wenn man dieses System für ein Functionensystem bildet, dem man noch die lineare Function U beigefügt hat, nämlich

$$(5.)\quad \begin{cases} \mathfrak{S} D_{\varrho\varrho}(\Theta) + u_\varrho \dfrac{d\Theta}{du_\varrho} - x_\varrho \dfrac{d\Theta}{dx_\varrho} = \lambda . \Theta, \\ \mathfrak{S} D_{\varrho\sigma}(\Theta) + u_\sigma \dfrac{d\Theta}{du_\varrho} - x_\varrho \dfrac{d\Theta}{dx_\sigma} = 0, \end{cases}$$

und es ist alsdann

$$(6.)\quad \lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \dots + p_n\gamma_n + q - q_1}{n},$$

wenn Θ in Bezug auf die Variabel x_k von der q^{ten} und in Bezug auf die Variabeln u_k von der q_1^{ten} Ordnung ist.

Die Zwischenformen welche einer einzigen homogenen Function angehören, sind von besonderer Wichtigkeit, daher will ich einige auf dieselben bezügliche Theoreme und Sätze für diesen Fall besonders vorführen.

Theorem XIII.

Wenn Θ und ϑ zwei beliebige Zwischenformen sind, welche auch einander gleich sein können, und man ordnet eine derselben in der Theorem XI. §. 13 angegebenen Weise nach den Variabeln x_k, die andere in der Theorem XII. §. 13 angegebenen Weise nach den Variabeln u_k, so dass sie in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln von gleicher h^{ter} Ordnung sind, also

$$(7.)\quad \begin{cases} \Theta = \dfrac{1}{q(q-1)\dots(q-h+1)} \Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots}x_\varkappa x_\lambda x_\mu\dots, \\ \vartheta = \dfrac{1}{q_1(q_1-1)\dots(q_1-h+1)} \Sigma\Sigma\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots}u_\varkappa u_\lambda u_\mu\dots \end{cases}$$

ist, wo $\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ und $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ der Kürze halber die h^{ten} Ableitungen nach den Variabeln respective x_k und u_k bedeuten, so ist

$$(8.)\qquad \Theta_1 = \Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots}\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine neue Zwischenform der ursprünglichen Function.

Zum Beweise des Satzes will ich die partiellen Differentialgleichungen (7.) auf eine einzelne Function anwenden, in welchem Falle sie in

$$(9.)\quad \begin{cases} D_{\varrho\sigma}(\Theta)+u_\sigma\dfrac{d\Theta}{du_\varrho}-x_\varrho\dfrac{d\Theta}{dx_\sigma} = \lambda\Theta \quad \text{oder } = 0, \\ D_{\varrho\sigma}(\vartheta)+u_\sigma\dfrac{d\vartheta}{du_\varrho}-x_\varrho\dfrac{d\vartheta}{dx_\sigma} = \lambda_1\vartheta \quad \text{oder } = 0 \end{cases}$$

für die Functionen Θ und ϑ übergehen.

Da diese Gleichungen identisch erfüllt sind, so müssen sie auch noch bestehen, wenn man sie nach den Variabeln respective u_k und x_k $h$mal differentiirt und statt der h^{ten} Potenzen und Producte der Incremente beliebige Grössen auf beiden Seiten der Gleichungen setzt. Es sollen nun in der ersten der Gleichungen (9.) statt der Potenzen und Producte der Incremente dx_k h^{ter} Ordnung die entsprechenden $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ und in der zweiten statt der Potenzen und Producte der Incremente du_k h^{ter} Ordnung die entsprechenden $\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ gesetzt werden. Dadurch gehen offenbar sowohl Θ als ϑ in Θ_1 über, ferner wird $D_{\varrho\sigma}(\Theta)$ in eine Function: $D_{\varrho\sigma}^{(\vartheta)}(\Theta)$ und $D_{\varrho\sigma}(\vartheta)$ in eine Function: $D_{\varrho\sigma}^{(\Theta)}(\vartheta)$ von der Art übergehen, dass

$$D_{\varrho\sigma}^{(\vartheta)}(\Theta)+D_{\varrho\sigma}^{(\Theta)}(\vartheta) = D_{\varrho\sigma}(\Theta_1)$$

wird, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man auf der rechten Seite von (8.) die Operation $D_{\varrho\sigma}$ sowohl auf die ersten Factoren als auf die zweiten

Factoren der einzelnen Terme anwendet, endlich wird auch

$$u_\sigma \frac{d\Theta}{du_\varrho} + u_\sigma \frac{d\vartheta}{du_\varrho} = u_\sigma \frac{d\Theta_1}{du_\varrho},$$

$$x_\varrho \frac{d\Theta}{dx_\sigma} + x_\varrho \frac{d\vartheta}{dx_\sigma} = x_\varrho \frac{d\Theta_1}{dx_\sigma},$$

folglich erhält man nach Addition der Gleichungen (9.)

$$D_{\varrho\sigma}(\Theta_1) + u_\sigma \frac{d\Theta_1}{du_\varrho} - x_\varrho \frac{d\Theta_1}{dx_\sigma} = (\lambda+\lambda_1)\,\Theta \quad \text{oder} \quad = 0,$$

welche Gleichung Θ_1 als Zwischenform definirt, wie verlangt wurde.

Als specieller Fall des Theoremes ergiebt sich zunächst folgender Satz:

1. *Wenn Φ eine Covariante und Ψ eine zugehörige Form ist, und man schreibt beide in den Formen* (7.):

$$\Phi = \frac{1}{q(q-1)\dots(q-h+1)} \Sigma\Sigma\Phi_{\varkappa\lambda\mu\dots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \dots,$$

$$\Psi = \frac{1}{q_1(q_1-1)\dots(q_1-h+1)} \Sigma\Sigma\Psi_{\varkappa\lambda\mu\dots} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \dots$$

ebenfalls von gleicher h^{ter} Ordnung in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln, so ist

$$\Theta = \Sigma\Sigma\Phi_{\varkappa\lambda\mu\dots}\Psi_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine Zwischenform.

Die Gültigkeit des Satzes ergiebt sich sofort, sei es dass man denselben als Zusatz zum Theorem betrachtet, oder auch von Neuem beweist, indem man in den Gleichungen (9.) Φ statt Θ, Ψ statt ϑ setzt, und die in der ersten derselben befindlichen Differentialquotienten nach den Variabeln u_k, sowie die in der zweiten vorkommenden Differentialquotienten nach den Variabeln x_k gleich Null setzt.

Da die Coefficienten der Functionen Φ und Ψ durch die letzten Ableitungen derselben nach den Variabeln reproducirt werden, so erhält man in weiterer Specialisirung von 1) den folgenden bekannten Satz:

2. *Wenn*

$$\Phi = \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda\mu\dots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \dots, \qquad \Psi = \Sigma\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu\dots} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \dots$$

eine Covariante und eine zugehörige Form derselben Ordnung in Bezug auf die Variabeln sind, so ist immer

$$\Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda\mu\dots} s_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine Invariante, wenn hingegen Φ von höherer Ordnung als Ψ ist, so wird

$$\Sigma\Sigma\Phi_{\varkappa\lambda\mu\dots} s_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine Covariante, und wenn endlich Ψ von höherer Ordnung als Φ ist,

$$\Sigma\Sigma\Psi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}b_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$$

eine zugehörige Form, vorausgesetzt, dass die Ableitungen $\Phi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ und $\Psi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ die Coefficienten der Functionen:

$$\Sigma\Sigma\Phi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}x_\varkappa x_\lambda x_\mu\ldots,$$

$$\Sigma\Sigma\Psi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}u_\varkappa u_\lambda u_\mu\ldots$$

sind, welche in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln dieselbe Ordnung haben, als jedesmal die Variabeln von respective Ψ und Φ erreichen.

Man kann durch Anwendung der früheren Sätze über Invarianten, zugehörige Formen und Covarianten, die Anzahl der Zwischenformen beliebig vervielfältigen, insbesondere indem man sie nach den Variabeln x_k oder u_k, wie unter (7.) geschehen ist, anordnet und alsdann aus ihren Coefficienten Functionalformen bildet, woraus alsdann folgender Satz hervorgeht, dem sich noch mehrere ähnliche leicht anreihen lassen:

3. *Wenn man eine Zwischenform nach den Potenzen und Producten der Variabeln x_k vollständig ordnet, so dass die Coefficienten nur Functionen der u_k und der Constanten sind, so ist jede aus diesen Coefficienten gebildete Covariante eine Zwischenform, und jede aus denselben zusammengesetzte Invariante und zugehörige Form eine zugehörige Form. Wenn man hingegen dieselbe Anordnung nach den Variabeln u_k macht, so dass die Coefficienten nur noch Functionen der x_k und der Constanten sind, so ist jede aus diesen Coefficienten gebildete zugehörige Form eine Zwischenform und jede Invariante und Covariante eine Covariante der ursprünglichen Function oder des Functionensystemes.*

Ich schliesse diese Entwickelungen über Zwischenformen noch mit folgendem Theorem, welches symbolisch die partiellen Differential-Gleichungen enthält, denen die Invarianten einer homogenen Function genügen, und welches dadurch einen Gesichtspunkt zur Verallgemeinerung dieser Relationen bietet.

Theorem XIV.

Bezeichnet man durch

$$(10.)\qquad \Psi = \Sigma\Sigma P_{\varkappa\lambda\mu\ldots}u_\varkappa u_\lambda u_\mu\ldots$$

eine zugehörige Form, welche durch Differentiirung einer Invariante P entstanden und daher von derselben p^{ten} Ordnung in Bezug auf die Variabeln ist, als die ursprüngliche Function:

$$(10^a.)\qquad F = \Sigma\Sigma a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}x_\varkappa x_\lambda x_\mu\ldots,$$

und bildet man nach Theorem XIII. die Zwischenform

$$(11.)\qquad \Theta = \Sigma\Sigma\Psi_{\lambda\mu\ldots}F_{\lambda\mu\ldots},$$

in welcher $\Psi_{\lambda\mu\ldots}$ *und* $F_{\lambda\mu\ldots}$ *die durch* $p!$ *dividirten* $(p-1)^{ten}$ *Ableitungen von* Ψ *und* F *nach den Variabeln bedeuten, also in Bezug auf letztere linear sind, so ist immer*

$$(12.)\qquad p.\Theta = \lambda.P.(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n),$$

d. h. die lineare Zwischenform (11.) ist gleich der evidenten Zwischenform U *multiplicirt mit der Invariante* P *und einem Zahlenfactor.*

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man (10.) und (10^a.) in (11.) substituirt, indem der Coefficient von $u_\varrho x_\sigma$ der rechten Seite von (11.) dadurch in

$$\Sigma\Sigma P_{\varrho\lambda\mu\ldots}a_{\sigma\lambda\mu\ldots}$$

übergeht, was nach §. 5 (4.) gleich $\frac{1}{p}D_{\varrho\sigma}(P)$ ist. Da nun P den partiellen Differentialgleichungen für Invarianten genügt, so ist dieser Coefficient gleich Null, so oft ϱ und σ verschieden sind, und gleich $\frac{\lambda}{p}P$, wenn $\varrho=\sigma$ ist, was die Gleichung (12.) giebt.

Man kann sich nun aber leicht davon überzeugen, dass noch andere analoge Gleichungen wie (12.) existiren müssen, in denen die rechte Seite nicht allein U sondern auch eine höhere Potenz von U ist, denn es muss sich U als Zwischenform aus den übrigen zusammensetzen lassen, und ihre Anzahl ist hinreichend gross um Potenzen von U mittelst derselben darstellen zu können. Ist demnach Θ_1 eine Zwischenform der m^{ten} Ordnung in Bezug auf jedes der beiden Variabelnsysteme, welche der Gleichung

$$(13.)\qquad \Theta_1 = P_1(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)^m$$

genügt, so muss P_1 eine Invariante sein, für welche noch andere Gesetze als die in den Differentialgleichungen enthaltenen gelten und Verallgemeinerungen derselben sind, denn entwickelt man die rechte Seite von (13.) nach den Potenzen und Producten der Variabeln u_k und x_k, so finden sich auf derselben nur diejenigen, in welchen die u_k und x_k gleiche Indices haben, und diese sind dann sämmtlich in ein und denselben Coefficienten P_1 multiplicirt, daher müssen auch die Coefficienten von $u_1^\alpha x_1^\alpha$, $u_2^\beta x_2^\beta$, $u_3^\gamma x_3^\gamma$, ... auf der linken Seite von (13.) alle einander gleich und gleich der Invariante P_1 sein, während die übrigen gleich Null sind. Diese Relationen gehören dann nur der individuellen Invariante P_1 an und sind für dieselbe fundamentale. In der That sind fast alle Eigenschaften der Invarianten cubischer Formen von drei Variabeln, welche ich in den beiden citirten Abhandlungen gegeben habe, eine Folge dieses Principes, und obwohl ich bereits in der ersten Abhandlung vom Jahre 1850 (dieses Journal Bd. 39, §. 7) diese Grundgesetze der Invarianten S und T publicirt habe, so ist mir doch nicht bekannt, dass für andere Functionen, welche seitdem behandelt wurden, analoge Gesetze, welche tief in die Theorie der speciellen Functionen eingreifen, gefunden worden wären.

Zur Ermittelung derartiger Zwischenformen kann man sich unter Anderen eines symbolischen Gesetzes bedienen, welches ich im folgenden §. angeben werde, und welches mir in der citirten Abhandlung des 55sten Bandes die Theoreme §. 7, §. 20, u. s. w. geliefert hat. Weitere specielle Entwickelungen dieser Theorie muss ich indessen hier übergehen, und ich bemerke nur noch, dass die eigentliche Formenbildung für die gesammte Invariantentheorie vorzugsweise aus den unter *a)* und *b)* gegebenen Bildungsgesetzen der Zwischenformen insbesondere mit der dabei auseinandergesetzten Anwendung auf Theorem IX. §. 11, und aus Theorem XIII. mit seinen Zusätzen hergeleitet werden kann.

§. 15.

Ueber ein symbolisches Gesetz zur Darstellung zusammengesetzter Grundformen.

Durch vorstehende Entwickelungen glaube ich mein Ziel erreicht zu haben, welches in der Feststellung der Grundprincipien der vorliegenden Theorie bestand. Die Bildung der Fundamentalformen, aus welchen sich alle übrigen zusammensetzen lassen, für specielle Functionen lag nicht in meiner Absicht, und im Allgemeinen scheint sie für nicht bestimmt definirte Functionenclassen nicht zweckentsprechend zu sein, da sich nach den bisherigen Erfahrungen herausgestellt hat, dass für jeden Grad der gegebenen Functionen und für jede Anzahl von Veränderlichen der Kreis der Fundamentalformen sich anders gestaltet. Ich habe auch nicht alle Methoden hier aufgeführt, welche zur Bildung der Grundformen, wie ich insgesammt die entwickelten vier Classen nennen will, dienen, weil die übrigen zur Darstellung des Charakters derselben nicht erforderlich waren; dennoch möchte ich noch eine, nämlich die *Methode der symbolischen* Formen, nicht unberührt lassen, weil ich von derselben eine andere Anwendung mache, als gewöhnlich geschieht. Diese Methode ist von den Herren *Sylvester* und *Cayley* vorzugsweise und mit grosser Ausführlichkeit behandelt worden und die Untersuchungen derselben sind in dieser Beziehung so weit reichend, dass man fast jede symbolische Form, welche sich auf einem anderen Wege ergeben hat, nachträglich als speciellen Fall jener Gesetze finden kann. Es bleibt indessen immer noch schwierig die vollständige Lösung eines speciellen Falles aus jenen Gesetzen herzuleiten. Ich benutze daher die symbolischen Formen nicht zur Ermittelung der Grundformen, sondern ich reducire umgekehrt *gegebene* Grundformen auf symbolische, um den algebraischen Zusammenhang, den sie mit anderen haben, und die Gesetze, welche zwischen ihnen stattfinden, zu ergründen, und hierzu lässt sich aus der Invariantentheorie selbst eine sehr einfache Methode entnehmen, welche in der folgenden Fassung noch nicht veröffentlicht worden ist, denn die Intentionen des Herrn *Sylvester* gehen, wie ich glaube, weiter hinaus und nach einer anderen Richtung. Ich setze nämlich für den angegebenen Zweck die Grundformen einer Function höherer Ordnung aus den Grundformen eines Systemes von solchen Functionen niederer Ordnung zusammen, welche durch Multiplication und Potenzirung auf den Grad der höheren gebracht werden können. Die Potenzen und Producte der Coefficienten der letzteren sind dann die Symbole für die Coefficienten der ursprünglichen Function. *Hierzu dient nun jedes Theorem, welches lehrt, wie man aus der Grundform einer einzelnen homogenen Function eine simultane Grundform für ein ganzes Functionensystem ableitet,* insbesondere Theorem VI., §. 10, welches für alle Grundformen gilt. Wenn man nämlich die Functionen des Systemes, für welches die behandelte Grundform eine simultane geworden ist, in Potenzen und Producte anderer elementarer Functionen von niederer Ordnung zerlegt, so bleibt diese Grundform auch für die letztere eine simultane, zerfällt aber alsdann in eine oder *mehrere* Grundformen dieser Elementarfunctionen. Kennt man nun die Gesetze der letzteren Grundformen, so hat man auch den Rückschluss auf die ersteren, da alle Umformungen mit den Symbolen auch für die wirklichen Grössen gültig bleiben, *wenn man die Anzahl der Symbolensysteme in der Weise hinlänglich gross gewählt hat, dass keine Relationen niederer Ordnung, als die Ordnung der zu behandelnden Grundform beträgt, zwischen denselben bestehen.* Sind beispielsweise die Symbole Potenzen und Producte der Coefficienten einer einzigen linearen Function, so dürfen nur lineare Umformungen damit vorgenommen werden, weil schon Relationen zweiter Ordnung zwischen denselben existiren. Der einfachste Fall der obigen Zerlegung tritt ein, wenn man jede Function des Systemes, zu welchem die entstandene simultane Grundform gehört, als ein Product linearer Factoren betrachtet, indem alsdann die Grundformen eines *linearen* Systemes zum Vorschein kommen, welche aber die Determinanten desselben und die linearen Factoren selbst sind, so dass alsdann jede Grundform, welche Invariante oder zugehörige Form war, sich aus Determinanten allein, jede Grundform, welche Covariante und Zwischenform war, sich aus Determinanten und linearen Functionen gemischt zusammensetzt. Diesen Fall kann man in vielen Anwendungen, jedoch nicht immer, noch weiter dahin specialisiren, dass man jede Function des Systemes nur durch eine gleich hohe Potenz einer linearen Function ersetzt, und diesen habe ich vorzugsweise bei der Darstellung der symbolischen Formen zur Anwendung gebracht, welche ich in der citirten Abhandlung des 55^{sten} Bandes gegeben habe; denselben speciellen Fall hat auch Herr *Clebsch* (dieses Journal Bd. 58, pag. 117, Bd. 59, pag. 1) aus meiner Abhandlung abgeleitet und seinen Darstellungen in mehreren Abhandlungen zu Grunde gelegt.

Die symbolische Methode, welche ich hier auseinandergesetzt habe, liefert ein neues Mittel die Zusammensetzung complicirter Formen aus den einfachen kennen zu lernen, und ich kann sie allen denen sehr empfehlen, welche die Resultate der allgemeinen Invariantentheorie verwerthen wollen; sie ersetzt oft mit grossem Erfolg die andere hierzu verwendete sehr bekannte, auch aus Theorem III. §. 4 hervorgehende Methode, welche darin besteht, dass man die verlangte Zusammensetzung in einer transformirten Form ausführt, in welcher über so viele Coefficienten auf eine geeignete Weise verfügt worden ist, als die Anzahl der Substitutionscoefficienten beträgt, welche aber beim weiteren Fortschreiten der rationalen Algebra durch ihre Complication unausführbar wird.

In allen Fällen bleibt die folgende Aufgabe zu lösen: „Für ein gegebenes Functionensystem die fundamentalen Grundformen zu finden, aus welchen sich alle übrigen zusammensetzen lassen, und die der individuellen Functionenclasse eigenthümlichen Gesetze derselben zu entwickeln." Der Werth einer Lösung dieses Problems hängt aber wesentlich davon ab, dass die in die Natur der *speciellen* Functionenclasse eingreifenden Gesetze in derselben dargestellt werden, da sich die Formenbildung allein aus den vorhandenen allgemeinen Principien in jedem Falle leicht ausführen lässt. Indessen glaube ich, dass zur weiteren Ausbildung der rationalen Algebra erforderlich wird, dieselben Principien auf Transformationen höherer Ordnung auszudehnen, wozu die vorliegenden Entwickelungen in ihrer Anlage die ersten Mittel bieten. Diese Anlage hat auch auf einem sehr naturgemässen Wege zu den partiellen

Differentialgleichungen geführt, welche sich in dieser Fassung bereits in meiner in der Einleitung erwähnten Abhandlung vom Jahre 1851 befinden. Ohne diese Abhandlung zu kennen und auf einem ganz anderen Wege haben die Herrn *Sylvester* und *Cayley* die partiellen Differentialgleichungen für *binäre* homogene Functionen, der erstere in Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1852 Section VI, der letztere in diesem Journal Bd. 47, pag. 111, abgeleitet, und später hat in den Philosophical Transactions 1854 pag. 245 Herr *Cayley* auch die *allgemeinen* Gleichungen aufgestellt, neuerdings Herr *Clebsch* in der oben citirten Abhandlung (dieses Journal Bd. 59, pag. 5). Eine strenge Ableitung derselben für die *binären* Formen hat Herr *Brioschi* in *Tortolini*s Annali di Mathem. 1859 pag. 82 gegeben. Es ist jedoch der von allen eingeschlagene Weg zu ihrer Darstellung sehr verschieden von dem meinigen, welcher, wie ich glaube, erst ihre eigentliche Bedeutung zeigt, indem er ihnen die Stellung zuweist, welche sie in der allgemeinen Invariantentheorie einnehmen. Es war auch weniger meine Absicht, diese Gleichungen abzuleiten, als die Theorie zu begründen.

Berlin, 1863.