Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

---

§. 1.

Methode zur symbolischen Darstellung algebraischer Formen.

Im 55sten Bande dieses Journals ist Herr *Aronhold* in Bezug auf die Grundformen der homogenen Functionen dritter Ordnung mit drei Veränderlichen von einer sehr merkwürdigen symbolischen Ausdrucksweise derselben ausgegangen, welche ganz besonders geeignet scheint die wahren Eigenschaften solcher Formen darzulegen. Ich habe im 58sten Bande dieses Journals p. 117 kurz einen allgemeinen Beweis dafür angedeutet, dass die angegebene symbolische Gestalt nicht nur diesen speciellen Formen, sondern allen Invarianten, Covarianten, Zwischenformen und zugehörigen Formen zukomme, wie gross auch der Grad und die Anzahl der Veränderlichen in der ursprünglichen Function sein mag. Es ist sogar vielleicht zweckmässig, überhaupt diese symbolische Darstellung als Definition solcher Formen zu Grunde zu legen, da alle bisher bekannten Eigenschaften derselben aus dieser Form fast ohne Weiteres hervorgehen, während zugleich neue Eigenschaften und Anwendungen zahlreich daraus entspringen. Solche Anwendungen enthält bereits die Abhandlung des Herrn *Aronhold* in Menge; es ist der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung, namentlich auf den Nutzen aufmerksam zu machen, welchen man für die Theorie der Elimination aus dieser Darstellung ziehen kann.

Die erwähnte Darstellung besteht in Folgendem. Sei J eine beliebige ganze simultane Invariante von homogenen Functionen $\varphi, \psi, \ldots$, deren Ordnungen beliebig sein können, wenn nur die Anzahl der Veränderlichen überall dieselbe ist; d. h. es soll J eine derartige ganze und rationale Function der Coefficienten aller dieser Functionen sein, dass, wenn man in $\varphi, \psi, \ldots$ statt der Veränderlichen lineare Functionen derselben einführt, und in J dann die früheren Coefficienten durch die neuen ersetzt, dieses in dieselbe Function der neuen Coefficienten übergeht, welche es ursprünglich in Bezug auf die alten Coefficienten war, nur multiplicirt mit einer Potenz der aus den Coefficienten jener linearen Substitutionen gebildeten Determinante.

Ersetzt man nun in passender Weise die in J vorkommenden Coefficienten durch symbolische Producte, indem man, durch $m, n, \ldots$ die Ordnungen von φ, ψ, ... bezeichnet, die in Bezug auf die Veränderlichen x_1, x_2, ... x_r identischen symbolischen Gleichungen einführt:

$$\varphi = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r)^m = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_r x_r)^m = \cdots,$$
$$\psi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r)^m = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r)^m = \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so kann man immer J als ein Aggregat von Determinantenproducten darstellen, in denen die verschiedenen Reihen der einzelnen Determinanten Reihen der symbolischen Coefficienten, z. B.

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_r$$

sind, und wo ausser den in diesen Determinanten enthaltenen symbolischen Coefficienten nur noch numerische Constanten auftreten, in welche die einzelnen Producte multiplicirt sind.

Wenn man diese Darstellungsweise für Invarianten bewiesen hat, so ist sie für zugehörige Formen selbstverständlich. Denn wenn etwa

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_r$$

die Veränderlichen der zugehörigen Form sind, so kann man dieselbe immer als Invariante betrachten, für welche zu den anderen Functionen φ, ψ, ..., aus denen sie gebildet ist, auch noch die Function

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_r x_r$$

hinzutritt. Man hat also dem Obigen nur hinzuzufügen, dass, wenn J eine zugehörige Form wird, auch die Reihe

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_r$$

in einigen der symbolischen Determinanten vorkommen kann.

Aber die Darstellung gilt mit geringer Modification auch für Covarianten und Zwischenformen; und zwar darf man wieder nur von den ersteren sprechen, indem die Zwischenformen zu diesen genau in demselben Verhältniss stehen wie die zugehörigen Formen zu den Invarianten. Bei Covarianten tritt nun zu der Darstellungsweise, welche für Invarianten gegeben wurde, noch dies hinzu, dass die verschiedenen Determinantenproducte mit einigen der symbolischen linearen Ausdrücke

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r,$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r,$$
etc.

oder mit Potenzen derselben multiplicirt erscheinen.

Aber durch eine kurze Ueberlegung zeigt es sich, dass auch dies selbstverständlich ist, sobald der Satz über die Invarianten bewiesen worden. Denn setzt man, durch die ξ irgend welche r^2 Grössen bezeichnet,

$$\triangle = \Sigma \pm \xi_1 \xi_2' \xi_3^{(2)} \ldots \xi_r^{(r-1)}$$

und

$$x_1 = \frac{\partial \triangle}{\partial \xi_1}, \quad x_2 = \frac{\partial \triangle}{\partial \xi_2}, \quad \ldots \quad x_r = \frac{\partial \triangle}{\partial \xi_r},$$

so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\eta' &= \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \cdots + \xi_r' x_r = 0, \\
\eta^{(2)} &= \xi_1^{(2)} x_1 + \xi_2^{(2)} x_2 + \cdots + \xi_r^{(2)} x_r = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta^{(r-1)} &= \xi_1^{(r-1)} x_1 + \xi_2^{(r-1)} x_2 + \cdots + \xi_r^{(r-1)} x_r = 0.
\end{aligned}$$

Eine jede gegebene Covariante muss nun bis auf einen von der Transformationsdeterminante abhängigen Factor unverändert bleiben, wenn man statt der x lineare Functionen X derselben, und statt der Coefficienten von $\varphi, \psi, \ldots$ die nach Einführung der X auftretenden entsprechenden Coefficienten substituirt. Aber zugleich mit den Substitutionen für die x kann man auch an Stelle der ξ solche lineare Ausdrücke derselben Ξ einführen, dass auch

$$\begin{aligned}
\eta' &= \Xi_1' X_1 + \Xi_2' X_2 + \cdots + \Xi_r' X_r, \\
\eta^{(2)} &= \Xi_1^{(2)} X_1 + \Xi_2^{(2)} X_2 + \cdots + \Xi_r^{(2)} X_r, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta^{(r-1)} &= \Xi_1^{(r-1)} X_1 + \Xi_2^{(r-1)} X_2 + \cdots + \Xi_r^{(r-1)} X_r,
\end{aligned}$$

und wenn man dann

$$\nabla = \Sigma \pm \Xi_1 \Xi_2' \ldots \Xi_r^{(r-1)}$$

setzt, so ist wieder

$$X_1 = \frac{1}{C}\frac{\partial \nabla}{\partial \Xi_1}, \quad X_2 = \frac{1}{C}\frac{\partial \nabla}{\partial \Xi_2}, \quad \ldots \quad X_r = \frac{1}{C}\frac{\partial \nabla}{\partial \Xi_r},$$

durch C die Transformationsdeterminante bezeichnet. Die Ξ müssen also in dem neuen Ausdruck der Covariante ganz ebenso vorkommen, wie ursprünglich die ξ, weil die X darin eben so vorkommen sollten wie ursprünglich die x; ausserdem aber erscheint dann bei der transformirten Form der Covariante der Factor $\frac{1}{C}$ eben so oft, als der Grad der Covariante in Bezug auf die x Einheiten hat. Da nun nach der Definition der Covarianten die ursprüngliche und die transformirte sich nur durch eine Potenz der Transformationsdeterminante unterscheiden sollen, so trifft eben dies noch in Bezug auf die beiden Formen zu, in denen einerseits die ξ, andrerseits die Ξ eingeführt sind, nur dass die Potenz der Transformationsdeterminante eine andere geworden ist.

Genau betrachtet ist also die neue Form der Covariante entstanden, indem man die Covariante als simultane Invariante der Functionen $\varphi, \psi, \ldots$ $\eta', \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(r-1)}$ angesehen, und statt der ursprünglichen Coefficienten dieser Functionen die neuen, durch die linearen Substitutionen hervorgerufenen gesetzt hat. *Man kann also eine Covariante jederzeit durch eine Invariante ersetzen, indem man den erzeugenden Functionen $r-1$ neue lineare Functionen η hinzufügt.*

Wenn man nun dieser Invariante die oben angeführte Darstellung giebt, so müssen in derselben Determinanten wie

$$\Sigma \pm a_1 \xi_2' \xi_3'' \ldots \xi_r^{(r-1)}$$

vorkommen, welche mit anderen, von den ξ unabhängigen Determinanten multiplicirt sind. Da nun die obige Determinante nichts anderes ist als

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r,$$

so zeigt sich, dass wirklich bei den Covarianten nur Factoren dieser letzten Art zu den symbolischen Determinanten hinzutreten können.

Es kommt also nur darauf an, den Satz in aller Strenge für Invarianten zu beweisen. Und dies geschieht am leichtesten, wie ich es im Folgenden auseinandersetzen werde, indem man zugleich die geforderte symbolische Darstellung wirklich leistet. Ich werde mich dabei der Hauptsache nach an den Gang anschliessen, den ich für den Beweis in der erwähnten Abhandlung angedeutet habe.

§. 2.

Zurückführung auf die Betrachtung linearer Functionen.

Bezeichnen wir durch die Buchstaben $\varphi, \psi, \ldots$, an welche man sich beliebige untere Indices angebracht denke, zugleich die Coefficienten der homogenen Functionen, die oben durch $\varphi, \psi, \ldots$ bezeichnet wurden; und sei $J(\varphi, \psi, \ldots)$ eine gegebene ganze simultane Invariante dieser Functionen und eine homogene Function sowohl der Coefficienten φ als der Coefficienten ψ u. s. w. Denn sollte J aus mehreren Theilen bestehen, für welche zusammen diese Homogeneität in Bezug auf die Coefficienten *jeder* der Functionen nicht erfüllt wäre, so müsste jeder einzelne Theil, für welchen sie stattfände, für sich eine Invariante sein, und man würde dann jeden dieser Theile abgesondert betrachten.

In Folge der linearen Substitutionen

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 = c_1' X' + c_1'' X'' + \cdots + c_1^{(r)} X^{(r)}, \\ x_2 = c_2' X' + c_2'' X'' + \cdots + c_2^{(r)} X^{(r)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_r = c_r' X' + c_r'' X'' + \cdots + c_r^{(r)} X^{(r)} \end{cases}$$

mögen nun φ, ψ, ... übergehen in Φ, Ψ, ... Ist dann noch

$$C = \Sigma \pm c_1' c_2'' \ldots c_r^{(r)},$$

so wird J als Invariante definirt durch die Gleichung:

$$(2.)\quad J(\Phi, \Psi, \ldots) = C^{\varrho}.J(\varphi, \psi, \ldots),$$

wo ϱ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnen kann.

Variiren wir in der vorstehenden Gleichung jetzt die Coefficienten φ, wodurch also auch die Φ Veränderungen erleiden, während die c constant bleiben sollen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\Sigma \frac{\partial J(\Phi, \Psi, \ldots)}{\partial \Phi} \delta\Phi = C^{\varrho}.\Sigma \frac{\partial J(\varphi, \psi, \ldots)}{\partial \varphi} \delta\varphi.$$

Betrachten wir jetzt die $\delta\Phi$ und $\delta\varphi$ als Coefficienten einer neuen Function, welche von demselben Grade wie φ ist, so stellt die Summe

$$\Sigma \frac{\partial J}{\partial \varphi} \delta\varphi$$

offenbar der obigen Gleichung wegen wiederum eine simultane Invariante von φ, ψ, ... und dieser neuen Function dar. Und umgekehrt geht diese neue Invariante in die frühere über, multiplicirt mit einer reinen Zahl, sobald man die neue Function wieder in φ selbst übergehen lässt.

Variirt man die neue Invariante wieder in Bezug auf die noch darin enthaltenen Coefficienten von φ, und setzt an Stelle der Variationen die Coefficienten einer neuen Function, welche abermals von demselben Grade wie φ ist, so erhält man eine neue simultane Invariante, welche ausser φ noch zwei neue Functionen derselben Ordnung enthält, deren Coefficienten in der Invariante nur auf lineare Weise vorkommen.

So kann man offenbar fortfahren, bis sämmtliche Coefficienten von φ aus der Invariante verschwunden sind. Man hat dann eine neue Invariante vor sich, welche die Coefficienten von eben so viel neuen Functionen von gleicher Ordnung mit φ enthält, als der Grad der ursprünglichen Invariante in Bezug auf die φ betrug; und von welcher man in jedem Augenblicke zu J, multiplicirt mit einem numerischen Factor, zurückkehren kann, indem man diese neue Function in φ übergehen lässt, d. h. indem man statt ihrer Coefficienten die Coefficienten von φ schreibt.

Durch ähnliche Operationen gelingt es die Coefficienten von ψ fortzuschaffen, so wie von allen anderen Functionen, welche bei der Bildung von J etwa noch benutzt sein sollten. Und so erhält man eine symbolische Darstellung von J durch eine neue Invariante, welche sich auf eine grössere Anzahl von Functionen bezieht, welche für jede von diesen linear ist, und welche, sobald man dieselben gruppenweise in φ, ψ, ... übergehen lässt, in J übergeht, multiplicirt mit einem numerischen Factor.

An Stelle der neu eingeführten Functionen kann man jede beliebige, in Buchstabengrössen ausgedrückte Function von passendem Grade setzen, da man von solchen immer zu den ursprünglichen Functionen zurückzukehren im Stande ist. So kann man, wie hier geschehen soll, *als solche neue Functionen immer Potenzen linearer Ausdrücke einführen*, z. B.

$$\delta\varphi = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r)^m;$$

und die neue Invariante wird dann offenbar eine simultane Invariante nicht blos dieser Potenzen sondern auch der linearen Ausdrücke selbst sein, für deren Coefficienten sie respective von der m^{ten}, n^{ten}, etc. Ordnung ist. Und man kann immer aus der neuen Form zu der ursprünglichen Invariante zurückkehren, indem man an Stelle der Producte

$$a_i a_k a_h \ldots, \quad \text{etc.},$$

welche in der Entwickelung des Ausdrucks

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r)^m \quad \text{etc.}$$

als Coefficienten auftreten, die entsprechenden Coefficienten von φ setzt. *Man kann also jede Invariante als simultane Invariante linearer Ausdrücke symbolisch darstellen.*

Während hier die ursprüngliche Invariante zunächst auf eine andere zurückgeführt wurde, welche eine grössere Anzahl von Functionen enthielt, aber in Bezug auf die Coefficienten einer jeden linear war, kann man ganz ebenso diese symbolische Form zurückführen auf eine neue, *welche sich auf eben so viel lineare Functionen bezieht, als ihre Ordnung in Bezug auf sämmtliche Coefficienten Einheiten enthält, und welche für die Coefficienten einer jeden linear ist.* Und von dieser kehrt man leicht zu der gegebenen Invariante, multiplicirt mit einem numerischen Factor, wieder zurück, indem man zunächst diese linearen Ausdrücke gruppenweise einander gleich werden lässt, nach der Ausrechnung aber die Producte der Coefficienten durch die Coefficienten der ursprünglich gegebenen Functionen in passender Weise ersetzt.

Diese Vorbereitungen angenommen, werde ich nun zeigen wie die zuletzt angegebene Form, d. h. jede simultane Invariante von linearen Functionen, welche die Coefficienten einer jeden nur auf lineare Weise enthält, als Aggregat von Determinantenproducten dargestellt werden kann; wodurch denn zugleich erhellt, wie überhaupt jede Invariante eine symbolische Darstellung dieser Art zulässt.

§. 3.

Invarianten und Covarianten linearer Functionen.

Betrachten wir eine simultane Invariante der folgenden $\varrho . r$ linearen Ausdrücke:

$$(3.)\quad \begin{cases} a^{(1)} = a_1^{(1)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + \cdots + a_r^{(1)} x_r, \\ a^{(2)} = a_1^{(2)} x_1 + a_2^{(2)} x_2 + \cdots + a_r^{(2)} x_r, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^{(r\varrho)} = a_1^{(r\varrho)} x_1 + a_2^{(r\varrho)} x_2 + \cdots + a_r^{(r\varrho)} x_r, \end{cases}$$

welche linear sein soll in Bezug auf die Coefficienten jeder dieser Functionen, und sei dieselbe kurz durch $J(a)$ bezeichnet. Führt man in den linearen Ausdrücken (3.) statt der Veränderlichen x neue Veränderliche X ein, welche mit den vorigen durch die linearen Substitutionsformeln (1.) des §. 2 zusammenhängen, so wird:

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= a_1^{(i)} (c_1' X' + c_1'' X'' + \cdots + c_1^{(r)} X^{(r)}) \\ &\quad + a_2^{(i)} (c_2' X' + c_2'' X'' + \cdots + c_2^{(r)} X^{(r)}) \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad + a_r^{(i)} (c_r' X' + c_r'' X'' + \cdots + c_r^{(r)} X^{(r)}) \\ &= A_1^{(i)} X' + A_2^{(i)} X^{(2)} + \cdots + A_r^{(i)} X^{(r)}, \end{aligned}$$

wo

$$A_k^{(i)} = a_1^{(i)} c_1^{(k)} + a_2^{(i)} c_2^{(k)} + \cdots + a_r^{(i)} c_r^{(k)}$$

gesetzt ist. Versteht man also unter $J(A)$ den Ausdruck, in welchen $J(a)$ übergeht, sobald statt der $a_k^{(i)}$ darin die $A_k^{(i)}$ eingeführt werden, so ist die Gleichung, welche J als Invariante definirt:

$$J(A) = C^\varrho . J(a)\ ^{*}).$$

*) Dieser Gleichung wegen muss, damit der Factor C^ϱ sich wirklich ausscheiden kann, die Anzahl der constituirenden Functionen, wie oben angenommen ist, $r.\varrho$ sein, welches die Dimension der c in C^ϱ angiebt.

Auf der rechten Seite kommen hier die Grössen c nur in dem Factor C^ϱ vor. Differentiirt man also diese Gleichung wiederholt nach verschiedenen der c, was im Ganzen $r.\varrho$ mal hinter einander geschehen kann, so kann man folgende identische Gleichung bilden:

$$(4.)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial c_1^{k_1'}\partial c_2^{k_2'}\dots\partial c_r^{k_r'}.\partial c_1^{k_1''}\partial c_2^{k_2''}\dots\partial c_r^{k_r''}\dots\partial c_1^{k_1^\varrho}\partial c_2^{k_2^\varrho}\dots\partial c_r^{k_r^\varrho}}\\ &= J(a)\frac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{\partial c_1^{k_1'}\partial c_2^{k_2'}\dots\partial c_r^{k_r'}.\partial c_1^{k_1''}\partial c_2^{k_2''}\dots\partial c_r^{k_r''}\dots\partial c_1^{k_1^\varrho}\partial c_2^{k_2^\varrho}\dots\partial c_r^{k_r^\varrho}}.\end{aligned}\right.$$

In derselben bedeuten

$$k_1',\ k_2',\ \dots\ k_r',\quad k_1'',\ k_2'',\ \dots\ k_r'',\quad \dots\quad k_1^\varrho,\ k_2^\varrho,\ \dots\ k_r^\varrho$$

irgend welche der Zahlen 1, 2, ... r; und da in C^ϱ die c nur bis zur $r.\varrho^{\text{ten}}$ Dimension ansteigen, so unterscheidet sich die rechte Seite dieser Gleichung von $J(a)$ nur durch einen numerischen Factor.

Ich multiplicire jetzt die obige Gleichung mit dem Product der Determinanten:

$$\begin{aligned}&\Sigma\pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}\\ \times&\Sigma\pm c_1^{k_1''} c_2^{k_2''}\dots c_r^{k_r''}\\ &\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \times&\Sigma\pm c_1^{k_1^\varrho} c_2^{k_2^\varrho}\dots c_r^{k_r^\varrho}.\end{aligned}$$

Diese sind sämmtlich so zu bilden, dass die oberen Indices als fest angesehen werden, die unteren aber in bekannter Weise zu permutiren sind. Dieses Product ist immer Null, sobald irgend in einer der Reihen

$$k_1^{(i)},\quad k_2^{(i)},\quad \dots\quad k_r^{(i)}$$

zwei gleiche Indices vorkommen, und hat also nur einen Werth, wenn sämmtliche Reihen dieser Art die Zahlen 1, 2, ... r in beliebiger Reihenfolge darstellen; dann aber ist jede Determinante gleich $+C$ oder gleich $-C$, jenachdem die entsprechende Reihe

$$k_1^{(i)},\quad k_2^{(i)},\quad \dots\quad k_r^{(i)}$$

eine positive oder negative Transformation der Reihe

$$1,\quad 2,\quad \dots\quad r$$

ist. Bezeichnet man durch

$$\varepsilon_{k_1^i, k_2^i, \dots k_r^i}$$

die Null oder die positive oder negative Einheit, jenachdem einige der k einander gleich, oder, wenn alle ungleich sind, die Reihe

$$k_1^i, \quad k_2^i, \quad \dots \quad k_r^i$$

durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Permutationen aus der Reihe

$$1, \quad 2, \quad \dots \quad r$$

hervorgeht, so ist

$$\Sigma \pm c_1^{k_1^i} c_2^{k_2^i} \dots c_r^{k_r^i} = \varepsilon_{k_1^i, k_2^i, \dots k_r^i} \,.\, C,$$

und also obiges Determinantenproduct gleich

$$\varepsilon_{k_1', k_2', \dots k_r'} \,.\, \varepsilon_{k_1'', k_2'', \dots k_r''} \dots \varepsilon_{k_1^\varrho, k_2^\varrho, \dots k_r^\varrho} \,.\, C^\varrho.$$

Hat man nun die Gleichung (4.) mit diesem Ausdruck multiplicirt, und summirt alle Gleichungen, welche man auf diese Weise erhält, indem man jeder der Zahlen k_1', k_2', ... k_r^ϱ jeden der Werthe 1, 2, ... r in allen nur möglichen Combinationen beilegt, so erhält man die Gleichung:

$$(5.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial c_1^{k_1'} \partial c_2^{k_2'} \dots \partial c_r^{k_r'} \,.\, \partial c_1^{k_1''} \partial c_2^{k_2''} \dots \partial c_r^{k_r''} \dots \partial c_1^{k_1^\varrho} \partial c_2^{k_2^\varrho} \dots \partial c_r^{k_r^\varrho}} \\ &\times \Sigma \pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'} \dots c_r^{k_r'} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k_1''} c_2^{k_2''} \dots c_r^{k_r''} \dots \Sigma \pm c_1^{k_1^\varrho} c_2^{k_2^\varrho} \dots c_r^{k_r^\varrho} \end{aligned} \right\} \\ &= C^\varrho . J(a) . \Sigma \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{\partial c_1^{k_1'} \partial c_2^{k_2'} \dots \partial c_r^{k_r'} \,.\, \partial c_1^{k_1''} \partial c_2^{k_2''} \dots \partial c_r^{k_r''} \dots \partial c_1^{k_1^\varrho} \partial c_2^{k_2^\varrho} \dots \partial c_r^{k_r^\varrho}} \\ &\times \varepsilon_{k_1', k_2', \dots k_r'} \,.\, \varepsilon_{k_1'', k_2'', \dots k_r''} \dots \varepsilon_{k_1^\varrho, k_2^\varrho, \dots k_r^\varrho} \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo die Summenzeichen sich auf sämmtliche den k zu ertheilende Werthe erstrecken.

Ich betrachte zuerst den linken Theil dieser Gleichung genauer, indem ich die nach den c, welche in $J(A)$ explicite nicht vorkommen, auszuführenden Differentiationen auf Differentiationen nach den A zurückführe. Aus der Definition der A folgt, dass

$$\frac{\partial A_k^{(i)}}{\partial c_h^{(k)}} = a_h^{(i)},$$

während diejenigen A, deren unterer Index von k verschieden ist, $c_h^{(k)}$ gar nicht enthalten. Bezieht sich also das zweite Summenzeichen darauf, dass sämmtlichen Indices i der Reihe nach die Werthe 1, 2, ... $r\varrho$ sollen beigelegt werden können, so geht die linke Seite der Gleichung (5.) in folgende Form über:

$$
(6.)\qquad \Sigma\Sigma\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A_{k_1'}^{i_1'}\,\partial A_{k_2'}^{i_2'}\dots\partial A_{k_r'}^{i_r'}\,.\,\partial A_{k_1''}^{i_1''}\,\partial A_{k_2''}^{i_2''}\dots\partial A_{k_r''}^{i_r''}\dots\partial A_{k_1^\varrho}^{i_1^\varrho}\,\partial A_{k_2^\varrho}^{i_2^\varrho}\dots\partial A_{k_r^\varrho}^{i_r^\varrho}}\\
\times a_1^{i_1'} a_2^{i_2'}\dots a_r^{i_r'}\,.\,\Sigma\pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}\\
\times a_1^{i_1''} a_2^{i_2''}\dots a_r^{i_r''}\,.\,\Sigma\pm c_1^{k_1''} c_2^{k_2''}\dots c_r^{k_r''}\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\times a_1^{i_1^\varrho} a_2^{i_2^\varrho}\dots a_r^{i_r^\varrho}\,.\,\Sigma\pm c_1^{k_1^\varrho} c_2^{k_2^\varrho}\dots c_r^{k_r^\varrho}\,.
\end{array}\right\}
$$

Der in der Doppelsumme enthaltene Differentialquotient ändert sich offenbar nicht, wenn man in den beiden Reihen

$$
\begin{array}{lll}
i_1',\ i_2',\ \dots\ i_r', & i_1'',\ i_2'',\ \dots\ i_r'', & \dots\quad i_1^\varrho,\ i_2^\varrho,\ \dots\ i_r^\varrho\\
k_1',\ k_2',\ \dots\ k_r', & k_1'',\ k_2'',\ \dots\ k_r'', & \dots\quad k_1^\varrho,\ k_2^\varrho,\ \dots\ k_r^\varrho
\end{array}
$$

gleichzeitig entsprechende Vertauschungen vornimmt, so dass nur niemals zwei unter einander stehende Indices getrennt werden. Eine solche Vertauschung kann auf den Werth der Doppelsumme überhaupt keinen Einfluss haben, da sie nur die Bezeichnungsweise verändert. Die durch eine solche Vertauschung entstehenden neuen Formen der Doppelsumme müssen also immer das nämliche Resultat ergeben. Man bemerkt jedoch, dass z. B. eine Vertauschung entsprechender Indices aus den Reihen

$$
\begin{array}{l}
i_1',\quad i_2',\quad \dots\ i_r'\\
k_1',\quad k_2',\quad \dots\ k_r'
\end{array}
$$

genau denselben Erfolg hat, als wenn in dem Product

$$a_1^{i_1'} a_2^{i_2'}\dots a_r^{i_r'}\,.\,\Sigma\pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}$$

einige der unteren Indices $1, 2\dots r$ ihre Stellen wechseln. Durch solche Vertauschungen kann man aber aus diesem Product im Ganzen $r! = 1.2\dots r$ Producte ableiten; und da der Factor

$$\Sigma\pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}$$

bei jeder einzelnen Vertauschung nur sein Zeichen wechselt, so sind die entstehenden Producte offenbar keine anderen als die Glieder des Products

$$\Sigma\pm a_1^{i_1'} a_2^{i_2'}\dots a_r^{i_r'}\,.\,\Sigma\pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}.$$

Indem man also alle diese Vertauschungen vornimmt, und die entstehenden

Formen der Doppelsumme (6.) addirt, erhält man als $r!$ fachen Werth derselben eine ganz ähnliche Doppelsumme, welche sich von der obigen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des Products

$$a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r}$$

das Product

$$\Sigma \pm a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r}$$

getreten ist.

Nimmt man jetzt die ähnlichen Vertauschungen bei der zweiten Gruppe der Indices

$$\begin{array}{llll} i''_1, & i''_2, & \dots & i''_r \\ k''_1, & k''_2, & \dots & k''_r \end{array}$$

und bei allen folgenden Gruppen vor, so erhält man für die Doppelsumme (6.) demnach folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{(r!)^\varrho}\,\Sigma\Sigma\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A_{k'_1}^{i'_1}\, \partial A_{k'_2}^{i'_2} \dots \partial A_{k'_r}^{i'_r} \,.\, \partial A_{k''_1}^{i''_1}\, \partial A_{k''_2}^{i''_2} \dots \partial A_{k''_r}^{i''_r} \dots \partial A_{k^\varrho_1}^{i^\varrho_1}\, \partial A_{k^\varrho_2}^{i^\varrho_2} \dots \partial A_{k^\varrho_r}^{i^\varrho_r}} \\ \times \Sigma \pm a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r} \\ \times \Sigma \pm a_1^{i''_1} a_2^{i''_2} \dots a_r^{i''_r} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k''_1} c_2^{k''_2} \dots c_r^{k''_r} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \times \Sigma \pm a_1^{i^\varrho_1} a_2^{i^\varrho_2} \dots a_r^{i^\varrho_r} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k^\varrho_1} c_2^{k^\varrho_2} \dots c_r^{k^\varrho_r} \end{array}\right\}.$$

Aber nach einem bekannten Determinantensatz kann man ein Product wie

$$\Sigma \pm a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r}$$

zu einer einzigen Determinante vereinigen, deren Elemente offenbar keine anderen als die Grössen A sind, so dass obiges Product übergeht in

$$\Sigma \pm A_{k'_1}^{i'_1} A_{k'_2}^{i'_2} \dots A_{k'_r}^{i'_r}.$$

Und hierdurch nimmt endlich obige Doppelsumme folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{(r!)^\varrho}\,\Sigma\Sigma\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A_{k'_1}^{i'_1}\, \partial A_{k'_2}^{i'_2} \dots \partial A_{k'_r}^{i'_r} \,.\, \partial A_{k''_1}^{i''_1}\, \partial A_{k''_2}^{i''_2} \dots \partial A_{k''_r}^{i''_r} \dots \partial A_{k^\varrho_1}^{i^\varrho_1}\, \partial A_{k^\varrho_2}^{i^\varrho_2} \dots \partial A_{k^\varrho_r}^{i^\varrho_r}} \\ \times \Sigma \pm A_{k'_1}^{i'_1} A_{k'_2}^{i'_2} \dots A_{k'_r}^{i'_r} \,.\, \Sigma \pm A_{k''_1}^{i''_1} A_{k''_2}^{i''_2} \dots A_{k''_r}^{i''_r} \dots \Sigma \pm A_{k^\varrho_1}^{i^\varrho_1} A_{k^\varrho_2}^{i^\varrho_2} \dots A_{k^\varrho_r}^{i^\varrho_r} \end{array}\right\}.$$

Ich gehe jetzt zum rechten Theile der Gleichung (5.) über. Hier ist zunächst

$$C^\varrho . J(a) = J(A).$$

Was aber den Differentialquotienten von C^ϱ betrifft, so enthält derselbe jedenfalls das Glied

$$\varepsilon_{k'_1, k'_2, \dots k'_r} . \varepsilon_{k''_1, k''_2, \dots k''_r} \dots \varepsilon_{k^\varrho_1, k^\varrho_2, \dots k^\varrho_r} . \varrho!,$$

und man erhält den Differentialquotienten selbst, indem man diejenigen Indices in diesem Gliede auf alle Weise vertauscht, welche zu Grössen c mit gleichen unteren Indices gehören, und die Summe aller entstehenden Ausdrücke nimmt. Ich bezeichne diese der Kürze wegen durch

$$\varrho! . \sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}.$$

In der Gleichung (5.) erscheint dieser Differentialquotient multiplicirt mit

$$\varepsilon_{k'_1, k'_2, \dots k'_r} . \varepsilon_{k''_1, k''_2, \dots k''_r} \dots \varepsilon_{k^\varrho_1, k^\varrho_2, \dots k^\varrho_r}.$$

Aber da derselbe ungeändert bleibt, wenn man die verschiedenen k mit einander vertauscht, deren c denselben unteren Index haben, so ist in der Summe der rechten Seite von (5.) dieser Differentialquotient nicht nur mit dem oben bezeichneten Factor multiplicirt, sondern auch noch mit allen, welche durch Vertauschung solcher Indices k aus demselben hervorgehen. Und da eben diese Summe oben durch $\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}$ bezeichnet wurde, so ist in (5.) das Aggregat aller derjenigen Terme, welche diesen Differentialquotienten enthalten,

$$\varrho! . \left(\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}\right)^2,$$

und mithin die ganze rechte Seite von (5.) gleich

$$\varrho! . J(A) . \Sigma\left(\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}\right)^2,$$

wo die Summe auf alle möglichen Combinationen auszudehnen ist, welche an Stelle der Reihe $k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r$ treten können.

Die angegebene Darstellung des Coefficienten von $J(A)$ ist insofern von Wichtigkeit, als sie zeigt, dass derselbe niemals verschwinden kann. Denn man sieht leicht, dass mindestens eines der Quadrate, in deren Summe sich dieser Coefficient auflöst, von Null verschieden ist. Setzt man z. B. alle k gleich ihrem unteren Index, so findet man das zugehörige σ leicht aus der oben entwickelten Gleichung

$$\sigma_{k'_1,\, k'_2,\, \dots k^\varrho_r} = \frac{1}{\varrho!}\cdot\frac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{\partial c_1^{k'_1}\, \partial c_2^{k'_2} \dots \partial c_r^{k'_r}\,.\,\partial c_1^{k''_1}\, \partial c_2^{k''_2} \dots \partial c_r^{k''_r} \dots},$$

deren rechte Seite für diesen Fall in

$$\frac{1}{\varrho!}\cdot\frac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{(\partial c'_1)^\varrho (\partial c''_2)^\varrho \dots (\partial c^r_r)^\varrho}$$

übergeht. Der Differentialquotient ist hier leicht zu berechnen, da er nur von dem in C^ϱ enthaltenen Gliede

$$(c'_1 c''_2 \dots c^r_r)^\varrho$$

herrühren kann; und man erhält sonach für das fragliche σ:

$$\frac{1}{\varrho!}(\varrho!)^r = (\varrho!)^{r-1}.$$

Es ist also mindestens dies σ von Null verschieden, und der oben gegebene Coefficient von $J(A)$ kann sonach niemals verschwinden.

Und indem wir jetzt die umgeformten Ausdrücke beider Theile in die Gleichung (5.) einführen, erhalten wir:

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\varrho!}\cdot\frac{1}{(r!)^2}\cdot\frac{1}{\Sigma\left(\sigma_{k'_1,\, k'_2,\, \dots k^\varrho_r}\right)^2} \\ &\times \Sigma\Sigma\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A^{i'_1}_{k'_1}\partial A^{i'_2}_{k'_2}\dots\partial A^{i'_r}_{k'_r}\,.\,\partial A^{i''_1}_{k''_1}\partial A^{i''_2}_{k''_2}\dots\partial A^{i''_r}_{k''_r}\dots\partial A^{i^\varrho_1}_{k^\varrho_1}\partial A^{i^\varrho_2}_{k^\varrho_2}\dots\partial A^{i^\varrho_r}_{k^\varrho_r}} \\ &\times\Sigma\pm A^{i'_1}_{k'_1}A^{i'_2}_{k'_2}\dots A^{i'_r}_{k'_r}\,.\,\Sigma\pm A^{i''_1}_{k''_1}A^{i''_2}_{k''_2}\dots A^{i''_r}_{k''_r}\dots\Sigma\pm A^{i^\varrho_1}_{k^\varrho_1}A^{i^\varrho_2}_{k^\varrho_2}\dots A^{i^\varrho_r}_{k^\varrho_r}\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung enthält die Darstellungsweise, von welcher anfänglich die Rede war. Denn der Differentialquotient auf der rechten Seite ist eine reine Zahl, oder wenigstens von den A, welche als Argumente der Invariante betrachtet werden, unabhängig. Die Invariante wird also wirklich gleich einem Aggregat von Determinantenproducten, wie es verlangt wurde. Ich fasse diese Darstellung zusammen in folgendem

Theorem I.

Ist J eine simultane Invariante von $r.\varrho$ linearen Functionen mit r Veränderlichen, in welcher die Coefficienten jeder Function nur auf lineare

Weise vorkommen, so differentiire man dieselbe $r.\varrho$ mal nach irgend welchen $r.\varrho$ der $r^2.\varrho$ in diesen Functionen enthaltenen Coefficienten, deren untere Indices ϱ mal die Reihe $1, 2 \ldots r$, und deren obere Indices die Reihe $1, 2 \ldots r.\varrho$ in beliebiger Folge bilden. Sodann sondere man dieselben $r.\varrho$ Coefficienten in ϱ Gruppen, in deren jeder die unteren Indices $1, 2 \ldots r$ enthalten sind, und setze statt jeder Gruppe die Determinante, deren Glieder durch Vertauschung der unteren Indices aus der Gruppe hervorgehen. Multiplicirt man dann diese Determinanten mit jenem Differentialquotienten, und bildet alle nur möglichen Producte dieser Art, so unterscheidet ihre Summe sich von J nur durch einen numerischen Factor.

Da die numerischen Werthe der gedachten Differentialquotienten vollkommen beliebig sein können, sobald von J nichts als die Ordnung festgesetzt ist, so kann man den Satz hinzufügen:

Theorem II.

Die allgemeinste simultane Invariante der $r.\varrho^{ten}$ Ordnung von $r.\varrho$ linearen Functionen, welche in Bezug auf die Coefficienten einer jeden linear ist, erhält man, indem man die Determinanten bildet, welche sich aus den Coefficienten der Functionen zusammensetzen lassen, immer ϱ von denselben multiplicirt, so aber, dass in einem solchen Product jede Coefficientenreihe einmal vorkommt, und indem man dann diese Producte addirt, mit beliebigen numerischen Factoren versehen.

Den früheren Betrachtungen zufolge ist hierdurch auch die symbolische Form aller simultanen Invarianten beliebiger Functionen gegeben, und man kann demnach deren eben so viel von einer bestimmten Ordnung bilden, als willkürliche Coefficienten in den Formen des zweiten Theorems auftreten. Aber es ist dabei zu bemerken, dass von diesen sehr zahlreichen Invarianten, indem man zunächst einige Gruppen der linearen Functionen zusammenfallen lässt, und indem man sodann diese wieder durch symbolische Substitutionen auf die Coefficienten von Functionen gegebener Ordnungen zurückführt, eine grosse Zahl, oft sogar alle, verschwinden, während andere durch Bedingungsgleichungen mit einander verbunden sind, welche schon in Bezug auf die ursprüngliche symbolische Form dadurch eintreten, dass gewisse identische Gleichungen zwischen den constituirenden Determinanten bestehen. Es scheint daher sehr schwierig a priori die Zahl der möglichen von einander unabhängigen Invarianten gegebener Functionen und von gegebener Ordnung zu bestimmen.

Bei der symbolischen Darstellung von Covarianten treten nach dem Obigen zu den Determinantenproducten noch lineare Factoren; und man kann daher in Bezug auf diese folgendes Theorem aufstellen:

Theorem III.

Die allgemeinste ganze Covariante linearer Functionen ist eine Summe von Invarianten, jede multiplicirt mit Potenzen der Functionen selbst;

woraus man denn wieder im Stande ist, auch die allgemeinsten simultanen Covarianten nicht linearer Functionen zu bilden.

§. 4.

Beweis eines allgemeinen Theorems über simultane Invarianten.

Um eine allgemeine Anwendung dieser symbolischen Formen zu geben, will ich einen sehr allgemeinen, auf Invarianten (und zugehörige Formen) bezüglichen Satz nachweisen, welcher für specielle Werthe von r und für Invarianten *einer* Function bekannt ist.

Sei also J zunächst eine simultane Invariante der $r.\varrho$ oben angegebenen linearen Functionen, wie sie in §. 3 betrachtet ist. Stellt man dieselbe als Aggregat von Determinantenproducten dar, und setzt dann in einem Factor jedes Products statt der a mit unterem Index h die a mit unterem Index k, wo h von k verschieden ist, so verschwindet J identisch. Hieraus und aus der Bemerkung, dass J für die Coefficienten jeder Function linear ist, für die a mit einem bestimmten unteren Index aber homogen und von der ϱ^{ten} Ordnung, ergiebt sich leicht die Richtigkeit der folgenden beiden Gleichungen:

$$\Sigma_i \frac{\partial J}{\partial a_h^i} a_h^i = \varrho . J,$$

$$\Sigma_i \frac{\partial J}{\partial a_h^i} a_k^i = 0,$$

die Summe von $i = 1$ bis zu $i = r.\varrho$ ausgedehnt. Diese Gleichungen bleiben aber auch noch bestehen, wenn von den linearen Functionen einige einander gleich werden, und in die Summen sind dann nur soviel Glieder einzuführen, als verschiedene Gruppen unter den linearen Functionen vorkommen. Ich nehme an, dass der Reihe nach m, n, p etc. Functionen einander gleich werden, wo dann $m+n+p \ldots = r.\varrho$, und bezeichne die Coefficienten derselben respective durch a, b, c, ... Die vorhergehenden Gleichungen werden also dann zu folgenden:

$$\frac{\partial J}{\partial a_h} a_h + \frac{\partial J}{\partial b_h} b_h + \frac{\partial J}{\partial c_h} c_h + \cdots = \varrho . J,$$
$$\frac{\partial J}{\partial a_h} a_k + \frac{\partial J}{\partial b_h} b_k + \frac{\partial J}{\partial c_h} c_k + \cdots = 0.$$

Führt man nun statt der Producte

$$(a_1)^{\alpha_1}(a_2)^{\alpha_2}\ldots, \quad (b_1)^{\beta_1}(b_2)^{\beta_2}\ldots, \quad \text{etc.}$$

Coefficienten von Functionen m^{ter}, n^{ter} etc. Ordnung φ, ψ, ... ein, indem man die symbolischen Gleichungen

$$(a_1)^{\alpha_1}(a_2)^{\alpha_2}\ldots = a_{\alpha_1\alpha_2\ldots},$$
$$(b_1)^{\beta_1}(b_2)^{\beta_2}\ldots = b_{\beta_1\beta_2\ldots}$$

annimmt, so wird J eine simultane Invariante von φ, ψ, ..., und zwar linear in Bezug auf die Coefficienten einer jeden dieser Functionen. Man sieht dann aber, indem man beide Ausdrucksweisen von J, die wirkliche und die symbolische, mit einander vergleicht, ohne Weiteres die Gleichungen ein:

$$\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1\alpha_2\ldots}} = \frac{\partial^m J}{(\partial a_1)^{\alpha_1}(\partial a_2)^{\alpha_2}\ldots},$$
$$\beta_1!\,\beta_2!\ldots\frac{\partial J}{\partial b_{\beta_1\beta_2\ldots}} = \frac{\partial^n J}{(\partial b_1)^{\beta_1}(\partial b_2)^{\beta_2}\ldots},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da J eine homogene Function m^{ter} Ordnung der a ist, so hat man bekanntlich:

$$J = \Sigma\frac{(a_1)^{\alpha_1}(a_2)^{\alpha_2}\ldots}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots}\cdot\frac{\partial J}{(\partial a_1)^{\alpha_1}(\partial a_2)^{\alpha_2}\ldots}$$

oder nach dem Vorigen:

$$J = \Sigma(a_1)^{\alpha_1}(a_2)^{\alpha_2}\ldots\frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1\alpha_2\ldots}},$$

wo die Summe sich auf alle Combinationen der Zahlen α_1, α_2, ... erstreckt, welche aus der Reihe 0, 1, 2, ... m mit Wiederholungen gebildet werden können. Daher ist auch

$$\frac{\partial J}{\partial a_h} = \Sigma\frac{\alpha_h}{a_h}\cdot(a_1)^{\alpha_1}(a_2)^{\alpha_2}\ldots\frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1\alpha_2\ldots}},$$

und wenn man wieder die symbolischen Substitutionen berücksichtigt:

$$a_h\frac{\partial J}{\partial a_h} = \Sigma\alpha_h . a_{\alpha_1\alpha_2\ldots}\frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1\alpha_2\ldots}},$$

hingegen, wenn k von h verschieden ist:

$$a_k \frac{\partial J}{\partial a_h} = \Sigma \alpha_h . a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h - 1 \dots \alpha_k + 1 \dots} \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h \dots \alpha_k \dots}}.$$

Setzt man diese Werthe, so wie die entsprechenden, für die Functionen ψ etc. zu bildenden Ausdrücke in die Anfangs gegebenen Gleichungen ein, so werden diese:

$$\begin{aligned} \varrho . J &= \Sigma \alpha_h . a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}} \\ &+ \Sigma \beta_h . b_{\beta_1 \beta_2 \dots} \frac{\partial J}{\partial b_{\beta_1 \beta_2 \dots}} \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma \alpha_h . a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h - 1 \dots \alpha_k + 1 \dots} \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h \dots \alpha_k \dots}} \\ &+ \Sigma \beta_h . b_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_h - 1 \dots \beta_k + 1 \dots} \frac{\partial J}{\partial b_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_h \dots \beta_k \dots}} \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestehen, wie man leicht übersieht, auch dann noch fort, wenn einige der Functionen φ, ψ, ... einander gleich werden, d. h. wenn die Invariante aufhört, in Bezug auf die Coefficienten jeder der Functionen linear zu sein. Aber dann sind nur soviel Summen hinzuschreiben, als von einander verschiedene Functionen vorhanden sind.

Die in diesen Gleichungen ausgesprochenen Resultate fasse ich zusammen in das folgende

Theorem IV.

Bezeichnen wir die Coefficienten der Functionen φ, ψ, ... so, dass wir diese Functionen aus den Ausdrücken

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r)^m,$$
$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_r x_r)^n,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

durch die symbolischen Substitutionen

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots = a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$$
$$b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \dots = b_{\beta_1 \beta_2 \dots}$$

entstehen lassen; wo also $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$ in der Function ψ mit $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$ und in *einen aus der polynomischen Entwicklung entspringenden numerischen Factor multiplicirt ist. Differentiiren wir dann eine simultane Invariante dieser Functionen der Reihe nach in Bezug auf alle Coefficienten derselben, und multipliciren jeden Differentialquotienten mit dem h^{ten} Index desjenigen Coefficienten, nach welchem differentiirt wurde. Multiplicirt man endlich diese Differentialquotienten wieder mit den Coefficienten selbst, und addirt sämmtliche Producte, so entsteht wieder die Invariante, multiplicirt, wenn $m, n, p, \ldots$ die Ordnungen der Functionen, $\mu, \nu, \pi, \ldots$ die Ordnungen der Invariante in Bezug auf ihre Coefficienten bedeuten, mit*

$$\frac{m\mu + n\nu + p\pi \ldots}{r},$$

was immer eine ganze Zahl ist. Multiplicirt man aber jeden Differentialquotienten nicht mit dem Coefficienten, nach welchem er genommen ist, sondern mit einem anderen derselben Function, in welchem jedesmal der h^{te} Index um 1 erniedrigt, ein bestimmter anderer aber um 1 erhöht ist, so ist die Summe aller dieser Producte immer identisch Null.

§. 5.

Symbolische Darstellung der Eliminationsresultante zweier Gleichungen desselben Grades.

Da jede Eliminationsresultante zugleich eine simultane Invariante aller derjenigen Functionen ist, deren gleichzeitiges Verschwinden auf jene Resultirende führt, so muss auch die linke Seite jeder Gleichung, welche aus der Elimination entspringt, als Aggregat symbolischer Determinantenproducte darstellbar sein, und es ist dies eine fundamentale Eigenschaft solcher Gleichungen. Man könnte selbst, da die Form der Eliminationsresultante hiernach bis auf gewisse numerische Coefficienten bekannt ist, das ganze Verfahren jeder Elimination auf die Bestimmung dieser numerischen Werthe reduciren.

Man kann indess auch für die directe Elimination von dem Gebrauch der symbolischen Formen einen nicht unerheblichen Nutzen ziehen. Im Folgenden wird immer vorausgesetzt werden, dass eine Eliminationsresultante bereits in der oben entwickelten symbolischen Form vorliegt; und da der Weg, welcher in den vorhergehenden Paragraphen zu diesem Ende angegeben ist, doch in Wirklichkeit nicht ohne Weitläufigkeit durchzuführen ist, so kann es wünschenswerth scheinen, einen Weg zu finden, der die Eliminationsgleichung unmittelbar in jener symbolischen Form ergiebt. Ich werde zeigen, wie man in dem Fall zweier Gleichungen von gleich hohem Grade einen solchen

Weg einschlagen kann; und derselbe wird zugleich geeignet sein, über die Anwendung der symbolischen Formen überhaupt Licht zu verbreiten.

Ich benutze hierbei die *Bézout*sche Eliminationsmethode in der eleganten Form, welche Herr *Cayley* derselben gegeben hat. Die beiden gegebenen Gleichungen setze ich in die symbolische Form:

$$f(x) = 0 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = (a'_1 x_1 + a'_2 x_2)^n = \cdots,$$
$$\varphi(x) = 0 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n = (\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2)^n = \cdots,$$

so dass die Producte der lateinischen Buchstaben immer symbolische Ausdrücke für die Coefficienten der einen Gleichung sind, die griechischen Buchstaben für die der anderen. Nach Herrn *Cayley* hat man nun die Function zu bilden:

$$\Omega = \frac{f(x) \cdot \varphi(y) - \varphi(x) \cdot f(y)}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$
$$= \frac{[(a_1 x_1 + a_2 x_2)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)]^n - [(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(a_1 y_1 + a_2 y_2)]^n}{x_1 y_2 - y_1 x_2}.$$

Da hier:

$$\frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(a_1 y_1 + a_2 y_2)}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1,$$

so kann man die Division wirklich ausführen, und erhält für Ω den Ausdruck:

$$\Omega = (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1) \left\{ \begin{array}{l} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-1} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-1} \\ + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-2} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-2} (a_1 y_1 + a_2 y_2)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-3} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-3} (a_1 y_1 + a_2 y_2)^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad + (a_1 y_1 + a_2 y_2)^{n-1} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{n-1} \end{array} \right\}.$$

Ordnet man diesen Ausdruck nach Potenzen der x und der y, so dass

$$\Omega = \Sigma\Sigma c_{hk} x_1^h x_2^{n-h-1} y_1^k y_2^{n-k-1},$$

wo die Summen für h und k von 0 bis $n-1$ zu nehmen sind, so ist dann die Eliminationsresultante die aus den c gebildete Determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} & \cdots & c_{n-1,0} \\ c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Man muss aber darauf achten, so lange man sich noch der symbolischen Formen bedient, in jeder Reihe dieser Determinante andere symbolische Buchstaben einzuführen, damit bei der Ausrechnung keine Verwirrung eintrete.

Man kann also etwa in der ersten Horizontalreihe die Buchstaben a, α, c anwenden, in der zweiten dieselben mit einem oberen Index 1 versehen, in der dritten mit einem oberen Index 2, u. s. w. Da aber schliesslich für alle diese Buchstaben dieselben Substitutionen ausgeführt werden sollen, so kann man die Bezeichnungen auch vertauschen, ohne dass das Resultat eine Veränderung erfährt; d. h. man kann die oberen Indices 0, 1, ... $n-1$ bei den a, α, c auf die Horizontalreihen der Determinante in beliebiger Weise vertheilen. Man kann endlich, statt die obige Determinante gleich Null zu setzen, auch die Summe aller dieser verschieden bezeichneten Determinanten verschwinden lassen, da dieselben doch schliesslich alle auf den nämlichen Ausdruck zurückkommen. Und betrachtet man diese Darstellungsweise genauer, so sieht man, dass die Eliminationsgleichung die Form eines Entwicklungscoefficienten annimmt, nämlich gleich wird dem Coefficienten von $u.u'.u''\ldots u^{(n-1)}$ in der Entwicklung der aus den Grössen

$$u\,c_{hk}+u'c'_{hk}+u''c''_{hk}+\cdots+u^{(n-1)}c^{(n-1)}_{hk}$$

gebildeten Determinante.

Wenn man den Ausdruck von Ω ins Auge fasst, so bemerkt man, dass jedenfalls sich aus der Eliminationsdeterminante der Factor

$$(a_1\alpha_2-\alpha_1 a_2)(a'_1\alpha'_2-\alpha'_1 a'_2)(a''_1\alpha''_2-\alpha''_1 a''_2)\ldots(a^{(n-1)}_1\alpha^{(n-1)}_2-\alpha^{(n-1)}_1 a^{(n-1)}_2)$$

absondert; jede Reihe in jedem Glied des gedachten Entwicklungscoefficienten enthält einen Factor dieses Products als gemeinsamen Theiler. Man wird daher lieber statt des oben eingeschlagenen Weges die Eliminationsresultante zunächst in der Form

$$0 = \Theta.(a_1\alpha_2-\alpha_1 a_2)(a'_1\alpha'_2-\alpha'_1 a'_2)\ldots(a^{(n-1)}_1\alpha^{(n-1)}_2-\alpha^{(n-1)}_1 a^{(n-1)}_2)$$

darstellen, wo Θ der Coefficient von $u.u'.u''\ldots u^{(n-1)}$ wird in der Entwicklung einer Determinante, die sich von der früheren dadurch unterscheidet, dass bei der Bildung der c der Factor $a_1\alpha_2-\alpha_1 a_2$ aus Ω ausgeschieden wird. Oder mit anderen Worten, setzen wir

$$\Omega^i = (a^i_1\alpha^i_2-\alpha^i_1 a^i_2)\Sigma\Sigma c^i_{hk}x^h_1 x^{n-h-1}_2 y^k_1 y^{n-k-1}_2,$$

so wird Θ in der aus den Grössen

$$u.c_{hk}+u'.c'_{hk}+\cdots+u^{(n-1)}.c^{(n-1)}_{hk}.$$

gebildeten Determinante der Coefficient von $u.u'\ldots u^{(n-1)}$.

Die Grössen c (abgesehen von dem oberen Index) nehmen unter dieser Voraussetzung folgende Ausdrücke an:

$$c_{hk} = r_{h,0}r_{k,n-1}+r_{h,1}r_{k,n-2}+r_{h,2}r_{k,n-3}+\cdots+r_{h,n-1}r_{k,0},$$

wo die Grössen r sich dadurch bestimmen, dass

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} r_{h,m} z_1^h z_2^{n-h-1} = (a_1 z_1 + a_2 z_2)^{n-m-1} (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)^m,$$

für alle beliebigen Werthe der z. Diese Form der Grössen c erlaubt es, auf die Determinante, deren Entwicklungscoefficient Θ ist, einen bekannten Satz anzuwenden, nach welchem unter gewissen Umständen eine Determinante in die Summe von Producten je zweier Determinanten zerfällt. Denn da

$$\begin{aligned} u c_{hk} + u' c'_{hk} + \cdots + u^{(n-1)} c^{(n-1)}_{hk} = \; & u\,(r_{h,0}\, r_{k,n-1} + r_{h,1}\, r_{k,n-2} + \cdots + r_{h,n-1}\, r_{k,0}) \\ + \; & u'\,(r'_{h,0}\, r'_{k,n-1} + r'_{h,1}\, r'_{k,n-2} + \cdots + r'_{h,n-1}\, r'_{k,0}) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + \; & u^{(n-1)}\,(r^{(n-1)}_{h,0}\, r^{(n-1)}_{k,n-1} + r^{(n-1)}_{h,1}\, r^{(n-1)}_{k,n-2} + \cdots + r^{(n-1)}_{h,n-1}\, r^{(n-1)}_{k,0}), \end{aligned}$$

so kann man die Determinante dieser Grössen bilden, indem man aus den beiden unvollständigen Systemen

I.

$$\begin{array}{llllllllll} u.r_{0,0}, & u.r_{0,1} & \ldots u.r_{0,n-1}; & u'.r'_{0,0}, & u'.r'_{0,1} & \ldots u'.r'_{0,n-1}; & \ldots & u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{0,0}, & u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{0,1} & \ldots u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{0,n-1} \\ u.r_{1,0}, & u.r_{1,1} & \ldots u.r_{1,n-1}; & u'.r'_{1,0}, & u'.r'_{1,1} & \ldots u'.r'_{1,n-1}; & \ldots & u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{1,0}, & u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{1,1} & \ldots u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u.r_{n-1,0}, & u.r_{n-1,1} & \ldots u.r_{n-1,n-1}; & u'.r'_{n-1,0}, & u'.r'_{n-1,1} & \ldots u'.r'_{n-1,n-1}; & \ldots & u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{n-1,0}, & u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{n-1,1} & \ldots u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{n-1,n-1} \end{array}$$

und

II.

$$\begin{array}{llllllllll} r_{0,n-1}, & r_{0,n-2} & \ldots r_{0,0}; & r'_{0,n-1}, & r'_{0,n-2} & \ldots r'_{0,0}; & \ldots & r^{(n-1)}_{0,n-1}, & r^{(n-1)}_{0,n-2} & \ldots r^{(n-1)}_{0,0} \\ r_{1,n-1}, & r_{1,n-2} & \ldots r_{1,0}; & r'_{1,n-1}, & r'_{1,n-2} & \ldots r'_{1,0}; & \ldots & r^{(n-1)}_{1,n-1}, & r^{(n-1)}_{1,n-2} & \ldots r^{(n-1)}_{1,0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,n-1}, & r_{n-1,n-2} & \ldots r_{n-1,0}; & r'_{n-1,n-1}, & r'_{n-1,n-2} & \ldots r'_{n-1,0}; & \ldots & r^{(n-1)}_{n-1,n-1}, & r^{(n-1)}_{n-1,n-2} & \ldots r^{(n-1)}_{n-1,0} \end{array}$$

auf alle möglichen Arten die nämlichen n Verticalreihen zu Determinanten zusammensetzt, und die Summe der Producte von je zwei solchen zusammengehörigen Determinantensystemen bildet. Und man erhält sogleich den gesuchten Entwicklungscoefficienten, wenn man statt I. mit II. das System

III.

$$\begin{array}{llllllllll} r_{0,0}, & r_{0,1} & \ldots r_{0,n-1}; & r'_{0,0}, & r'_{0,1} & \ldots r'_{0,n-1}; & \ldots & r^{(n-1)}_{0,0}, & r^{(n-1)}_{0,1} & \ldots r^{(n-1)}_{0,n-1} \\ r_{1,0}, & r_{1,1} & \ldots r_{1,n-1}; & r'_{1,0}, & r'_{1,1} & \ldots r'_{1,n-1}; & \ldots & r^{(n-1)}_{1,0}, & r^{(n-1)}_{1,1} & \ldots r^{(n-1)}_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,0}, & r_{n-1,1} & \ldots r_{n-1,n-1}; & r'_{n-1,0}, & r'_{n-1,1} & \ldots r'_{n-1,n-1}; & \ldots & r^{(n-1)}_{n-1,0}, & r^{(n-1)}_{n-1,1} & \ldots r^{(n-1)}_{n-1,n-1} \end{array}$$

verbindet, welches gewissermassen das inverse von II. ist, zugleich aber die Bedingung hinzufügt, dass nur aus solchen Verticalreihen Determinanten gebildet werden sollen, deren obere Indices sämmtlich verschieden sind, und also die Reihe 0, 1, 2, ... $n-1$ in beliebiger Folge darstellen. Und so wird schliesslich

$$\Theta = \Sigma \begin{vmatrix} r_{0,i} & r'_{0,i'} & \dots & r^{(n-1)}_{0,i^{(n-1)}} \\ r_{1,i} & r'_{1,i'} & \dots & r^{(n-1)}_{1,i^{(n-1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,i} & r'_{n-1,i'} & \dots & r^{(n-1)}_{n-1,i^{(n-1)}} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} r_{0,n-i-1} & r'_{0,n-i'-1} & \dots & r^{(n-1)}_{0,n-i^{(n-1)}-1} \\ r_{1,n-i-1} & r'_{1,n-i'-1} & \dots & r^{(n-1)}_{1,n-i^{(n-1)}-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,n-i-1} & r'_{n-1,n-i'-1} & \dots & r^{(n-1)}_{n-1,n-i^{(n-1)}-1} \end{vmatrix},$$

wo die Summe so zu verstehen ist, dass in derselben i, i', ... $i^{(n-1)}$ alle Werthe 0, 1, ... $n-1$ sollen annehmen können, die Gleichheit mehrerer oder selbst aller Werthe nicht ausgeschlossen.

Die Determinanten, in welche Θ hier zerfällt, lassen sich wiederum als Entwicklungscoefficienten darstellen. Nach der Definition der r sind diese die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der z in dem Product

$$y^{n-m-1} . \eta^m,$$

wenn

$$y = a_1 z_1 + a_2 z_2, \quad \eta = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$$

gesetzt wird. Dehnt man also die zweite Summe über $m = 0, 1, \dots n-1$ aus, so ist

$$\Sigma\Sigma \frac{n.n-1\dots n-m+1}{1.2\dots m} r_{hm} z_1^h z_2^{n-h-1} . t^{n-m-1} \tau^m$$

$$= \Sigma \frac{n.n-1\dots n-m-1}{1.2\dots m} y^{n-m-1} \eta^m . t^{n-m-1} \tau^m$$

$$= (yt + \eta\tau)^n = [(a_1 z_1 + a_2 z_2) t + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \tau]^n$$

oder wenn man zuerst nach den z entwickelt, ist

$$\frac{n.n-1\dots n-m+1}{1.2\dots m} . r_{hm}$$

der Coefficient von $t^{n-m-1} . \tau^m$ in der Entwicklung von

$$(a_1 t + \alpha_1 \tau)^h . (a_2 t + \alpha_2 \tau)^{n-h-1}.$$

Ebenso kann man die r' als die Coefficienten der Potenzen der z' in dem Product

$$(y')^{n-m-1} . (\eta')^m$$

ansehen, wo

$$y' = a'_1 z'_1 + a'_2 z'_2, \quad \eta' = \alpha'_1 z'_1 + \alpha'_2 z'_2$$

gesetzt ist, oder

$$\frac{n.n-1\ldots n-m+1}{1.2\ldots m}r'_{hm}$$

als den Coefficienten von $(t')^{n-m-1}.(\tau')^m$ in der Entwicklung von

$$(a'_1t'+\alpha'_1\tau')^h.(a'_2t'+\alpha'_2\tau')^{n-h-1}$$

u. s. w. Endlich also ist offenbar die Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{0,i} & r'_{0,i'} & \ldots & r^{(n-1)}_{0,i^{(n-1)}} \\ r_{1,i} & r'_{1,i'} & \ldots & r^{(n-1)}_{1,i^{(n-1)}} \\ . & . & . & . \\ r_{n-1,i} & r'_{n-1,i'} & \ldots & r^{(n-1)}_{n-1,i^{(n-1)}} \end{vmatrix}$$

der Coefficient von

$$t^{n-i-1}.\tau^i.(t')^{n-i'-1}.(\tau')^{i'}\ldots(t^{(n-1)})^{n-i^{(n-1)}-1}.(\tau^{(n-1)})^{i^{(n-1)}}$$

in der Entwicklung von

$$V=\begin{vmatrix} v_2^{n-1} & (v'_2)^{n-1} & \ldots & (v_2^{(n-1)})^{n-1} \\ v_2^{n-2}v_1 & (v'_2)^{n-2}v'_1 & \ldots & (v_2^{(n-1)})^{n-2}v_1^{(n-1)} \\ v_2^{n-3}v_1^2 & (v'_2)^{n-3}(v'_1)^2 & \ldots & (v_2^{(n-1)})^{n-3}(v_1^{(n-1)})^2 \\ . & . & . & . \\ v_1^{n-1} & (v'_1)^{n-1} & \ldots & (v_1^{(n-1)})^{n-1} \end{vmatrix},$$

wo

$$v_1^{(i)} = a_1^{(i)}t^{(i)}+\alpha_1^{(i)}\tau^{(i)},$$
$$v_2^{(i)} = a_2^{(i)}t^{(i)}+\alpha_2^{(i)}\tau^{(i)}$$

gesetzt ist, den Entwicklungscoefficienten noch multiplicirt mit

$$\frac{i!\,(n-i)!\,i'!\,(n-i')!\ldots(i^{(n-1)})!\,(n-i^{(n-1)})!}{(n!)^n}.$$

Der Ausdruck V ist aber bekanntlich nichts anderes, als das Product

$$(-1)^{\frac{1}{2}n.n-1}.\Pi(v_2^{(i)}v_1^{(k)}-v_2^{(k)}v_1^{(i)}),$$

wenn in demselben i die Werthe 0, 1, ... $n-1$, und k für jeden Werth von i die Werthe 0, 1, ... $i-1$ erhält. Auf diese Weise erscheint V als ein Determinantenproduct; aber in Folge dessen ist auch jeder der Entwicklungscoefficienten von V ein Aggregat von Determinantenproducten, deren einzelne Factoren aus den a und α zusammengesetzt sind. Da also jeder dieser Entwicklungscoefficienten die verlangte symbolische Form hat, so hat sie auch Θ und endlich die Eliminationsgleichung selbst. Ich fasse den Gang, der nunmehr zur Bildung der Eliminationsgleichung in ihrer symbolischen Form eingeschlagen werden kann, in einem Theorem zusammen.

Theorem V.

Um die Eliminationsgleichung zweier Gleichungen n^{ten} Grades mit zwei Veränderlichen zu erhalten, bilde man zunächst das Product

$$\Pi[(a_2^{(i)}t^{(i)}+\alpha_2^{(i)}\tau^{(i)})(a_1^{(k)}t^{(k)}+\alpha_1^{(k)}\tau^{(k)})-(a_1^{(i)}t^{(i)}+\alpha_1^{(i)}\tau^{(i)})(a_2^{(k)}t^{(k)}+\alpha_2^{(k)}\tau^{(k)})],$$

in welchem i die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$, k aber für jeden bestimmten Werth von i die Werthe $0, 1, \ldots i-1$ erhalten soll, und entwickle das Product nach Potenzen der t und τ. Sodann multiplicire man den Coefficienten von

$$t^{n-i-1}.\tau^{i}.(t')^{n-i'-1}.(\tau')^{i'}\ldots(t^{(n-1)})^{n-i^{(n-1)}-1}.(\tau^{(n-1)})^{i^{(n-1)}}$$

mit dem Coefficienten von

$$t^{i}.\tau^{n-i-1}.(t')^{i'}.(\tau')^{n-i'-1}\ldots(t^{(n-1)})^{i^{(n-1)}}.(\tau^{(n-1)})^{n-i^{(n-1)}-1},$$

setze dem Product den numerischen Factor

$$\frac{i!\,(n-i)!\,i'!\,(n-i')!\ldots(i^{(n-1)})!\,(n-i^{(n-1)})!}{(n!)^n}$$

vor, und bilde die Summe aller Ausdrücke, die man auf diese Weise erhält, wenn man den Zahlen $i, i', \ldots i^{(n-1)}$ alle möglichen Werthe von 0 bis $n-1$ beilegt. Multiplicirt man das Resultat mit

$$(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)(a_1'\alpha_2'-a_2'\alpha_1')\ldots(a_1^{(n-1)}\alpha_2^{(n-2)}-a_2^{(n-1)}\alpha_1^{(n-1)}),$$

so ist das Product, gleich Null gesetzt, das Eliminationsresultat in symbolischer Form, d. h. man hat das wirkliche, wenn man statt der Producte

$$a_1^p a_2^q,\quad (a_1')^p(a_2')^q,\quad \text{etc.}$$

die Coefficienten der einen, statt

$$\alpha_1^p\alpha_2^q,\quad (\alpha_1')^p(\alpha_2')^q,\quad \text{etc.}$$

die Coefficienten der anderen gegebenen Gleichung einsetzt.

Da sowohl von den α als von den a immer n verschiedene Arten vorhanden sind, so ist die letzte Eliminationsgleichung wirklich vom n^{ten} Grad in

Bezug auf die Coefficienten beider Gleichungen *), mithin ohne überflüssigen Factor.

§. 6.

Besonderer Fall der Discriminante.

Einige besondere Bemerkungen erfordert noch der Fall, in welchem die Eliminationsresultante in die Discriminante einer gegebenen Gleichung übergeht, d. h. die Bedingung ausdrückt, unter welcher jene Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat. Setzen wir für diesen Fall die gegebene Gleichuug in die symbolische Form

$$0 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n+1} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{n+1} \text{ etc.},$$

so hat man, um jene Bedingung zu erhalten, die x aus den beiden Gleichungen

$$0 = a_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = \alpha_1 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n \ldots,$$

$$0 = a_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = \alpha_2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n \ldots$$

zu eliminiren.

Man betrachtet dann statt der im vorigen Paragraphen angewandten Function Ω besser die Function

$$2\Omega = (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1) \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2)^n (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^n - (a_1 y_1 + a_2 y_2)^n (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n}{x_1 y_2 - y_1 x_2},$$

welche durch Ausführung der Division, dem Früheren ganz analog, übergeht in:

$$2\Omega = (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1)^2 \left\{ \begin{array}{l} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-1} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-1} \\ + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-2} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-2} (a_1 y_1 + a_2 y_2)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad + (a_1 y_1 + a_2 y_2)^{n-1} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{n-1} \end{array} \right\}.$$

Man bemerkt, dass diese Form sich von der des vorigen Paragraphen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des ersten Factors $a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1$ hier sein Quadrat getreten ist. Es ist also in dem Theorem des vorigen Paragraphen nur der Schluss zu verändern, wodurch man folgenden Zusatz zu demselben erhält:

---

*) Bei dieser Gelegenheit mag ein Satz erwähnt sein, den man sehr leicht auf einen anderen bekannten Satz zurückführt. *Ist eine Gleichung durch Elimination aus Gleichungen des m_1^{ten}, m_2^{ten}, ... m_n^{ten} Grades entstanden, so ist der Grad der symbolischen Coefficienten für jede Gleichung derselbe, nämlich $m_1 . m_2 \ldots . m_n$.* Daraus folgt z. B., *dass, wenn eine der Gleichungen linear ist, die Coefficienten derselben in jeder der symbolischen Determinanten als eine Reihe vorkommen müssen.* Vgl. unten §. 7 folgg.

Theorem VI.

Um die Bedingungsgleichung aufzustellen, welche die Gleichheit zweier Wurzeln einer Gleichung des $(n+1)^{ten}$ *Grades ausdrückt, verfahre man zunächst wie im Theorem* V.; *multiplicire aber schliesslich nicht mit dem Factor*

$$(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)(a_1'\alpha_2'-a_2'\alpha_1')\dots(a_1^{(n-1)}\alpha_2^{(n-1)}-a_2^{(n-1)}\alpha_1^{(n-1)})$$

sondern mit dem Quadrat desselben. Das Resultat, gleich Null gesetzt, giebt die gesuchte Bedingung in ihrer symbolischen Form, und die wirkliche Bedingung, wenn man für die Producte

$$(a_1^{(i)})^p(a_2^{(i)})^q, \quad (\alpha_1^{(i)})^p(\alpha_2^{(i)})^q$$

überall die entsprechenden Coefficienten der ursprünglich gegebenen Gleichung einführt.

Diese Gleichung enthält n Arten der a, und ebensoviel der α; sie ist also in Bezug auf die Coefficienten der gegebenen Gleichung von der $2n^{ten}$ Ordnung, und enthält also keinen überflüssigen Factor.

§. 7.

Invarianten von Functionen, zwischen deren Veränderlichen eine lineare Relation besteht.

Die Betrachtung der symbolischen Formen gestattet die Beantwortung der Frage, *wie die Invarianten von Functionen mit r Veränderlichen mit den Grundformen entsprechender Functionen von* $r+1$ *Veränderlichen zusammenhängen, aus denen erstere abgeleitet sind, indem man eine lineare Function der Veränderlichen gleich Null setzt.* Diese Frage ist für die Geometrie von höchster Bedeutung, insofern es sich um die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve handelt, oder um die Eigenschaften eines ebenen Schnitts einer algebraischen Fläche. Man kann in dieser Beziehung folgende einfache Betrachtungen anstellen.

Es sei, in symbolischer Form,

$$\begin{aligned}\varphi &= (ax+a_1x_1+\dots+a_rx_r)^n\\ &= (bx+b_1x_1+\dots+b_rx_r)^n = \dots\end{aligned}$$

eine Function von $r+1$ Veränderlichen, welche durch die linearen Substitutionen

$$\begin{aligned}x &= c\,X+c'\,X'+\dots+c^{(r)}X^{(r)},\\ x_1 &= c_1X+c_1'X'+\dots+c_1^{(r)}X^{(r)},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ x_r &= c_rX+c_r'X'+\dots+c_r^{(r)}X^{(r)}\end{aligned}$$

in

$$\varphi = (\alpha X + \alpha' X' + \cdots + \alpha^{(r)} X^{(r)})^n$$
$$= (\beta X + \beta' X' + \cdots + \beta^{(r)} X^{(r)})^n = \cdots$$

übergeht, so dass zwischen den symbolischen Coefficienten die Gleichungen

$$\alpha^{(i)} = c^{(i)} a + c_1^{(i)} a_1 + \cdots + c_r^{(i)} a_r,$$
$$\beta^{(i)} = c^{(i)} b + c_1^{(i)} b_1 + \cdots + c_r^{(i)} b_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

stattfinden. Aus den Transformationsformeln folgt aber auch, wenn

$$C = \Sigma \pm c c_1' c_2'' \ldots c_r^{(r)}$$

gesetzt wird:

$$X = \frac{1}{C}\left(x \frac{\partial C}{\partial c} + x_1 \frac{\partial C}{\partial c_1} + \cdots + x_r \frac{\partial C}{\partial c_r}\right).$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial C}{\partial c} = u, \quad \frac{\partial C}{\partial c_1} = u_1, \quad \ldots$$

und lässt

$$C.X = ux + u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r = 0$$

eine zwischen den x stattfindende lineare Beziehung bedeuten, so wird unter dieser Bedingung φ übergehen in

$$(\varphi) = (\alpha' X' + \alpha'' X'' + \cdots + \alpha^{(r)} X^{(r)})^n$$
$$= (\beta' X' + \beta'' X'' + \cdots + \beta^{(r)} X^{(r)})^n = \cdots.$$

Eine Invariante dieser Function hat nach dem Früheren immer die symbolische Form:

$$J = \Sigma \lambda . \Pi(\Sigma \pm \alpha' \beta'' \ldots \nu^{(r)}),$$

wo die λ Zahlenfactoren bedeuten. Will man in derselben statt der symbolischen Coefficienten $\alpha, \beta \ldots$ von (φ), die symbolischen Coefficienten $a, b \ldots$ von φ, in der ursprünglichen Form, einführen, so hat man sich nur der eben angegebenen Substitutionsformeln

$$\alpha^{(i)} = c^{(i)} a + c_1^{(i)} a_1 + \cdots + c_r^{(i)} a_r,$$
$$\beta^{(i)} = c^{(i)} b + c_1^{(i)} b_1 + \cdots + c_r^{(i)} b_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu bedienen. Durch dieselben aber geht eine Determinante wie

$$\Sigma \pm \alpha' \beta'' \ldots \nu^{(r)},$$

welche r^2 Elemente enthält, in eine Summe von Determinantenproducten über; und zwar, wenn man

$$P = \Sigma \pm z\, a_2 b_3 \ldots n_r$$

setzt, wird

$$\begin{aligned}\Sigma \pm \alpha' \beta'' \ldots \nu^{(r)} &= \frac{\partial C}{\partial c}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial c_1}\frac{\partial P}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial C}{\partial c_r}\frac{\partial P}{\partial z_r} \\ &= u\,\frac{\partial P}{\partial z} + u_1\,\frac{\partial P}{\partial z_1} + \cdots + u_r\,\frac{\partial P}{\partial z_r} \\ &= \Sigma \pm u\, a_1 b_2 \ldots n_r .\end{aligned}$$

Die Invariante der Function (φ) drückt sich also durch die Coefficienten der ursprünglich gegebenen Function φ so aus, dass nur an Stelle der symbolischen Determinanten

$$\Sigma \pm \alpha' \beta'' \ldots \nu^{(r)},$$

welche sich auf (φ) beziehen, die symbolischen Determinanten

$$\Sigma \pm u\, a_1 b_2 \ldots n_r$$

treten, welche auf φ bezüglich sind, in denen die Reihe der Indices um einen vermehrt ist, und in denen als neue Reihe die Reihe der Coefficienten des gegebenen linearen Ausdrucks hinzugefügt ist.

Dieses merkwürdige und einfache Verhalten führt auf das sehr wichtige

Theorem VII.

Wenn man eine Invariante J einer Function (φ) von r Veränderlichen, welche aus einer Function φ von $r+1$ Veränderlichen dadurch entsteht, dass zwischen den Veränderlichen eine lineare Beziehung angenommen wird, durch die Coefficienten von φ ausdrücken will, so bilde man dieselbe zunächst in symbolischer Form für eine beliebige Function von r Veränderlichen, und setze sodann statt jeder ihrer symbolischen Determinanten eine andere, welche in jeder Reihe einen Buchstaben mehr, und als neue Reihe die Coefficienten des gegebenen linearen Ausdrucks enthält. Lässt man in dieser Form dann die symbolischen Producte nicht mehr die Coefficienten von (φ) sondern die Coefficienten von φ bedeuten, so ist das Resultat, eine zugehörige Form von φ, die gesuchte Invariante von (φ), ausgedrückt durch die Coefficienten der gegebenen Function φ.

§. 8.

Invarianten von Functionen, zwischen deren Veränderlichen mehrere Relationen bestehen.

Das vorstehende Theorem enthält die Lösung oder doch die Reduction einiger wichtigen Probleme. Man kann dasselbe zunächst dadurch verallgemeinern, dass man es auf den Fall anwendet, wo *mehrere* lineare Bedingungsgleichungen eintreten. In der That kann man (φ) durch eine weitere lineare Bedingungsgleichung in die Form $((\varphi))$ verwandelt denken, welche nur $r-1$ Veränderliche enthält, u. s. w.; und man wird dann von dem Ausdruck einer Invariante einer Function mit möglichst wenig Veränderlichen, ausgedrückt durch die Coefficienten jener Function selbst, zu Ausdrücken derselben Invariante aufsteigen, welche Coefficienten der Functionen mit mehr Veränderlichen enthalten, indem man die Reihen der Indices in jeder symbolischen Determinante immer um 1 vermehrt, und als neue Reihe die Coefficienten eines der gegebenen linearen Ausdrücke hinzufügt. Das letzte Resultat kann man dann in folgendes Theorem zusammenfassen:

Theorem VIII.

Wenn man eine Invariante J einer Function (φ) von r Veränderlichen, welche aus einer Function φ von $r+s$ Veränderlichen dadurch entstanden ist, dass zwischen den Veränderlichen s lineare Beziehungen eingetreten sind, durch die Coefficienten von φ ausdrücken soll, so bilde man dieselbe zunächst für eine beliebige Function von r Veränderlichen, bringe sie in die symbolische Form und vermehre jede Reihe jeder symbolischen Determinante um s Glieder, während man als s neue Reihen die Coefficienten der gegebenen linearen Beziehungen hinzufügt. Lässt man dann die symbolischen Producte nicht mehr die Coefficienten von (φ) sondern die Coefficienten von φ bedeuten, so ist das Resultat die gesuchte Invariante, ausgedrückt durch die Coefficienten der gegebenen Function.

Man kann endlich noch die Bemerkung hinzufügen, welche ohne weiteren Beweis einleuchtet:

Theorem IX.

Die Theoreme VII. *und* VIII. *gelten ganz ebenso, wenn eine simultane Invariante J mehrerer Functionen (φ), (ψ), ... durch die Coefficienten gegebener Functionen φ, ψ, ... ausgedrückt werden soll.*

§. 9.

Elimination aus Gleichungen, deren einige linear sind.

Sind eine Anzahl von Gleichungen gegeben

$$\varphi=0,\quad \psi=0,\quad \ldots,$$

aus welchen die Unbekannten x_1, x_2, ... x_{r+s} eliminirt werden sollen, so ist offenbar die linke Seite der Eliminationsgleichung eine simultane Invariante von φ, ψ, etc. Sind aber insbesondere s jener Gleichungen linear, die übrigen aber respective vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade, so giebt das Theorem VIII. oder IX. einen vollkommen symmetrischen Weg an, diese Elimination auf die Elimination von r Grössen aus r Gleichungen vom respective m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade zurückzuführen. Denn reduciren sich φ, ψ, etc. mit Hülfe der s linearen Beziehungen auf (φ), (ψ), etc., so hat man nur eine simultane Invariante dieser Functionen durch die Coefficienten von φ, ψ, etc. auszudrücken. Dies geschieht aber nach dem Vorhergehenden mit Hülfe folgender Regel:

Theorem X.

Statt aus $r+s$ Gleichungen, deren s vom ersten Grade, die anderen respective vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade sind, die Unbekannten zu eliminiren, kann man zunächst die Eliminationsgleichung für r Gleichungen vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade mit r Unbekannten in symbolischer Form bilden, sodann die Elemente jeder Reihe in jeder symbolischen Determinante um s vermehren und als s neue Reihen die Coefficienten der linearen Gleichungen hinzufügen. Führt man dann in der so umgestalteten Eliminationsgleichung statt der symbolischen Producte die Coefficienten der gegebenen Gleichungen vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade mit $r+s$ Veränderlichen ein, so ist das Resultat die gesuchte Eliminationsresultante.

Da die Eliminationsgleichung zwischen *zwei* Gleichungen beliebigen Grades bekannt ist, und die Reduction einer solchen Gleichung auf die symbolische Form aus dem Theorem I. ersichtlich ist, so hat man hiernach eine ganz allgemeine und symmetrische Methode, aus beliebig vielen Gleichungen die Unbekannten zu eliminiren, wenn nur bei zweien derselben der Grad den zweiten übersteigt. Ist insbesondere der Grad dieser beiden derselbe, so erhält man die symbolische Form, deren Determinanten nur zu erweitern sind, sogleich aus dem Theorem V.

Das Verfahren wird indess wesentlich vereinfacht, sobald die Eliminationsresultante zwischen zwei Gleichungen, auf welche hier Alles zurückkommt, bereits durch andere möglichst einfache Invarianten ausgedrückt vorliegt; indem man dann die symbolische Darstellung und Erweiterung nicht an der ganzen Eliminationsresultante sondern an den einzelnen Invarianten vorzunehmen hat, aus welchen sie zusammengesetzt ist.

Als Beispiel hierfür, und für die ganze Verfahrungsweise überhaupt, wähle ich die Elimination aus drei Gleichungen, deren eine vom ersten Grade ist, während die anderen vom zweiten Grade sein mögen. Nach dem Obigen hat man zu diesem Ende zunächst die Eliminationsgleichung für zwei Gleichungen vom zweiten Grade zu bilden. Seien diese:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 = 0,$$
$$b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2 = 0.$$

Das Resultat der Elimination aus diesen Gleichungen erhält man in passender Form auf folgende Weise. Wenn die beiden obigen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so kann man sie durch lineare Transformation immer auf die Form bringen:

$$X(aX+bY)=0 \quad \text{und} \quad X(cX+dY)=0.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit beliebigen Factoren α und β, so ist die Determinante der Summe:

$$\begin{vmatrix} 2\alpha a+2\beta c & \alpha b+\beta d \\ \alpha b+\beta d & 0 \end{vmatrix},$$

d. h. ein vollständiges Quadrat in Bezug auf die Grössen α und β. Dieselbe Eigenschaft muss auch den Gleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt zukommen, d. h. die Determinante der Function

$$\alpha(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2)+\beta(b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2),$$

welche gleich

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} \\ \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \alpha a_{22}+\beta b_{22} \end{vmatrix}$$

ist, muss in Bezug auf die α, β ein vollständiges Quadrat sein. Setzt man daher $\varDelta$ in die Form

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}(A\alpha^2+B\beta^2+2C\alpha\beta),$$

so muss die Gleichung

$$AB-C^2 = 0$$

stattfinden, welches daher die gesuchte Eliminationsgleichung ist. Aber es sind

$$A = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$B = 2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}$$

die drei einfachsten simultanen Invarianten der beiden quadratischen Formen.

Dieselben nehmen die symbolische Gestalt an:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2$$

$$C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2,$$

wenn man die symbolischen Substitutionen anwendet:

$$a_i a_k = \alpha_i \alpha_k = a_{ik},$$
$$b_i b_k = \beta_i \beta_k = b_{ik}.$$

Erweitert man nun diese Invarianten nach der Regel des Theorems X., so erhält man:

$$A = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2, \quad B = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2,$$

$$C = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2;$$

und somit ist die Gleichung:

$$(1.) \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 = \left\{ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b & b_3 \end{vmatrix}^2 \right\}^2$$

in symbolischer Form das Resultat der Elimination der x aus den drei Gleichungen:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 = 0,$$
$$b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + 2b_{23} x_2 x_3 + 2b_{31} x_3 x_1 + 2b_{12} x_1 x_2 = 0,$$
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Denkt man sich durch die ersten beiden Gleichungen zwei Kegelschnitte dargestellt, so ist die letzte die Gleichung einer Linie, welche durch einen Schnittpunkt beider hindurchgeht; und die Gleichung (1.) ist demnach *die Gleichung ihrer vier Schnittpunkte in Liniencoordinaten*, woraus die Auflösbarkeit jener Gleichung in vier Factoren beiläufig folgt. Aber es ist ausserdem

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des ersten Kegelschnitts in Liniencoordinaten, und

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 = -2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & u_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & u_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die des zweiten. Verschwindet in (1.) einer dieser Ausdrücke, was für die acht Tangenten geschieht, welche sich in den vier Schnittpunkten an die beiden Kegelschnitte ziehen lassen, so verschwindet auch jedesmal der Ausdruck

$$C = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2;$$

und es ist also

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ &= u_1^2(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22}-2a_{23}b_{23})+2u_2u_3(a_{13}b_{12}+a_{12}b_{13}-a_{11}b_{23}-a_{23}b_{11}) \\ &\quad +u_2^2(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33}-2a_{31}b_{31})+2u_3u_1(a_{21}b_{23}+a_{23}b_{21}-a_{22}b_{31}-a_{31}b_{22}) \\ &\quad +u_3^2(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-2a_{12}b_{12})+2u_1u_2(a_{32}b_{31}+a_{31}b_{32}-a_{33}b_{12}-a_{12}b_{33}) \end{aligned}$$

die Gleichung desjenigen Kegelschnitts, welcher von den acht, in den vier Schnittpunkten beider Kegelschnitte gezogenen Tangenten berührt wird.

Diese Bemerkungen wollte ich zur Erläuterung des Vorangegangenen hier beifügen.

§. 10.

Satz über ein System von Gleichungen zweiter Ordnung.

Ich kann nicht umhin bei dieser Gelegenheit eines allgemeinen Satzes zu gedenken, welcher aus der Verallgemeinerung der Methode fliesst, durch welche im vorigen Paragraphen die Eliminationsgleichung für zwei Gleichungen des zweiten Grades gewonnen wurde. Obgleich derselbe streng genommen nicht hierher gehört, so scheint er doch von hinreichendem Interesse, um seine Einschaltung hier zu rechtfertigen.

Es seien r homogene Gleichungen zweiter Ordnung mit r Veränderlichen gegeben:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma\Sigma a_{ik}^{(1)} x_i x_k, \\ 0 = \Sigma\Sigma a_{ik}^{(2)} x_i x_k, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = \Sigma\Sigma a_{ik}^{(r)} x_i x_k. \end{cases}$$

Sobald diese Gleichungen neben einander bestehen, so muss eine Gleichung
$$R = 0$$
zwischen den Coefficienten bestehen, welche in Bezug auf jede Reihe der a vom Grade 2^{r-1} ist.

Multipliciren wir jetzt die Gleichungen mit beliebigen Factoren $y', y'' \dots y^{(r)}$, und setzen
$$a'_{ik} y' + a''_{ik} y'' + \dots + a^{(r)}_{ik} y^{(r)} = b_{ik},$$
und bilden sodann die Determinante
$$B = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \dots b_{rr}.$$
Dieselbe ist von der r^{ten} Ordnung in Bezug auf die y, von derselben Ordnung für die a, und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der y in der Entwicklung von B sind die einfachsten simultanen Invarianten der gegebenen Functionen. Aber wenn die Gleichungen (1.) für irgend ein Werthsystem zusammen bestehen können, so kann man dieselben auf unendlich viele Weisen durch lineare Substitutionen so transformiren, dass, wenn $X_1, X_2, \dots X_r$ die neuen Veränderlichen sind, in allen gleichzeitig das Glied, welches X_r^2 enthält, verschwindet, wo dann
$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots \quad X_{r-1} = 0$$
das System gemeinschaftlicher Lösungen angiebt. Bildet man die Determinante B in dieser Form, und bezeichnet ihre Elemente durch B_{ik}, sie selbst durch B, so ist
$$\mathrm{B} = \Sigma \pm B_{11} B_{22} \dots B_{rr},$$
und $B_{rr} = 0$. Es ist also dann B eine homogene Function zweiter Ordnung von
$$B_{1r}, \quad B_{2r}, \quad \dots \quad B_{r-1,r},$$
und es können daher offenbar die Gleichungen
$$(2.) \qquad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y''} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y^{(r)}} = 0$$
neben einander bestehen, da ihre rechten Theile lineare Functionen von
$$B_{1r}, \quad B_{2r}, \quad \dots \quad B_{r-1,r}$$
sind, und also die obigen r Gleichungen durch die $r-1$ Gleichungen
$$B_{1r} = 0, \quad B_{2r} = 0, \quad \dots \quad B_{r-1,r} = 0$$
erfüllt werden.

Aber die Gleichungen (2.) führen als lineare Combinationen die Gleichungen mit sich:
$$(3.) \qquad \frac{\partial B}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y''} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial B}{\partial y^{(r)}} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die y, so erhält man eine Gleichung

$$P = 0,$$

wo P eine Function der $r(r-1)^{r-1\text{ten}}$ Ordnung der Coefficienten von B ist, d. h. der einfachen simultanen Invarianten der gegebenen Functionen (1.), und somit eine homogene Function der $r^2(r-1)^{r-1\text{ten}}$ Ordnung von den Coefficienten jener Functionen. Da nun die Function R im Allgemeinen nicht in rationale Factoren zerlegbar ist, so muss P die Function R als Factor enthalten; und man hat somit das folgende

Theorem XI.

Bezeichnet man durch $R = 0$ die Gleichung, welche ausdrückt, dass r homogene Gleichungen zweiter Ordnung mit r Veränderlichen ein gemeinschaftliches System von Lösungen zulassen; multiplicirt man ferner die linken Theile der r Gleichungen zweiter Ordnung mit willkürlichen Factoren, und bildet die Determinante der homogenen Function zweiter Ordnung, welche durch Addition dieser Producte entsteht; so ist die Function P, welche ausdrückt, dass die Differentialquotienten jener Determinante, nach den willkürlichen Factoren genommen, gleichzeitig verschwinden können, und welche eine rationale Function der einfachsten simultanen Invarianten von den linken Theilen der gegebenen Gleichungen ist, immer durch R ohne Rest theilbar.

§. 11.

Ueber die Darstellung der Curven n^{ter} Ordnung durch Gleichungen in Liniencoordinaten.

Ein sehr wichtiges Problem, dessen vollständige Lösung in den vorhergehenden Betrachtungen enthalten ist, bietet sich dar in der Aufgabe, eine beliebige Curve in Liniencoordinaten auszudrücken. Ist $f = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, so ist im Allgemeinen die Gleichung, welche die Curve auf die angegebene Weise darstellt, das Resultat der Elimination der x aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = u_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = u_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = u_3,$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

wo u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer Tangente bedeuten. Aber wenn man die geometrische Seite des Problems ins Auge fasst, so kann man dasselbe auch so aussprechen:

Die Beziehung soll gefunden werden, welcher die Coefficienten u_1, u_2, u_3 genügen müssen, damit die Function f mit Hülfe der linearen Gleichung

$$(1.)\quad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

in eine Function von zwei Veränderlichen verwandelt werden könne, welche zwei gleiche lineare Factoren enthalte,

entsprechend den beiden Schnittpunkten der Linie (1.) mit der gegebenen Curve, welche im Berührungspunkte zusammenfallen. In dieser Form wird das Problem durch das Theorem VIII. sofort gelöst, und zwar auf eine Weise, welche ich in folgendes Theorem zusammenfasse:

Theorem XII.

Um die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung in Liniencoordinaten darzustellen, bilde man zuerst die Bedingung dafür, dass eine Gleichung n^{ten} Grades zwei gleiche Wurzeln habe, und gebe ihr die symbolische Form

$$0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma\pm a_1b_2),$$

wo die λ Zahlenfactoren, und die Producte $a_1^i a_2^k$, $b_1^i b_2^k$ symbolische Darstellungen der Coefficienten der Gleichung n^{ten} Grades sind. Dann ist

$$0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma\pm u_1a_2b_3)$$

die symbolische Form der gesuchten Gleichung, in welcher die Producte

$$a_1^i a_2^k a_3^h,\quad b_1^i b_2^k b_3^h$$

nur durch die Coefficienten der Curvengleichung zu ersetzen sind, um die wirkliche Gleichung in Liniencoordinaten zu geben.

Da hier nur vollständig bekannte Operationen, welche durch das Theorem VI. sogar wirklich ausgeführt sind, erfordert werden, so kann man das Problem der Aufstellung einer algebraischen Curve in Liniencoordinaten hierdurch als vollständig erledigt ansehen.

Da die Bedingungsgleichung, welche angiebt, dass eine Gleichung n^{ten} Ordnung zwei gleiche Wurzeln habe, vom $2(n-1)^{ten}$ Grade in Bezug auf die Coefficienten der Gleichung ist, und sich bei der Erweiterung der symbolischen Determinante offenbar der Grad der Gleichung in Bezug auf die symbolischen Factoren nicht ändert, so ist auch das Resultat von gleichem Grade in Bezug auf die Coefficienten der Curvengleichung, und man hat also noch das

Theorem XIII.

Die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung in Liniencoordinaten, welche im Allgemeinen von der $n(n-1)^{ten}$ Ordnung für die Veränderlichen ist, *wird im Allgemeinen von der* $2(n-1)^{ten}$ *Ordnung für die Coefficienten der ursprünglichen Curvengleichung.*

Ich werde zunächst mit Hülfe des Theorems XII. die bekannten Gleichungen der Curven zweiter und dritter Ordnung in Liniencoordinaten entwickeln, um sodann zu den merkwürdigen Formen überzugehen, auf welche diese Theorie für die Curven der vierten Ordnung leitet.

§. 12.

Curven zweiter und dritter Ordnung in Liniencoordinaten dargestellt.

Die Bedingung dafür, dass eine quadratische Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln habe, ist

$$2\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man die symbolischen Substitutionen

$$\begin{aligned} a &= a_1^2 \quad = b_1^2, \\ b &= a_1 a_2 = b_1 b_2, \\ c &= a_2^2 \quad = b_2^2 \end{aligned}$$

einführt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Die symbolische Form der Gleichung einer Curve zweiter Ordnung in Liniencoordinaten ist demnach:

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2,$$

oder, wenn man die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten durch

$$0 = a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2$$

darstellt, und die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_k = b_i b_k = a_{ik}$$

ausführt:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

was die bekannte Form ist.

Die Bedingung, unter welcher die cubische Gleichung

$$ax^3+3bx^2+3cx+d = 0$$

zwei gleiche Wurzeln enthält, ist, wie man unter Anderem aus §. 9 ohne Weiteres entnehmen kann:

$$0 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Führt man hier die symbolischen Substitutionen

$$\begin{aligned} a &= a_1^3 &&= b_1^3 &&= c_1^3 &&= d_1^3, \\ b &= a_1^2 a_2 &&= b_1^2 b_2 &&= c_1^2 c_2 &&= d_1^2 d_2, \\ c &= a_1 a_2^2 &&= b_1 b_2^2 &&= c_1 c_2^2 &&= d_1 d_2^2, \\ d &= a_2^3 &&= b_2^3 &&= c_2^3 &&= d_2^3 \end{aligned}$$

aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1 a_2^2 \\ b_1^2 b_2 & b_2^3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1^3 & c_1 c_2^2 \\ d_1^2 d_2 & d_2^3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 a_2 \\ b_1^2 b_2 & b_1 b_2^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1^2 c_2 & c_1 c_2^2 \\ d_1 d_2^2 & d_2^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}\{a_1 b_2(a_1 b_2+b_1 a_2).c_1 d_2(c_1 d_2+d_1 c_2)-4a_1^2 b_1 b_2 c_1 c_2 d_2^2\}. \end{aligned}$$

Der wirkliche Werth dieses Ausdrucks muss offenbar ungeändert bleiben, wie man auch die symbolischen Coefficientenreihen mit einander vertausche. Vertauscht man also zunächst die a mit den b, sodann die c mit den d, endlich beides zugleich, so erhält man drei neue Formen, welche mit der vorigen wesentlich identisch sein müssen; und indem man alle vier Formen addirt, erhält man die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \{(a_1 b_2+b_1 a_2)(c_1 d_2+d_1 c_2)-4a_1 b_1 c_2 d_2\}.$$

Vertauscht man nun noch gleichzeitig die a mit den c, und die b mit den d, so entsteht abermals eine neue Form dieser Gleichung; und wenn man diese zu der obigen addirt, und den gemeinschaftlichen Factor 2 übergeht, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \{(a_1 b_2+b_1 a_2)(c_1 d_2+d_1 c_2)-2a_1 b_1 c_2 d_2-2a_2 b_2 c_1 d_1\} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist bereits die verlangte symbolische Form. Sie vereinfacht sich noch durch die Bemerkung, dass der zweite Theil der Klammer aus dem ersten durch Vertauschung der c mit den d hervorgeht, wodurch die anderen Factoren sich gar nicht ändern. Die Form löst sich daher in die Summe zweier Glieder auf, welche beide denselben wirklichen Werth haben; indem man also nur das eine Glied der Summe beibehält, bleibt:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Die symbolische Form der Gleichung einer Curve dritter Ordnung in Liniencoordinaten ist also:

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

und die wirkliche Form geht hieraus hervor durch die symbolischen Substitutionen:

$$a_i a_k a_h = b_i b_k b_h = c_i c_k c_h = d_i d_k d_h = a_{ikh},$$

wenn

$$\Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh}\, x_i x_k x_h = 0$$

die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten ist.

Ich werde zeigen, dass diese Form in der That mit dem Ausdruck der Gleichung übereinkommt, welchen Herr *Aronhold* gegeben hat. Zu diesem Ende hat man nur die Zwischenform Θ zu betrachten, der Herr *Aronhold* die Form giebt (dieses Journal Bd. 55, p. 118):

$$\Theta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 . (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}^2 . (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)(d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3).$$

Ordnet man Θ nach den Potenzen der x, so dass

$$\Theta = \Sigma\Sigma \Theta_{ik} x_i x_k,$$

und führt für Θ_{ik} die symbolischen Substitutionen ein:

$$\Theta_{ik} = \lambda_i \lambda_k = \mu_i \mu_k,$$

so wird durch Vergleichung mit den obigen Ausdrücken:

$$\lambda_i\lambda_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 . a_i b_k,$$

$$\mu_i\mu_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} . c_i d_k.$$

Zwar müsste man eigentlich statt $a_i b_k$ und $c_i d_k$ hier setzen $\frac{1}{2}(a_i b_k + b_i a_k)$ und $\frac{1}{2}(c_i d_k + d_i c_k)$. Aber dann würde sich jeder der obigen Ausdrücke nur in zwei Glieder auflösen, welche denselben wirklichen Werth haben, und deren eines also für beide gesetzt werden kann, indem man den Nenner 2 zugleich auslässt.

Durch diese Formeln aber geht die gegebene symbolische Gleichung über in:

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}^2,$$

oder, nach der Herrn *Aronhold* eigenthümlichen Bezeichnungsweise, indem man von den symbolischen Substitutionen zu den wirklichen Werthen zurückkehrt:

$$0 = \Sigma\Sigma u_i u_k (\Theta, \Theta)^{ik}.$$

Dies ist der Ausdruck, welchen Herr *Aronhold* für die zugehörige Form F angegeben hat (dieses Journal Bd. 55, p. 185).

Nachdem ich an diesen Beispielen die Uebereinstimmung der angegebenen Methode mit früheren dargelegt habe, gehe ich dazu über, die neuen Resultate zu entwickeln, auf welche dieselbe führt in der Theorie der Curven vierter Ordnung.

§. 13.

Curven vierter Ordnung in Liniencoordinaten dargestellt.

Die Bedingungsgleichung, unter welcher die biquadratische Gleichung

$$(1.) \qquad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

zwei gleiche Wurzeln hat, ist bekanntlich von Herrn *Cayley* auf die folgende Form (s. die Abhandlung des Herrn *Hermite* Bd. 52, p. 1 etc. dieses Journals) zurückgeführt worden:

$$i^3 - 27j^2 = 0,$$

wo i und j die Fundamentalinvarianten der biquadratischen Form sind, und die Bedeutung haben:

$$i = ae - 4bd + 3c^2, \qquad j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Man hat zunächst die symbolischen Ausdrücke dieser beiden Invarianten aufzusuchen. Mit Hülfe der symbolischen Substitutionen

$$\begin{aligned} a &= a_1^4 = b_1^4 = c_1^4, \\ b &= a_1^3 a_2 = b_1^3 b_2 = c_1^3 c_2, \\ c &= a_1^2 a_2^2 = b_1^2 b_2^2 = c_1^2 c_2^2, \\ d &= a_1 a_2^3 = b_1 b_2^3 = c_1 c_2^3, \\ e &= a_2^4 = b_2^4 = c_2^4 \end{aligned}$$

erhält man aber sogleich:

$$\begin{aligned} i &= \tfrac{1}{2}(a_1^4 b_2^4 + a_2^4 b_1^4 - 4a_1^3 a_2 b_1 b_2^3 - 4a_1 a_2^3 b_1^3 b_2 + 6a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^4. \end{aligned}$$

Hierdurch ist die symbolische Darstellung von i bereits geleistet. Für j hingegen erhält man:

$$j = a_1^2 . b_1 b_2 . c_2^2 . \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}.$$

Der vor der Determinante stehende Factor ist offenbar ein Glied der Determinante selbst. Vertauscht man nun die a, b, c auf alle mögliche Weisen mit einander, so erhält man immer wieder dieselbe Determinante, der Reihe nach mit ihren sämmtlichen Gliedern multiplicirt. Addirt man also alle die Formen, deren wirklicher Werth stets j ist, und dividirt das Resultat durch 6, so kommt:

$$j = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}^2,$$

oder da die Determinante selbst auch die Form

$$-(a_1 b_2 - b_1 a_2)(b_1 c_2 - c_1 b_2)(c_1 a_2 - a_1 c_2)$$

annimmt:

$$j = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2 .$$

Auf diese Weise hat auch j die geforderte Gestalt angenommen, und auch die ursprünglich gegebene Gleichung

$$i^3-27j^2 = 0$$

ist daher ebenso dargestellt. Setzt man also

$$P = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^4,$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2,$$

so ist die Gleichung der Curve vierter Ordnung

$$\Sigma a_{ihkm} x_i x_h x_k x_m = 0$$

in Liniencoordinaten ausgedrückt:

$$P^3-3Q^2 = 0,$$

sobald man in den beiden zugehörigen Formen P und Q die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_h a_k a_m = b_i b_h b_k b_m = c_i c_h c_k c_m = a_{ihkm}$$

ausgeführt denkt.

Die beiden Fundamentalformen P und Q sind respective von der vierten und sechsten Ordnung in Bezug auf die Veränderlichen u, von der zweiten und dritten in Beziehung auf die Coefficienten der Curvengleichung. Ich werde einige merkwürdige Eigenschaften derselben hier entwickeln, indem ich mir vorbehalte, auf andere bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung (1.) durch α, β, γ, δ, so sind (s. die angeführte Abhandlung des Herrn *Hermite*) die Wurzeln der Gleichung

$$4\Theta^3-i\Theta+j = 0$$

folgende:

$$\Theta_1 = \frac{a}{12}\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\},$$

$$\Theta_2 = \frac{a}{12}\{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\},$$

$$\Theta_3 = \frac{a}{12}\{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}.$$

Von diesen Grössen verschwindet *eine*, sobald die vier Punkte einer geraden Linie, deren Abstände von einem festen Punkte α, β, γ, δ bedeuten können, harmonisch sind; und sie verschwinden *sämmtlich*, sobald drei Wurzeln der biquadratischen Gleichung einander gleich werden. Im ersten Falle also muss j verschwinden, im zweiten Falle ausser j noch i.

Ist also $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ eine Gerade, welche die Curve vierter Ordnung in vier harmonischen Punkten schneidet, so muss für die entsprechenden Werthe der u die aus der Erweiterung von j entstandene Form verschwinden. Dies giebt das

Theorem XIV.

Die Linien, welche die Curve vierter Ordnung in vier harmonischen Punkten schneiden, umhüllen eine Curve vierter Klasse

$$Q = 0,$$

deren Coefficienten von der dritten Ordnung in Bezug auf die Coefficienten der gegebenen Curve sind.

Für die Wendetangenten der Curve aber, welche dieselbe in drei zusammenfallenden Punkten schneiden, muss neben $Q = 0$ auch noch die aus $i = 0$ abgeleitete Gleichung

$$P = 0$$

bestehen; und es zeigt sich daher das merkwürdige Resultat, dass, so wie die *Wendepunkte* sich als Schnittpunkte der Curve vierter Ordnung mit einer Curve sechster Ordnung darstellen, *ebenso die Wendetangenten direct als die gemeinschaftlichen Tangenten einer Curve vierter Klasse und einer Curve sechster Klasse gefunden werden können.*

Es ist durch geometrische Betrachtungen bewiesen, dass im Allgemeinen jede Wendetangente einer algebraischen Curve in ihrer Darstellung durch Liniencoordinaten, bei welcher zu der gegebenen Curve nothwendig noch andere Zweige hinzutreten, als Rückkehrtangente auftritt. Aber es ist mir nicht bekannt, dass dieses bisher an einem algebraischen Ausdruck direct nachgewiesen wäre. Es ist daher nicht ohne Wichtigkeit, dass die vorliegende Form der Gleichung einer Curve vierter Ordnung dies ohne Weiteres zeigt. Da für die Wendetangenten P und Q verschwinden, so reduciren sich diese Functionen für Tangenten, welche den Wendetangenten sehr nahe kommen, auf dP und dQ, und die Gleichung der Curve reducirt sich mit Beibehaltung allein der Grössen niedrigster Ordnung auf

$$(dQ)^2 = 0.$$

In dem Punkte, dessen Gleichung

$$(2.)\qquad U_1\frac{\partial Q}{\partial u_1}+U_2\frac{\partial Q}{\partial u_2}+U_3\frac{\partial Q}{\partial u_3}=0,$$

wobei $P=0$ und $Q=0$, berührt also die Wendetangente zwei verschiedene Zweige der Curve

$$P^3-3Q^2 = 0.$$

Dieser Punkt ist also ein Rückkehrpunkt der letzteren Curve und ein Wendepunkt der ursprünglich gegebenen. Man bemerkt endlich, dass (2.) nichts anderes ist als die Gleichung des Punktes von $Q=0$, in welchem diese Curve von der Wendetangente berührt wird; die Wendepunkte gehören also sämmtlich der Curve $Q=0$ an. Ich fasse diese Bemerkungen zusammen in folgendes

Theorem XV.

Die Curve vierter Ordnung führt, durch Liniencoordinaten ausgedrückt, auf die Curve zwölfter Klasse

$$P^3-3Q^2 = 0,$$

welche ausser jener noch andere Zweige enthält. Jeder Wendepunkt der ersten Curve wird Rückkehrpunkt der zweiten; die Wendetangenten der ersten sind Rückkehrtangenten der anderen, und zwar sind sie die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven vierter und sechster Klasse

$$P=0,\qquad Q=0,$$

wobei noch insbesondere $Q=0$ von den Wendetangenten in den Wendepunkten selbst berührt wird.

Ich bemerke, dass durch diese Betrachtungen eine Frage gelöst wird, welche in der gewöhnlichen Fassung auf Schwierigkeiten führt, nämlich die Frage *nach dem Product der Gleichungen sämmtlicher Wendetangenten,* welches ein rationaler Ausdruck der Coefficienten der Curve, und für die x von der 24^{sten} Ordnung sein muss. Die directe Methode zur Aufstellung dieses Products führt auf die Elimination aus drei Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade. Ist X ein Wendepunkt, $f(X)=0$ die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, so ist die Bedingung dafür, dass x auf der Wendetangente von x liege, ausgedrückt durch die Bedingung, dass in der Entwicklung von

$$f(X+\lambda x)$$

nach Potenzen von λ die drei ersten Glieder verschwinden. Man hat also dann aus den drei Gleichungen

$$f(X)=0,\qquad Df(X)=0,\qquad D^2f(X)=0,$$

welche respective vom vierten, dritten und zweiten Grade sind, die Unbekannten X zu eliminiren. Aber statt dessen kann man dem Obigen zufolge die u aus den Gleichungen

$$P=0,\quad Q=0,$$
$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

eliminiren, welche ausdrücken, dass x auf einer Wendetangente liege, und welche für die u respective vom vierten, sechsten und ersten Grade sind. Da diese Aufgabe nach dem Vorigen auf die Elimination aus zwei Gleichungen vom vierten und sechsten Grade zurückkommt, so ist die vorliegende Frage prinzipiell erledigt. Und man ist ausserdem, was wichtig ist, in der gegenwärtigen Form sicher, die schliessliche Gleichung ohne einen die x enthaltenden überflüssigen Factor zu erhalten, da die Endgleichung offenbar für die x vom 24^{sten} Grade wird, während dies in der ersten Fassung keineswegs ersichtlich ist. Ich füge daher dem Obigen noch das Theorem hinzu:

Theorem XVI.

Um das Product der Gleichungen aller Wendetangenten der Curven vierter Ordnung zu erhalten, hat man nur die u aus den Gleichungen

$$P=0,\quad Q=0,$$
$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

zu eliminiren, eine Aufgabe, welche durch die Theoreme I. *und* VII. *erledigt wird, und welche die Endgleichung ohne einen, die x enthaltenden überflüssigen Factor giebt.*

§. 14.

Das Problem der Doppeltangenten. Fall der Curven vierter Ordnung.

Auch für die Untersuchung der Doppeltangenten bietet die vorliegende Methode eigenthümliche Gesichtspunkte dar. Sei im Allgemeinen $R=0$ die Gleichung, welche ausdrückt, dass eine Gleichung n^{ten} Grades zwei gleiche Wurzeln hat, und sei in symbolischer Form

$$R = \Sigma\lambda\,.\,\Pi\Sigma\pm a_1 b_2\,.$$

Wenn sodann die gegebene Gleichung *zwei Paare* gleicher Wurzeln enthalten soll, so muss nicht nur R verschwinden, sondern auch die Differentialquotienten von R, genommen nach den Coefficienten der gegebenen Gleichung, müssen sämmtlich verschwinden. Ich will der Vollständigkeit wegen einen Beweis dieses Satzes hierhersetzen.

Die gegebene Gleichung sei

$$(1.)\qquad \varphi(x) = ax^n + nbx^{n-1} + \cdots = 0,$$

und die Wurzeln derselben seien

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n.$$

Dann ist bekanntlich

$$(2.)\qquad R = \mu\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\}^2,$$

wo μ einen constanten Factor bedeutet. Man kann R ebensowohl als Function der $n+1$ Grössen $a, b \ldots$, wie als Function der $n+1$ Grössen $\mu, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ ansehen; und indem man beiden Systemen von Argumenten kleine Veränderungen ertheilt, erhält man aus (2.) die Gleichung:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a}\delta a + \dfrac{\partial R}{\partial b}\delta b + \cdots \\ = \delta\mu(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2 \\ + 2\mu\{(\delta\alpha_1-\delta\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2+\cdots\}. \end{cases}$$

Deutet man nun durch $\triangle\varphi(x)$ an, dass in φ nur die Coefficienten $a, b \ldots$, nicht aber das Argument variirt werden solle, so ist

$$\triangle\varphi(\alpha_i) + \varphi'(\alpha_i).\delta\alpha_i = 0,$$

daher

$$\delta\alpha_1 - \delta\alpha_2 = \frac{\triangle\varphi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)} - \frac{\triangle\varphi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}.$$

Und mit Hülfe dieser Ausdrücke kann man der Gleichung (3.) folgende Form geben:

$$\frac{\partial R}{\partial a}\delta a + \frac{\partial R}{\partial b}\delta b + \cdots$$

$$= \delta\mu(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$$

$$+ 2\mu\left\{\left(\frac{\;\frac{\triangle\varphi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)}\;}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{\;\frac{\triangle\varphi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}\;}{\alpha_2-\alpha_1}\right)(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2+\cdots\right\}.$$

Die Nenner $\dfrac{\varphi'(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}$ etc. sind immer ganze Functionen der α, und gehen in den Producten

$$(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2 \text{ etc.}$$

jedesmal vollständig auf. Setzt man also in der vorliegenden Gleichung $\alpha_1=\alpha_2$, so kann nirgend ein Nenner eine Unendlichkeit herbeiführen, ebenso wenig, als wenn ausserdem noch $\alpha_3=\alpha_4$ gesetzt wird. Durch die erste Operation geht aber die rechte Seite der vorliegenden Gleichung über in:

$$2\mu\left(\frac{\frac{\triangle\varphi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)}}{\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\frac{\triangle\varphi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}}{\alpha_2-\alpha_1}\right)(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2,$$

oder da nach (1.)

$$\varphi'(\alpha_1) = a.(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\dots(\alpha_1-\alpha_n),$$
$$\varphi'(\alpha_2) = a.(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\dots(\alpha_2-\alpha_n)$$

ist, in

$$-2\mu\left\{\begin{array}{l}\triangle\varphi(\alpha_2).(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\dots(\alpha_2-\alpha_3)\,(\alpha_2-\alpha_4)\,\dots(\alpha_3-\alpha_4)^2\dots\\+\triangle\varphi(\alpha_1).(\alpha_1-\alpha_3)\,(\alpha_1-\alpha_4)\,\dots(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2\dots(\alpha_3-\alpha_4)^2\dots\end{array}\right\}.$$

Setzt man noch $\alpha_3=\alpha_4$, so verschwindet dies identisch, und die Gleichung (3.) giebt also, wenn zwei Paare gleicher Wurzeln existiren:

$$(4.)\qquad \frac{\partial R}{\partial a}\delta a+\frac{\partial R}{\partial b}\delta b+\cdots = 0,$$

oder, da die Variationen ganz willkürlich sein konnten,

$$(5.)\qquad \frac{\partial R}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial b}=0,\quad \dots,$$

was zu beweisen war.

Die Gleichung (4.) aber gestattet es, die Bedingung zweier gleichen Wurzelpaare noch auf andere Weise einfach auszusprechen. Da die Variationen δa, δb ... beliebig sind, so kann man sie durch die Coefficienten einer beliebigen anderen Form

$$\alpha x^n+n\beta x^{n-1}+\cdots$$

ersetzen; und ist dann

$$S = \alpha\frac{\partial R}{\partial a}+\beta\frac{\partial R}{\partial b}+\cdots,$$

so ist

$$S = 0,$$

diese Gleichung *unabhängig von den Werthen der* α, β erfüllt gedacht, die Bedingung, unter welcher die gegebene Gleichung zwei gleiche Wurzelpaare zulässt.

Den Ausdruck S aber kann man offenbar dadurch bilden, dass man die symbolische Form für R ebenso oft hinschreibt als dieselbe symbolische Coefficientenreihen enthält, jedesmal für alle Reihen bis auf eine die gegebenen symbolischen Substitutionen ausführt, für eine einzige Reihe aber, und jedesmal für eine andere, eine neue und zwar ganz beliebige bestimmte symbolische Substitution eintreten lässt. Die Summe aller so erhaltenen Ausdrücke ist dann der symbolische Ausdruck für S.

In dem Falle z. B. der Gleichungen vierter Ordnung, wo

$$R = \tfrac{1}{8}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a''_1 & a''_2 \\ b''_1 & b''_2 \end{vmatrix}^4$$

$$-\tfrac{3}{4}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ c'_1 & c'_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c'_1 & c'_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix}^2,$$

(es sind in der Formel $i^3 - 27j^2$ des §. 13 nur für die verschiedenen Factoren i, j verschiedene symbolische Substitutionen gebraucht) würde, um S zu bilden, dieser Ausdruck sechsmal hinzuschreiben, und jedesmal eines der Systeme a, b, c durch ein neues, fremdes System s zu ersetzen sein. Aber man bemerkt leicht, dass die wirklichen Werthe der so erhaltenen sechs Formen sich nicht von einander unterscheiden; indem man also nur einer davon den Factor 6 giebt, erhält man S in der Form

$$\tfrac{1}{6}S = \tfrac{1}{8}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a''_1 & a''_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^4$$

$$-\tfrac{3}{4}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix}^2;$$

oder, wenn man wieder i und j einführt, und ausserdem der Analogie wegen durch i_s und j_s die beiden Formen:

$$i_s = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^4$$

$$j_s = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2$$

bezeichnet:

$$\tfrac{1}{6}S = i^2 . i_s - 27 j . j_s .$$

Diese Art, die Bedingung für zwei Paar gleicher Wurzeln auszusprechen, ist insofern von Interesse, als sie den unmittelbaren Uebergang zu den Doppeltangenten algebraischer Curven mit Hülfe des Theorems VII. gestattet. Betrachtet man S als simultane Invariante der beiden Formen

$$(5.)\quad \begin{cases} ax^n + nbx^{n-1} + \cdots, \\ \alpha x^n + n\beta x^{n-1} + \cdots, \end{cases}$$

zu deren zweiter die symbolischen Coefficienten s gehören, während alle anderen sich auf die erste beziehen, so kann man beide Formen und zugleich die Invariante S entstanden denken, indem man zwei Formen mit drei Veränderlichen mit Hülfe einer linearen Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

reducirt hat. Um die Invariante S dann durch die Coefficienten der ursprünglichen Formen auszudrücken, hat man nur nach dem genannten Theorem zu verfahren; und der genommene Ausdruck, gleich Null gesetzt, stellt dann die Bedingung dar, unter welcher eine gegebene Curve (die dem ersten der Ausdrücke (5.) entsprechende Form gleich Null gesetzt) von der Geraden

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

in zwei Punkten berührt wird; vorausgesetzt, dass diese Bedingung erfüllt wird für jede beliebige Function, welche der zweiten Form (5.) entsprechend gewählt werden kann. Die resultirende Form aber entsteht dann aus der erweiterten Form von R ebenso, wie S aus R selbst; und dies führt auf folgendes

Theorem XVII.

Wenn man die Gleichung einer Curve durch Liniencoordinaten in symbolischer Form darstellt, diesen Ausdruck ebenso oft aufschreibt, als er symbolische Coefficientenreihen enthält; wenn man jedesmal eine (und jedesmal eine andere) dieser Coefficientenreihen durch eine bestimmte aber ganz beliebige fremde symbolische Substitution, die anderen aber durch die ursprüngliche auf wirkliche Grössen reducirt, so ist die Summe aller erhaltenen Ausdrücke, gleich Null gesetzt, unter der Voraussetzung, dass die fremden Coefficienten ganz beliebige Werthe sollen annehmen können, die Bedingung dafür, dass u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer Doppeltangente seien.

Für die Curven vierter Ordnung entsteht auf diese Weise aus der Gleichung

$$P^3 - 3Q^2 = 0$$

die Gleichung

$$(6.)\qquad P^2 P_s - 3 Q Q_s = 0,$$

wo, analog den oben eingeführten Bezeichnungen von i_s und j_s,

$$(7.)\quad \begin{cases} P_s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}^4, \\ Q_s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 \end{cases}$$

gesetzt ist. Und zwar ist offenbar in (6.) diejenige Lösung auszuschliessen, welche in der gleichzeitigen Erfüllung der Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

besteht, da diese Gleichungen, wie oben gezeigt ist, auf die Wendetangenten führen.

Es ist vielleicht bemerkenswerth, dass es genügt, die Gleichung (6.) unter der Form

$$Q_s = \lambda . P_s$$

darzustellen; weil, indem man den s alle möglichen Werthsysteme giebt, von selbst

$$\lambda = \frac{P^2}{3Q} \quad \text{und} \quad P^3 = 3Q^2$$

folgt. Ich werde, statt diesen Satz zu beweisen, zeigen, dass aus den in der Gleichung

$$j_s = \lambda . i_s$$

enthaltenen Bedingungen immer

$$\lambda = \frac{i^2}{27j} \quad \text{und} \quad i^3 = 27j^2$$

folgt. Dies ist einfach zu beweisen, und zieht das vorher Behauptete ohne Weiteres nach sich, immer durch blosse Anwendung des Theorems VII.

Die gegebene Gleichung vierten Grades sei wieder wie in §. 13:

$$\varphi = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$$

Die Gleichung

$$j_s = \lambda . i_s$$

involvirt dann, da

$$i_s = \tfrac{1}{2}\left(s_1^4 \frac{\partial i}{\partial a} + 4 s_1^3 s_2 \frac{\partial i}{\partial b} + \cdots\right),$$

$$j_s = \tfrac{1}{3}\left(s_1^4 \frac{\partial j}{\partial a} + 4 s_1^3 s_2 \frac{\partial j}{\partial b} + \cdots\right)$$

ist, folgende Gleichungen:

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial a} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial a} \quad \text{oder:} \quad \tfrac{1}{3}(ce - d^2) = \frac{\lambda e}{2},$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial b} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial b} \quad - \quad \tfrac{1}{3}(2eb - 2dc) = \frac{4\lambda d}{2},$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial c} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial c} \quad - \quad \tfrac{1}{3}(ae + 2bd - 3c^2) = \frac{6\lambda c}{2},$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial d} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial d} \quad \text{oder:} \quad \tfrac{1}{3}(2ad-2bc) = \frac{4\lambda b}{2},$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial e} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial e} \quad - \quad \tfrac{1}{3}(ac-b^2) = \frac{\lambda a}{2}\,{}^{*}).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a, b, c \ldots$, so erhält man

$$\lambda . i = j.$$

Multiplicirt man aber die rechts stehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial j}{\partial e},\quad \tfrac{1}{4}\frac{\partial j}{\partial d},\quad \tfrac{1}{6}\frac{\partial j}{\partial c},\quad \tfrac{1}{4}\frac{\partial j}{\partial b},\quad \frac{\partial j}{\partial a},$$

so kommt:

$$\frac{3\lambda j}{2} = \tfrac{1}{3}\left(2\frac{\partial j}{\partial a}\frac{\partial j}{\partial e} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial j}{\partial d}\frac{\partial j}{\partial b} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial j}{\partial c}\right)^2\right) = \frac{i^2}{18}.$$

Aus beiden Gleichungen zusammen folgt

$$\lambda = \frac{j}{i} = \frac{i^2}{27j}, \quad \text{und} \quad i^3 = 27j^2,$$

was zu beweisen war.

Man kann sonach für die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung das folgende Theorem aufstellen:

Theorem XVIII.

Wenn man die Grössen u_1, u_2, u_3 so bestimmt, dass der Gleichung

$$Q_s = \lambda P_s \quad \text{(vgl. 7)}$$

für alle Werthe der s Genüge geschieht, so sind u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer Doppeltangente der Curve vierter Ordnung.

Hieran knüpft sich ein anderes Theorem. Lassen wir an die Stelle der s irgend andere Grössen t treten, so muss für dieselben Doppeltangenten auch

$$Q_t = \lambda P_t$$

sein, wo λ, da es nach dem Vorigen von den Grössen s und t unabhängig

---

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit die beiden folgenden Darstellungen, welche vielleicht nicht bekannt sind, und wo Δ die Determinante von φ ist, dividirt durch 36:

$$\varphi = \frac{\partial i}{\partial e}x^4 - \frac{\partial i}{\partial d}x^3 + \frac{\partial i}{\partial c}x^2 - \frac{\partial i}{\partial b}x + \frac{\partial i}{\partial a},$$

$$\Delta = \frac{\partial j}{\partial e}x^4 - \frac{\partial j}{\partial d}x^3 + \frac{\partial j}{\partial c}x^2 - \frac{\partial j}{\partial b}x + \frac{\partial j}{\partial a},$$

nach welchen die obigen Bedingungsgleichungen einfach dahin ausgesprochen werden können, *dass ihnen zufolge die Determinante von φ sich von φ selbst nur durch einen constanten Factor unterscheide.*

ist, unverändert bleibt. Oder es ist:

$$Q_s.P_t - Q_t.P_s = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Systems von Curven zehnter Classe, welche die Grössen s, t als willkürliche Parameter enthalten; und alle Curven des Systems werden offenbar von den Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung berührt, da für diese die Functionen $Q_s - \lambda P_s$, $Q_t - \lambda P_t$ unabhängig von den Werthen der s und t verschwinden. Man hat also den Satz:

Theorem XIX.

Die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung sind zugleich gemeinschaftliche Tangenten sämmtlicher Curven des Systems von Curven zehnter Klasse:

$$Q_s.P_t - Q_t.P_s = 0,$$

in welchen die Grössen t und s willkürliche Parameter bezeichnen.

Es mag noch bemerkt werden, dass dies System offenbar keine anderen, allen Curven gemeinschaftlichen Tangenten zulässt.

§. 15.

Das Problem, eine Curve n^{ter} Ordnung in Liniencoordinaten darzustellen, wird auf eine grössere Anzahl von Variablen ausgedehnt.

Das in §. 11 behandelte Problem ist nur ein specieller Fall eines Problems, welches durch die gegenwärtige Betrachtungsweise zwar nicht, wie jenes, vollständig erledigt wird, welches aber dennoch durch dieselbe eine wesentliche Reduction erfährt, und dadurch in eine Form gebracht wird, welche vollständige Gradbestimmungen ermöglicht.

Es sei f eine homogene Function von r Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$; und die Aufgabe bestehe darin, aus den Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = u_1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = u_2, \quad \dots \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_r} = u_r, \\ u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_r x_r = 0 \end{cases}$$

die Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$ zu eliminiren. Die Gleichungen (1.) kann man aber ersetzen durch die Gleichung $u = 0$ zusammen mit der symbolischen Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_r}\delta x_r = u_1\delta x_1 + u_2\delta x_2 + \dots + u_r\delta x_r,$$

oder kürzer:

$$\delta(f-u) = 0.$$

Führt man nun in f statt der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$ neue Veränderliche $u, X_1, X_2, \dots X_{r-1}$ ein, welche mit jenen auf lineare Weise zusammenhängen, so nimmt diese symbolische Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\delta u+\frac{\partial f}{\partial X_1}\delta X_1+\frac{\partial f}{\partial X_2}\delta X_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial X_{r-1}}\delta X_{r-1}-\delta u \;=\; 0,$$

und hieraus folgen die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial X_2}=0,\quad \dots\quad \frac{\partial f}{\partial X_{r-1}}=0.$$

Von diesen aber kann man die erste fortlassen, da die linken Theile der anderen mit Hülfe der Gleichung $u=0$ in homogene Functionen der Veränderlichen $X_1, X_2, \dots X_{r-1}$ übergehen, und also zur Elimination dieser $r-1$ Veränderlichen vollkommen ausreichend sind. Auf diese Weise kommt dann die Aufgabe, aus den Gleichungen (1.) die Grössen x zu eliminiren, auf die andere zurück, aus den Gleichungen

$$(2.)\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2}=0,\quad \dots\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-1}}=0$$

die X zu eliminiren, wo f_0 eine Function bedeutet, welche aus f durch Anwendung der linearen Gleichung $u=0$ abgeleitet wird. Ob man die Gleichung $u=0$ zur Umformung von f vor oder nach der in Bezug auf die X auszuführenden Differentiation anwendet, ist deswegen gleichgültig, weil bei dieser Differentiation u als constant angesehen wird.

Das Resultat der Elimination aus (2.) ist eine Invariante von f_0; und die Aufgabe besteht, wenn diese gefunden ist, darin, dieselbe durch die Coefficienten der gegebenen Function f auszudrücken. Dies geschieht aber wieder mit Hülfe des Theorems VII.; und demgemäss kann man den Gang, der zur Lösung des in den Gleichungen (1.) enthaltenen Problems einzuschlagen ist, in folgendes Theorem zusammenfassen:

Theorem XX.

Um aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=u_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=u_2,\quad \dots\quad \frac{\partial f}{\partial x_r}=u_r,$$

$$u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_rx_r \;=\; 0,$$

wo f eine homogene Function der x von der n^{ten} Ordnung ist, die r Grössen x zu eliminiren, bilde man zunächst die Eliminationsgleichung für das System

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2}=0,\quad \ldots\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-1}}=0,$$

wo f_0 eine Function der $r-1$ Grössen X von der n^{ten} Ordnung bedeutet, und setze sie in die symbolische Form

$$(3.)\qquad 0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma\pm a_1 b_2\ldots n_{r-1}).$$

Sodann ist die, durch Erweiterung der symbolischen Determinanten entstehende Gleichung

$$(4.)\qquad 0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma\pm a_1 b_2\ldots n_{r-1}u_r)$$

die symbolische Form der gesuchten Eliminationsgleichung, und man erhält aus derselben die wirkliche Gleichung, indem man die Producte

$$a_i a_k\ldots = b_i b_k\ldots \text{ etc.}$$

durch die entsprechenden Coefficienten der gegebenen Function f ersetzt.

Die aus dem System (2.) hervorgehende Endgleichung ist aber nothwendig für die Coefficienten jeder Gleichung vom $(n-1)^{r-1\,\text{ten}}$ Grade, mithin vom $(r-1)(n-1)^{r-2\,\text{ten}}$ Grade in Bezug auf die Coefficienten von f_0. Von demselben Grade muss also auch die Endgleichung des Systems (1.) in Bezug auf die Coefficienten von f sein. Da ferner die erstgenannte Endgleichung (3.) in Bezug auf die symbolischen Coefficienten vom Grade $n(r-1)(n-1)^{r-2}$ sein muss, so ergiebt sich daraus die Anzahl der Determinanten, welche in jedem Gliede der Form (3.) mit einander multiplicirt erscheinen, gleich $n(n-1)^{r-2}$, und dies muss also der Grad der Endgleichung (4.) des Systems (1.) in Bezug auf die u sein. Diese Bestimmungen geben folgendes Theorem:

Theorem XXI.

Die Gleichung, welche aus dem System

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=u_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=u_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial f}{\partial x_r}=u_r,$$

$$u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_rx_r = 0$$

durch Elimination der x hervorgeht, ist, wenn f eine homogene Function n^{ter} Ordnung bedeutet, von der Ordnung $(r-1)(n-1)^{r-2}$ in Bezug auf die Coefficienten von f, und von der Ordnung $n(n-1)^{r-2}$ in Bezug auf die Coefficienten u.

§. 16.

Ueber die Darstellung der Oberflächen n^{ter} Ordnung durch Gleichungen in Ebenencoordinaten.

Da diese Resultate auf den Fall $r=3$ im Vorigen bereits angewandt sind, so ist der nächste Fall der Anwendung, welcher sich darbietet, $r=4$, oder die Aufgabe, *eine Oberfläche durch Ebenencoordinaten darzustellen.* Die Specialisirung des Theorems XXI. giebt für diesen Fall sofort:

Theorem XXII.

Die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten ist vom Grade $n(n-1)^2$ in Bezug auf die Ebenencoordinaten selbst, und vom Grade $4(n-1)^2$ in Bezug auf die Coefficienten der Punktgleichung.

Die erste dieser Zahlen hat, auf einem ganz anderen Wege, Herr *Salmon* erhalten (Transactions of the royal Irish academy, vol. XXIII, p. 464).

In Bezug auf das Theorem XX. ist zu bemerken, dass die aus dem System

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_3} = 0$$

entspringende Endgleichung nichts anderes ist, als die Bedingung, unter welcher eine Curve n^{ter} Ordnung $f_0 = 0$ einen Doppelpunkt hat, und somit lässt sich dies Theorem folgendermassen specialisiren:

Theorem XXIII.

Um eine Oberfläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten darzustellen, bilde man die Bedingung, unter welcher eine Curve n^{ter} Ordnung einen Doppelpunkt hat, und setze sie in die symbolische Form

$$0 = \Sigma\lambda\,\Pi(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3).$$

Dann ist

$$0 = \Sigma\lambda\,\Pi(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 u_4)$$

die symbolische Form der gesuchten Gleichung der Oberfläche.

Es ist zu bemerken, dass die hier geforderten Operationen, in Folge der von Herrn *Sylvester* aufgestellten Methode, drei Veränderliche aus drei homogenen Gleichungen von gleichem Grade zu eliminiren, sämmtlich bekannt sind. Man kann also die Aufgabe, eine algebraische Fläche durch eine Gleichung in Ebenencoordinaten auszudrücken, im Princip als erledigt betrachten; wenn ich indess hier nur die zweite und dritte Ordnung näher beleuchten werde, so geschieht es deswegen, weil die Doppelpunktsbedingung für höhere Ordnungen bisher in einer vollkommen übersichtlichen Form nicht hat gegeben werden können.

Die Bedingung, unter welcher ein Kegelschnitt

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{33} x_3^2 = 0$$

einen Doppelpunkt erhält, ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man in dieser Gleichung die symbolischen Substitutionen ein:

$$a_{ik} = a_i a_k = b_i b_k = c_i c_k,$$

so erhält man zunächst:

$$a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man die a, b, c auf alle Weisen mit einander vertauscht und die Summen aller entstehenden Formen nimmt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Daher ist die symbolische Form für die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Liniencoordinaten:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^2 = 0,$$

oder, wenn

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{44} x_4^2 = 0$$

die Punktgleichung der Oberfläche ist, und man wieder durch die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_k = b_i b_k = c_i c_k = a_{ik}$$

zu wirklichen Coefficienten zurückkehrt,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welches die bekannte gewöhnliche Form ist.

§. 17.

Oberfläche dritter Ordnung in Ebenencoordinaten dargestellt.

Herr *Aronhold* hat die Bedingungsgleichung für den Doppelpunkt einer Curve dritter Ordnung in der Form

$$T^2 - S^3 = 0$$

gegeben, wo die Invarianten T und S definirt sind durch die folgenden beiden symbolischen Darstellungen (dieses Journal Bd. 55, p. 106 und 145):

$$S = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$T = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}^2.$$

Setzt man also jetzt:

$$\Sigma = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix}^2,$$

und ersetzt in diesen Formen die Producte

$$a_i a_k a_h, \quad b_i b_k b_h, \quad \dots \quad f_i f_k f_h$$

durch die entsprechenden Coefficienten der Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, so ist die Gleichung dieser Fläche in Ebenencoordinaten nach dem Vorigen

$$\mathrm{T}^2 - \Sigma^3 = 0.$$

Dies ist eine ganz ähnliche Form wie die oben für Curven vierter Ordnung gefundene. Es mag dabei bemerkt sein, dass man diese Gleichung in anderer Form auch genau ebenso aufstellen kann, wie Herr *Hesse* dies in Bezug auf die Curven vierter Ordnung (dieses Journal Bd. 41) gethan hat. Doch sind jene Darstellungen von den hier gegebenen so verschieden, dass der Nachweis einer thatsächlichen Uebereinstimmung beider Formen zu den schwierigsten Problemen der Algebra gehören dürfte.

Von den beiden Formen Σ, T ist die erste vierter Ordnung in Bezug auf die Veränderlichen u und ebenso in Bezug auf die Coefficienten der gegebenen Fläche, die andere in beiden Beziehungen sechster Ordnung. Die beiden Gleichungen, welche entstehen, indem man diese Formen gleich Null setzt, stellen selbst zwei Oberflächen dar, welche mit der gegebenen Fläche in einer einfachen Beziehung stehen. Denn die Tangentenebenen der Fläche $\Sigma = 0$ sind offenbar solche Ebenen, welche die gegebene Fläche in Curven schneiden, für die $S = 0$ ist; so wie die Tangentenebenen von $\mathrm{T} = 0$ die gegebene Fläche in Curven schneiden, für die $T = 0$ ist. Da nun, wie ich in einem früheren Aufsatz nachgewiesen habe, die geometrische Bedeutung von $S = 0$ darin besteht, dass die Wendetangenten der Schnittcurve zu drei durch drei Punkte gehen, sowie die Bedeutung von $T = 0$ darin, dass die Schnittcurve und ihre Determinante wechselweise von ihren Wendetangenten berührt werden, so kann man folgendes Theorem aufstellen:

Theorem XXIV.

Alle Ebenen, von denen eine Fläche dritter Ordnung so geschnitten wird, dass die Wendetangenten der Schnittcurve zu dreien durch drei Punkte gehen, umhüllen eine Fläche vierter Klasse

$$\Sigma = 0.$$

Alle Ebenen hingegen, von denen die Fläche so geschnitten wird, dass die Schnittcurve und ihre Determinante jede die Wendetangenten der anderen berührt, umhüllen eine Fläche sechster Klasse

$$\mathrm{T} = 0.$$

Aus den Ausdrücken Σ und T *setzt sich die Gleichung der Fläche dritter Ordnung in Ebenencoordinaten so zusammen, dass sie die Gestalt annimmt:*

$$(1.) \qquad \mathrm{T}^2 - \Sigma^3 = 0.$$

Die gemeinschaftlichen Tangentenebenen der beiden Flächen $\Sigma = 0$, $\mathrm{T} = 0$ sind daher auch Tangentenebenen der Oberfläche dritter Ordnung selbst. Die Fläche aber, in welche dieselbe, durch das Hinzutreten neuer Zweige, bei ihrer Darstellung in Liniencoordinaten übergeht, geht, wenn man Tangentenebenen betrachtet, welche den gedachten sehr nahe liegen, über in

$$(d\mathrm{T})^2 = 0.$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass jede dieser Ebenen zwei verschiedene

Zweige der Oberfläche (1.) in demselben Punkte berührt, und zwar in demselben Punkte, in welchem auch die Fläche $\mathrm{T}=0$ von jenen Ebenen berührt wird. Diese Berührungspunkte aber kann man noch in anderer Beziehung betrachten. Denn für die Schnittcurve der fraglichen Ebenen mit der gegebenen Fläche dritter Ordnung verschwinden beide Invarianten S und T, und diese Curven haben also im Berührungspunkte einen Rückkehrpunkt; diese Punkte aber bilden bekanntlich die *Wendecurve* der Fläche, in welcher dieselbe von der Determinantenfläche geschnitten wird. Längs dieser Curve also berühren sich zwei Zweige der Fläche

$$\mathrm{T}^2-\Sigma^3 = 0,$$

und auch die Fläche $\mathrm{T}=0$ geht durch die Wendecurve hindurch. Ich fasse diese Bemerkungen in folgendem Theorem zusammen:

Theorem XXV.

Die Oberfläche, welche aus einer Fläche dritter Ordnung bei ihrer Darstellung durch Ebenencoordinaten entsteht, enthält zwei Zweige, welche sich in der Wendecurve der Fläche dritter Ordnung berühren. Durch dieselbe Curve geht auch die Fläche sechster Klasse $\mathrm{T}=0$, *(vgl. das vorige Theorem); und die Tangentenebenen der Oberfläche in den Punkten der Wendecurve berühren nicht blos jene beiden Zweige, sondern in denselben Punkten auch die Fläche* $\mathrm{T}=0$. *Dieselben berühren ferner auch* $\Sigma=0$, *und zwar bilden sie das vollständige System von gemeinschaftlichen Tangentenebenen, welches den Flächen* $\Sigma=0$, $\mathrm{T}=0$ *zukommt.*

§. 18.

Ebener Schnitt einer Oberfläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten dargestellt.

Das Problem des §. 15 kann man noch etwas verallgemeinern, und zwar in folgender Weise.

Es sei f eine Function n^{ter} Ordnung mit r Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$. Seien ferner folgende s lineare Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= u_1^{(1)} x_1+u_2^{(1)} x_2+\dots+u_r^{(1)} x_r,\\
u^{(2)} &= u_1^{(2)} x_1+u_2^{(2)} x_2+\dots+u_r^{(2)} x_r,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
u^{(s)} &= u_1^{(s)} x_1+u_2^{(s)} x_2+\dots+u_r^{(s)} x_r,
\end{aligned}$$

wo $s<r$ sein soll. Das gegebene System soll dann aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad u^{(1)}=0,\quad u^{(2)}=0,\quad \dots\quad u^{(s)}=0$$

bestehen und aus den Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \mu^{(1)} u_1^{(1)} + \mu^{(2)} u_1^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_1^{(s)}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \mu^{(1)} u_2^{(1)} + \mu^{(2)} u_2^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_2^{(s)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_r} = \mu^{(1)} u_r^{(1)} + \mu^{(2)} u_r^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_r^{(s)}, \end{cases}$$

in welchen $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, ... $\mu^{(s)}$ unbestimmte Factoren bedeuten. Diese letzten Gleichungen kann man wieder in die symbolische Form zusammenfassen:

$$(3.)\quad \delta f = \mu^{(1)} \delta u^{(1)} + \mu^{(2)} \delta u^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} \delta u^{(s)}.$$

Führt man also als unabhängige Veränderliche $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ... $u^{(s)}$, X_1, X_2, ... X_{r-s} ein, so verwandelt sich mit Rücksicht auf (1.) die Function f in eine Function f_0 der $r-s$ Veränderlichen X_1, X_2, ... X_{r-s}, und aus der symbolischen Gleichung (3.) erhält man:

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-s}} = 0.$$

Die Aufgabe ist also auf die Elimination der X aus diesen Gleichungen zurückgeführt, und mit Hülfe des Theorems VIII. wird also die Elimination der x aus den Gleichungen (1.), (2.) auf folgende Weise zu bewerkstelligen sein:

Theorem XXVI.

Um aus den Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \mu^{(1)} u_1^{(1)} + \mu^{(2)} u_1^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_1^{(s)}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \mu^{(1)} u_2^{(1)} + \mu^{(2)} u_2^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_2^{(s)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_r} = \mu^{(1)} u_r^{(1)} + \mu^{(2)} u_r^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_r^{(s)}, \\ u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 + \cdots + u_r^{(1)} x_r = 0, \\ u_1^{(2)} x_1 + u_2^{(2)} x_2 + \cdots + u_r^{(2)} x_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_1^{(s)} x_1 + u_2^{(s)} x_2 + \cdots + u_r^{(s)} x_r = 0, \end{cases}$$

wo f eine homogene Function der x von der n^{ten} Ordnung ist, die Grössen x, μ zu eliminiren, bilde man zunächst die Eliminationsgleichung für das System

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-s}} = 0,$$

wo f_0 eine homogene Function der $r-s$ Grössen X von der n^{ten} Ordnung bedeutet, und setze sie in die symbolische Form:

$$(5.)\quad 0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma\pm a_1 b_2\ldots n_{r-s}).$$

Sodann ist die, durch Erweiterung der symbolischen Determinanten entstehende Gleichung:

$$(6.)\quad 0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma\pm a_1 b_2\ldots n_{r-s}u^{(1)}_{r-s+1}u^{(2)}_{r-s+2}\ldots u^{(s)}_r)$$

die symbolische Form der gesuchten Eliminationsresultante; und man erhält aus derselben die wirkliche Gleichung, indem man die Producte

$$a_i a_k\ldots = b_i b_k\ldots \text{ etc.}$$

durch die entsprechenden Coefficienten der gegebenen Function f ersetzt.

Der wirkliche Werth der Gleichung (5.) ist für die Coefficienten von f_0 von der $(r-s)(n-1)^{r-s-1\,ten}$ Ordnung; und von eben dieser Ordnung muss also auch (6.) für die Coefficienten von f sein. Der Ausdruck (5.) ist aber alsdann auch von der Ordnung $n.(r-s).(n-1)^{r-s-1}$ für die symbolischen Coefficienten; und in jedem seiner Terme kommen also $n.(n-1)^{r-s-1}$ symbolische Determinanten mit einander multiplicirt vor. Dies giebt sonach den Satz:

Theorem XXVII.

Die Endgleichung des Systems (4.) ist vom $(r-s)(n-1)^{r-s-1\,ten}$ Grade für die Coefficienten der Function f, und vom $n.(n-1)^{r-s-1\,ten}$ für die Coefficienten jeder der linearen Gleichungen.

Diese Betrachtungen finden in der Raumgeometrie eine Anwendung, wenn man $r=4$, $s=2$ setzt. Denn alsdann wird $f=0$ die Gleichung einer Oberfläche n^{ter} Ordnung, und von den beiden linearen Gleichungen, welche hier durch

$$u = u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4 = 0,$$
$$v = v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4 = 0$$

bezeichnet sein mögen, bezeichne die erste eine beliebige, die zweite eine gegebene Ebene. Das System (4.) drückt so aus, dass die Ebene $u=0$ die Schnittcurve von $f=0$, $v=0$ berühre; und die Eliminationsgleichung wird die Gleichung der ebenen Curve, in welcher $f=0$, $v=0$ sich schneiden, in Ebenencoordinaten. Man hat daher das

Theorem XXVIII.

Um die Gleichung der Schnittcurve einer Ebene

$$v = v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4 = 0$$

mit einer Oberfläche n^{ter} Ordnung $f=0$ in Ebenencoordinaten zu bestimmen, *stelle man die Bedingung, unter welcher eine Gleichung n^{ter} Ordnung zwei gleiche Wurzeln hat, in der symbolischen Form dar:*

$$0 = \Sigma \lambda \Pi (\Sigma \pm a_1 b_2).$$

Es ist dann

$$0 = \Sigma \lambda \Pi (\Sigma \pm a_1 b_2 u_3 v_4)$$

die symbolische Form für die gesuchte Gleichung, und man findet die wirkliche daraus, indem man für die Producte

$$a_i a_k \ldots = b_i b_k \ldots$$

die entsprechenden Coefficienten der Oberflächengleichung einsetzt.

Und aus dem Theorem XXVII. erhält man sogleich:

Theorem XXIX.

Die Gleichung der Schnittcurve einer Ebene mit einer Oberfläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten ist von der $2(n-1)^{ten}$ Ordnung für die Coordinaten der Oberfläche, von der $n.(n-1)^{ten}$ für die Ebenencoordinaten und für die Coefficienten der gegebenen Ebene.

Offenbar kann man auch, statt die symbolische Form der Bedingung zweier gleichen Wurzeln zu benutzen, von der symbolischen Form der Gleichung einer Curve in der Ebene durch Liniencoordinaten dargestellt ausgehen, jede ihrer symbolischen Determinanten um eine Reihe erweitern, und als neue Reihe die Coefficienten der Schnittebene hinzufügen. In dieser Weise erkennt man, dass jede Darstellung einer ebenen Curve in Liniencoordinaten, welche als rationaler Ausdruck einfacherer Invarianten erscheint, eine eben solche Darstellung für ebene Raumcurven gleicher Ordnung bietet. So ist z. B. jeder Schnitt einer Oberfläche vierter Ordnung mit einer Ebene durch eine Gleichung der Form

$$P^3 - 3Q^2 = 0$$

darstellbar, weil die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in Liniencoordinaten diese Gestalt annimmt.

Die angeführten Beispiele und Sätze werden genügen, um den Nutzen erkennen zu lassen, welcher sich aus der Anwendung der hier befolgten Methode für die Erkenntniss des Formenzusammenhanges gewinnen lässt.

Carlsruhe, im September 1860.