Werk

Titel: Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M...

Autor: Hesse, O.

Jahr: 1863

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0062|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. *Chasles* abhängt.

(Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg.)

Problem.

On donne dans le même plan deux systèmes de sept point chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques.

Wenn $a = 0$ und $a_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier geraden Linien in derselben Ebene darstellen, die sich in einem Punkte c schneiden, so ist

$$(1.) \quad a - \lambda a_1 = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ die Gleichung irgend einer geraden Linie, welche durch den Punkt c geht. Diese Gleichung kann man für den analytischen Ausdruck des vom Centrum c ausgehenden Strahlbüschels nehmen. Denn man erhält aus ihr die Gleichung jedes einzelnen Strahles, wenn man dem willkürlichen Factor λ den ihm entsprechenden Werth zuertheilt.

Sind ferner $A = 0$ und $A' = 0$ die Gleichungen irgend zweier geraden Linien, welche sich in dem Punkte C schneiden, so ist wieder:

$$(2.) \quad A - \lambda A' = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ die Gleichung irgend einer geraden Linie, welche durch den Punkt C geht; und die Gleichung (2.) ist der analytische Ausdruck für einen zweiten vom Centrum C ausgehenden Strahlbüschel.

Die Gleichungen (1.) *und* (2.) *repräsentiren irgend zwei von den Centren c und C ausgehende homographische Strahlbüschel, deren homologe Strahlen durch den willkürlichen, aber in beiden Gleichungen gleichen Factor* λ *bestimmt sind.*

Beiläufig sei erwähnt, dass in gleicher Weise die Gleichung (2.) eine beliebige mit dem Strahlbüschel (1.) homographisch getheilte gerade Linie darstellt, wenn $A = 0$ und $A' = 0$ die Gleichungen von irgend zwei Punkten bedeuten.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir annehmen, dass c und C die Centren seien der gesuchten beiden Strahlbüschel und dass die Gleichungen (1.) und (2.) die homologen Strahlen der beiden Systeme darstellen. Es seien ferner x, y, z mit den angehängten Indices $1, 2, \ldots, 7$ die homogenen Coordinaten der 7 gegebenen Punkte des einen Systemes und X, Y, Z mit denselben Indices die Coordinaten der entsprechenden Punkte des anderen Systemes.

Lassen wir alsdann k irgend einen der genannten sieben Indices bedeuten, so drücken die beiden Gleichungen

$$(3.) \qquad (a)_k - \lambda_k (a_1)_k = 0, \qquad (A)_k - \lambda_k (A')_k = 0$$

die vierzehn Bedingungen aus, dass sieben Strahlen des einen Strahlbüschels c durch die sieben gegebenen Punkte des einen Systemes gehen, und dass ihre homologen Strahlen des anderen Strahlbüschels C durch die sieben gegebenen Punkte des anderen Systemes gehen, vorausgesetzt, dass $(a)_k$, $(a_1)_k$ und $(A)_k$, $(A')_k$ die Ausdrücke bedeuten, in welche a, a_1 und A, A' durch Veränderung der variabeln Coordinaten in die den Indices k entsprechenden Coordinaten der gegebenen Punkte des einen und des anderen Systemes übergehen.

Diese vierzehn Bedingungen reduciren sich durch Elimination von λ_k auf folgende sieben Gleichungen

$$(4.) \qquad \frac{(a)_k}{(a_1)_k} - \frac{(A)_k}{(A')_k} = 0,$$

welche das vorgelegte Problem lösen.

Denn bestimmt man die zwölf Constanten in den vier linearen Functionen a, a_1, A, A' in der Weise, dass sie den sieben Gleichungen (4.) genügen, so ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(5.) \qquad a = 0, \qquad a_1 = 0$$

die Coordinaten des gesuchten Centrums c, und aus den Gleichungen

$$(6.) \qquad A = 0, \qquad A' = 0$$

die Coordinaten des Centrums C.

Aus dem Umstande, dass nur sieben Gleichungen die zwölf Constanten zu bestimmen haben, darf man aber nicht folgern, dass das Problem unendlich viele Auflösungen zulasse. Es ist im Gegentheil, wie M. *Chasles* bemerkt, das Problem ein vollständig bestimmtes.

Um dieses nachzuweisen, setzen wir:

$$(7.) \qquad \begin{cases} a = \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z, & A = \alpha^0 X + \beta^0 Y + \gamma^0 Z, \\ a_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & A' = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z. \end{cases}$$

Von den zwölf in diese vier linearen Ausdrücke von a, a_1, A, A' eingehenden Constanten können wir zwei, z. B. β_0 und γ_1 gleich 0 setzen, was darauf hinauskäme, den beiden durch das Centrum c gehenden geraden Linien $a=0$ und $a_1=0$, die wir beliebig um das Centrum drehen können, bestimmte Richtungen zu geben.

Berücksichtiget man ferner die Art des Eingehens der noch übrigen Constanten in die Gleichungen (4.), so sieht man, dass sich noch drei Constanten auf die Einheit zurückführen lassen, etwa $\alpha_0=\alpha_1=\alpha^0=1$. Es bleiben also in der That nur sieben zu bestimmende Constanten übrig, deren Zahl gleich ist der Zahl der das Problem lösenden Gleichungen.

Wir werden jedoch, um die Symmetrie nicht zu zerstören, im Folgenden sämmtliche zwölf Constanten berücksichtigen, aber an ihrer Stelle neun andere einführen.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir die Gleichung (4.) wie folgt:

$$(8.)\qquad \begin{cases} (a_{00}x_k+a_{01}y_k+a_{02}z_k)X_k \\ +(a_{10}x_k+a_{11}y_k+a_{12}z_k)Y_k \\ +(a_{20}x_k+a_{21}y_k+a_{22}z_k)Z_k = 0, \end{cases}$$

indem wir haben:

$$(9.)\qquad \begin{cases} a_{00}=\alpha_0\alpha'-\alpha_1\alpha^0, & a_{10}=\beta_0\alpha'-\beta_1\alpha^0, & a_{20}=\gamma_0\alpha'-\gamma_1\alpha^0, \\ a_{10}=\alpha_0\beta'-\alpha_1\beta^0, & a_{11}=\beta_0\beta'-\beta_1\beta^0, & a_{21}=\gamma_0\beta'-\gamma_1\beta^0, \\ a_{20}=\alpha_0\gamma'-\alpha_1\gamma^0, & a_{21}=\beta_0\gamma'-\beta_1\gamma^0, & a_{22}=\gamma_0\gamma'-\gamma_1\gamma^0. \end{cases}$$

Diese neun neuen Constanten a sind jedoch nicht unabhängig von einander, sondern es findet, wie aus der Determinanten-Theorie bekannt ist, zwischen ihnen die Gleichung Statt:

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Da aber in die acht Gleichungen (8.) und (10.) nur die Verhältnisse der zu bestimmenden neun Constanten a eingehen, so geben diese Gleichungen die Lösung des vorgelegten Problemes vollständig und zwar in folgender Weise.

Es seien m und n irgend zwei von den Constanten a. Durch sie lassen sich die übrigen sieben Constanten vermittelst der sieben linearen Gleichungen (8.) ausdrücken in der Form:

$$(11.)\qquad a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}m+c_{\mu\nu}n,$$

indem $b_{\mu\nu}$ und $c_{\mu\nu}$ bestimmte Functionen der Coordinaten der gegebenen vierzehn Punkte darstellen. Setzen wir nun diese Werthe (11.) in (10.), so erhalten wir die gesuchte in $\frac{m}{n}$ cubische Gleichung:

$$(12.)\quad \begin{vmatrix} b_{00}m+c_{00}n, & b_{01}m+c_{01}n, & b_{02}m+c_{02}n \\ b_{10}m+c_{10}n, & b_{11}m+c_{11}n, & b_{12}m+c_{12}n \\ b_{20}m+c_{20}n, & b_{21}m+c_{21}n, & b_{22}m+c_{22}n \end{vmatrix} = 0.$$

Lösen wir diese cubische Gleichung auf, und setzen $n=1$, so geben die Gleichungen (11.) die Werthe aller neun Coefficienten a.

Es bleibt noch übrig die Coordinaten x, y, z des Centrums c festzustellen. Zu diesem Zwecke erinnern wir, dass $a=0$ und $a_1=0$ die Gleichungen zweier geraden Linien sind, welche sich in dem Centrum c schneiden. Bezeichnen wir nun mit X, Y, Z irgend welche Grössen, so stellt die Gleichung: $aA'-a_1A=0$ oder, vollständig entwickelt, die Gleichung:

$$(13.)\quad \begin{cases} (a_{00}x+a_{01}y+a_{02}z)X \\ +(a_{10}x+a_{11}y+a_{12}z)Y \\ +(a_{20}x+a_{21}y+a_{22}z)Z = 0 \end{cases}$$

ein System von geraden Linien dar, welche sich in dem Centrum c schneiden. Man hat daher zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z dieses Centrums irgend zwei von den drei Gleichungen:

$$(14.)\quad \begin{cases} a_{00}x+a_{01}y+a_{02}z = 0, \\ a_{10}x+a_{11}y+a_{12}z = 0, \\ a_{20}x+a_{21}y+a_{22}z = 0. \end{cases}$$

Da die Coefficienten in diesen Gleichungen aber von der cubischen Gleichung (12.) abhängen, so hat man drei Auflösungen des Problemes.

Wenn in dem behandelten Probleme an Stelle von sieben Punkten in jedem der beiden Systeme acht Punkte gegeben wären, so würde dasselbe im Allgemeinen keine Lösung haben. Man kann sich aber die Frage stellen, welche Lage der achte Punkt o des ersten Systemes haben muss, wenn der ihm entsprechende Punkt O des zweiten Systemes gegeben ist. Diese Frage beantwortet die Gleichung (13.), wenn man festsetzt, dass x, y, z die Coordinaten des Punktes o und dass X, Y, Z die gegebenen Coordinaten des Punktes O seien. Sie sagt aus, dass der Punkt o auf einer von dem gegebenen Punkte O abhängenden geraden Linie (13.) beliebig gewählt werden

kann, welche durch das Centrum c geht. Die Gleichung (13.) stellt aber drei verschiedene gerade Linien dar, von welchen jede durch eines der drei Centren c geht. Man kann daher den Punkt o beliebig auf drei von dem Punkte O abhängenden geraden Linien wählen, welche durch die drei Centren c gehen.

Man erhält die Gleichung dieser drei geraden Linien in der Form eines Productes aus drei linearen Factoren, wenn man aus den sieben Gleichungen (8.) und der achten Gleichung (13.) die Verhältnisse der neun Coefficienten a in linearer Weise berechnet und sie in die Gleichung (10.) einsetzt. Die so präparirte Gleichung (10.) stellt mit den willkürlichen Constanten X, Y, Z Curven dritter Ordnung dar, welche durch die drei Centren c gehen. Aus der Discussion solcher Curven dritter Ordnung hat man bisher die Lösung des Problemes von M. *Chasles* abgeleitet, indem man die sechs von den neun Schnittpunkten zweier von diesen Curven feststellte, welche nicht die drei gesuchten Centren c sind.

Heidelberg, im März 1862.