Werk

Titel: Ueber eine mit der Gammafunction verwandte Transcendente und deren Anwendung auf ...

Autor: Kinkelin, H.

Jahr: 1860

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0057|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ueber eine mit der Gammafunction verwandte Transcendente und deren Anwendung auf die Integralrechnung.

(Von Herrn *Kinkelin* früher zu Aarburg gegenwärtig zu Bern.)

Theorie der Function $G(x)$.

§. 1.

Ich habe früher eine Untersuchung über die Functionen, welche die Relation eingehen:

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= n\varphi(n)+n\psi(n)f(nx)+n^2\psi'(n).x+n^3\psi''(n).x^2+\cdots+n^{\mu+1}\psi^{(\mu)}(n).x^\mu,$$

veröffentlicht (siehe *Grunerts* Archiv Bd. 22), und bin dabei auf eine Function

$$f(x) = a-(a_1+a_2+\cdots+a_{\mu-1})B_{\mu-1}(x)$$
$$-\mu a_\mu \log^{(\mu-1)}\Gamma(x)+a_{\mu-1}B_{\mu-2}(x)+a_{\mu-2}B_{\mu-3}(x)+\cdots+a_1(x-1)$$

gekommen, in welcher $\log^{(\mu-1)}\Gamma(x)$ für ganze Werthe von x die Bedeutung

$$\log^{(\mu-1)}\Gamma(x) = 1^{\mu-1}\log 1+2^{\mu-1}\log 2+\cdots+(x-1)^{\mu-1}\log(x-1)$$

hat und allgemein

$$\log^{(\mu-1)}\Gamma(x+1) = x^{\mu-1}\log x+\log^{(\mu-1)}\Gamma(x)$$

ist, welche Gleichung sich auf jeden reellen Werth von x anwenden läfst. $B_\lambda(x)$ bedeutet die *Bernoulli*sche Function, deren Werth für ganze Argumente

$$1^\lambda+2^\lambda+\cdots+(x-1)^\lambda$$

ist, während sie im Allgemeinen der Relation

$$B_\lambda(x) = (x-1)^\lambda+B_\lambda(x-1)$$

genügt. Ihr Ausdruck wird von *Raabe* (Bd. 42 dieses Journals) durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$B_{2m}(x) = \frac{x^{2m+1}}{2m+1}-\tfrac{1}{2}x^{2m}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\frac{(-1)^{\lambda-1}}{2\lambda}\binom{2m}{2\lambda-1}B_\lambda.x^{2m-2\lambda+1},$$

$$B_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+2}}{2m+2}-\tfrac{1}{2}x^{2m+1}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\frac{(-1)^{\lambda-1}}{2\lambda}\binom{2m+1}{2\lambda-1}B_\lambda.x^{2m-2\lambda+2},$$

wo $\binom{\mu}{\nu}$ den ν^{ten} Binomialcoefficienten der μ^{ten} Potenz und B_λ die λ^{te} ***Bernoulli***sche Zahl, positiv genommen, bedeutet. Für diese Functionen bestehen die der ersten Gleichung dieses Paragraphen entsprechenden folgenden Gleichungen:

$$B_{2m}(x)+B_{2m}\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+B_{2m}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n^{2m}}B_{2m}(nx),$$

$$B_{2m+1}(x)+B_{2m+1}\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+B_{2m+1}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m+1}}B_{2m+1}(nx)+\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\cdot\frac{n^{2m+2}-1}{n^{2m+1}}B_{m+1},$$

so dafs man z. B. für die Function:

$$B_1(x)=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x,$$

die im Folgenden anzuwendende Relation

$$B_1(x)+B_1\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+B_1\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}B_1(nx)-\frac{1}{12}\frac{n^2-1}{n}$$

hat.

Gegenstand vorliegenden Aufsatzes soll es nun sein, die Function $\overset{(\mu-1)}{\Gamma}(x)$ für den besonderen Fall $\mu-1=1$, also die Function $\overset{(1)}{\Gamma}(x)$, die wir der gröfseren Bequemlichkeit wegen mit $G(x)$ bezeichnen wollen, näher zu untersuchen, ihre Eigenschaften festzustellen, ihre Berechnung anzugeben und dann einige Anwendungen dieser Resultate auf die Ermittelung von Integralwerthen zu machen.

§. 2.

Das mit dem Namen der ***Gammafunction*** bezeichnete ***Euler***sche Integral

$$(1.)\qquad \Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx,$$

welches auch als Grenzwerth des folgenden Ausdrucks definirt werden kann:

$$(2.)\qquad \Gamma(x)=\lim_{k=\infty}\frac{1.2.3\ldots k.k^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+k-1)},$$

hat bekanntlich die in den Gleichungen

$$(3.)\qquad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

$$(4.)\qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

enthaltenen Eigenschaften, wozu wir noch das von *Raabe* (Bd. 28, S. 12 dieses Journals) veröffentlichte Ergebnifs

$$(5.)\quad \int_0^1 \log\Gamma(t+x)\,dt = x\log x - x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

hinzufügen.

Nun setze man der Kürze wegen:

$$(6.)\quad \int_0^x \log\Gamma(t)\,dt = F(x),$$

so geht (5.) über in:

$$(5^a.)\quad F(x+1) - F(x) = x\log x - x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi,$$

eine Gleichung, die für alle positiven Werthe von x besteht. Man summire dieselbe in Beziehung auf x über die ganzzahligen Werthe 1, 2, ... $x-1$, so erhält man:

$$F(x) - F(1) = \sum_1^{x-1} x\log x - \frac{x(x-1)}{2} + \tfrac{1}{2}(x-1)\log 2\pi,$$

oder da aus (5.)

$$F(1) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

hervorgeht,

$$\sum_1^{x-1} x\log x = F(x) + \frac{x(x-1)}{2} - \tfrac{1}{2}x\log 2\pi.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung behält für alle positiven Werthe von x eine bestimmte Bedeutung, ich bezeichne dieselbe mit $\log G(x)$ und definire diese Function durch die Gleichung:

$$(7.)\quad \log G(x) = F(x) + \frac{x(x-1)}{2} - \tfrac{1}{2}x\log 2\pi,$$

so ist $G(x)$ eine Function, die für ganzzahlige Werthe von x in die Exponentialgröfse mit dem Exponenten $\sum_1^{x-1} x\log x$ d. h. in $1^1.2^2\ldots(x-1)^{x-1}$ übergeht.

§. 3.

Setzt man in (2.) t für x, nimmt auf beiden Seiten die Logarithmen, und bezeichnet wie gewöhnlich das Product der Zahlen $1.2\ldots k$ mit $k!$, so erhält man:

$$(2^a.)\quad \log\Gamma(t) = \log(k!) + (t-1)\log k - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1} \log(t+\lambda).$$

Wir verstehen in dieser Formel sowohl wie später überhaupt unter k eine über jede endliche Grenze hinaus wachsende Zahl.

Integrirt man nun die soeben entwickelte Gleichung in Bezug auf t zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt aus Gleichung (6.) und unter Anwendung des Werthes von $F(1)$:

$$F(x) - \tfrac{1}{2}\log 2\pi = (x-1)\log(k!) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2\log k - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}\{(x+\lambda)\log(x+\lambda) - (x+\lambda)\} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}\{(\lambda+1)\log(\lambda+1) - (\lambda+1)\}.$$

Diese Gleichung enthält unter Anderem den bekannten für grofse Zahlen geltenden Näherungswerth der Facultäten. Man findet ihn aus derselben in der Form:

$$(8.) \qquad k! = e^{-k}k^k\sqrt{2\pi k},$$

indem man $x=2$ setzt. Man hat sich dabei nur zu erinnern, dafs aus (5^a.) $F(2) = \log 2\pi - 1$ folgt, und dafs wegen der über k gemachten Voraussetzungen $k^{k+1}.e$ für $(k+1)^{k+1}$ geschrieben werden kann.

Die obige Entwicklung von $F(x)$ in Gleichung (7.) eingesetzt, giebt:

$$\log G(x) = \tfrac{1}{2}x(x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)\log 2\pi + (x-1)\log(k!) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2\log k + k(x-1) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}(x+\lambda)\log(x+\lambda) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}(\lambda+1)\log(\lambda+1)$$

oder mit Anwendung von (8.):

$$\log G(x) = \tfrac{1}{2}x(x-1) + \tfrac{1}{2}x(x-1)\log k + k(x-1)\log k - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}(x+\lambda)\log(x+\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\lambda\log\lambda$$

oder endlich, indem man wiederum von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$(9.) \qquad G(x) = \frac{1^1.2^2\ldots k^k.k^{k(x-1)+\frac{1}{2}x(x-1)}}{x^x(x+1)^{x+1}\ldots(x+k-1)^{x+k-1}}\cdot e^{\frac{1}{2}x(x-1)}.$$

Setzt man hierin $x+1$ für x und dividirt die entstandene Gleichung durch die vorangehende, so folgt:

$$G(x+1) = G(x)\cdot\frac{x^x k^{k+x}}{(x+k)^{x+k}}\cdot e^x$$

oder, da

$$\frac{k^{k+x}}{(x+k)^{x+k}} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^x} = e^{-x}$$

ist:

$$(10.) \qquad G(x+1) = x^x G(x).$$

Da nun für $x=1$ aus (9.)

$$G(1) = 1$$

folgt, so ist für ganze Werthe von x:

$$(11.) \qquad G(x+1) = 1^1.2^2 \ldots x^x,$$

was schon aus der Definition des §. 2 hervorging.

Es bestehen Relationen zwischen dieser Transcendenten G und den Gammafunctionen, welche jetzt angegeben werden sollen. Zunächst ist:

$$x^x.(x+1)^{x+1} \ldots (x+k-1)^{x+k-1}$$
$$= [x.(x+1) \ldots (x+k-1)]^{x-1} x^1.(x+1)^2 \ldots (x+k-1)^k.$$

Aus (2.) folgt aber unter Anwendung von (8.)

$$x(x+1) \ldots (x+k-1) = \frac{e^{-k} k^{k+x-1} \sqrt{2\pi k}}{\Gamma(x)},$$

also erhält man, wenn diese Ausdrücke in (9.) eingeführt werden:

$$(12.) \qquad G(x) = \frac{1^1.2^2 \ldots k^k . e^{\frac{1}{2}x(x-1)+k(x-1)}}{(2\pi)^{\frac{x-1}{2}} k^{\frac{(x-1)^2}{2}} \cdot x^1 (x+1)^2 \ldots (x+k-1)^k} \cdot (\Gamma'(x))^{x-1},$$

eine Gleichung, welche die Functionen G und Γ' in Beziehung zu einander setzt.

Schreibt man nun in dieser Gleichung zunächst $1+x$ für x, dann, unter der Voraussetzung dafs $x < 1$, $1-x$ für x, und multiplicirt die erhaltenen Resultate, so folgt mit Zuziehung von (3.):

$$(13.) \quad G(1+x).G(1-x) = \left\{ \frac{(\Gamma(1+x))^2 \sin \pi x}{\pi x} \right\}^x \cdot \frac{e^{x^2}}{k^{x^2} \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)^1 \left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^k}.$$

§. 4.

Schreiten wir nun zur Untersuchung des Ganges der Function $G(x)$, so ist aus (9.) ersichtlich, dafs dieselbe für alle positiven Werthe von x ein positives Vorzeichen besitzt. Es ist ferner, wie bereits erwähnt, $G(1) = 1$. Setzt man in (10.) nach einander $x = 0$ und $x = 1$ und erinnert sich daran, dafs sich x^x für $x = 0$ der Grenze 1 nähert, so schliefst man aus dem bekannten Werthe der Function für $x = 1$ weiter, dafs sie für $x = 0$ und $x = 2$ denselben Werth erhält, so dafs:

$$(14.) \qquad G(0) = G(1) = G(2) = 1.$$

Schon hieraus wird man schliefsen, dafs zwischen je zweien dieser Werthe ein Maximums- oder Minimumswerth enthalten sein mufs. Klarer geht dies indefs aus der Gleichung (7.) hervor, aus deren Differentiation mit Berück-

sichtigung von (6.) folgt:

$$\frac{d\log G(x)}{dx} = \log\Gamma(x) + x - \tfrac{1}{2}(1+\log 2\pi)$$
$$= \log\Gamma(x) + x - 1{,}419\ldots$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\log G(x)$ mit X, seinen Differentialquotienten nach x mit X', so hat man also:

$$X' = \log\Gamma(x) + x - 1{,}419\ldots$$

Es ist bekannt (*Gaufs*, disq. gen. circa seriem etc. art. 23), dafs $\Gamma(x)$ oder, was dasselbe ist, das *Gaufs*sche $\Pi(x-1)$ für $x=0$ sowie für $x=\infty$ unendlich grofs ist und dazwischen nur *ein* Minimum hat, nämlich für $x=1{,}462\ldots$ den Werth $0{,}886\ldots$. Hieraus geht mit Berücksichtigung der Werthe $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ für $\log\Gamma(x)$ hervor, dafs $\log\Gamma(x)$ von $x=0$ bis $x=1$ von $+\infty$ bis 0 abnimmt, dafs es dann negativ wird, für $x=1{,}462\ldots$ seinen Minimumswerth $-0{,}121\ldots$ annimmt, für $x=2$ wieder $=0$ wird und von da an bis $x=\infty$ fortwährend zunimmt. Man hat daher:

für $x=0$	$X'=+\infty$,
- $x=1$	$X'=-0{,}419\ldots$,
- $x=1{,}462\ldots$	$X'=-0{,}078\ldots$,
- $x=2$	$X'=+0{,}581\ldots$

und sieht daraus, dafs X' einmal von $x=0$ bis $x=1$ und einmal von $x=1{,}462$ bis $x=2$ verschwindet. Die erste dieser Wurzeln berechnet man, da die *Legendre*schen wie die *Gaufs*schen Tafeln der Gammafunction nur das Intervall von 1 bis 2 umfassen, am leichtesten, nachdem man in der Gleichung $X'=0$ an die Stelle von $\Gamma(x)$ den Quotienten $\frac{\Gamma(1+x)}{x}$ gesetzt hat, so dafs sich dieselbe unter der Form

$$0 = X' = \log\Gamma(1+x) + x - \log x - 1{,}419\ldots$$

darstellt. Dieselbe wird durch den Werth $x=0{,}291\ldots$ befriedigt. Die zweite zwischen $1{,}462\ldots$ und 2 liegende Wurzel ergiebt sich aus der ursprünglichen Form der Gleichung:

$$0 = X' = \log\Gamma(x) + x - 1{,}419\ldots,$$

und zwar findet sich für dieselbe der Werth $x=1{,}538\ldots$. Dies sind, wie sich zeigen läfst, die einzigen Wurzeln der Gleichung $X'=0$ von $x=0$ bis $x=\infty$, so dafs X' von $x=0$ bis $x=0{,}291\ldots$ positiv ist, von da bis $x=1{,}538\ldots$ negativ und von da bis $x=\infty$ wieder positiv. $X=\log G(x)$

wächst daher von $x=0$ bis $x=0{,}291\ldots$, wo es einen Maximumswerth hat, nimmt dann bis $x=1{,}538\ldots$ ab, wo es einen Minimumswerth hat, und wächst von da an ohne Unterbrechung bis $x=\infty$. Dasselbe gilt natürlich von $G(x)$ selbst.

Für negative Werthe von x hat $G(x)$ im Allgemeinen keinen bestimmten Sinn, da es alsdann nach (9.), sobald x keine ganze Zahl ist, gebrochene Potenzen negativer Zahlen enthält, d. h. Gröfsen, die, jenachdem x und in Folge dessen die Exponenten jener Potenzen rational oder irrational sind, mehrdeutig oder unendlich vieldeutig werden.

§. 5.

Zur Berechnung von $G(x)$ übergehend, nehme man an, dafs λ eine ganze Zahl, α einen echten Bruch bedeute, und setze $x=\lambda+\alpha$. Durch wiederholte Anwendung der Formel (10.) erhält man dann die Reductionsformeln:

$$(15.)\quad \begin{cases} G(\lambda+\alpha) = (\lambda-1+\alpha)^{\lambda-1+\alpha}(\lambda-2+\alpha)^{\lambda-2+\alpha}\ldots(1+\alpha)^{1+\alpha}G(1+\alpha), \\ G(\alpha) = \frac{G(1+\alpha)}{\alpha^{\alpha}}, \end{cases}$$

so dafs uns noch übrig bleibt $G(1+x)$ für Werthe von x, die zwischen 1 und 2 liegen, zu berechnen.

Man hat bekanntlich die Reihe (*Legendre*, intégr. Euleriennes, chap. IX, formule (12.))

$$\log\Gamma(1+t) = -Ct+\tfrac{1}{2}S_2t^2-\tfrac{1}{3}S_3t^3+\tfrac{1}{4}S_4t^4-\ldots,$$

in welcher

$$C = 0{,}57721566490153282\ldots$$

die *Mascheroni*sche Constante bedeutet, und $S_\lambda=\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^\lambda}$ ist.

Integrirt man dieselbe von $t=0$ bis $t=x$, so erhält man mit Berücksichtigung von (6.) und (7.):

$$\log G(1+x) = \tfrac{1}{2}(1-C)x^2-\tfrac{1}{2}x(\log 2\pi-1)+\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda S_\lambda}{\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda+1},$$

welche Reihe so lange convergirt als $0<x<1$. Um sie noch convergenter zu machen, benutze man die Reihe:

$$\log(1+t) = t-\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda}t^\lambda.$$

Diese nach t zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, giebt:

$$(1+x)\log(1+x) - x = \tfrac{1}{2}x^2 - \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda(\lambda+1)} x^{\lambda+1},$$

welches zu $\log G(1+x)$ addirt, die Endgleichung liefert:

$$(16.) \quad \log G(1+x)$$
$$= \tfrac{1}{2}(2-C)x^2 + \tfrac{1}{2}x(3-\log 2\pi) - (1+x)\log(1+x) + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda (S_\lambda - 1)}{\lambda(\lambda+1)} x^{\lambda+1}.$$

Diese Reihe eignet sich nicht zur Berechnung von $G(1+x)$ für das Intervall, in welchem $\frac{1}{2} < x < 1$. Man bemerkt jedoch leicht, dafs aus (10.) folgt:

$$\log G(2-x) = (1-x)\log(1-x) + \log G(1-x);$$

ist nun hierin $0 < x < \frac{1}{2}$, so sieht man, dafs man durch diese Relation die Werthe von $G(1+x)$, für welche $\frac{1}{2} < x < 1$, ausgedrückt erhält durch die Werthe von $G(1-x)$, für welche $0 < x < \frac{1}{2}$. Diese letzteren findet man aber aus (16.), wenn dort x negativ gesetzt wird. Man hat daher in (16.) für x alle positiven und negativen Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ zu betrachten, um vermittelst derselben und der Gleichungen (15.) die Function G für alle beliebigen Argumente zu berechnen.

Es möge hier noch einer Reihe Erwähnung geschehen, die im Folgenden angewandt wird. Aus (10.) folgt nämlich sofort:

$$\log G(x) = \log G(1+x) - x\log x,$$

woraus man mit Hülfe von (16.) eine Reihe für $\log G(x)$ erhält. Wird zu derselben die aus (16.) für $\log G(1-x)$ folgende addirt, so gelangt man zu dem Resultate:

$$(17.) \quad \log G(x) + \log G(1-x)$$
$$= (2-C)x^2 - (1-x)\log(1-x) - (1+x)\log(1+x) - x\log x - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{S_{2\lambda+1}-1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)} x^{2(\lambda+1)}.$$

§. 6.

Wir gehen nun zu dem für die hier betrachtete Function geltenden Multiplicationstheorem über. Für die Gammafunction hat man bekanntlich:

$$\Gamma(nx) = \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\cdot n^{nx-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}$$

oder, indem man die Logarithmen nimmt und t für x schreibt,

$$\log\Gamma(nt) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \log\Gamma\left(t+\frac{\lambda}{n}\right) + (nt-\tfrac{1}{2})\log n - \frac{n-1}{2}\log 2\pi.$$

Um hiervon zu einem ähnlichen Ergebnisse für die Function G überzugehen, erinnere man sich an die Gleichungen (6.) und (7.) §. 2, denen zufolge, wenn

$$\int_0^x \log\Gamma(t)\,dt = F(x)$$

gesetzt wird,

$$\log G(x) = F(x) + \frac{x(x-1)}{2} - \tfrac{1}{2}x\log 2\pi,$$

oder mit Einführung der in §. 1 gebrauchten Bezeichnung $B_1(x) = \frac{1}{2}(x^2-x)$,

$$\log G(x) = F(x) + B_1(x) - \tfrac{1}{2}x\log 2\pi$$

ist. Integrirt man die obige Gleichung nach t von 0 bis x, so erhält man:

$$0 = -\int_0^x \log\Gamma(nt)\,dt + \Sigma\int_0^x \log\Gamma\left(t+\frac{\lambda}{n}\right)dt + \tfrac{1}{2}(nx^2-x)\log n - \frac{n-1}{2}x\log 2\pi,$$

oder da

$$\int_0^x \log\Gamma(nt)\,dt = \frac{1}{n}F(nx),$$

$$\int_0^x \log\Gamma\left(t+\frac{\lambda}{n}\right)dt = F\left(x+\frac{\lambda}{n}\right) - F\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

ist,

$$0 = -\frac{1}{n}F(nx) + \Sigma F\left(x+\frac{\lambda}{n}\right) - \Sigma F\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \tfrac{1}{2}(nx^2-x)\log n - \frac{n-1}{2}x\log 2\pi,$$

wo die Summen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = n-1$ auszudehnen sind.

Ferner hat man für die Function $B_1(x) = \frac{1}{2}(x^2-x)$, wie bereits im §. 1 erwähnt,

$$(18.) \qquad 0 = -\frac{1}{n}B_1(nx) + \Sigma B_1\left(x+\frac{\lambda}{n}\right) + \tfrac{1}{12}\frac{n^2-1}{n}.$$

Endlich hat man für $-\frac{1}{2}x\log 2\pi$ die entsprechende Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2n}(nx)\log 2\pi - \Sigma\tfrac{1}{2}\left(x+\frac{\lambda}{n}\right)\log 2\pi + \tfrac{1}{2}\log 2\pi\,(n-1)(x+\tfrac{1}{2}).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich:

$$(19.) \qquad 0 = -\frac{1}{n}\log G(nx) + \Sigma\log G\left(x+\frac{\lambda}{n}\right) + \tfrac{1}{2}(nx^2-x)\log n - \psi(n),$$

wo $\psi(n)$ constant, d. h. von x unabhängig und nur von der ganzen Zahl n abhängig ist.

§. 7.

Die Bestimmung der Constante $\psi(n)$ geschieht auf folgende Weise: Setzt man in Gleichung (19.) $x = 0$, so ergiebt sich:

$$(20.) \qquad \psi(n) = \Sigma\log G\left(\frac{\lambda}{n}\right),$$

da aus (14.) folgt, dafs $\log G(0) = 0$ ist. Die Gleichung (19.) wird also:

$$0 = -\frac{1}{n}\log G(nx) + \Sigma \log G\left(x + \frac{\lambda}{n}\right) - \Sigma \log G\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\log n}{n} B_1(nx),$$

wo sich die Summen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = n-1$ erstrecken. Aus dieser Gleichung läfst sich leicht eine Relation zwischen verschiedenen Gröfsen $\psi(n)$ herleiten. Ist nämlich m eine andere ganze Zahl, so setze man $x = \frac{\mu}{mn}$ und summire nach μ von $\mu = 0$ bis $\mu = m-1$, dann ergiebt sich:

$$0 = -\frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \log G\left(\frac{\mu}{m}\right) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \log G\left(\frac{\lambda m+\mu}{mn}\right) - m\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \log G\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\log n}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} B_1\left(\frac{\mu}{m}\right).$$

Die ersten drei Summen sind nichts anderes als $\psi(m)$, $\psi(mn)$ und $\psi(n)$, die vierte ergiebt sich aus Gleichung (18.) des vorigen Paragraphen, indem man m für n schreibt und $x = 0$ setzt,

$$= -\tfrac{1}{12}\frac{m^2-1}{m},$$

also hat man:

$$0 = -\frac{1}{n}\psi(m) - m\psi(n) + \psi(mn) - \frac{m^2-1}{12mn}\log n,$$

wo m und n irgend zwei ganze Zahlen sind. Indem man m mit n vertauscht, erhält man

$$0 = -n\psi(m) - \frac{1}{m}\psi(n) + \psi(mn) - \frac{n^2-1}{12mn}\log m$$

und, indem man die eine dieser Gleichungen von der andern abzieht,

$$0 = \frac{n^2-1}{n}\psi(m) - \frac{m^2-1}{m}\psi(n) + \frac{n^2-1}{n}\cdot\tfrac{1}{12}\frac{\log m}{m} - \frac{m^2-1}{m}\cdot\tfrac{1}{12}\frac{\log n}{n},$$

was man auch so schreiben kann:

$$\frac{\psi(m) + \frac{1}{12}\frac{\log m}{m}}{\frac{m^2-1}{m}} = \frac{\psi(n) + \frac{1}{12}\frac{\log n}{n}}{\frac{n^2-1}{n}}.$$

Man sieht hieraus, dafs der Bruch, welcher die rechte Seite dieser Gleichung bildet, eine Function von n ist, welche ungeändert bleibt, welche andere ganze Zahl m man auch für sie setzen möge, d. h. unabhängig von n. Der vorliegende Bruch ist also eine absolute Constante, die $= \frac{1}{2}\log\varpi$ gesetzt werden möge, so dafs:

$$(21.) \qquad \psi(n) + \tfrac{1}{12}\frac{\log n}{n} = \frac{n^2-1}{2n}\log\varpi,$$

und es bleibt jetzt nur der numerische Werth von $\log\varpi$ aus einem besonderen Werthe von n zu bestimmen.

§. 8.

Jeder besondere Werth von n kann zur Bestimmung des numerischen Werthes von $\log\varpi$ benutzt werden. Als besonders dazu geeignete bieten sich die Werthe $n=2$ und $n=4$ dar. Setzt man in (21.) $n=2$, so folgt mit Hülfe von (20.)

$$\tfrac{3}{4}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{2}\frac{\log 2}{2}+\log G(\tfrac{1}{2}),$$

setzt man dagegen $n=4$, so folgt:

$$\tfrac{15}{8}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{2}\frac{\log 4}{4}+\log G(\tfrac{1}{4})+\log G(\tfrac{1}{2})+\log G(\tfrac{3}{4})$$

und aus beiden durch Subtraction:

$$(21^a.)\qquad \tfrac{9}{8}\log\varpi = \log G(\tfrac{1}{4})+\log G(\tfrac{3}{4}),$$

wodurch man, wenn in (17.) $x=\frac{1}{4}$ gesetzt wird, für $\log\varpi$ die Reihe erhält:

$$(22.)\qquad \tfrac{9}{8}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{6}(2-C)+\tfrac{9}{2}\log 2-\tfrac{1}{4}(3\log 3+5\log 5)$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{S_{2\lambda+1}-1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)}\cdot\frac{1}{4^{2(\lambda+1)}}.$$

Zur Bestimmung von $\log\varpi$ kann auch $n=\infty$ gesetzt werden.

Führt man nämlich in (21.) für $\psi(n)$ seinen aus (20.) folgenden Ausdruck ein, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{n^2-1}{2n}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{2}\frac{\log n}{n}+\Sigma\log G\left(\frac{\lambda}{n}\right),$$

die, nachdem sie mit $\frac{1}{n}$ multiplicirt und $n=\infty$ gesetzt worden ist, in das folgende Integral übergeht:

$$(23.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = \int_0^1 \log G(t)\,dt.$$

Setzt man hierin für $\log G(t)$ seinen aus (7.) folgenden Ausdruck, so erhält man:

$$(23^a.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = -{}_1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\log 2\pi+\int_0^1 dx\int_0^x \log\Gamma(t)\,dt,$$

oder nach theilweiser Integration und mit Berücksichtigung des Integralwerthes:

$$\int_0^1 \log\Gamma(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\log 2\pi,$$

$$(22^a.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = -{}_1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\log 2\pi-\int_0^1 x\log\Gamma(x)\,dx.$$

Das hierin enthaltene Integral nimmt, wenn man $x = 1-y$ setzt, die Form an:

$$\int_0^1 x\,\Gamma(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,\Gamma(1-x)\,dx,$$

so dafs man auch das arithmetische Mittel beider:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \log\Gamma(1-x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\}\,x\,dx$$

an die Stelle des in dem letzten Werthe von $\log\varpi$ vorkommenden Integrales setzen kann. So ergiebt sich:

$$\log\varpi = -\tfrac{1}{6} - \int_0^1 \{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\}\,x\,dx.$$

Aus der in §. 5. erwähnten Reihe für $\log\Gamma(1+t)$ erhält man leicht unter Anwendung der Gleichung

$$\log\Gamma(x) = \log\Gamma(1+x) - \log x$$

die folgende Reihe:

$$\tfrac{1}{2}\{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\} = -\tfrac{1}{2}\log x - Cx - \sum_1^\infty \frac{S_{2\lambda+1}}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda+1},$$

die auch, mit Benutzung der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \sum_1^\infty \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1},$$

in die folgende verwandelt werden kann:

$$-\tfrac{1}{2}\{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log x + \tfrac{1}{2}\log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1-x) + (C-1)\,x + \sum_1^\infty \frac{S_{2\lambda+1}-1}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda+1}.$$

Multiplicirt man dies mit x und integrirt dann zwischen den Grenzen 0 und 1, so folgt für $\log\varpi$ sofort:

$$(22.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = -\tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{3}C + \sum_1^\infty \frac{S_{2\lambda+1}-1}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)}.$$

Eine der Reihen (21.) oder (22.) dient zur numerischen Bestimmung von $\log\varpi$, und zwar findet man:

$$\log\varpi = 0{,}33084228,$$

woraus:

$$\varpi = 1{,}392140.$$

Es ist noch anzuführen, dafs ϖ auch vermittelst eines unendlichen Produkts ausgedrückt werden kann. Setzt man nämlich in (22ª.) für $\log\Gamma x$ den am Anfang von §. 3. in (2ª.) angegebenen Werth, so ergiebt sich mit Be-

nutzung von (8.)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \lambda \log \lambda = -\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{12} + \{\tfrac{1}{2}(k^2+k) + \tfrac{1}{12}\}\log k + \tfrac{1}{2}\log \varpi$$

oder, indem man zu den Zahlen übergeht,

$$1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots k^k = e^{-\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{12}} k^{\frac{1}{2}(k^2+k)+\frac{1}{12}} \sqrt{\varpi}.$$

Aus den Gleichungen (18.) und (20.) erhält man nun endlich das Multiplicationstheorem in der folgenden Gestalt:

$$(23.)\quad G(nx) = \left\{G(x).G\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots G\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right\}^n . n^{\frac{1}{2}nx(nx-1)+\frac{1}{12}} \varpi^{-\frac{1}{2}(n^2-1)}.$$

§. 9.

Die Gleichung (19.) des §. 6. läfst sich ebenso wie es von ***Raabe*** für die Gammafunction geschehen ist, dazu benutzen, das Integral $\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt$ vermöge eines Ueberganges vom Endlichen zum Unendlichen zu bestimmen. Durch n dividirt geht die Gleichung über in:

$$\Sigma \frac{1}{n} \log G\left(x+\frac{\lambda}{n}\right) = x^2 \left\{\frac{\log G(nx)}{n^2 x^2} - \tfrac{1}{2}\log n\right\} + x\frac{\log n}{2n} + \frac{\psi(n)}{n}.$$

Setzt man in dem Coefficienten von x^2 an die Stelle von $\log n$ die Differenz $\log nx - \log x$, so läfst sich dies Glied in die beiden trennen:

$$\tfrac{1}{2}x^2 \log x + x^2 \left\{\frac{\log G(y)}{y^2} - \tfrac{1}{2}\log y\right\},$$

wo $y = nx$. Läfst man nun n ins Unendliche wachsen, so dafs auch y ins Unendliche wächst, so nähert sich, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, $\frac{\psi(n)}{n}$ der Constante $\frac{1}{2}\log \varpi = \alpha$, der Coefficient $\frac{\log n}{2n}$ von x der Grenze 0 und die linke Seite der endlichen Gröfse $\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt$. Es ist hieraus ersichtlich, dafs die von x unabhängige Gröfse, der sich für $y = \infty$ der Ausdruck $\frac{\log G(y)}{y^2} - \frac{1}{2}\log y$ nähert, ebenfalls eine endliche Constante β sein mufs, so dafs man die Gleichung

$$\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt = \tfrac{1}{2}x^2 \log x + \beta x^2 + \alpha$$

erhält. Der Werth von β ergiebt sich durch Differentiation nach x, denn man erhält auf diese Weise:

$$\log G(x+1) - \log G(x) = x \log x + (2\beta + \tfrac{1}{2})x.$$

Da aber nach Gleichung (10.) die Differenz linker Hand $= x \log x$ sein mufs, so ist $2\beta + \frac{1}{2} = 0$, $\beta = -\frac{1}{4}$, also:

$$\int_x^{x+1} \log G(t)\, dt = \tfrac{1}{4} x^2 (\log(x^2) - 1) + \tfrac{1}{2} \log \varpi.$$

Anwendung auf die Integralrechnung.

§. 10.

Multiplicirt man die Gleichung

$$\log \sin \pi t = \log \pi - \log \Gamma(t) - \log \Gamma(1-t),$$

die man aus (4.) erhält und die unter der Bedingung $0 < t < 1$ gilt, mit dt und integrirt zwischen den Grenzen 0 und x, so folgt mit Anwendung von (6.) und (7.) leicht:

$$(24.) \quad \int_0^x \log \sin \pi t\, dt = \log \frac{G(1-x)}{2^x G(x)}, \qquad 0 < x < 1.$$

Hieraus folgt, wenn $\frac{1}{2} - t$ für t gesetzt wird:

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \log \cos \pi t\, dt = \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)}{2^{x-\frac{1}{2}} G(\frac{1}{2}+x)}, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < +\tfrac{1}{2},$$

und hieraus wieder für $x = 0$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \cos \pi t\, dt = -\tfrac{1}{2} \log 2.$$

Dies zu der vorhergehenden Gleichung addirt giebt:

$$(25.) \quad \int_0^x \log \cos \pi t\, dt = \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)}{2^x G(\frac{1}{2}+x)}, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < +\tfrac{1}{2}.$$

Durch Subtraction der Gleichung (25.) von (24.) erhält man ferner:

$$(26.) \quad \int_0^x \log \operatorname{tang} \pi t\, dt = \log \frac{G(1-x)\, G(\frac{1}{2}+x)}{G(x)\, G(\frac{1}{2}-x)}, \qquad 0 < x < \tfrac{1}{2}$$

und durch theilweise Integration findet man aus (24.), (25.), (26.) leicht die folgenden Integrale:

$$\int_0^x t \operatorname{cotg} \pi t\, dt = \frac{1}{\pi} \left\{ x \log(2 \sin \pi x) - \log \frac{G(1-x)}{G(x)} \right\}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$\int_0^x t \operatorname{tang} \pi t\, dt = \frac{-1}{\pi} \left\{ x \log(2 \cos \pi x) + \log \frac{G(\frac{1}{2}+x)}{G(\frac{1}{2}-x)} \right\}, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2},$$

$$\int_0^x \frac{t\, dt}{\sin \pi t \cos \pi t} = \frac{1}{\pi} \left\{ x \log(\operatorname{tang} \pi x) + \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)\, G(x)}{G(1-x)\, G(\frac{1}{2}+x)} \right\}, \qquad 0 < x < \tfrac{1}{2}.$$

Das letzte dieser Integrale führt natürlich auch zu der Bestimmung des folgenden:

$$\int_0^x \frac{t\,dt}{\sin \pi t},$$

dessen Darstellung wir jedoch hier übergehen. Ebenso übergehen wir der Kürze wegen die drei Integrale $\int_0^x \frac{t^2 dt}{\sin^2 \pi t}$, $\int_0^x \frac{t^2 dt}{\cos^2 \pi t}$, $\int_0^x \frac{t^2 \cos \pi t\, dt}{\sin^2 \pi t}$, die sich aus den so eben dargestellten durch theilweise Integration herleiten lassen.

§. 11.

Es ist klar, dafs man in die Integrale (24.), (25.), (26.) durch die Substitution at für t gewisse Constanten einführen kann. Es ist ferner ersichtlich, dafs man durch Addition von diesen Integralen auf solche kommen kann, bei denen unter dem Integralzeichen der Logarithmus einer Summe oder Differenz der trigonometrischen Functionen sich vorfindet. Wir übergehen es, diese Integrale vollständig aufzustellen und führen als Beispiel nur eins derselben ohne weitere Entwicklung an. Es ist dies das folgende:

$$(27.)\quad \int_0^x \log(\cos bt - \cos at)\,dt$$

$$= \frac{2}{a+b}\log\frac{G(1-\frac{1}{2}(a+b)x)}{G(\frac{1}{2}(a+b)x)} + \frac{2}{a-b}\log\frac{G(1-\frac{1}{2}(a-b)x)}{G(\frac{1}{2}(a-b)x)} - x\log 2,$$

$$a > b,\quad 0 < x < \frac{2}{a+b}.$$

Bemerkt man nun, dafs aus (7.)

$$\frac{d\log G(x)}{dx} = \log \Gamma(x) + x - \tfrac{1}{2}(1+\log 2\pi)$$

folgt, und denkt man sich hierin $\varphi(ax)$ für x geschrieben, wo φ eine beliebige Function, a eine Constante bedeutet, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial \log G(\varphi(ax))}{\partial a} = \{\log \Gamma\varphi(ax) + \varphi(ax) - \tfrac{1}{2}(1+\log 2\pi)\}\frac{\partial \varphi(ax)}{\partial a}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung erhält man aus (27.) durch Differentiation nach a leicht das folgende Integral:

$$(28.)\int_0^x \frac{t\sin ant\,dt}{\cos bnt - \cos ant} = \frac{2}{(a+b)^2\pi}\log\frac{G(\frac{1}{2}(a+b)x)}{G(1-\frac{1}{2}(a+b)x)} + \frac{2}{(a-b)^2\pi}\log\frac{G(\frac{1}{2}(a-b)x)}{G(1-\frac{1}{2}(a-b)x)}$$

$$+ \frac{x}{(a+b)\pi}\log\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\pi x + \frac{x}{(a-b)\pi}\log\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\pi x + \frac{2ax}{(a^2-b^2)\pi}\log 2,$$

$$a > b,\quad 0 < x < \frac{2}{a+b}.$$

Eine Anzahl von ähnlichen Ergebnissen findet man aus den dem Integrale (27.) verwandten, von welchen oben die Rede war.

§. 12.

Wir wenden uns jetzt zur Herleitung einer anderen Reihe von Integralen. Setzt man in (26.) $\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} at$ für t, so erhält man leicht:

$$(29.)\quad \int_0^x \frac{\log t\,dt}{1+a^2t^2}$$

$$= \frac{\pi}{a}\log\frac{G\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)G\left(1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)}{G\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)G\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)} - \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang} ax\log a,$$

$$0<x<\infty,\quad 0<\operatorname{arc\,tang} ax<\tfrac{1}{2}\pi;$$

für $a=1$ und $x=1$ folgt hieraus:

$$(29^a.)\quad \int_0^1 \frac{\log t\,dt}{1+t^2} = 2\pi\log\frac{G(\frac{3}{4})}{G(\frac{1}{4})},$$

oder da nach $(20^a.)$

$$\log G(\tfrac{1}{4})+\log G(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{9}{8}\log\varpi$$

ist,

$$(29^b.)\quad \int_0^1 \frac{\log t\,dt}{1+t^2} = \tfrac{9}{4}\pi\log\varpi - 4\pi\log G(\tfrac{1}{4}).$$

Mit Hülfe von (29.) läfst sich ein anderes Integral ebenfalls auf die Function G zurückführen. Es ist nämlich

$$\int_0^x \frac{a\,dx}{1+a^2+2a\cos x} = \frac{2a}{1-a^2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-a}{1+a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right),$$

$$\int_0^x \frac{\cos x\,dx}{1+a^2+2a\cos x} = \frac{x}{2a} - \frac{1+a^2}{a(1-a^2)}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-a}{1+a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right),$$

$$a<1,\quad x<\pi,\quad 0<\operatorname{arc\,tang}<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Hieraus folgt durch Addition und Integration nach a zwischen den Grenzen 1 und a:

$$\int_0^x \log\frac{1+a^2+2a\cos t}{2+2\cos t}\,dt = x\log a - 2\int_1^a \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{dt}{t}$$

oder

$$= (2x-\pi)\log a + 2\int_1^a \operatorname{arc\,tang}\frac{t+\cos x}{\sin x}\,\frac{dt}{t}$$

oder, da nach (25.)

$$\int_0^x \log(2+2\cos t)\,dt = 4\pi \log \frac{G\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\pi}\right)}$$

ist:

$$\int_0^x \log(1+a^2+2a\cos t)\,dt$$

$$= (2x-\pi)\log a + 4\pi \log \frac{G\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\pi}\right)} + 2\int_1^a \operatorname{arc\,tang} \frac{t+\cos x}{\sin x}\,\frac{dt}{t}$$

oder durch theilweise Integration des Integrals rechterhand:

$$(30.)\quad \int_0^x \log(1+a^2+2a\cos t)\,dt$$

$$= (2x-\pi)\log a + (\pi-x)\log\sin x + 2\operatorname{arc\,tang}\frac{a+\cos x}{\sin x}\cdot\log\frac{a}{\sin x}$$

$$+ 4\pi\log\frac{G\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\pi}\right)} - 2\int_{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x}^{\frac{a+\cos x}{\sin x}} \frac{\log(t-\operatorname{cotg} x)}{1+t^2}\,dt,$$

$$a<1,\quad x<\pi,\quad 0<\operatorname{arc\,tang}<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Hieraus folgt unter der Annahme, dafs $x=\frac{1}{2}\pi$, mit Hülfe von (29.) und (29^a.):

$$(30^a.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(1+a^2+2a\cos t)\,dt$$

$$= 2\operatorname{arc\,tang} a\,.\log a - 2\pi\log\frac{G\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)\cdot G\left(1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)}{G\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)\cdot G\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)}.$$

Die entsprechenden Gleichungen für den Fall, dafs $a>1$, findet man aus den vorhergehenden leicht, wenn man $\frac{1}{a}$ für a setzt.

Es lassen sich noch eine grofse Anzahl anderer Integrale, die mit den bisher betrachteten verwandt sind, hieran anknüpfen, so namentlich $\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,tang} at}{t}\,dt$, $\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,sin} at}{t}\,dt$, $\int_0^x \frac{(\operatorname{arc\,tang} at)^2}{t^2}\,dt$, $\int_0^x \frac{\log t\,dt}{\sqrt{1-a^2t^2}}$, etc., doch übergehe ich der Kürze wegen die Entwicklung derselben.

Aarburg, im Juli 1856.