12.

Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien.

(Von Herrn *B. Riemann* in Göttingen.)

Bei der Untersuchung der Functionen, welche aus der Integration vollständiger Differentialien entstehen, sind einige der analysis situs angehörige Sätze fast unentbehrlich. Mit diesem von *Leibnitz*, wenn auch vielleicht nicht ganz in derselben Bedeutung, gebrauchten Namen darf wohl ein Theil der Lehre von den stetigen Gröfsen bezeichnet werden, welcher die Gröfsen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durch einander mefsbar betrachtet, sondern von den Mafsverhältnissen ganz absehend, nur ihre Orts- und Gebietsverhältnisse der Untersuchung unterwirft. Indem ich eine von Mafsverhältnissen ganz abstrahirende Behandlung dieses Gegenstandes mir vorbehalte, werde ich hier nur die bei der Integration zweigliedriger vollständiger Differentialien nöthigen Sätze in einem geometrischen Gewande darstellen.

Es sei eine in der (x, y)-Ebene einfach oder mehrfach ausgebreitete Fläche T gegeben *) und X, Y seien solche stetige Functionen des Orts in dieser Fläche, dafs in ihr allenthalben $Xdx+Ydy$ ein vollständiges Differential, also $\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0$ ist. Bekanntlich ist dann $\int(Xdx+Ydy)$, um einen Theil der Fläche T positiv oder negativ herum — d. h. durch die ganze Begrenzung entweder allenthalben nach der positiven oder allenthalben nach der negativen Seite gegen die Richtung von Innen nach Aufsen (Siehe die Anmerkung Seite 102 der vorhergehenden Abhandlung) — erstreckt, $=0$, da dies Integral dem über diesen Theil ausgedehnten Flächenintegrale $\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dT$ identisch im ersteren Falle gleich, im zweiten entgegengesetzt ist. Das Integral $\int(Xdx+Ydy)$ hat daher zwischen zwei festen Punkten auf zwei verschiedenen Wegen erstreckt denselben Werth, wenn diese beiden Wege zusammengenommen die ganze Begrenzung eines Theils der

---

*) Man sehe die vorhergehende Abhandlung S. 103.

Fläche T bilden. Wenn also jede im Innern von T in sich zurücklaufende Curve die ganze Begrenzung eines Theils von T bildet, so hat das Integral von einem festen Anfangspunkte bis zu einem und demselben Endpunkte erstreckt immer denselben Werth und ist eine von dem Wege der Integration unabhängige allenthalben in T stetige Function von der Lage des Endpunkts. Dies veranlafst zu einer Unterscheidung der Flächen in einfach zusammenhangende, in welchen jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig begrenzt — wie z. B. ein Kreis —, und mehrfach zusammenhangende, für welche dies nicht stattfindet, — wie z. B. eine durch zwei concentrische Kreise begrenzte Ringfläche. Eine mehrfach zusammenhangende läfst sich durch Zerschneidung in eine einfach zusammenhangende verwandeln (S. die durch Zeichnungen erläuterten Beispiele am Schlufs dieser Abhandlung). Da diese Operation wichtige Dienste bei der Untersuchung der Integrale algebraischer Functionen leistet, so sollen die darauf bezüglichen Sätze kurz zusammengestellt werden; sie gelten für beliebig im Raume liegende Flächen.

Wenn in einer Fläche F zwei Curvensysteme a und b zusammengenommen einen Theil dieser Fläche vollständig begrenzen, so bildet jedes andere Curvensystem, das mit a zusammen einen Theil von F vollständig begrenzt, auch mit b die ganze Begrenzung eines Flächentheils, der aus den beiden ersteren Flächentheilen längs a (durch Addition oder Subtraction, jenachdem sie auf entgegengesetzten oder auf gleicher Seite von a liegen) zusammengesetzt ist. Beide Curvensysteme leisten daher für völlige Begrenzung eines Theils von F dasselbe und können für die Erfüllung dieser Forderung einander ersetzen.

Wenn in einer Fläche F sich n geschlossene Curven $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ziehen lassen, welche weder für sich noch mit einander einen Theil dieser Fläche F vollständig begrenzen, mit deren Zuziehung aber jede andere geschlossene Curve die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche F bilden kann, so heifst die Fläche eine $(n+1)$fach zusammenhangende.

Dieser Charakter der Fläche ist unabhängig von der Wahl des Curvensystems $a_1, a_2, \ldots, a_n$, da je n andere geschlossene Curven $b_1, b_2, \ldots, b_n$, welche zu völliger Begrenzung eines Theils dieser Fläche nicht ausreichen, ebenfalls mit jeder andern geschlossenen Curve zusammengenommen einen Theil von F völlig begrenzen.

In der That, da b_1 mit Linien a zusammengenommen einen Theil von F vollständig begrenzt, so kann eine dieser Curven a durch b_1 und die übrigen

Curven a ersetzt werden. Es ist daher mit b_1 und diesen $n-1$ Curven a jede andere Curve, und folglich auch b_2, zu völliger Begrenzung eines Theils von F ausreichend, und es kann eine dieser $n-1$ Curven a durch b_1, b_2 und die übrigen $n-2$ Curven a ersetzt werden. Dieses Verfahren kann offenbar, wenn wie vorausgesetzt die Curven b zu vollständiger Begrenzung eines Theils von F nicht ausreichen, so lange fortgesetzt werden, bis sämmtliche a durch die b ersetzt worden sind.

Eine $(n+1)$fach zusammenhangende Fläche F kann durch einen Querschnitt — d. h. eine von einem Begrenzungspunkte durch das Innere bis zu einem Begrenzungspunkte geführte Schnittlinie — in eine $n$fach zusammenhangende F' verwandelt werden. Es gelten dabei die durch die Zerschneidung entstehenden Begrenzungstheile schon während der weiteren Zerschneidung als Begrenzung, so daſs ein Querschnitt keinen Punkt mehrfach durchschneiden, aber in einem seiner früheren Punkte enden kann.

Da die Linien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu völliger Begrenzung eines Theils von F nicht ausreichen, so muſs, wenn man sich F durch diese Linien zerschnitten denkt, sowohl das auf der rechten, als das auf der linken Seite von a_n anliegende Flächenstück noch andere von den Linien a verschiedene und also zur Begrenzung von F gehörige Begrenzungstheile enthalten. Man kann daher von einem Punkte von a_n sowohl in dem einen, als in dem andern dieser Flächenstücke eine die Curven a nicht schneidende Linie bis zur Begrenzung von F ziehen. Diese beiden Linien q' und q'' zusammengenommen bilden alsdann einen Querschnitt q der Fläche F, welcher das Verlangte leistet.

In der That sind in der durch diesen Querschnitt aus F entstehenden Fläche F' die Linien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ im Innern von F' verlaufende geschlossene Curven, welche zur Begrenzung eines Theils von F, also auch von F', nicht hinreichen. Jede andere im Innern von F' verlaufende geschlossene Curve aber bildet mit ihnen die ganze Begrenzung eines Theils von F'. Denn die Linie l bildet mit einem Complex aus den Linien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die ganze Begrenzung eines Theils f von F. Es läſst sich aber zeigen, daſs in der Begrenzung desselben a_n nicht vorkommen kann; denn dann würde, je nach dem f auf der linken oder rechten Seite von a_n läge, q' oder q'' aus dem Innern von f nach einem Begrenzungspunkte von F, also nach einem auſserhalb f gelegenen Punkte, führen und also die Begrenzung von f schneiden müssen gegen die Voraussetzung, daſs l sowohl als die Linien a, den Durchschnittspunkt von a_n und q ausgenommen, stets im Innern von F' bleiben.

Die Fläche F', in welche F durch den Querschnitt q zerfällt, ist demnach, wie verlangt, eine $n$fach zusammenhangende.

Es soll jetzt bewiesen werden, dafs die Fläche F durch jeden Querschnitt p, welcher sie nicht in getrennte Stücke zerfället, in eine $n$fach zusammenhangende F' verwandelt wird. Wenn die zu beiden Seiten des Querschnitts p angrenzenden Flächentheile zusammenhangen, so läfst sich eine Linie b von der einen Seite desselben durch das Innere von F' auf die andere Seite zum Anfangspunkte zurück ziehen. Diese Linie b bildet eine im Innern von F in sich zurücklaufende Linie, welche, da der Querschnitt von ihr aus nach beiden Seiten zu einem Begrenzungspunkte führt, von keinem der beiden Flächenstücke, in welche sie F zerschneidet, die ganze Begrenzung bildet. Man kann daher eine der Curven a durch die Curve b und jede der übrigen $n-1$ Curven a durch eine im Innern von F' verlaufende Curve und wenn nöthig die Curve b ersetzen, worauf der Beweis, dafs F' $n$fach zusammenhangend ist, durch dieselben Schlüsse, wie vorhin, geführt werden kann.

Eine $(n+1)$fach zusammenhangende Fläche wird daher durch jeden sie nicht in Stücke zerschneidenden Querschnitt in eine nfach zusammenhangende verwandelt.

Die durch einen Querschnitt entstandene Fläche kann durch einen neuen Querschnitt weiter zerlegt werden, und bei $n$maliger Wiederholung dieser Operation wird eine $(n+1)$fach zusammenhangende Fläche durch n nach einander gemachte sie nicht zerstückelnde Querschnitte in eine einfach zusammenhangende verwandelt.

Um diese Betrachtungen auf eine Fläche ohne Begrenzung, eine geschlossene Fläche, anwendbar zu machen, mufs diese durch Ausscheidung eines beliebigen Punktes in eine begrenzte verwandelt werden, so dafs die erste Zerlegung durch diesen Punkt und einen in ihm anfangenden und endenden Querschnitt, also durch eine geschlossene Curve, geschieht. Die Oberfläche eines Ringes z. B., welche eine dreifach zusammenhangende ist, wird durch eine geschlossene Curve und einen Querschnitt in eine einfach zusammenhangende verwandelt.

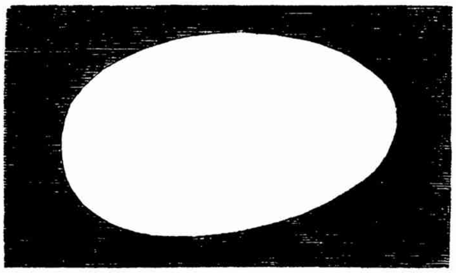
Auf das im Eingange betrachtete Integral des vollständigen Differentials $Xdx+Ydy$ wird nun die eben behandelte Zerschneidung der mehrfach zusammenhangenden Flächen in einfach zusammenhangende, wie folgt, angewandt.

Ist die die (x,y)-Ebene bedeckende Fläche T, in welcher X, Y allenthalben stetige der Gleichung $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ genügende Functionen des Orts sind, $n$fach zusammenhangend, so wird sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhangende T' zerschnitten. Die Integration von $Xdx + Ydy$ von einem festen Anfangspunkte aus durch Curven im Innern von T' liefert dann einen nur von der Lage des Endpunkts abhängigen Werth, welcher als Function von dessen Coordinaten betrachtet werden kann. Substituirt man für die Coordinaten die Gröfsen x, y, so erhält man eine Fnnction $z = \int(Xdx + Ydy)$ von x, y, welche für jeden Punkt von T' völlig bestimmt ist und sich innerhalb T' allenthalben stetig, beim Ueberschreiten eines Querschnitts aber allgemein zu reden um eine endliche von einem Knotenpunkte des Schnittnetzes zum andern constante Gröfse ändert. Die Aenderungen beim Ueberschreiten der Querschnitte sind von einer der Zahl der Querschnitte gleichen Anzahl von einander unabhängiger Gröfsen abhängig; denn wenn man das Schnittsystem rückwärts, — die späteren Theile zuerst —, durchläuft, so ist diese Aenderung überall bestimmt, wenn ihr Werth beim Beginn jedes Querschnitts gegeben wird; letztere Werthe aber sind von einander unabhängig.

Göttingen, 1857.

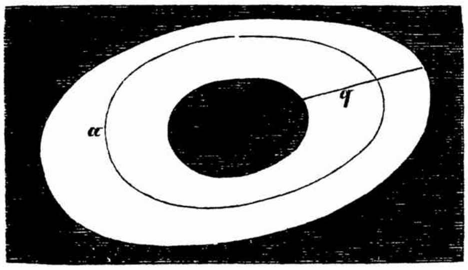
Um das, was oben (S. 106) unter einer $n$fach zusammenhangenden Fläche verstanden wird, anschaulicher zu machen, folgen in den Zeichnungen auf nachstehender Seite Beispiele von einfach, zweifach und dreifach zusammenhangenden Flächen.

Einfach zusammenhangende Fläche.



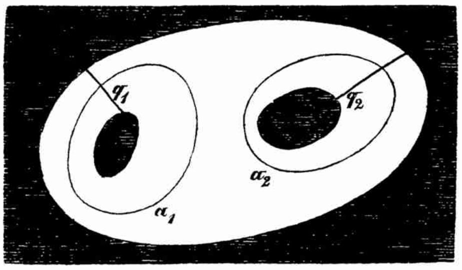
Sie wird durch jeden Querschnitt in getrennte Stücke zerfällt, und es bildet in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche.

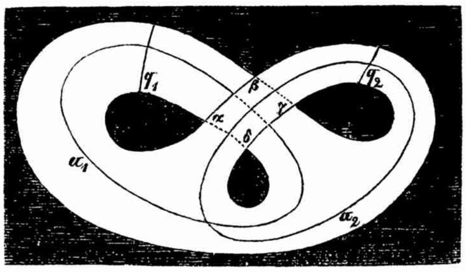
Zweifach zusammenhangende Fläche.



Sie wird durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt q in eine einfach zusammenhangende zerschnitten. Mit Zuziehung der Curve a kann in ihr jede geschlossene Curve die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden.

Dreifach zusammenhangende Fläche.





In dem Theile $\alpha\beta\gamma\delta$ der Ebene ist die Fläche doppelt. Der a_1 enthaltende Arm der Fläche ist als unter dem andern fortgehend betrachtet und daher durch punktirte Linien angedeutet.

In dieser Fläche kann jede geschlossene Curve mit Zuziehung der Curven a_1 und a_2 die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche bilden. Sie zerfällt durch jeden sie nicht zerstückelnden Querschnitt in eine zweifach zusammenhangende und durch zwei solche Querschnitte, q_1 und q_2, in eine einfach zusammenhangende.