Werk

Titel: Ueber Curven vierter Ordnung.

Autor: Clebsch, A.

Jahr: 1861

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0059|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ueber Curven vierter Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

§. 1.

Von einigen Curven, welche in der Theorie der Curven vierter Ordnung zu betrachten sind.

Die Theorie der Curven n^{ter} Ordnung knüpft sich naturgemäss an die der Curven niedrigerer Ordnungen an; bildet man die verschiedenen Polaren, und die Grundformen derselben, so sind dies auch Grundformen der Curven n^{ter} Ordnung, d. h. solche Formen, welche durch eine Transformation der Coordinaten wiederum in die frühere Gestalt übergehen, multiplicirt mit einer Potenz der Transformationsdeterminante.

Die Grundformen, welche man so erhält, sind sehr verschiedener Art. So geben die Invarianten der ersten Polare Covarianten der ursprünglichen Function; die zugehörigen Formen geben Zwischenformen; die Covarianten aber eine Art von Grundformen, welche sich von eigentlichen Covarianten dadurch unterscheidet, dass sie gleichzeitig in Bezug auf die Coordinaten *zweier* Punkte homogen sind.

Da unter solchen Grundformen für die Geometrie vor Allem die eigentlichen Covarianten von Bedeutung sein werden, so wird man zunächst den Satz benutzen, dessen Richtigkeit an sich deutlich ist:

Die Invarianten der verschiedenen Polaren sind Covarianten der ursprünglichen Function.

Wenn man dies z. B. auf die Curven vierter Ordnung anwendet, zeigt sich zunächst die erste Polare, welche eine Curve dritter Ordnung ist. Diese hat zwei Invarianten S, T, nebst der in vieler Hinsicht merkwürdigen Verbindung derselben $R = T^2 - S^3$. Man hat also hiernach für die Curven vierter Ordnung die Covarianten S von der vierten, T von der sechsten, R von der zwölften Ordnung. Die Curven $S = 0$, $T = 0$, $R = 0$ sind daher Fundamentalcurven für die Betrachtung der Curven vierter Ordnung. Die geometrische Bedeutung derselben ist leicht ersichtlich. Die Curve, welche entsteht, wenn man die Determinante der Polare gleich Null setzt, und welche im Folgenden eine grosse Rolle spielt, mag der Kürze wegen Polardeterminante genannt werden. Die Curve S ist dann, nach der Theorie der Curven dritter Ord-

nung, der Ort derjenigen Pole, deren Polardeterminante sich in ein Dreieck auflöst; oder, wie ich an einem anderen Orte gezeigt habe, bei denen die Wendetangenten der Polaren sich zu dreien in drei Punkten begegnen. Ferner ist T der Ort derjenigen Pole, deren Polaren mit ihren Polardeterminanten in dem Reciprocitätsverhältniss stehen, dass die Wendetangenten der einen immer die anderen berühren. Die Curve $R=0$ aber ist der Ort der Pole, deren Polare einen Doppelpunkt hat; und der Ort dieses Doppelpunktes ist dann $\Delta=0$, eine Curve sechster Ordnung, welche durch die Wendepunkte der Curve vierter Ordnung geht, und zugleich die Invariante der zweiten Polaren ist.

Mit diesen Formen ist der Kreis der Covarianten zunächst abgeschlossen.

Ueber die letzterwähnten Ortscurven hat Herr *Steiner* (dieses Journal Bd. 47, pag. 4) einige merkwürdige Sätze bekannt gemacht, auf Curven ganz beliebigen Grades bezüglich. Wenn auch der vollständige Beweis jener Sätze die Kräfte der Analysis noch zu überschreiten scheint, so wird man doch im Folgenden, nebst anderen Sätzen, auch einige derjenigen bewiesen finden, welche Herr *Steiner* dort angeführt hat.

§. 2.

Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Polaren bei algebraischen Curven im Allgemeinen.

Es sei $u=0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, und

$$u_i=\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{ik}=\frac{1}{n.n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \text{etc.}$$

Ist dann y ein Punkt, dessen Coordinaten y_1, y_2, y_3 sind, so ist die Gleichung seiner Polare

$$v=y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3=0.$$

Die Wendepunkte dieser Curve findet man, indem man x in $x+\lambda.z$ übergehen lässt, wodurch v in

$$[v] = v+n\lambda.Dv+\frac{n.n-1}{1.2}\lambda^2D^2v+\cdots$$

übergeht, und dann die Bestimmung trifft, dass D^2v in zwei lineare Factoren

$$\alpha.\beta = (\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\alpha_3z_3)(\beta_1z_1+\beta_2z_2+\beta_3z_3)$$

zerfällt. Hierdurch erhält man die sechs Gleichungen

$$(1.) \qquad y_1u_{1ik}+y_2u_{2ik}+y_3u_{3ik} = \alpha_i\beta_k+\beta_i\alpha_k.$$

Diese Gleichungen drücken zunächst nur aus, dass y auf der Polardeterminante von y liege. Fügt man noch die Bedingung hinzu

$$(2.) \qquad \alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

welche mit der Bedingung $v = 0$ übereinkommt, so wird x ein Wendepunkt der Polaren, und α wird die Wendetangente.

Die Gleichungen (1.), (2.) schliessen bereits einige geometrische Resultate ein. Eliminirt man aus (1.) die α, β, so erhält man die Polardeterminante

$$(3.)\ 0 = \Delta_v = \begin{vmatrix} y_1 u_{111} + y_2 u_{211} + y_3 u_{311}, & y_1 u_{112} + y_2 u_{212} + y_3 u_{312}, & y_1 u_{113} + y_2 u_{213} + y_3 u_{313} \\ y_1 u_{112} + y_2 u_{212} + y_3 u_{312}, & y_1 u_{122} + y_2 u_{222} + y_3 u_{322}, & y_1 u_{123} + y_2 u_{223} + y_3 u_{323} \\ y_1 u_{113} + y_2 u_{213} + y_3 u_{313}, & y_1 u_{123} + y_2 u_{223} + y_3 u_{323}, & y_1 u_{133} + y_2 u_{233} + y_3 u_{333} \end{vmatrix}.$$

Verbindet man dies mit der Gleichung $v = 0$, so ergiebt sich der Satz:

Es giebt immer drei verschiedene Pole, deren Polaren in einem gegebenen Punkte einen Wendepunkt haben.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen (1.) die y und die β, so ist das Eliminationsresultat eine Determinante, welche nach Herrn *Aronhold* durch $S_u = 0$ bezeichnet werden kann. (Vgl. dieses Journal Bd. 55, pag. 189.) Die Coefficienten α, welche die Gleichungen der drei entsprechenden Wendetangenten bestimmen, erhält man daher direct aus den Gleichungen:

$$(4.) \qquad S_u = 0, \qquad \alpha = 0,$$

deren erste vom dritten Grade ist.

Rückt der Pol auf einer Curve $\varphi(y) = 0$ fort, so beschreiben die Wendepunkte der Polare eine Curve, welche durch Elimination der y aus $v = 0$, $\Delta_v = 0$, $\varphi = 0$ erhalten wird. Ist diese Curve insbesondere eine Gerade

$$(5.) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0,$$

und setzt man für den Augenblick

$$(6.) \qquad \Delta_v = \psi(y_1, y_2, y_3),$$

so ist das Resultat der Elimination, wie man sogleich sieht:

$$(7.) \qquad 0 = \psi\{c_2 u_3 - c_3 u_2, c_3 u_1 - c_1 u_3, c_1 u_2 - c_2 u_1\}.$$

Wenn also der Pol eine Gerade beschreibt, so beschreiben die Wendepunkte der Polare eine Curve der $6(n-2)^{ten}$ Ordnung. Sämmtliche Polaren, deren Pole auf der Geraden liegen, schneiden sich aber in $(n-1)^2$ Punkten, den

Lösungen der Gleichungen

$$u_1 = \lambda c_1, \quad u_2 = \lambda c_2, \quad u_3 = \lambda c_3.$$

Diese $(n-1)^2$ *Punkte sind dreifache Punkte der Curve* (7.) *).

Betrachtet man in (7.) *die* x *als constant, die* c *als veränderlich, so ist* $\psi = 0$ *das Product dreier linearen Factoren, welche die Gleichungen der obengedachten drei Pole sind, deren Polaren* x *zum Wendepunkt haben.* U. s. w.

Soll nun insbesondere die Polare einen Doppelpunkt haben, so müssen gleichzeitig die Gleichungen bestehen (vgl. (1.), (2.)):

$$(8.) \quad \begin{cases} y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik} = \alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Es ist dann x der Doppelpunkt, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ sind die beiden Tangenten desselben, y ist der zugehörige Pol. Indem man aus diesen Gleichungen die x, α, β eliminirt, erhält man die Gleichung der Curve, auf welcher die Pole aller mit einem Doppelpunkt versehenen Polaren liegen. Sie mag durch $R = 0$ bezeichnet sein. Eliminirt man hingegen die y, α, β, so gelangt man zu der Ortscurve der Doppelpunkte. Die Gleichung derselben ist die bekannte *Hesse*sche Determinante, gleich Null gesetzt. Denn multiplicirt man die erste Gleichung (8.) mit x_k und summirt nach k, so kommt

$$(9.) \quad \begin{cases} y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} = 0, \\ y_1 u_{12} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} = 0, \\ y_1 u_{13} + y_2 u_{23} + y_3 u_{33} = 0, \end{cases}$$

woraus sich durch Elimination der y sofort ergiebt:

$$\Delta_u = 0.$$

Eliminirt man endlich die x, y, β, so erhält man die Gleichung derjenigen Curve, welche von den Tangenten des Doppelpunktes umhüllt wird.

Die beiden Curven $R = 0$, $\Delta_u = 0$ hat Herr *Steiner* im Zusammenhange betrachtet, und conjugirte Kerncurven der Curve $u = 0$ genannt. Von den Sätzen, welche Herr Steiner dort anführt, hebe ich nur zwei hervor, um sie analytisch zu begründen:

---

*) *Wenn die Gerade eine Curve* $f^{(m)}(c_1, c_2, c_3) = 0$ *umhüllt, so beschreiben die Schnittpunkte der Polaren also die Curve* $m(n-1)^{ter}$ *Ordnung* $f(u_1, u_2, u_3) = 0$. *Dreht sich insbesondere die Gerade um einen Punkt* ξ, *so ist die beschriebene Curve die Polare von* ξ. Herr *Steiner* hat die $(n-1)^2$ Punkte Polare der Geraden genannt.

So wie bekanntlich die Curve $\Delta_u = 0$ durch die Wendepunkte von $u = 0$ hindurchgeht, ebenso berührt $R = 0$ sämmtliche Wendetangenten.

Zu diesem Zweck braucht man nur die Gleichung

$$(10.) \qquad y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0$$

zu differentiiren, um mit Hülfe von (9.) einzusehen, dass auch

$$dy_1 . u_1 + dy_2 . u_2 + dy_3 . u_3 = 0$$

ist. Daher ist (10.) die Gleichung der Tangente für die Curve $R = 0$ im Pole y von x, sobald man statt der y die laufenden Coordinaten setzt. Ist nun aber insbesondere x ein Wendepunkt, so ist (10.) auch die Gleichung der Wendetangente, diese berührt also auch $R = 0$.

Ferner:

Zwei Pole, deren Polaren einander berühren, liegen immer auf einer Tangente von $R = 0$; und zwar berühren sich die Polaren aller auf einer solchen Tangente gelegenen Pole in einem Punkte, dem Doppelpunkt x, welchen die Polare des Berührungspunktes y der Tangente enthält; die gemeinsame Tangente aller Polaren ist aber die Verbindungslinie von x und y.

Sollen nämlich z, t zwei Punkte sein, deren Polaren

$$z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 = 0, \qquad t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = 0$$

sich berühren, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(11.) \qquad z_1 u_{1i} + z_2 u_{2i} + z_3 u_{3i} = \mu (t_1 u_{1i} + t_2 u_{2i} + t_3 u_{3i}).$$

Setzt man also

$$y_h = z_h + \mu t_h,$$

so hat man die Gleichungen (9.) vor sich; die Verbindungslinie von z, t enthält also einen Punkt von $R = 0$, und ist Tangente in diesem Punkt, da die Gleichung der Tangente (10.)

$$Y_1 u_1 + Y_2 u_2 + Y_3 u_3 = 0$$

für $Y = z$ und $Y = t$ erfüllt ist. Der Berührungspunkt der beiden Polaren ist aber nach (11.) der zu y gehörige Doppelpunkt x; und in demselben berühren sich also alle Polaren, welche Punkten der Tangente in y angehören. Endlich ist die Gleichung der gemeinsamen Berührungstangente

$$X_1 (z_1 u_{11} + z_2 u_{12} + z_3 u_{13}) + X_2 (z_1 u_{21} + z_2 u_{22} + z_3 u_{23}) + X_3 (z_1 u_{31} + z_2 u_{32} + z_3 u_{33}) = 0.$$

Da diese Gleichung durch $X = x$ und $X = y$ erfüllt ist, so stellt sie die Verbindungslinie des Pols mit seinem Doppelpunkt dar.

Der erste dieser beiden Sätze (aus denen sich einige andere von Herrn *Steiner* angegebene ohne Weiteres ableiten lassen) giebt als speciellen Fall einen Satz, den ich an einem anderen Orte aus einem ganz anderen Standpunkte bewiesen habe. Da nämlich für die Curve dritter Ordnung $\Delta = 0$ und $R = 0$ zusammenfallen, so folgt, dass die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung sämmtlich die Curve $\Delta = 0$ berühren, welche durch die Wendepunkte hindurchgeht.

Ich bemerke noch zwei Eliminationsprobleme, welche sich bei diesen Untersuchungen aufdrängen.

Die Darstellung der Curve $R = 0$ in Liniencoordinaten führt auf die Elimination der x aus den Gleichungen

$$u_1 = \beta_1, \quad u_2 = \beta_2, \quad u_3 = \beta_3, \quad \Delta_u = 0.$$

Die Darstellung der Curve aber, welche von der Verbindungslinie x, y des Doppelpunktes mit seinem Pol umhüllt wird, fordert die Elimination der x aus den Gleichungen

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0, \quad \Delta_u = 0,$$
$$\Sigma \beta_i \beta_k U_{ik} = 0.$$

Die letzte Gleichung, in welcher die U_{ik} Unterdeterminanten von Δ bezeichnen, folgt leicht aus der Verbindung von

$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 = 0$$

mit den Gleichungen (9.).

Es kann endlich nach denjenigen Polen gefragt werden, deren Polaren einen Rückkehrpunkt enthalten. Für solche Pole müssen nicht nur die Gleichungen (8.) fortbestehen, sondern es müssen auch die beiden Tangenten des Doppelpunktes zusammenfallen, so dass die α den β gleich werden. Man hat also die Gleichungen:

$$(12.) \quad \begin{cases} y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik} = 2\alpha_i \alpha_k, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die y, x, α bestimmt, und zwar enthalten die Gleichungen auch eine genügende Anzahl von Unbekannten. Es ist aber leicht zu zeigen, aus welchen Gleichungen insbesondere die x zu finden sind. Denn aus der Theorie der Curven dritter Ordnung geht hervor (wie man z. B. durch einfache Anwendung der *Hesse*schen Form findet), dass, die u_{ikh} wie Constante betrachtet, das Resultat der Elimination der α, y aus den sechs Gleichungen,

welche die erste Gleichung (12.) darstellt, kein Anderes ist als

$$S = 0.$$

Bezeichnet man also durch S überhaupt die Covariante, welche entsteht, sobald man in S die Coefficienten nicht mehr Constante, sondern die oben durch u_{ikh} bezeichneten Grössen bedeuten lässt, so zeigt sich, dass die Rückkehrpunkte der Polaren sämmtlich auf der Curve $4(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $S = 0$ liegen. Ausserdem aber liegen sie, wie alle Doppelpunkte, auf $\Delta = 0$. Und daraus folgt der merkwürdige Satz:

Die Rückkehrpunkte der Polaren sind die $12(n-2)(n-3)$ *Schnittpunkte der Curven* $S = 0$, $\Delta_u = 0$.

Herr *Steiner* hat eben dieselbe Anzahl für die Rückkehrpunkte der Curve $R = 0$ gefunden; was darauf hinzudeuten scheint, dass die Pole der Polaren mit Rückkehrpunkten auch Rückkehrpunkte der Curve $R = 0$ sind. Dies ist in der That bei den Curven vierter Ordnung der Fall, wie man weiter unten sehen wird.

§. 3.

Anwendung auf die Curven vierter Ordnung. Eigenschaften der Polardeterminanten.

Man bemerkt, dass die vorliegenden Resultate wesentlich auf den Gleichungen (1.) beruhen. Ist aber u eine homogene Function der vierten Ordnung, so haben diese Gleichungen die besondere Eigenschaft, sich nicht zu verändern, wenn man die y mit den x vertauscht. Hieraus ergeben sich einige Resultate, welche der Reihe nach angedeutet werden mögen.

Da die Polardeterminante die Determinante der linken Seite von (1.) ist, so bleibt auch sie unverändert, wenn man y mit x vertauscht. Daraus folgt:

Wenn y auf der Polardeterminante von x liegt, so liegt auch x auf der Polardeterminante von y.

(Die Polardeterminante geht zugleich durch den Pol, nur wenn der Pol auf der Determinante von u liegt. *Man kann daher die Determinante auch als den Ort derjenigen Pole auffassen, welche zugleich auf ihrer Polardeterminante liegen.*)

Wenn man also die Polardeterminanten zu zwei unendlich nahen Punkten einer Geraden aufsucht, so berühren die Polardeterminanten der neun Punkte, in welchen jene sich schneiden, die Gerade in dem Orte, von welchem man ausging.

Rückt daher der Pol auf einer Curve fort, so umhüllt die Polardeterminante eine andere Curve; wenn aber umgekehrt der Pol auf der letzteren fortrückt, so umhüllt die Polardeterminante die erstere.

Bezeichnet man die Polardeterminante durch

$$\Delta_v = \psi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3),$$

und rückt der Pol y auf der Curve $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0$ fort, so wird der Schnittpunkt x zweier nächsten Polardeterminanten gefunden, indem man gleichzeitig diese Gleichungen für benachbarte Werthe der y bestehen lässt, so dass

$$\psi' y_1 . dy_1 + \psi' y_2 . dy_2 + \psi' y_3 . dy_3 = 0,$$
$$\varphi' y_1 . dy_1 + \varphi' y_2 . dy_2 + \varphi' y_3 . dy_3 = 0.$$

Man hat daher

$$\psi' y_1 = \lambda \varphi' y_1,$$
$$\psi' y_2 = \lambda \varphi' y_2,$$
$$\psi' y_3 = \lambda \varphi' y_3.$$

Fügt man hinzu

$$\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = 0,$$

so sind dies vier Gleichungen, aus welchen durch Elimination der y die gesuchte Umhüllungscurve hervorgeht.

Ist insbesondre φ vom ersten Grade, so sind diese Gleichungen genau dieselben, welche man anwendet, um die Curve $\psi = 0$ in Liniencoordinaten auszudrücken. Das Resultat ist bekanntlich dann (nach der Bezeichnung von Herrn *Aronhold*) $F_{\Delta_v} = 0$, diesen Ausdruck so gebildet, dass in Δ_v die y als die Veränderlichen gelten, und also aus F verschwinden; wo F dann vom sechsten Grad für die Coefficienten des linearen Ausdruckes φ, und vom vierten für die Coefficienten von ψ, mithin für die x vom zwölften Grade ist. Dies kann man in den Satz zusammenfassen:

Rückt der Pol auf der Geraden $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$ fort, so umhüllt die Polardeterminante eine Curve zwölfter Ordnung, welche, die x als constant, die α als veränderlich betrachtet, die Polardeterminante von x in Liniencoordinaten darstellt.

Nach einer Formel von Herrn *Cayley*, welche Herr *Aronhold* anführt (d. J. Bd. 55, p. 187) ist aber

$$3F_{\Delta_v} = -3S^2 . F_u - 4T . S_u^2 + 6S . S_u T_u,$$

wo die Ausdrücke rechts genau die in der Theorie der Curven dritter Ord-

nung so bezeichneten Functionen darstellen, nur dass statt der constanten Coefficienten immer die linearen Ausdrücke u_{ikh} eintreten. Durch blosse Betrachtung dieser Formel erkennt man:

Die Curve, welche von der Polardeterminante umhüllt wird, wenn der Pol die Gerade $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$ *durchläuft, geht immer durch die nämlichen 24 Punkte, in denen sich die Curven*

$$S = 0, \quad T = 0$$

durchschneiden, welche vom vierten und sechsten Grade sind; und hat ausserdem immer 12 Doppelpunkte, welche gleichfalls auf $S = 0$ *und zugleich auf der Curve dritter Ordnung* $S_u = 0$ *liegen, welche von den Coefficienten* α *abhängig ist.*

Es mögen sich hieran die folgenden Betrachtungen schliessen, welche die Bedeutung dieses Ausdrucks S_u ans Licht stellen. Aus den Gleichungen, als deren Determinante sich S_u für die beliebige Curve dritter Ordnung darstellt (die erste Gleichung (8.), wenn man die u_{ikh} als Coefficienten der Curve dritter Ordnung und die y und β als Eliminationsgrössen betrachtet, giebt dies System, vgl. bei Herrn *Aronhold*, a. a. O. p. 189), ergiebt sich für solche Curven der Satz:

Wenn ein Pol y sich auf der Determinante der Curve dritter Ordnung $u = 0$ *bewegt, so zerfällt seine Polare in zwei Gerade, deren Schnittpunkt wieder auf der Determinante liegt; diese Geraden umhüllen eine Curve dritter Classe* $S_u = 0$.

Für die Curven vierter Ordnung wird nun der Ausdruck

$$S_u = -6 \begin{vmatrix} u_{111} & u_{122} & u_{133} & 2u_{123} & 2u_{113} & 2u_{112} \\ u_{112} & u_{222} & u_{233} & 2u_{223} & 2u_{123} & 2u_{122} \\ u_{113} & u_{223} & u_{333} & 2u_{233} & 2u_{133} & 2u_{123} \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{vmatrix}$$

eine Zwischenform, welche, gleich Null gesetzt, eine Curve dritter Ordnung oder dritter Classe bedeutet, jenachdem man die x oder die α als die Veränderlichen betrachtet. Dies giebt daher die folgenden beiden Sätze:

Wenn ein Punkt y auf der Polardeterminante von x fortrückt, so umhüllen die Geraden, in welche die Polare von y, in Bezug auf die Polare von x genommen, zerfällt, die Curve dritter Classe $S_u = 0$.

Die Punkte, deren Polare von einer gegebenen Linie $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ *in solchen drei Punkten geschnitten wird, dass die drei in den Schnittpunkten an die Polare gezogenen Tangenten sich in einem Punkt* y *begegnen, liegen auf der Curve dritter Ordnung* $S_u = 0$.

§. 4.

Von der Curve $S = 0$ und den Dreiecken, in welche die Polardeterminante zerfallen kann.

Wenn insbesondere der Pol der Curve $S = 0$ angehört, so zerfällt die Polardeterminante in drei Gerade. Es entsteht ganz natürlich die Frage, welche Curve von den Ecken dieser Dreiecke beschrieben, und welche Curve von den Seiten derselben umhüllt wird, während der Pol die ganze Curve $S = 0$ durchläuft.

Aus der Theorie der Curven dritter Ordnung folgt, dass wenn für eine solche Curve $S = 0$ ist, y aber eine Ecke des Dreiecks bedeutet, in welche die Polardeterminante zerfällt, und α_1, α_2, α_3 die Coordinaten der gegenüberliegenden Seite dieses Dreiecks bezeichnen, die Gleichungen bestehen:

$$(13.) \qquad y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik} = 2\alpha_i \alpha_k;$$

wie man dies leicht z. B. an der *Hesse*schen Form nachweist. Die angeregten Fragen kommen also darauf hinaus, die Gleichungen zu bestimmen, welche hervorgehen, indem man die x und die α, oder die x und die y aus diesen Gleichungen eliminirt. Aber die Gleichungen (13.) ändern sich nicht, wenn man die y mit den x vertauscht. Hieraus fliesst ohne Weiteres der Satz:

Wenn y *eine Ecke des Dreiecks ist, in welches die Polardeterminante von* x *übergeht, so geht auch die Polardeterminante von* y *in ein Dreieck über, und eine Ecke desselben liegt in* x*, die gegenüberliegende Dreiecksseite aber ist in beiden Fällen dieselbe.*

Die Ecken der Dreiecke beschreiben also gleichfalls die Curve $S = 0$, *und zwar gehört auf diese Weise jeder Punkt* x *von* $S = 0$ *zu drei Dreiecken; es sind dieses die Polardeterminanten der Ecken des zu* x *selbst gehörigen Dreiecks.*

Ferner aber kann man die Gleichungen (13.) als lineare Gleichungen ansehen, deren Unbekannte die sechs Grössen:

$$\begin{aligned} &y_1 x_1, \quad y_2 x_3 + y_3 x_2, \\ &y_2 x_2, \quad y_3 x_1 + y_1 x_3, \\ &y_3 x_3, \quad y_1 x_2 + y_2 x_1 \end{aligned}$$

sind. Löst man also diese Gleichungen auf, indem man durch $A_{mn,ik}$ die Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$(14.) \qquad A = \begin{vmatrix} u_{1111} & u_{1122} & u_{1133} & u_{1123} & u_{1131} & u_{1112} \\ u_{2211} & u_{2222} & u_{2233} & u_{2223} & u_{2231} & u_{2212} \\ u_{3311} & u_{3322} & u_{3333} & u_{3323} & u_{3331} & u_{3312} \\ u_{2311} & u_{2322} & u_{2333} & u_{2323} & u_{2331} & u_{2312} \\ u_{3111} & u_{3122} & u_{3133} & u_{3123} & u_{3131} & u_{3112} \\ u_{1211} & u_{1222} & u_{1233} & u_{1223} & u_{1231} & u_{1212} \end{vmatrix}$$

bezeichnet, so kommt

$$(15.) \qquad A(x_m y_n + y_m x_n) = 2\Sigma_i \Sigma_k A_{ik,mn} \alpha_i \alpha_k .$$

In diesen Formeln ist

$$(16.) \qquad \begin{cases} A_{ik,mn} = A_{ki,mn} = A_{ik,nm} = A_{ki,nm} \\ = A_{mn,ik} = A_{mn,ki} = A_{nm,ik} = A_{nm,ki} . \end{cases}$$

Dagegen sind von diesen Grössen im Allgemeinen verschieden diejenigen Systeme, welche aus

$$A_{im,kn} \quad \text{und} \quad A_{in,km}$$

durch ähnliche Vertauschungen sich ableiten lassen.

Da nun die Determinante der linken Theile von (15.) verschwindet, so muss die Determinante der rechten Theile ebenfalls verschwinden für alle diejenigen Linien α, welche Seiten eines solchen Dreiecks werden können, in das eine Polardeterminante übergeht. Die Determinante der rechten Theile, gleich Null gesetzt, giebt aber die Gleichung:

$$(17.) \qquad \psi = \begin{vmatrix} \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,11} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,12} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,13} \alpha_i \alpha_k \\ \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,12} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,22} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,23} \alpha_i \alpha_k \\ \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,13} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,23} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,33} \alpha_i \alpha_k \end{vmatrix} = 0,$$

und man hat den Satz:

Die Seiten aller Dreiecke, in welche die Polardeterminante zerfallen kann, umhüllen eine Curve sechster Classe

$$\psi = 0.$$

Ehe ich zu weiteren geometrischen Sätzen übergehe, muss ich zweier algebraischen Sätze gedenken, welche eine Vergleichung zweier Methoden ergiebt, die Anzahl der Dreiecke zu bestimmen, deren eine Ecke auf einer gegebenen Geraden liegt, oder deren eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Bezeichnen α_1, α_2, α_3 gegebene Coordinaten einer Geraden, so bestimmen die Gleichungen

$$(18.) \quad S = 0, \quad S_u = 0$$

zusammen zwölf Werthsysteme der x. Wegen der ersten Gleichung ist aber die Polardeterminante von x ein Dreieck. In solchem Fall zerfällt $S_u = 0$, die α als veränderlich angesehen, in drei lineare Factoren, welche einzeln gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Ecken jenes Dreiecks darstellen. *Also geben die Gleichungen* (18.) *solche zwölf Punkte von* $S = 0$ *an, deren Polardeterminanten eine Ecke in der gegebenen Geraden haben.* Diese zwölf Punkte bestimmen sich aber durch eine Gleichung vierten Grades, welche die Schnittpunkte y der Geraden mit $S = 0$ angiebt. Bestimmt man die Ecken der zu diesen vier Punkten gehörigen Dreiecke, so sind dies nach dem Obigen die Punkte x. Man hat also folgenden Satz:

Die beiden Gleichungen $S = 0$, $S_u = 0$, *welche zwölf Werthsysteme ergeben, sind algebraisch lösbar. Denn bestimmt man die y mit Hülfe einer biquadratischen Gleichung so, dass*

$$(19.) \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0, \quad S(y)\,^*) = 0,$$

so giebt die Zerfällung von $S_u(y, \alpha) = 0$ *in lineare Factoren (welche durch eine cubische Gleichung bewirkt wird) die Gleichung von je drei Punkten x, welche je einem Werthsystem der Gleichungen* (19.) *entsprechen.*

Wenn dagegen die Gleichungen gegeben sind:

$$(20.) \quad S(x) = 0, \quad \Delta_v(x, y) = 0,$$

in welchen die y gegebene Grössen bedeuten, so hat man abermals zwölf Werthsysteme der x vor sich. Wegen der ersten Gleichung aber zerfällt die zweite, die y als die Veränderlichen betrachtet, in drei lineare Factoren, welche, einzeln gleich Null gesetzt, die Seiten des zu x gehörigen Dreiecks bestimmen. *Die Gleichungen* (20.) *liefern also diejenigen Punkte in* $S = 0$, *deren eine Dreiecksseite durch den gegebenen Punkt y geht.* Aber bezeichnet man durch α_1, α_2, α_3 die Coordinaten einer solchen Dreiecksseite, so genügen diese den Gleichungen

$$(21.) \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0, \quad \psi = 0,$$

---

*) Diese Schreibart ist hier und in einigen folgenden Gleichungen benutzt, um die nämlichen Functionen, welche einmal mit den Veränderlichen x, das andere Mal mit den Veränderlichen y geschrieben sind, unterscheiden zu können.

welche nur auf eine Gleichung sechsten Grades führen. Und so hat man den folgenden Satz:

Die Gleichungen $S(x) = 0$, $\Delta_v(x, y) = 0$, *welche zwölf Werth-Systeme ergeben, sind durch eine Gleichung des sechsten Grades lösbar. Sucht man nämlich zunächst solche Grössen* α, *welche den Gleichungen* (21.) *genügen, und bestimmt dann Werthepaare von* y, x *aus irgend dreien der Gleichungen* (13.) *mit Hülfe von quadratischen Gleichungen, so sind diese sechs Paar Werthsysteme die 12 Systeme von Lösungen der Gleichungen* (20.)

§. 5.

Reduction der Form ψ.

Die Form ψ lässt sich einfacher darstellen, wodurch sie mit einer der wichtigsten Fundamentalformen von u bis auf einen Factor identisch wird. Denn die Formel (17.) lehrt, dass man ψ in eine Summe von Termen folgender Art auflösen kann:

$$\begin{vmatrix} A_{ik,11} & A_{i'k',12} & A_{i''k'',13} \\ A_{ik,12} & A_{i'k',22} & A_{i''k'',23} \\ A_{ik,13} & A_{i'k',23} & A_{i''k'',33} \end{vmatrix} . \alpha_i \alpha_k \alpha_{i'} \alpha_{k'} \alpha_{i''} \alpha_{k''} .$$

Der in Determinantenform auftretende Coefficient ist aber aus den Unterdeterminanten von A zusammengesetzt, und lässt sich nach einem bekannten Theorem ausdrücken durch A^2, multiplicirt mit einer Unterdeterminante dritter Ordnung von A. Hieraus geht hervor, dass

$$\psi = \tfrac{1}{3} A^2 . Q$$

gesetzt werden kann, wo Q eine zugehörige Form bedeutet, welche für die α von der sechsten, für die Coefficienten von u aber von der dritten Ordnung ist.

Ohne direct diese Form Q zu bilden, kann man doch sehr leicht nachweisen, dass es nur eine Form giebt, der diese Eigenschaften zukommen und kann ihre symbolische Gestalt angeben. Nach einem für die Formentheorie fundamentalen Theorem, das ich anderswo bewiesen habe, lässt sich Q nothwendig als Aggregat von symbolischen Determinantenproducten darstellen. Jede solche Determinante ist von der dritten Ordnung, jedes Glied in Q besteht aber aus sechs Factoren α, multiplicirt mit drei Coefficienten u, was durch symbolische Substitutionen auf die 18te Ordnung führt. Daher muss jedes Determinantenproduct sechs Factoren enthalten, und in jedem Product

müssen sechs Reihen α und viermal drei symbolische Reihen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 enthalten sein, welche durch die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_k a_h a_m = b_i b_k b_h b_m = c_i c_k c_h c_m = u_{ikhm}$$

die Coefficienten von u repräsentiren. Solcher Producte aber kann man nur ein einziges bilden, nämlich

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2,$$

und Q muss also bis auf einen Factor mit diesem Product übereinstimmen. Man hat demnach nur noch diesen numerischen Factor zu bestimmen, welcher sich, durch Vergleichung eines beliebigen Coefficienten dieser Form mit der zuerst gefundenen, gleich $\frac{1}{2}$ ergiebt. Man hat also

$$Q = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \right\}^2 .$$

Diese Form hat eine sehr grosse Wichtigkeit. Ich habe gezeigt, *dass die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in Liniencoordinaten immer die Form hat:*

$$P^3 - 3Q^2 = 0,$$

wo P die Form

$$P = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^4$$

bedeutet; und die Linien, welche die Curve Q umhüllen, haben die ihnen allein zukommende Eigenschaft, die Curve $u = 0$ in vier harmonischen Punkten zu schneiden. Dies Letztere mit dem Obigen verbunden führt also auf den Satz:

Die Seiten aller Dreiecke, in welche die Polardeterminante zerfallen kann, deren Ecken immer in der Curve $S = 0$ liegen, und deren Seiten immer die Curve $Q = 0$ berühren, schneiden zugleich die Curve $u = 0$ in vier harmonischen Punkten.

§. 6.

Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Polaren der Curven vierter Ordnung.

Wenn die Polare des Punktes y in x einen Doppelpunkt haben soll, so liegt nach §. 2 x auf $\Delta_u = 0$, y auf $R = 0$. Es würde übrig bleiben die

Curve zu bestimmen, welche von den Tangenten sämmtlicher Doppelpunkte berührt wird. Die Gleichungen (8.) nehmen in diesem Fall die Gestalt an:

$$(21^a.) \quad \begin{cases} \Sigma_m \Sigma_n y_m x_n u_{mnik} = \alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

wo α_1, α_2, α_3 und β_1, β_2, β_3 die Coordinaten der beiden Tangenten des Doppelpunktes bedeuten. Man hat also aus den vorstehenden Gleichungen, um die gesuchte Curve zu finden, etwa die y, x und β zu eliminiren. Diese Elimination wird dadurch angebahnt, dass man die obigen Gleichungen zunächst in der aufgelösten Form

$$(22.) \quad A(y_m x_n + y_n x_m) = 2\Sigma_i \Sigma_k A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k$$

anwendet; sodann aber, indem man mit $\alpha_m \alpha_n$, $\alpha_m \beta_n$ und $\beta_m \beta_n$ multiplicirt und jedesmal nach m und n summirt, die Combinationen bildet:

$$(23.) \quad \begin{cases} 0 = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k \alpha_m \alpha_n, \\ 0 = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k \alpha_m \beta_n, \\ 0 = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k \beta_m \beta_n, \end{cases}$$

die Summen jedesmal auf alle vier Indices *mnik* ausgedehnt. Diese Gleichungen sind respective vom ersten, zweiten und dritten Grade für die β; man kann auf dieselben daher eine Eliminationsmethode anwenden, die ich anderweitig gegeben habe.

Ich will diese Gleichungen hier nur benutzen, um auf einen Zusammenhang der betreffenden Tangenten mit einer Curve hinzudeuten, welche für die Theorie der Curven vierter Ordnung von Bedeutung ist, nämlich mit der Curve

$$\Omega = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_m \alpha_n \alpha_i \alpha_k = 0.$$

Diese Curve ist, wie $P = 0$, von der vierten Classe, aber in Beziehung auf die Coefficienten von u von der fünften Ordnung, und verhält sich zu der Invariante A ähnlich, wie die Form P zu der ersten und einfachsten Invariante von u, deren symbolischer Ausdruck $(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3)^4$ ist.

Durchschneidet man die Curve $\Omega = 0$ durch eine Gerade

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0,$$

so berühren die in den Schnittpunkten gezogenen Tangenten derselben sämmtlich eine Curve dritter Classe, welche der Polaren ganz analog ist, und dargestellt wird durch die Gleichung:

$$\beta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \beta_3 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Dies ist aber nichts anderes als die erste Gleichung (23.); und die letzte Gleichung (23.) geht aus dieser hervor, wenn man die α mit den β vertauscht. Zwei Tangenten eines Doppelpunktes stehen also zu einander in dem Reciprocitätsverhältniss, welches durch folgenden Satz ausgedrückt wird:

Sind α, β die Tangenten des Doppelpunktes einer Polaren von $u=0$, so wird β von einer Curve dritter Ordnung berührt, welche die zwölf Tangenten derjenigen Punkte der Curve $\Omega=0$ zu Tangenten hat, in welchen diese Curve von α geschnitten wird, und umgekehrt.

Ist aber insbesondere x ein Rückkehrpunkt einer Polaren, so dass x also nach §. 2 einer der 24 Schnittpunkte von

$$S=0, \quad \Delta_u=0$$

ist, so fallen die Linien α, β zusammen, und die Gleichungen (23.) gehen in $\Omega=0$ über. *Diese Curve wird also von den Tangenten der Rückkehrpunkte berührt.*

Aber alsdann sind auch die Gleichungen (13.) erfüllt, d. h. die zugehörigen Pole sind Ecken solcher Dreiecke, in welche Polardeterminanten zerfallen können. Die Coordinaten y genügen somit nicht blos der Gleichung $R=0$, welche hier die Gestalt

$$R=T^2-S^3=0$$

annimmt, sondern auch der Gleichung $S=0$; oder mit anderen Worten, *die 24 Pole, deren Polare Rückkehrpunkte haben, sind die 24 Schnittpunkte der Curven vierter und sechster Ordnung*

$$S=0, \quad T=0.$$

In der Nähe dieser Pole reducirt sich die Gleichung $R=0$ auf $(dT)^2=0$. Dies bedeutet, *dass in diesen 24 Punkten die Curve zwölfter Ordnung $R=0$ selbst Rückkehrpunkte besitzt, und dass die Rückkehrtangenten derselben in eben diesen Punkten die Curve sechster Ordnung $T=0$ berühren.*

Da ferner für jede Curve dritter Ordnung, welche einen Rückkehrpunkt enthält, die Determinante in die doppelt gerechnete Rückkehrtangente und in eine andere Gerade zerfällt, welche ebenfalls durch den Rückkehrpunkt geht, so ist jedenfalls jede der 24 Rückkehrtangenten der Polaren auch Tangente der Curve sechster Classe $\psi=0$ oder $Q=0$, welche nach §. 4 von den Seiten aller Dreiecke berührt wird, in welche Polardeterminanten zerfallen können. Dies zusammen mit dem Vorhergehenden giebt den Satz:

Die 24 Rückkehrtangenten der Polaren sind die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven vierter und sechster Classe

$$\Omega = 0, \quad Q = 0.$$

Multiplicirt man endlich die Gleichung

$$A(y_m x_n + y_n x_m) = 2\Sigma_i \Sigma_k A_{mn,ik}\alpha_i\alpha_k,$$

in welche (22.) durch das Zusammenfallen der Tangenten α, β übergeht, mit α_m und summirt nach m, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

die Ausdrücke:

$$\lambda x_n = 2\Sigma_i \Sigma_k \Sigma_m A_{mn,ik}\alpha_i\alpha_k$$
$$= \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n},$$

wo der Kürze wegen

$$\lambda = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$$

gesetzt ist. Diese Gleichungen zeigen, *dass die Punkte, in welchen die 24 Rückkehrtangenten der Polaren die Curve $\Omega = 0$ berühren, zusammenfallen mit den 24 Rückkehrpunkten x selbst, so dass also die Curve vierter Classe $\Omega = 0$ durch die Schnittpunkte der beiden Curven vierter und sechster Ordnung $S = 0$, $\Delta_u = 0$ hindurchgeht.*

§. 7.

Von den Formen, auf welche diese Untersuchung geführt hat.

Die vorliegenden Betrachtungen haben drei fundamentale Covarianten geliefert, S, T und Δ, deren erste von der vierten Ordnung ist, während die anderen beiden bis zur sechsten Ordnung aufsteigen. Von Zwischenformen ist nur S_u betrachtet worden; hingegen zwei zugehörige Formen Ω und Q von der vierten und sechsten Ordnung.

Es ist endlich die Invariante A betrachtet, welche in der Reihe der einfachen Invarianten die zweite Stelle einnimmt. Ich werde noch eine einfache symbolische Darstellung dieser Invariante angeben. Führt man in (14.) folgende symbolische Substitutionen aus:

in der ersten Horizontalreihe $u_{ihkm} = a_i a_h a_k a_m$,
in der zweiten – $u_{ihkm} = b_i b_h b_k b_m$,
etc.

so nimmt A die Gestalt an:

$$A = a_1^2 . b_2^2 . c_3^2 . d_2 d_3 . e_3 e_1 . f_1 f_2 . \Theta,$$

wo Θ die Form bezeichnet:

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_2 e_3 & e_3 e_1 & e_1 e_2 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 & f_2 f_3 & f_3 f_1 & f_1 f_2 \end{vmatrix}.$$

Man bemerkt, dass der Factor, welcher in A mit Θ multiplicirt ist, ein Glied der Entwicklung von Θ selbst ist. Und durch Vertauschung der Reihen $a, b, c, \ldots$, durch welche der wirkliche Werth von A sich nicht ändern kann, nimmt A der Reihe nach 720 verschiedene Formen an, in deren jeder Θ mit einem seiner 720 Glieder multiplicirt erscheint. Addirt man also alle diese Formen, so erhält man

$$A = \frac{\Theta^2}{720}.$$

Aber $\Theta = 0$ ist nichts anderes als die Bedingung, dass sechs Punkte a, b, c, d, e, f auf einem Kegelschnitt liegen. *Bildet man also die Bedingung, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, erhebt den linken Theil dieser Bedingungsgleichung ins Quadrat, und ersetzt immer die Producte der Coordinaten jedes Punktes durch entsprechende Coefficienten einer Curve vierter Ordnung, so entsteht die Invariante A, multiplicirt mit 720.*

Wie übrigens endlich diese Invariante als Aggregat einfacher Determinanten dargestellt werden kann, erhellt unter Anderem aus der Darstellung von Θ, welche sich in den Nouv. Ann. T. 16 p. 418 findet, wonach Θ den Ausdruck

$$\Sigma \pm a_1 b_2 e_3 . \Sigma \pm a_1 d_2 c_3 . \Sigma \pm f_1 b_2 c_3 . \Sigma \pm f_1 d_2 e_3$$
$$- \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 . \Sigma \pm a_1 d_2 e_3 . \Sigma \pm f_1 b_2 e_3 . \Sigma \pm f_1 d_2 c_3$$

annimmt, oder einen der anderen, welche durch Vertauschung der Buchstaben aus diesem hervorgehen.

§. 8.

Ueber die Darstellung einer Function vierter Ordnung mit drei Veränderlichen durch die Summe von fünf Biquadraten.

Die vorangehenden Betrachtungen müssen zum Theil modificirt werden für diejenige besondere Classe von Curven vierter Ordnung, bei welchen die Invariante A verschwindet. Diese Curven sind algebraisch noch durch eine andere merkwürdige Eigenschaft characterisirt.

Es scheint von vorn herein möglich, eine Function u als Summe von 5 Biquadraten linearer Ausdrücke darzustellen, da in diesen die nöthige Anzahl von 15 Coefficienten vorhanden ist. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass dies nicht möglich ist, wenn nicht besondere Bedingungen erfüllt sind. In der That sei:

$$u = A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 + A_4^4 + A_5^4,$$

wo

$$A_k = a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3.$$

Setzt man ähnlich

$$B_k = a_{k,1}y_1 + a_{k,2}y_2 + a_{k,3}y_3,$$

so gehen die Gleichungen (1.) offenbar in folgende über:

$$A_1B_1 . a_{1,i}a_{1,k} + A_2B_2 . a_{2,i}a_{2,k} + \cdots + A_5B_5 . a_{5,i}a_{5,k} = \alpha_i\beta_k + \beta_i\alpha_k.$$

Da hier die linken Theile linear sind für die fünf Grössen

$$A_1B_1, \quad A_2B_2, \quad \ldots, \quad A_5B_5,$$

so kann man diese sechs Gleichungen mit solchen Factoren multipliciren, dass die linke Seite der Summe identisch verschwindet. Die Determinante der linken Theile muss also in der ursprünglichen Form verschwinden, d. h. man hat für jede Function u, welche die gedachte Zerlegung zulässt, $A = 0$.

***Die Curven also, deren Gleichungen durch fünf Biquadrate darstellbar sind, bilden eine specielle Classe, welche dadurch characterisirt ist, dass ihre Invariante A verschwindet**).**

---

*) Beiläufig bemerke ich den Satz, ***dass wenn man für Curven dieser Gattung die erste Invariante, deren Symbol***

$$(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3)^4$$

ist, nach den Coefficienten von u differentiirt, und statt der Incremente die Coefficienten von S einführt, das Resultat identisch verschwindet. Daraus scheint hervorzugehen, ***dass im Allgemeinen die so entstehende Invariante sich von A nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden kann.***

Wenn aber die Determinante A verschwindet, kann man nach bekannten Sätzen immer sechs solche Grössen p_{ik} bestimmen, dass

$$A_{mn,ik} = p_{mn} \cdot p_{ik}.$$

In Folge dieser Gleichung erkennt man, *dass für Curven dieser Art die Form* Ω *sich in*

$$(\Sigma\Sigma p_{ik}\alpha_i\alpha_k)^2 = K^2$$

auflöst, oder dass die Curve vierter Klasse $\Omega = 0$ *in einen doppelt zu zählenden Kegelschnitt* $K = 0$ *übergeht.*

Da zugleich die Gleichung

$$\Sigma_i\Sigma_k u_{mnik} p_{ik} = 0$$

stattfindet, so folgt aus den Fundamentalgleichungen (21^a.)

$$(24.) \qquad \Sigma_m\Sigma_n x_m y_n u_{mnik} = \alpha_i\beta_k + \beta_i\alpha_k$$

für diesen Fall:

$$(25.) \qquad \Theta = \Sigma_i\Sigma_k \alpha_i\beta_k p_{ik},$$

d. h. *je zwei Tangenten des Doppelpunktes einer Polaren sind reciproke Polaren des Kegelschnitts*

$$K = 0.$$

Betrachtet man die Gleichungen (24.) an sich, ohne sie, wie bei der Betrachtung der Doppelpunkte der Polaren mit den Gleichungen

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = 0, \quad \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 = 0$$

zu verbinden, so stellen sie Linienpaare α, β dar, denen gewisse Punktenpaare x, y in der Weise entsprechen, dass die Polare von y, genommen in Bezug auf die Polare von x, oder umgekehrt, in das Linienpaar α, β zerfällt. Was man auch kürzer dahin bezeichnen kann, *dass die zweite Polare des Punktenpaares* x, y *in das Linienpaar* α, β *zerfalle.* Von diesem Gesichtspunkt aus schliesst dann die Gleichung (25.) den Satz ein:

Damit ein Linienpaar die zweite Polare eines Punktenpaares bilden könne, ist es nöthig und hinreichend, dass die beiden Linien reciproke Polaren des Kegelschnitts $K = 0$ *seien; und jedes Paar reciproker Polaren kann als zweite Polare von Punktenpaaren betrachtet werden.*

Im Allgemeinen bestimmen sich aus den Gleichungen (24.) die Verhältnisse der Grössen

$$x_1y_1, \quad x_2y_2, \quad x_3y_3, \quad x_2y_3 + x_3y_2, \quad x_3y_1 + x_1y_3, \quad x_1y_2 + x_2y_1,$$

sobald passende Werthe der α, β gegeben sind, und es giebt somit für ein

Linienpaar höchstens *ein* Punktenpaar, als dessen zweite Polare dasselbe angesehen werden kann. Aber in dem vorliegenden speciellen Falle reichen die Gleichungen (24.) nur hin, um fünf der obigen Grössen durch die sechste linear auszudrücken. Setzt man dann die erhaltenen Werthe in die identische Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} 2x_1y_1 & x_2y_1+y_2x_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1y_2+y_1x_2 & 2x_2y_2 & x_3y_2+y_3x_2 \\ x_1y_3+y_1x_3 & x_2y_3+y_2x_3 & 2x_3y_3 \end{vmatrix},$$

so geht daraus eine cubische Gleichung für diese sechste Grösse hervor. *Für jedes Paar reciproker Polaren des Kegelschnitts $K=0$ giebt es also dann drei Punktenpaare, als deren zweite Polare jenes Linienpaar angesehen werden kann.*

Wenn insbesondre die Geraden α, β zusammenfallen, so müssen sie den Kegelschnitt $K=0$ berühren. Sie stellen dann eine Seite eines Dreiecks dar, in welches eine Polardeterminante zerfallen ist, und x, y liegen auf S. Man hat also den Satz:

Die Seiten sämmtlicher Dreiecke, in welche die Polardeterminanten zerfallen können, umhüllen den Kegelschnitt $K=0$. Jede Tangente wird dabei Seite von sechs Dreiecken; und die sechs gegenüberliegenden Dreiecksecken gruppiren sich zu drei Paaren so, dass immer ein Punkt eines Paares eine Ecke für die Polardeterminante des anderen wird.

Man kann beiläufig bemerken, dass man demnach unendlich viele Dreiecke dem Kegelschnitt umbeschreiben kann, dessen Ecken in der Curve vierter Ordnung $S=0$ liegen.

Aus diesen Sätzen schon erkennt man, dass es nicht ohne Interesse sein dürfte, die Theorie dieser eigenthümlichen Gattung von Curven genauer zu verfolgen.

Carlsruhe, den 2ten September 1860.