Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel.

(Von *C. W. Borchardt.*)

(Gelesen in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 25. Februar 1858.)

Einer sehr frühen Epoche in der Kenntnifs der elliptischen Integrale gehört das Ergebnifs an, dafs die Bestimmung des completen elliptischen Integrals erster Gattung

$$(1.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}}$$

auf die Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels von m und n zurückkommt. Indem man die *Landen*sche oder die *Gaufs*sche Transformation zweiter Ordnung auf das complete Integral (1.) anwendet, findet man, dafs dasselbe unverändert bleibt, wenn man für m und n deren arithmetische und geometrische Mittel $m_1 = \frac{1}{2}(m+n)$, $n_1 = \sqrt{mn}$ setzt. Wiederholt man diese Operation unter Einführung der Bezeichnungen

$$m_2 = \tfrac{1}{2}(m_1+n_1),\quad n_2 = \sqrt{m_1 n_1},$$
$$m_3 = \tfrac{1}{2}(m_2+n_2),\quad n_3 = \sqrt{m_2 n_2},\quad \text{etc.}$$

so nähern sich die beiden Reihen von Gröfsen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ \dots$$
$$n,\ n_1,\ n_2,\ \dots$$

derselben Grenze ω, d. h. dem arithmetisch-geometrischen Mittel von m und n nach *Gaufs*ens Bezeichnung, und der Werth des Integrals (1.) ergiebt sich

$$= \tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{\omega}.$$

Die umgekehrte Aufgabe, von dem arithmetisch-geometrischen Mittel als dem Grenzwerth, auf welchen die wiederholte algebraische Operation führt, auszugehen und dessen Berechnung auf die Bestimmung des elliptischen Integrals zurückzuführen, bietet bedeutend gröfsere Schwierigkeiten dar, in so fern man hierbei die Transformation des elliptischen Integrals nicht voraussetzen darf, also durch andre Mittel zum Ziel gelangen mufs. Der hier folgende Aufsatz beschäftigt sich mit der Lösung dieser Aufgabe.

Das arithmetisch-geometrische Mittel ω von m und n sowie jede Function von ω hat der Definition nach die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man für m und n deren arithmetisches und deren geometrisches Mittel setzt. Sie genügt also der Functionalgleichung

$$(2.)\quad f(m,n) = f(\tfrac{1}{2}(m+n), \sqrt{mn}),$$

und umgekehrt ist jede Function f, welche dieser Gleichung genügt, eine blofse Function von ω, da man durch unendlich oft wiederholte Anwendung $f(m,n) = f(\omega,\omega)$ findet. Die Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels kommt also auf die Lösung obiger Functionalgleichung zurück.

Man sieht der Natur der hier zu lösenden Aufgabe nach voraus, dafs die gesuchte Function $f(m,n)$ einer partiellen Differentialgleichung genügen mufs. Eine weitere Ueberlegung zeigt, dafs diese partielle Differentialgleichung sich durch schickliche Wahl der Unbekannten auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen läfst. Wenn man $q.m$ und $q.n$ an die Stelle von m und n setzt, so geht zugleich ω in $q.\omega$ über; ω ist daher eine homogene Functioh erster Ordnung von m und n, mithin sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\omega}{\partial m}$ und $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ homogene Functionen der Ordnung Null von m und n, d. h. nur von dem Quotienten $\frac{n}{m}$ abhängig. Da überdies $f(m,n)$ eine blofse Function von ω ist, so hat man die Proportion:

$$\frac{\partial f}{\partial m} : \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial\omega}{\partial m} : \frac{\partial\omega}{\partial n}.$$

Der Quotient $\frac{\partial f}{\partial n} : \frac{\partial f}{\partial m}$ ist also für alle Functionen f ein und dieselbe Function von $\frac{n}{m}$, die von einer gewöhnlichen Differentialgleichung abhängt, während f einer partiellen Differentialgleichung genügt. Bezeichnet man mit μ und ν die partiellen Differentialquotienten von f nach m und n, so wird also $\frac{\nu}{\mu}$ die abhängige Variable, $\frac{n}{m}$ die unabhängige Variable der zu suchenden Differentialgleichung sein.

Anstatt nun die Quotienten $\frac{n}{m}$ und $\frac{\nu}{\mu}$ sogleich in die Rechnung einzuführen, thut man gut, die Homogeneität der Variablen beizubehalten. Man hat zwar dann anstatt *eines* Differentialquotienten, der nach $\frac{n}{m}$ genommen ist, die beiden nach m und nach n genommenen zu betrachten, indessen hängen dieselben von einander ab. So hat man z. B. für den ersten Differentialquotienten von $\frac{\nu}{\mu}$

$$0 = m\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\nu}{\mu}\right) + n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$$

oder nach Multiplication mit μ^2

$$0 = m\left\{\mu\frac{\partial \nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial \mu}{\partial m}\right\} + n\left\{\mu\frac{\partial \nu}{\partial n} - \nu\frac{\partial \mu}{\partial n}\right\},$$

so dafs man anstatt des Differentialquotienten von $\frac{\nu}{\mu}$ nach $\frac{n}{m}$ einen Ausdruck, den ich mit l bezeichnen will, zu betrachten hat, welcher durch die Doppelgleichung zu definiren ist

$$(3.)\quad l = m\left\{\mu\frac{\partial \nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial \mu}{\partial m}\right\} = -n\left\{\mu\frac{\partial \nu}{\partial n} - \nu\frac{\partial \mu}{\partial n}\right\}.$$

Um die gesuchte Differentialgleichung zu erhalten, wird man folgendes Verfahren einzuschlagen haben:

Wenn man aus der gegebenen Functionalgleichung (2.):

$$f(m, n) = f(m_1, n_1),$$

wo $m_1 = \frac{1}{2}(m+n)$, $n_1 = \sqrt{mn}$, durch Differentiation neue Gleichungen ableitet, so findet man zwischen den Differentialquotienten von $f(m, n)$ und $f(m_1, n_1)$ Relationen, die weniger einfach sind als die zwischen den Functionen selbst bestehende, die aber doch gestatten, jeden Ausdruck, der m, n, $f(m, n)$ und seine Differentialquotienten nach m und n enthält, in einen andern zu transformiren, welcher aus m_1, n_1, $f(m_1, n_1)$ und dessen Differentialquotienten nach m_1 und n_1 zusammengesetzt ist.

Gelingt es nun, diesen Ausdruck so zu wählen, dafs der transformirte ebenso aus m_1, n_1 und $f(m_1, n_1)$ gebildet ist wie der ursprüngliche aus m, n und $f(m, n)$ oder dafs sie sich wenigstens nur durch einen von der unbekannten Function freien Factor von einander unterscheiden, so wird man durch einen unendlichen Progrefs zur Bestimmung dieses Ausdrucks gelangen, indem man denselben auf einen solchen zurückführt, in welchem m und n beide durch dieselbe Gröfse ω ersetzt sind. Diese Bestimmung wird also zu einer Relation zwischen m, n, $f(m, n)$ und den Differentialquotienten von f führen, d. h. zu der gesuchten Differentialgleichung. An dem vorliegenden Beispiel läfst sich das Verfahren folgendermafsen durchführen:

Bezeichnet man mit μ_1 und ν_1 die nach m_1 und n_1 genommenen Differentialquotienten von $f(m_1, n_1)$, so erhält man durch Differentiation der Gleichung $f(m, n) = f(m_1, n_1)$ nach Fortschaffung der Nenner

$$(4.)\quad \begin{cases} 2\sqrt{m}.\mu = \sqrt{m}.\mu_1 + \sqrt{n}.\nu_1, \\ 2\sqrt{n}.\nu = \sqrt{n}.\mu_1 + \sqrt{m}.\nu_1. \end{cases}$$

Dies sind die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung. Man kann von denselben zu den drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung übergehen, indessen sind dieselben nach der oben angeführten Doppelgleichung (3.) nicht unabhängig von einander, sondern es folgt aus zweien die dritte. Es genügt daher z. B. diejenigen beiden zu betrachten, welche aus den Differentialgleichungen erster Ordnung (4.) durch Differentiation nach m allein hervorgehen. Dies ergiebt

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m}}\mu + 2\sqrt{m}\frac{\partial\mu}{\partial m} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\mu_1 + \left(\sqrt{m}\frac{\partial\mu_1}{\partial m_1} + \sqrt{n}\frac{\partial\nu_1}{\partial m_1}\right)\frac{\partial m_1}{\partial m} + \left(\sqrt{m}\frac{\partial\mu_1}{\partial n_1} + \sqrt{n}\frac{\partial\nu_1}{\partial n_1}\right)\frac{\partial n_1}{\partial m}, \\ 2\sqrt{n}\frac{\partial\nu}{\partial m} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\nu_1 + \left(\sqrt{n}\frac{\partial\mu_1}{\partial m_1} + \sqrt{m}\frac{\partial\nu_1}{\partial m_1}\right)\frac{\partial m_1}{\partial m} + \left(\sqrt{n}\frac{\partial\mu_1}{\partial n_1} + \sqrt{m}\frac{\partial\nu_1}{\partial n_1}\right)\frac{\partial n_1}{\partial m}. \end{cases}$$

Man weifs überdies nach den früheren Betrachtungen, dafs die Differentialquotienten zweiter Ordnung von $f(m, n)$ also die Gröfsen $\frac{\partial\mu}{\partial m}$, $\frac{\partial\nu}{\partial m}$ nur in solcher Verbindung vorkommen können, wie sie sich in dem mit l bezeichneten Ausdruck (3.) finden, d. h. in der Determinante $\mu\frac{\partial\nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial m}$. Man hat demnach aus den beiden Differentialgleichungen erster Ordnung (4.) und aus den beiden zweiter Ordnung (5.) die Determinante zu bilden und erhält

$$\begin{aligned} -2\sqrt{\frac{n}{m}}\mu\nu + 4\sqrt{mn}\left(\mu\frac{\partial\nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial m}\right) &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}(\mu_1^2 - \nu_1^2) \\ &+ \frac{\partial m_1}{\partial m}.\begin{vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{m} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \frac{\partial\mu_1}{\partial m_1} & \frac{\partial\nu_1}{\partial m_1} \end{vmatrix} \\ &+ \frac{\partial n_1}{\partial m}.\begin{vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{m} \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \frac{\partial\mu_1}{\partial n_1} & \frac{\partial\nu_1}{\partial n_1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Führt man dem Ausdruck l entsprechend den Ausdruck l_1 durch die Doppelgleichung

$$l_1 = m_1\left(\mu_1\frac{\partial\nu_1}{\partial m_1} - \nu_1\frac{\partial\mu_1}{\partial m_1}\right) = -n_1\left(\mu_1\frac{\partial\nu_1}{\partial n_1} - \nu_1\frac{\partial\mu_1}{\partial n_1}\right),$$

ein, so reducirt sich das erhaltene Resultat auf folgende einfache Gleichung:

$$(6.)\quad -2\mu\nu+4l = -\tfrac{1}{2}(\mu_1^2-\nu_1^2)+\frac{m_1^2-n_1^2}{m_1n_1}l_1.$$

Diese Transformation hat noch nicht den oben auseinandergesetzten Charakter, da die ersten Differentialquotienten linker Hand in der Verbindung $\mu\nu$, rechter Hand in der Verbindung $\mu_1^2-\nu_1^2$ vorkommen. Da aber μ und ν lineare Functionen von μ_1 und ν_1 sind, so ergeben sich hieraus μ^2, $\mu\nu$ und ν^2 als lineare Functionen von μ_1^2, $\mu_1\nu_1$ und ν_1^2. Zwischen zwei gegebenen quadratischen homogenen Verbindungen von μ, ν und zweien solchen von μ_1, ν_1 besteht daher immer eine und nur eine Relation. So erhält man zwischen $\mu\nu$ und $\mu^2-\nu^2$ einerseits, $\mu_1\nu_1$ und $\mu_1^2-\nu_1^2$ andrerseits aus den Gleichungen (4.) die Relation

$$(7.)\quad \tfrac{1}{2}(m^2-n^2)\mu\nu+mn(\mu^2-\nu^2) = \tfrac{1}{2}\frac{m-n}{\sqrt{mn}}\{(m_1^2-n_1^2)\mu_1\nu_1+\tfrac{1}{2}m_1n_1(\mu_1^2-\nu_1^2)\}.$$

Multiplicirt man nun die früher erhaltene Gleichung (6.) mit $-\frac{1}{4}(m^2-n^2)$ und addirt sie zu dieser, so erhält man

$$(8.)\quad mn(\mu^2-\nu^2)+(m^2-n^2)(\mu\nu-l) = \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}\{m_1n_1(\mu_1^2-\nu_1^2)+(m_1^2-n_1^2)(\mu_1\nu_1-l_1)\},$$

also, wenn man den Ausdruck

$$mn(\mu^2-\nu^2)+(m^2-n^2)(\mu\nu-l)$$

mit $\psi(m,n)$ bezeichnet,

$$\psi(m,n) = \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}\psi(m_1,n_1).$$

Indem man diese Transformation wiederholt anwendet, bekommt man eine Reihe von Factoren $\frac{m-n}{2\sqrt{mn}}$, $\frac{m_1-n_1}{2\sqrt{m_1n_1}}$, etc., die sich immer mehr der Null nähern und deren Product um so mehr gleich Null wird. Dies Product multiplicirt in $\psi(\omega,\omega)$, welches, wie leicht zu sehen, ebenfalls gleich Null wird, ist dem Ausdruck $\psi(m,n)$, von dem ausgegangen wurde, gleich, also hat man

$$\psi(m,n) = 0,$$

d. h.

$$(9.)\quad mn(\mu^2-\nu^2)+(m^2-n^2)(\mu\nu-l) = 0.$$

Es genügt also der Quotient $\frac{\nu}{\mu}$ in Beziehung auf die unabhängige Variable $\frac{n}{m}$ einer nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung. In der That, setzt man

$$\frac{n}{m} = x,\quad \frac{\nu}{\mu} = y,$$

so erhält man die einfache Differentialgleichung

$$x(1-y^2)+(1-x^2)\frac{d(xy)}{dx} = 0$$

oder

$$(10.)\qquad x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+(x+y)(1-xy) = 0.$$

Eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades, welche wie die vorliegende von der Form

$$\frac{dy}{dx} = Ay^2+By+C$$

ist, kann bekanntlich immer auf eine lineare der zweiten Ordnung zurückgeführt werden, in der nämlichen Art, wie es mit der *Riccati*schen Differentialgleichung zu geschehen pflegt. Eine solche Zurückführung gelingt durch verschiedene Substitutionen, in dem vorliegenden Fall z. B. durch die Substitution

$$y = -\frac{v'}{v+xv'} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{d(xv)}{dx}},$$

wo $v' = \frac{dv}{dx}$ ist.

Man erhält alsdann für v die Differentialgleichung

$$(11.)\qquad 0 = (x-x^3)\frac{d^2v}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dv}{dx}-xv.$$

Die gebrauchte Substitution kommt aber damit überein, dafs man von dem Quotienten $\frac{\nu}{\mu} = \frac{\frac{\partial f}{\partial n}}{\frac{\partial f}{\partial m}}$ zu derjenigen Function $f(m, n)$ übergeht, welche eine homogene Function -1^{ter} Ordnung von m und n also proportional $\frac{1}{\omega}$ ist. Denn für eine solche hat man

$$0 = f+m\mu+n\nu,$$

daher

$$y = \frac{\nu}{\mu} = -\frac{m\nu}{f+n\nu},$$

also wenn man mf, was blofs von $x = \frac{n}{m}$ abhängt, mit v bezeichnet

$$y = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v+x\frac{dv}{dx}},$$

was die frühere Substitution ist. Ebenso würde die Substitution

$$y = -\frac{v'}{\varrho v + xv'}$$

der Betrachtung der homogenen Function $\frac{1}{v} = f(m, n)$ der Ordnung $-\varrho$ entsprechen, aber für keinen Werth aufser für $\varrho = 1$ giebt diese Formel eine Substitution, welche zu einer linearen Differentialgleichung führt. Hierin also liegt der Grund, warum der reciproke Werth des arithmetisch-geometrischen Mittels betrachtet werden mufste.

Die lineare Differentialgleichung (11.) wird also von dem Ausdruck $v = \frac{m}{\omega}$ befriedigt, wo ω das arithmetisch-geometrische Mittel von m und n, und $x = \frac{n}{m}$ ist. Dies Ergebnifs allein, verbunden mit der Nebenbedingung, dafs für $m = n$ auch $\omega = m$ wird, oder, was dasselbe ist, dafs für $x = 1$ auch $v = 1$ wird, würde zur vollständigen Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels genügen, wenn man auch nicht wüfste, dafs die Gleichung (11.) die Differentialgleichung des completen elliptischen Integrals in Beziehung auf seinen Modul ist. Mit Voraussetzung der von *Legendre* gegebenen Integration der Gleichung (11.) erhält man als ihr vollständiges Integral

$$v = CF(x) + C_1 F(x_1),$$

wenn man unter $F(x)$ das complete elliptische Integral erster Gattung des Moduls x versteht, und $x_1 = \sqrt{1-x^2}$ setzt. Für $x = 1$ wird $F(x) = \infty$, $F(x_1) = \frac{1}{2}\pi$. Damit der zugehörige Werth von v die Einheit sei, mufs man also $C = 0$, $C_1 = \frac{2}{\pi}$ setzen, und erhält

$$v = \frac{m}{\omega} = \frac{2}{\pi} F(x_1) = \frac{2}{\pi} m \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos\varphi^2 + n^2 \sin\varphi^2}}.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die Zurückführung der ursprünglich erhaltenen nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung auf eine lineare zweiter Ordnung ohne Einführung des Quotienten $x = \frac{n}{m}$ zu bewirken. Man gelangt dann für die homogene Function -1^{ter} Ordnung $f(m, n) = \frac{1}{\omega}$, also, was dasselbe ist, für das complete elliptische Integral (1.) zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche nur Differentialquotienten zweiter Ordnung nach m und n genommen enthält und ihrer Einfachheit wegen angeführt zu werden verdient.

Bezeichnet man mit a, b, c die Differentialquotienten zweiter Ordnung, so dafs

$$a = \frac{\partial\mu}{\partial m}, \quad b = \frac{\partial\mu}{\partial n} = \frac{\partial\nu}{\partial m}, \quad c = \frac{\partial\nu}{\partial n},$$

so erhält man, wenn f eine homogene Function -1^{ter} Ordnung ist,

$$-2\mu = ma + nb,$$
$$-2\nu = mb + nc,$$

daher

$$2(n\mu - m\nu) = (m^2 - n^2)b - mn(a - c).$$

Ueberdies ergiebt sich aus der Doppelgleichung (3.)

$$l = m(\mu b - \nu a) = -n(\mu c - \nu b)$$

der neue Werth

$$(n\mu - m\nu)l = mn\{(\mu^2 - \nu^2)b - \mu\nu(a - c)\}.$$

Mit Benutzung hiervon geht die Differentialgleichung (9.)

$$mn(\mu^2 - \nu^2) + (m^2 - n^2)(\mu\nu - l) = 0,$$

nachdem man sie mit $2(n\mu - m\nu)$ multiplicirt hat, in folgende über:

$$\{(m^2 - n^2)b + mn(a - c)\}\{(m^2 - n^2)\mu\nu - mn(\mu^2 - \nu^2)\} = 0.$$

Der zweite Factor zerlegt sich wiederum in die beiden $m\nu - n\mu$, $m\mu + n\nu$, von denen der erste von der früheren Multiplication mit demselben herrührt, während der zweite $m\mu + n\nu$ mit der Function $f(m, n)$ selbst, abgesehen vom Zeichen, identisch ist. Verschwinden kann daher nur der erste Factor $(m^2 - n^2)b + mn(a - c)$ und es genügt demnach der reciproke Werth f des arithmetisch-geometrischen Mittels ω von m und n, oder, was dasselbe ist, das elliptische Integral (1.) der Differentialgleichung:

$$(12.) \quad 0 = (m^2 - n^2)\frac{\partial^2 f}{\partial m\, \partial n} + mn\left(\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\right).$$

Mit Berücksichtigung der leicht zu verificirenden Relationen

$$m^3 a = \frac{d^2(x^2 v)}{dx^2}, \quad m^3 b = -\frac{d^2(xv)}{dx^2}, \quad m^3 c = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

geht (12.) in

$$0 = (1 - x^2)\frac{d^2(xv)}{dx^2} + x\frac{d^2([1 - x^2]v)}{dx^2}$$

über, welche Differentialgleichung mit (11.) übereinstimmt.

Berlin, im Februar 1858.