27.
Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen.

(Von Herrn *A. Clebsch.*)

---

§. 1.

Die Gleichungen von welchen der Theorie nach die Bewegung einer Flüssigkeit abhängt, werden im Allgemeinen in doppelter Weise dargestellt. Entweder betrachtet man als die unbekannten Gröfsen des Problems die Geschwindigkeiten, welche zu einer gewissen Zeit an einer Stelle der Flüssigkeit existiren, man behandelt sie als Functionen des Ortes und der Zeit, und gelangt auf diese Weise zu einem System von vier partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches den Namen des *Euler*'schen führt, und hat nach Auflösung dieses Systems ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zu lösen, um die Bewegung eines einzelnen Flüssigkeitstheilchens zu bestimmen. Oder man führt die Coordinaten eines Flüssigkeitstheilchens als abhängige Variable ein, und gelangt zu einem System von abermals vier partiellen Differentialgleichungen, mittelst dessen man jene Coordinaten als Funktionen der Zeit und des Anfangszustandes bestimmt. Dies ist der Weg, welchen *Lagrange* in seiner analytischen Mechanik eingeschlagen hat. Man umgeht so die Auflösung eines hinzutretenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, aber die Gleichungen des partiellen Systems werden bis auf eine von der zweiten Ordnung; auch scheint es mifslich, dafs die charakteristischen Eigenschaften der wichtigen *stationären* Bewegung in dieser Form wenig deutlich hervortreten.

Man kann indefs das Problem noch auf eine dritte Art behandeln, welche gerade in dem erwähnten Falle eigenthümliche Vorzüge darbietet. Für die stationäre Bewegung nämlich kann man die Differentialgleichungen ersetzen durch die Gleichungen des folgenden Problems:

Ein dreifaches, über den Raum ausgedehntes Integral zu einem Minimum zu machen, bei welchem die zu integrirende Funktion die lebendige

Kraft eines Theilchens ist, vermehrt um eine beliebige Gröfse, welche nur für alle diejenigen Theilchen dieselbe bleibt, welche die nämliche Bahn durchlaufen. Die erwähnte Funktion ist dabei ausgedrückt durch diejenigen Funktionen, welche, Constanten gleich gesetzt, die Bewegungscurven der Theilchen geben, und durch die ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionen.

Durch diesen Satz, welcher im Folgenden, nebst einigen andern Sätzen, abgeleitet werden soll, und welcher eine merkwürdige Analogie mit dem Principe der kleinsten Wirkung zeigt, erhält man also für die stationäre Bewegung ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, und durch Integration findet man unmittelbar die Bewegungscurven; rückwärts durch Differentiation die Geschwindigkeiten. Für den nicht stationären Zustand wird allerdings das entsprechende Resultat viel complicirter; doch wollte ich es mir nicht versagen, die allgemeine Entwicklung aufzustellen, welche auch diesen Fall umfafst. Ich werde sogar vorläufig ein allgemeines System partieller Differentialgleichungen betrachten, und die Resultate einer, der angedeuteten entsprechenden, Transformation aufstellen.

Für die stationäre Bewegung in der *Ebene* hat bereits Herr Dr. *Meissel* in einer, in *Poggendorf*'s Annalen Bd. 95 erschienenen Abhandlung einen Versuch gemacht, eine Transformation von möglichst grofser Allgemeinheit zu geben, indem er die gewöhnliche Annahme ausgeschlossen hat, nach welcher die Geschwindigkeiten eines Moleküls den partiellen Ableitungen *einer* Funktion gleich gesetzt werden. Indefs bemerkt man leicht, dafs Herr *Meissel* a. a. O. zu einigen falschen Schlüssen verleitet worden ist, welche die Allgemeinheit des Resultats wiederum fast ganz aufheben. Die Gleichung, welche Herr *Meissel* (p. 278, 5) gegeben hat, mufs in der That durch eine andere ersetzt werden, welche ich im Folgenden (§. 7, 59) aufgestellt habe.

Die Quelle der nachstehenden Untersuchungen bildet die Theorie der Funktionaldeterminanten, welche unmittelbar die wahre Form erkennen läfst, unter welcher sich die Geschwindigkeiten im Allgemeinen darstellen.

Ich wende mich zunächst dem folgenden allgemeinen System von Gleichungen zu.

§. 2.

Es seien $u_1, u_2, \ldots u_n$ und V Funktionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und t, und als solche bestimmt durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\cdots+u_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n},\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots+u_n\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n},\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} = \dfrac{\partial u_n}{\partial t}+u_1\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}+\cdots+u_n\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n},\end{cases}$$

$$(2.)\quad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

Die Bedeutung der letzten Gleichung läfst sich unmitttelbar analytisch interpretiren. Bildet man die Funktionaldeterminante der n Funktionen

$$a,\quad a',\quad a^{(2)},\quad \ldots\quad a^{(n-1)}$$

nach den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und ordnet dieselbe nach den Ableitungen von a, so dafs sie die Gestalt annimmt:

$$(3.)\quad R = \Delta_1\frac{\partial a}{\partial x_1}+\Delta_2\frac{\partial a}{\partial x_2}+\cdots+\Delta_n\frac{\partial a}{\partial x_n},$$

so sind die Δ wiederum Funktionaldeterminanten, bei welchen a und immer *eine* der Variabeln x ausgeschlossen wird. Dann hat man bekanntlich die identische Gleichung (vgl. *Jacobi,* theoria novi multiplicatoris, dieses Journal Bd. 27 p. 203, oder Mathem. Werke I, p. 51):

$$(4.)\quad \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial \Delta_n}{\partial x_n} = 0,$$

und es sind zugleich die Ausdrücke $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, welche $n-1$ willkürliche Funktionen ($a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}$) enthalten, die allgemeinsten, welche der Gleichung (4.) Genüge leisten. Man kann daher untersuchen, was aus den Gleichungen (1.) wird, wenn man in denselben die Funktionen $a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}$ als abhängige Variable einführt, indem man setzt:

$$(5.)\quad u_1 = \Delta_1,\quad u_2 = \Delta_2,\quad \ldots\quad u_n = \Delta_n.$$

Da wir die Gleichung (2.) identisch erfüllt haben, so sind nur die Gleichungen (1.) übrig, welche sich in die folgende symbolische Gleichung zusammenfassen lassen:

$$(6.)\quad \delta V = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial \Delta_k}{\partial t}\delta x_k+\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\Delta_i\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i}\delta x_k,$$

in welcher bei der Variation nur $x_1, x_2, \ldots x_n$, nicht aber t, als veränderlich zu betrachten sind.

Bezeichnet man durch $2T$ den Ausdruck:

$$(7.)\quad 2T = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2,$$

so hat man durch Variation dieses Ausdrucks:

$$(8.)\quad \delta T = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k} \delta x_k,$$

und statt der Gleichung (6.) kann man die folgende betrachten:

$$(9.)\quad \delta(V-T) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Delta_k}{\partial t} \delta x_k + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_i \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k}\right) \delta x_k.$$

Setzt man noch der Kürze wegen

$$(10.)\quad M_k = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k}\right),$$

so geht die Gleichung (9.) über in

$$(10\text{ a.})\quad \delta(V-T) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial t} + M_k\right) \delta x_k.$$

Diese Form läfst bereits Eigenschaften der Transformation erkennen. Bildet man nämlich die Summe:

$$M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + \cdots + M_n \Delta_n = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \Delta_i \Delta_k \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_k}\right),$$

so sieht man, dafs dieselbe durch Vertauschung von i und k ihr Zeichen wechselt, also identisch verschwinden mufs. Hieraus geht nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten hervor, dafs die Ausdrücke M die Gestalt annehmen müssen:

$$(11.)\quad \begin{cases} M_1 = A^{(1)} \dfrac{\partial a'}{\partial x_1} + A^{(2)} \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} + \cdots + A^{(n-1)} \dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_1}, \\ M_2 = A^{(1)} \dfrac{\partial a'}{\partial x_2} + A^{(2)} \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots + A^{(n-1)} \dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ M_n = A^{(1)} \dfrac{\partial a'}{\partial x_n} + A^{(2)} \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_n} + \cdots + A^{(n-1)} \dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_n}, \end{cases}$$

wo die A in noch unbekannter Weise die ersten und zweiten Ableitungen der a enthalten. Die Form der Ausdrücke A soll unten angegeben werden.

Die Gleichung (10 a.) aber geht unmittelbar in die folgende über:

$$(12.)\quad \delta(V-T) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Delta_k}{\partial t} \delta x_k + A^{(1)} \delta a' + A^{(2)} \delta a^{(2)} + \cdots + A^{(n-1)} \delta a^{(n-1)}.$$

Betrachten wir zunächst denjenigen Fall, wo die Gröfsen Δ von t unabhängig gedacht werden (dem Falle der stationären Bewegung entsprechend), so können wir die Gleichung (12.) unmittelbar integriren; denn aus der Gleichung

$$(13.)\quad \delta(V-T) = A^{(1)}\delta a' + A^{(2)}\delta a^{(2)} + \cdots + A^{(n-1)}\delta a^{(n-1)},$$

wo rechts nur $n-1$, links n Variationen vorkommen, folgt ohne Weiteres:

$$(14.)\quad \begin{cases} A^{(1)} = \Pi'(a') \\ A^{(2)} = \Pi'(a^{(2)}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A^{(n-1)} = \Pi'(a^{(n-1)}) \end{cases}$$

$$(14\text{ a.})\quad V-T = \Pi(a', a^{(2)}, \ldots a^{(n-1)}).$$

In diesen Gleichungen ist Π eine willkürliche Funktion der a, und $\Pi'(a^{(i)})$ bezeichnet die partielle Ableitung dieser Function nach $a^{(i)}$. Man kann also in diesem Falle *die Gleichungen* (1.), (2.) *ersetzen durch die* $n-1$ *Gleichungen* (14.), *welche von der zweiten Ordnung sind.*

Sind die Δ nicht von t unabhängig, so kann man ebenfalls ein System von $n-1$ Differentialgleichungen aufstellen, welche aber vom dritten Grade und viel verwickelter sind. Die Gleichung (12.) nämlich stellt das System dar:

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(V-T)}{\partial x_1} = A^{(1)}\dfrac{\partial a'}{\partial x_1} + A^{(2)}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} + \cdots + A^{(n-1)}\dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Delta_1}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial(V-T)}{\partial x_2} = A^{(1)}\dfrac{\partial a'}{\partial x_2} + A^{(2)}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots + A^{(n-1)}\dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Delta_2}{\partial t}, \\ \cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial(V-T)}{\partial x_n} = A^{(1)}\dfrac{\partial a'}{\partial x_n} + A^{(2)}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_n} + \cdots + A^{(n-1)}\dfrac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \Delta_n}{\partial t}. \end{cases}$$

Bildet man nun die Funktionaldeterminanten $n-2$ter Ordnung

$$\frac{\partial \Delta_h}{\partial \dfrac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}$$

und die Summe

$$S_h^{(m)} = \frac{\partial(V-T)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \Delta_h}{\partial \dfrac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}} + \frac{\partial(V-T)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \Delta_h}{\partial \dfrac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}} + \cdots + \frac{\partial(V-T)}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial \Delta_h}{\partial \dfrac{\partial a^{(m)}}{\partial x_n}},$$

so ist auch $S_h^{(m)}$ eine Funktionaldeterminante, und zwar erhalte ich dieselbe, wenn ich in Δ_h an die Stelle von $a^{(m)}$ die Funktion von $V-T$ setze; auch kann ich $S_h^{(m)}$ als Coefficienten von $\dfrac{\partial a^{(m)}}{\partial x_h}$ in der Funktionaldeterminante $n$ter Ordnung der Funktionen a', $a^{(2)}$, ..., $a^{(n-1)}$, $(V-T)$ betrachten. Ich habe also nach dem oben erwähnten Satze:

$$\frac{\partial S_1^{(m)}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_2^{(m)}}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial S_n^{(m)}}{\partial x_n}=0$$

für jeden Werth von m von 1 bis $n-1$; eine Gleichung, welche mit Hülfe des Ausdrucks von $S_h^{(m)}$ übergeht in

$$0=\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial}{\partial x_h}\left\{\frac{\partial(V-T)}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}\right\}.$$

Setzt man auch noch für $\frac{\partial(V-T)}{\partial x_k}$ aus (15.) seinen Werth ein, so hört die Gleichung auf eine identische zu sein, und man erhält Gleichungen zur Bestimmung der a. Man hat dann nämlich:

$$(16.)\quad 0=\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}\left(A^{(1)}\frac{\partial a'}{\partial x_k}+A^{(2)}\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_k}+\cdots A^{(n-1)}\frac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_k}+\frac{\partial\Delta_k}{\partial t}\right)\right\}.$$

Diese Gleichung indefs vereinfacht sich noch bedeutend. Unter dem Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial x_h}$ ist in $A^{(1)}$ multiplicirt:

$$\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}}\cdot\frac{\partial a'}{\partial x_1}+\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}}\cdot\frac{\partial a'}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_n}}\cdot\frac{\partial a'}{\partial x_n},$$

und dies ist nichts als diejenige Funktionaldeterminante, welche aus Δ_h entsteht, wenn man darin $a^{(m)}$ durch a' ersetzt; dieselbe enthält also zwei gleiche Funktionen und mufs daher verschwinden, wenn nicht $m=1$ ist, wo sie mit Δ_h zusammenfällt. So ist also der Coefficient von $A^{(1)}$ Null, ebenso der von $A^{(2)}$ etc. bis auf den von $A^{(m)}$, welcher Δ_h wird. Und so verwandelt sich die Gleichung (16.) in:

$$(17.)\qquad 0=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial}{\partial x_h}(\Delta_h.A^{(m)})+\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}\cdot\frac{\partial\Delta_k}{\partial t}\right).$$

Fügt man noch hinzu, dafs nach dem wiederholt angewandten Satze:

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial\Delta_h}{\partial x_h}=0,\qquad \sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_h}}\right)=0,$$

so nimmt die Gleichung (17.) endlich folgende Gestalt an:

$$(18.)\qquad 0=\Delta_1\frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1}+\Delta_2\frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2}+\cdots+\Delta_n\frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_n}+Q^{(m)},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist

$$(18\text{ a.})\qquad Q^{(m)}=\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial^2\varDelta_k}{\partial t\,\partial x_h}\cdot\frac{\partial\varDelta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}.$$

Die Gleichungen (18.) dienen zur Bestimmung der a. Denkt man sich diese Gleichungen aufgelöst, und sodann in $V-T$ statt $x_1, x_2, \dots x_n$ als Variable eingeführt $a', a^{(2)}, \dots a^{(n-1)}$ und eine beliebige andere Funktion a, so hat man nach den Gleichungen (15.):

$$\varDelta_1\frac{\partial(V-T)}{\partial x_1}+\varDelta_2\frac{\partial(V-T)}{\partial x_2}+\dots\varDelta_n\frac{\partial(V-T)}{\partial x_n}=\frac{\partial T}{\partial t}$$

und zugleich links nichts Anderes als $R\left[\frac{\partial(V-T)}{\partial a}\right]$; wenn wir nämlich R die Determinante sämmtlicher a nach den x nennen, und durch die eckige Klammer andeuten, dafs in ihr die x durch die a ausgedrückt zu denken sind. Man hat also

$$R\left[\frac{\partial(V-T)}{\partial a}\right]=\frac{\partial T}{\partial t},$$

mithin durch Integration:

$$(19.)\qquad V-T=\int\left[\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\right]da+\Pi(a', a'', \dots a^{(n-1)}, t),$$

wo Π eine willkürliche Funktion ist. Die Gleichungen (18.), (19.) geben somit die Funktionen a, V; die Differentiation der Gleichung (19.) führt noch auf Bedingungsgleichungen für die willkürlichen Funktionen, welche die vollständige Integration der Gleichungen (18.) ergeben würde.

Ich bemerke nur noch, dafs sobald *irgend Einer* der Ausdrücke $Q^{(m)}$ verschwindet, die entsprechende Gleichung (18.) das Integral giebt

$$(20.)\qquad A^{(m)}=\Omega(a', a^{(2)}, \dots a^{(n-1)}, t),$$

wo Ω eine willkürliche Funktion ist. Jene Ausdrücke verschwinden *sämmtlich* in dem oben bereits betrachteten Falle.

§. 3.

Ehe ich fortfahre, ist es nöthig die Ausdrücke der A wirklich zu entwickeln. Dieselben sind aus den Gleichungen (9.), (10.), (11.) gegeben; es mufs nämlich sein

$$(21.)\qquad A^{(1)}\frac{\partial a'}{\partial x_k}+A^{(2)}\frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_k}+\dots+A^{(n-1)}\frac{\partial a^{(n-1)}}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{i=n}\varDelta_i\left(\frac{\partial\varDelta_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\varDelta_i}{\partial x_k}\right).$$

Der rechte Theil mufs in den linken umgeformt werden. Zu dem Ende betrachte ich die dreifache Summe

$$(22.)\qquad S_k = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{m=1}^{m=n-1} \frac{\partial\Delta_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}}.$$

Die Summe

$$\sum_{m=1}^{m=n-1}\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}},$$

welche in S_k mit $\frac{\partial\Delta_h}{\partial x_i}$ multiplicirt ist, stellt offenbar eine Funktionaldeterminante dar, und zwar diejenige, welche aus Δ_h entsteht, wenn man die nach x_i darin ausgeführten Ableitungen durch die nach x_k ausgeführten ersetzt. Diese Determinante aber enthält im Allgemeinen zwei Reihen in denen nach x_k differenzirt ist, und verschwindet also; nur wenn die Indices k und i gleich sind, bleibt sie durch jene Vertauschung ungeändert, nämlich Δ_h; und wenn $k=h$ ist, so enthält Δ_h selbst bereits keine Ableitungen nach x_k mehr, und der Werth der resultirenden Determinante wird $-\Delta_i$, da nach einem bekannten Satze

$$\frac{\partial\Delta_k}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} = -\frac{\partial\Delta_i}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}}$$

ist. Somit reducirt sich die Summe (22.) auf

$$S_k = \sum_{h=1}^{h=n}\Delta_h\frac{\partial\Delta_h}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\Delta_k}{\partial x_i}\Delta_i$$

und man sieht also, dafs S_k sich von dem rechten Theile der Gleichung (21.) nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

Aber die Gleichung (22.) nimmt auch unmittelbar die Gestalt an:

$$S_k = \sum_{m=1}^{m=n-1}\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_k}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial\Delta_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}}\right\}.$$

Dies ist bereits die in (21.) verlangte Form, da in der Klammer der Index k nicht mehr vorkommt; man kann also setzen

$$(23.)\qquad A^{(m)} = -\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial\Delta_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}}.$$

Diesem Ausdruck kann man noch eine passendere Gestalt geben, indem man bemerkt, dafs

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} \right);$$

denn man kann nun schreiben

$$A^{(m)} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{h=1}^{h=n} \Delta_h \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}} \right\}.$$

Nun war aber oben die Bezeichnung eingeführt:

$$2T = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2.$$

Wenden wir diese an, so erhalten wir endlich $A^{(m)}$ in seiner einfachsten Gestalt:

$$(24.)\qquad -A^{(m)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{d x_2}} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_n}}.$$

Dies ist also der Ausdruck von $A^{(m)}$, in den, wie man sieht, zweite Ableitungen eingehen; die Gleichung (18.) führt mithin auf die dritten. Ich bemerke noch, dafs die Gleichung (23.) uns erlaubt, den Gleichungen (18.) die Gestalt zu geben:

$$(25.)\qquad \Delta_1 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2} + \cdots + \Delta_n \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_n} + \frac{\partial A^{(m)}}{\partial t} = R^{(m)},$$

wo der Kürze wegen

$$(25\text{ a.})\qquad R^{(m)} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Delta_h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Delta_h}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}}$$

gesetzt ist; eine Form, von welcher im Folgenden Gebrauch gemacht werden soll.

Für den einfacheren Fall aber, dafs die Δ (oder die u) von t unabhängig sind, giebt die Gleichung (24.) aus (14.) folgende:

$$(26.)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_n}} + \Pi'(a^m) = 0.$$

Das hierdurch dargestellte System von Gleichungen ist kein anderes, als dasjenige, welches man aus der Aufgabe erhält, ***das Integral***

$$(27.)\qquad \int^{(n)} (T - \Pi)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

zu einem Minimum zu machen, wo

$$(28.)\qquad 2T = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2;$$

ein Theorem, welches für die Transformation der betreffenden Differentialgleichungen von Wichtigkeit ist; und interessant dadurch, dafs es die Identität der Probleme erkennen läfst, welche durch die Gleichungen (1.), (2.) und (27.) gegeben sind.

§. 4.

Verbinden wir jetzt das aufgestellte System von Differentialgleichungen mit dem Systeme vollständiger Differentialgleichungen

$$(29.)\qquad \frac{dx_1}{dt}=u_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=u_2,\quad \dots\quad \frac{dx_n}{dt}=u_n,$$

für welches wir nun auch setzen können

$$(30.)\qquad \frac{dx_1}{dt}=\varDelta_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=\varDelta_2,\quad \dots\quad \frac{dx_n}{dt}=\varDelta_n.$$

Es zeigt zunächst die identische Gleichung

$$\frac{\partial \varDelta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \varDelta_2}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial \varDelta_n}{\partial x_n} = 0,$$

dafs Ein Multiplicator der Gleichungen gleich Eins ist; und man also das letzte Integral auffinden kann, wenn man die ersten $n-1$ kennt.

Man sieht ferner ein, dafs, sobald die $\varDelta$ von t frei sind, *die Integrale der Gleichungen unmittelbar die folgenden werden:*

$$(31.)\qquad a'=\text{Const.},\quad a^{(2)}=\text{Const.},\quad \dots\quad a^{(n-1)}=\text{Const.}$$

Denn aus den Gleichungen (30.) folgt:

$$\frac{da^{(m)}}{dt}=\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\dots=\varDelta_1\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_1}+\varDelta_2\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_2}+\dots,$$

was identisch Null ist. *Auch die A sind, gleich Constanten gesetzt, Integrale der vorliegenden Gleichungen,* da sie nach (14.) Funktionen der a sind.

Für den allgemeinen Fall kann man noch folgende Theoreme hinzufügen:

1. *Sobald Eines der a von t unabhängig ist, wird $a=$ Const. ein Integral der Gleichungen* (30.)

2. *Sobald der Ausdruck* (25 a.)

$$R^{(m)}=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial \varDelta_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varDelta_h}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial x_i}}$$

verschwindet, ist

$$A^{(m)}=\text{Const.}$$

ein Integral der vorliegenden Gleichungen.

Denn es ist alsdann nach (30.), (25.)

$$\frac{dA^{(m)}}{dt} = \varDelta_1 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} + \varDelta_2 \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2} + \cdots \varDelta_n \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_n} + \frac{\partial A^{(m)}}{\partial t} = R^{(m)} = 0.$$

§. 5.

Setzen wir nunmehr $n=3$, so gehen die Gleichungen (1.), (2.) in die *Euler*schen über, nämlich in:

$$(32.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

wo u_1, u_2, u_3 die an der Stelle (x_1, x_2, x_3) zur Zeit t stattfindenden Geschwindigkeiten sind, und $V = U - \frac{p}{q}$, wenn U die Kräftefunktion bezeichnet, p den Druck, q die constante Dichtigkeit. Ich setze nun, den Gleichungen (5.) zufolge:

$$(33.)\quad \begin{cases} u_1 = \varDelta_1 = \dfrac{\partial a'}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial a'}{\partial x_3}, \\ u_2 = \varDelta_2 = \dfrac{\partial a'}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial a'}{\partial x_1}, \\ u_3 = \varDelta_3 = \dfrac{\partial a'}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial a'}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Dann ist nach einer bekannten Transformation

$$(34.)\quad 2T = \varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + \varDelta_3^2 = P'P^{(2)} - PP;$$

wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$(35.)\quad \begin{cases} P' = \left(\dfrac{\partial a'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial a'}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial a'}{\partial x_3}\right)^2, \\ P^{(2)} = \left(\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3}\right)^2, \\ P = \dfrac{\partial a'}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial a'}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial a'}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3}, \end{cases}$$

und die Ausdrücke der A werden:

$$(36.)\quad \begin{cases} -A^{(1)} = \sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{P^{(2)}\dfrac{\partial a'}{\partial x_i} - P\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_i}\right\}, \\ -A^{(2)} = \sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{P'\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial x_i} - P\dfrac{\partial a'}{\partial x_i}\right\}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen, von denen dann das Problem im Allgemeinen abhängt, sind

$$(37.)\quad \begin{cases} 0 = \varDelta_1 \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} + \varDelta_2 \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} + \varDelta_3 \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial t} - R^{(1)}, \\ 0 = \varDelta_1 \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1} + \varDelta_2 \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2} + \varDelta_3 \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial t} - R^{(2)}, \end{cases}$$

wo

$$(37\text{ a.})\quad \begin{cases} R^{(1)} = \dfrac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial x_1 \partial t}\Big(\dfrac{\partial \varDelta_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varDelta_2}{\partial x_3}\Big) + \dfrac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial x_2 \partial t}\Big(\dfrac{\partial \varDelta_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \varDelta_3}{\partial x_1}\Big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial x_3 \partial t}\Big(\dfrac{\partial \varDelta_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \varDelta_1}{\partial x_2}\Big), \\ -R^{(2)} = \dfrac{\partial^2 a'}{\partial x_1 \partial t}\Big(\dfrac{\partial \varDelta_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varDelta_2}{\partial x_3}\Big) + \dfrac{\partial^2 a'}{\partial x_2 \partial t}\Big(\dfrac{\partial \varDelta_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \varDelta_3}{\partial x_1}\Big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 a'}{\partial x_3 \partial t}\Big(\dfrac{\partial \varDelta_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \varDelta_1}{\partial x_2}\Big). \end{cases}$$

Die Integrale der Gleichungen

$$(38.)\quad \frac{dx_1}{dt} = \varDelta_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \varDelta_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = \varDelta_3$$

stellen ein veränderliches Kurvensystem dar, auf welchem sich die Theilchen bewegen. Nach den in §. 4 aufgeführten Sätzen ***hat man nun für diese Gleichungen das Integral***

$$A^{(m)} = \text{Const.},$$

wenn in einer der Gleichungen (37.) ***das Glied*** $R^{(m)}$ ***verschwindet.*** Dies ist z. B. der Fall, wenn $a^{(2)}$ von der Zeit unabhängig ist; dann ist also

$$A^{(1)} = \text{Const.}$$

ein Integral. Aber auch

$$a^{(2)} = \text{Const.}$$

ist ein solches. Verbinden wir dies mit dem Principe des letzten Multiplicators, ***so können wir also die Gleichungen*** (38.) ***integriren, sobald eines der Oberflächensysteme, auf welchen die Bewegung vor sich geht, von der Zeit unabhängig ist.*** Das letzte Integral sei $\varphi = \text{Const.}$; dann mufs also φ der Gleichung genügen

$$W = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varDelta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \varDelta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \varDelta_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0;$$

und weil der Multiplicator 1 ist, wird dieser Ausdruck auch gleich der Determinante:

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial x_3} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial t} & \frac{\partial A^{(1)}}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Führt man statt x_1, x_2, x_3 nun $a^{(2)}$, $A^{(1)}$ und irgend eine neue Variable v ein, und bezeichnet die neuen Ableitungen durch eine Klammer, so geht diese identische Gleichung über in:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+\varDelta_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\varDelta_2\frac{\partial v}{\partial x_2}+\varDelta_3\frac{\partial v}{\partial x_3}\right\} \equiv D\cdot\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \end{vmatrix},$$

wo D die Determinante von v, $a^{(2)}$, $A^{(1)}$ nach x_1, x_2, x_3 ist. Setzt man noch der Kürze wegen

$$(39.)\qquad w = \frac{\partial v}{\partial t}+\varDelta_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\varDelta_2\frac{\partial v}{\partial x_2}+\varDelta_3\frac{\partial v}{\partial x_3},$$

so folgt aus der identischen Gleichung:

$$-1 = D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\qquad w = D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

und es wird sonach das gesuchte letzte Integral

$$(40.)\qquad \varphi = \int\frac{w\,dt-dv}{D}.$$

Dieser Fall tritt z. B. ein, *wenn die Bewegung um eine Vertikale nach allen Seiten dieselbe ist,* in diesem Falle also kann man, da *ein* Integral (die durch jene Vertikale gelegte Bewegungsebene) von t unabhängig ist, sämmtliche Integrale angeben.

Ist die Bewegung eine stationäre, so hat man nach (26.) etc. *diejenigen Gleichungen aufzulösen, welche das Integral*

$$(41.)\qquad \iiint\left(\frac{P'P^{(2)}-PP}{2}-\Pi(a',a^{(2)})\right)dx_1\,dx_2\,dx_3$$

zu einem Minimum machen, nämlich die Gleichungen

$$(42.)\qquad A^{(1)} = \Pi'(a'),\qquad A^{(2)} = \Pi'(a^{(2)}).$$

Die Funktionen a', $a^{(2)}$ geben dann die Oberflächensysteme, in deren Schnittkurven die Bewegung vor sich geht:

$$a' = \text{Const.}, \qquad a^{(2)} = \text{Const.}$$

Dies ist das in der Einleitung ausgesprochene Theorem. Der Druck wird endlich, den Gleichungen (14 a.) und (19.) zufolge, im Allgemeinen durch die Formel gegeben

$$U - \frac{p}{q} - T = \int \left[\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial t}\right] da + \Pi(a', a^{(2)}, t),$$

und für die stationäre Bewegung insbesondere durch

$$U - \frac{p}{q} - T = \Pi(a', a^{(2)}).$$

Dies ist zugleich die wahre Form, welche die Gleichung der lebendigen Kraft annimmt.

§. 6.

Die Einführung neuer Variabeln in die vorliegenden Gleichungen hat keine erheblichen Schwierigkeiten. Für den stationären Zustand hat man Nichts zu thun, als den Ausdruck T zu transformiren, was offenbar nur die Kenntnifs der Form voraussetzt, welche das Quadrat des Linienelementes annimmt. Ist dasselbe

$$(43.)\quad ds^2 = u_{11}dy_1^2 + u_{22}dy_2^2 + 2u_{12}dy_1dy_2\ldots,$$

wo y_1, y_2, y_3 die neuen (von t unabhängig gedachten) Variabeln sind, so ist die Transformationsdeterminante

$$(44.)\quad D = \sqrt{\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}},$$

ferner

$$2T = P'P^{(2)} - PP,$$

wo

$$(45.)\quad P = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial a'}{\partial y_1} & \frac{\partial a'}{\partial y_2} & \frac{\partial a'}{\partial y_3} & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{D^2},$$

und wo P' aus P erhalten wird, wenn man $a^{(2)}$ durch a', $P^{(2)}$, wenn man

a' durch $a^{(2)}$ ersetzt. Aus der Theorie der Determinanten ergiebt sich ferner leicht, dafs $2T$ auch die Gestalt annimmt:

$$(45\text{ a.})\qquad 2T = \frac{1}{D^2}\cdot\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \frac{\partial a'}{\partial y_1} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \frac{\partial a'}{\partial y_2} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \frac{\partial a'}{\partial y_3} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial a'}{\partial y_1} & \frac{\partial a'}{\partial y_2} & \frac{\partial a'}{\partial y_3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} & \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(vgl. ***Hesse,*** über Determinanten in der Geometrie, dieses Journal Bd. 49, p. 248, Formel (6.), (7.)).

Sodann wird also das Integral, welches ein Minimum werden soll:

$$\iiint (T-\Pi).D\,dy_1\,dy_2\,dy_3,$$

und es fliefsen daraus nach bekannter Methode die Gleichungen:

$$(46.)\qquad \begin{cases} 0 = D.\Pi'(a') + \sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(D\cdot\dfrac{\partial T}{\partial \frac{\partial a'}{\partial y_i}}\right), \\ 0 = D.\Pi'(a^{(2)}) + \sum\limits_{i=1}^{i=3} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(D\cdot\dfrac{\partial T}{\partial \frac{\partial a^{(2)}}{\partial y_i}}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichung giebt auch für den allgemeineren Fall die Transformationsformel der A:

$$(47.)\qquad -A^{(m)} = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(D\cdot\frac{\partial T}{\partial\frac{\partial a^{(m)}}{\partial y_i}}\right).$$

Wir bedürfen dieser Formel zur Transformation der Gleichung (37.). Bemerken wir ferner, dafs der erste Theil jener Gleichung, nämlich

$$U = \Delta_1\frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_1} + \Delta_2\frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_2} + \Delta_3\frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_3},$$

nichts ist als die Funktionaldeterminante von a', $a^{(2)}$, $A^{(m)}$ nach den x, so folgt unmittelbar, dafs $D.U$ die Funktionaldeterminante von a', $a^{(2)}$, $A^{(m)}$ nach den y ist; dafs also, wenn man setzt

$$(48.)\quad \begin{cases} \nabla_1 = \dfrac{\partial a'}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3} - \dfrac{\partial a'}{\partial y_3}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2}, \\ \nabla_2 = \dfrac{\partial a'}{\partial y_3}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1} - \dfrac{\partial a'}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_3}, \\ \nabla_3 = \dfrac{\partial a'}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_2} - \dfrac{\partial a'}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial y_1}, \end{cases}$$

die identische Gleichung stattfindet:

$$(49.)\quad \sum_{i=1}^{i=3} \varDelta_i \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_i} = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{k=3} \nabla_k \frac{\partial A^{(m)}}{\partial y_k}.$$

Nimmt man hier auf beiden Seiten den Coefficienten von $\dfrac{\partial A^{(m)}}{\partial x_i}$, so erhält man die Transformation von $\varDelta_i$, nämlich

$$(50.)\quad \varDelta_i = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\nabla_k}{D}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial y_k}.$$

Diese Gleichung, bei deren Ableitung die Natur der a', $a^{(2)}$, $A^{(m)}$ vollkommen gleichgültig blieb, involvirt die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_3} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_3} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

und wenn man diese Gleichung auf (37 a.) anwendet, so erhält man

$$(51.)\quad DR^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=3}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1} & \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(\dfrac{\nabla_1}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_1} + \dfrac{\nabla_2}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_2} + \dfrac{\nabla_3}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_3}\right) & \dfrac{\partial x_i}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_2}\left(\dfrac{\nabla_1}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_1} + \dfrac{\nabla_2}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_2} + \dfrac{\nabla_3}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_3}\right) & \dfrac{\partial x_i}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3} & \dfrac{\partial}{\partial y_3}\left(\dfrac{\nabla_1}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_1} + \dfrac{\nabla_2}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_2} + \dfrac{\nabla_3}{D}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_3}\right) & \dfrac{\partial x_i}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

Hier ist in $\dfrac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1}$ multiplicirt der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{i=3}\Big[\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_1}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\nabla_2}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\nabla_3}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\right)$$
$$- \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_1}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\nabla_2}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\nabla_3}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\right)\Big],$$

oder

$$\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right) - \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right)\right\},$$

oder auch, wenn man die Differentiation ausführt:

$$\sum_{k=1}^{k=3}\left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right).\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}-\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right).\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right\}$$
$$+\sum_{k=1}^{k=3}\frac{\nabla_3}{D}\left\{\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_2\,\partial y_k}-\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial x_i}{\partial y_3\,\partial y_k}\right\};$$

und wenn man nun bemerkt, dafs nach (43.)

$$(52.)\qquad \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_i}{\partial y_h}=u_{kh},$$

so geht der betrachtete Coefficient über in:

$$\sum_{k=1}^{k=3}\left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right).u_{3k}-\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right).u_{2k}+\frac{\nabla_k}{D}\left(\frac{\partial u_{3k}}{\partial y_2}-\frac{\partial u_{2k}}{\partial y_3}\right)\right\},$$

und so wird endlich die gesuchte Form von $R^{(1)}$:

$$(53.)\qquad DR^{(1)}=\sum_{k=1}^{k=3}\frac{\nabla_k}{D}\left[\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1}\left(\frac{\partial u_{3k}}{\partial y_2}-\frac{\partial u_{2k}}{\partial y_3}\right)+\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2}\left(\frac{\partial u_{1k}}{\partial y_3}-\frac{\partial u_{3k}}{\partial y_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3}\left(\frac{\partial u_{2k}}{\partial y_1}-\frac{\partial u_{1k}}{\partial y_2}\right)\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{k=3}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right) & u_{1k}\\ \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right) & u_{2k}\\ \frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\nabla_k}{D}\right) & u_{3k}\end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung und die Gleichung (49.) absolviren zusammen die Transformation der Gleichungen (37.), die also gleichfalls auf die Transformation des Linienelementes allein zurückkommt.

Sind insbesondere die y drei Systeme von Oberflächen, welche sich rechtwinklig schneiden, so verschwinden u_{12}, u_{23}, u_{31}, und man erhält an Stelle der $R^{(1)}$ die Ausdrücke:

$$(54.)\qquad R^{(1)}=\left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\left(u_{33}\frac{\nabla_3}{D}\right)-\frac{\partial}{\partial y_3}\left(u_{22}\frac{\nabla_2}{D}\right)\right\}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_1}$$
$$+\left\{\frac{\partial}{\partial y_3}\left(u_{11}\frac{\nabla_1}{D}\right)-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(u_{33}\frac{\nabla_3}{D}\right)\right\}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_2}+\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\left(u_{22}\frac{\nabla_2}{D}\right)-\frac{\partial}{\partial y_2}\left(u_{11}\frac{\nabla_1}{D}\right)\right\}\frac{\partial^2 a^{(2)}}{\partial t\,\partial y_3}$$

und das Entsprechende für $R^{(2)}$ durch Vertauschung von a' und $a^{(2)}$. Die Transformation endlich der Gleichungen (38.) ist in der Gleichung (50.) enthalten; denn multiplicirt man dieselbe mit $\frac{\partial y_h}{\partial x_i}$ und summirt nach i, so erhält man

$$(55.)\qquad \frac{dy_h}{dt}=\frac{\nabla_h}{D}.$$

§. 7.

In einzelnen Fällen ist man im Stande *eine* der Funktionen a', $a^{(2)}$ von vorn herein aus der Natur des mechanischen Problems zu bestimmen; man behält dann für die zurückbleibende Funktion a eine Differentialgleichung, welche im Allgemeinen von der dritten, bei der stationären Bewegung von der zweiten Ordnung ist.

Sei die Bewegung der Art, dafs alle Theilchen sich in parallelen Ebenen zu bewegen genöthigt sind, deren Gleichungen durch $x_3 = \text{Const.}$ dargestellt sein mögen. Man kann dann setzen

$$(56.)\qquad a^{(2)} = x_3, \qquad a' = f(x_1, x_2, t).$$

Die Gleichungen (35.), (36.) geben nunmehr:

$$(57.)\quad \begin{cases} P' = \left(\frac{\partial a'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a'}{\partial x_2}\right)^2, & P^{(2)} = 1, \qquad P = 0, \\ -A^{(1)} = \frac{\partial^2 a'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a'}{\partial x_2^2}, & A^{(2)} = 0, \end{cases}$$

und die Ausdrücke der Geschwindigkeiten werden aus (33.)

$$(58.)\qquad u_1 = \Delta_1 = \frac{\partial a'}{\partial x_2}, \qquad u_2 = \Delta_2 = -\frac{\partial a'}{\partial x_1}, \qquad u_3 = 0.$$

Daher verschwindet von den Gleichungen (37.) die zweite identisch, und man hat als einzige Gleichung:

$$(59.)\qquad \frac{\partial a'}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial a'}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial t} = 0,$$

wo A durch (57.) definirt ist. Im Falle der stationären Bewegung geben die Gleichungen (42.), (57.)

$$(60.)\qquad \frac{\partial^2 a'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a'}{\partial x_2^2} + \Pi'(a') = 0.$$

Die Integrale der zu (59.) gehörigen Differentialgleichungen sind:

$$(61.)\qquad A^{(1)} = \text{Const.}$$

und ein zweites, welches man aus dem Principe des letzten Multiplicators erhält, nämlich (40.)

$$(62.)\qquad \text{Const.} = \int \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial a'}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial a'}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dt - dv}{\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}},$$

wo statt x_1, x_2 unter dem Integralzeichen $A^{(1)}$ und die beliebige Funktion v als Variable eingeführt worden sind.

Einen zweiten Fall, in welchem gleichfalls die Differentialgleichungen auf *eine* sich reduciren, giebt die Bewegung, welche um eine Axe nach allen Richtungen dieselbe ist. Diese Axe sei die der x_3. Man kann dann die Coordinaten einführen

$$(63.)\qquad x_1 = r\cos\varphi,\qquad x_2 = r\sin\varphi,\qquad x_3 = z.$$

Das Quadrat des Linienelementes ist dann bekanntlich

$$(64.)\qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Zugleich erhält man

$$(65.)\qquad \begin{cases} P' = \left(\dfrac{\partial a'}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial a'}{\partial z}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial a'}{\partial \varphi}\right)^2, \\ P^{(2)} = \left(\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial z}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi}\right)^2, \\ P = \dfrac{\partial a'}{\partial r}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial r} + \dfrac{\partial a'}{\partial z}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial z} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial a'}{\partial \varphi}\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Die Transformationsdeterminante ist r. Nun geben die Gleichungen (47.), da $2T = P'P^{(2)} - PP$:

$$(66.)\qquad \begin{cases} -A^{(1)} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\left|P^{(2)}\dfrac{\partial a'}{\partial r} - P\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial r}\right|\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(P^{(2)}\dfrac{\partial a'}{\partial z} - P\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial z}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(P^{(2)}\dfrac{\partial a'}{\partial \varphi} - P\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi}\right), \\ -A^{(2)} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\left|P'\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial r} - P\dfrac{\partial a'}{\partial r}\right|\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(P'\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial z} - P\dfrac{\partial a'}{\partial z}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(P'\dfrac{\partial a^{(2)}}{\partial \varphi} - P\dfrac{\partial a'}{\partial \varphi}\right). \end{cases}$$

In Erwägung der um x_3 symmetrischen Bewegung kann man nun versuchen zu setzen

$$a^{(2)} = \varphi,\qquad a' = f(r, z, t).$$

Dann gehen die Gleichungen (65.) über in

$$P' = \left(\frac{\partial a'}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial a'}{\partial z}\right)^2,\qquad P^{(2)} = \frac{1}{r^2},\qquad P = 0.$$

Und die Gleichungen (66.) geben:

$$(67.)\qquad -A^{(1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial z}\right),\qquad A^{(2)} = 0.$$

Die Gleichungen (48.) gehen nunmehr über in

$$(68.)\qquad \nabla_1 = -\frac{\partial a'}{\partial z},\qquad \nabla_2 = 0,\qquad \nabla_3 = \frac{\partial a'}{\partial r}.$$

Nimmt man hinzu, dafs $D = r$, so sieht man erstlich aus (54.), dafs die Ausdrücke R beide verschwinden; und dann giebt die Gleichung (49.):

$$(69.)\quad \frac{\partial a'}{\partial r}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial z}-\frac{\partial a'}{\partial z}\cdot\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r}+r\frac{\partial A^{(1)}}{\partial t}=0,$$

wo $A^{(1)}$ durch (67.) definirt ist; und für die stationäre Bewegung:

$$(70.)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial z}\right)+\Pi'(a')=0.$$

Die Differentialgleichungen, welche zuletzt zu integriren sind, werden

$$(71.)\quad \frac{dr}{dt}=-\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial z},\qquad \frac{dz}{dt}=\frac{1}{r}\frac{\partial a'}{\partial r}.$$

Ein Integral ist wiederum $A^{(1)} =$ Const.; das andere wird aus der Theorie des Multiplicators erhalten, nämlich

$$(72.)\quad \text{Const.}=\int\frac{\left(r\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial a'}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial a'}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dt-r\,dv}{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r}},$$

wo unter dem Integralzeichen statt r, z eingeführt sind $A^{(1)}$, welches während der Integration constant bleibt, und v, eine beliebige Funktion von r und z.

Berlin, den 26. Mai 1857.