11.

Beitrag zur Theorie der Bewegung der Räderfuhrwerke, mit Inbegriff der Dampfwagen.

(Von Herrn *J. P. G. v. Heim*, Königl. würtemb. Oberstlieutenant a. D.)

(Fortsetzung von Nr. 9 im vorigen Heft.)

Zweite Abtheilung.

Die dynamischen Verhältnisse der Dampfwagen; in ihrer Eigenschaft als Räderfuhrwerke betrachtet.

Einleitende Betrachtungen.

§. 54.

Die Bewegung der Dampfwagen ist, wie die des gewöhnlichen Räderfuhrwerks, aus der, allen verbundenen Theilen gemeinsamen, fortschreitenden Bewegung und der umdrehenden der Räder zusammengesetzt. Während aber das Fuhrwerk durch die Zugkraft *von aussen* angetrieben und hierdurch *mittelbar* die Umdrehung der Räder hervorgebracht wird, wirkt bei dem Dampfwagen die *ihm inwohnende* Triebkraft zunächst auf die Räder, und es ist bei ihm die fortschreitende Bewegung eine *Folge* der umdrehenden.

Im gleichen Sinne, wie beim Fuhrwerk (§. 1), ist auch bei den Dampfwagen zwischen rollender und gleitender, oder theilweise gleitender Bewegung zu unterscheiden. Bezeichnet N den Druck eines Rades auf die Bahn und f den Coefficienten der Reibung zwischen dem Umfange des Rades und der Bahn, so drückt das Product fN den Widerstand aus, den diese Reibung (der ursprünglich bewirkten) Umdrehung des Rades entgegensetzt, und welcher, (als eine Kraft, deren Richtung in die Bahnlinie fällt) der der umdrehenden Bewegung des Puncts, in welchem das Rad die Bahn berührt, gerade entgegengesetzt ist, die fortschreitende Bewegung erzeugt. Zur rollenden Bewegung ist ein bestimmter Werth von fN, eine Kraft R nöthig, welche, an dem genannten Berührungspuncte angebracht, die eben angegebene Richtung des Widerstandes fN hat.

Ist nun $fN < R$, so muss die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit des

Rad-Umfanges grösser als die fortschreitende Geschwindigkeit, oder die Bewegung des Rades, wenigstens theilweise, *gleitend* sein. Ist aber $fN \overline{\overline{>}} R$, so kann nur rollende Bewegung Statt finden, und ein grösserer Theil von fN als R kann nicht zur Wirksamkeit gelangen. Denn gesetzt dies wäre möglich, oder es würde eine grössere Kraft als R auf Verzögerung der Umdrehung des Rades und auf die fortschreitende Bewegung verwendet, so müsste, einerseits durch Beschleunigung der letzteren Bewegung, andererseits durch langsamere Umdrehung, die Bewegung des Rades *gleitend* werden; aber so, dass der Widerstand der Reibung die der fortschreitenden Bewegung entgegengesetzte Richtung hätte, wodurch augenblicklich eben diese Bewegung verzögert, die umdrehende des Rades aber beschleunigt und so die rollende Bewegung wieder hergestellt werden würde.

Aus diesen Betrachtungen folgt mit andern Worten, dass die rollende Bewegung, wenn sie möglich ist, sich von selbst erhält; dass diese Möglichkeit aber ein gewisses Maas des Widerstandes fN bedingt. Ist dasselbe nicht vorhanden, und tritt überdiess, bei unzureichender Stärke der Triebkraft, Verzögerung der umdrehenden Bewegung ein, so wird ferner der Widerstand fN auch seine Richtung wechseln, und bald verzögernd, bald beschleunigend auf die fortschreitende Bewegung wirken können (§. 64).

§. 55.

Von den verschiedenen zur Anwendung gelangten Arten der Verbindung der Räder an den Dampfwagen werden sich die nachfolgenden Untersuchungen zunächst auf diejenigen beziehen, bei denen die Triebkraft des Dampfwagens an vier unter sich gleichen Rädern, von welchen je zwei durch eine gemeinschaftliche Achse gepaart sind, arbeitet, und jedes Rad des einen Paares mit dem in der gleichen Geleisespur gehenden Rade des andern Paares durch eine sogenannte Kuppelstange verbunden ist, so dass beide Räderpaare zusammen ein System bilden und gleichen Lauf halten.

Ausser diesen Rädern, welche man *Treibräder* nennt, sind gewöhnlich an den Dampfwagen, zur Unterstützung an ihrer vordern Seite, noch zwei andere, durch eine Achse verbundene Räder, denen man den Namen *Tragräder* giebt, oder auch zwei solche Räderpaare angebracht. Die Dampfwagen sind daher entweder *vierrädrig*, oder *sechsrädrig*, oder *achträdrig*.

Um die dynamischen Verhältnisse der Dampfwagen durch Gleichungen auszudrücken, wird man dieselben, wie die Fuhrwerke (§. 5), als aus mehreren

Systemen fester Körper bestehend betrachten müssen, und kann zu diesem Ende die ganze Zusammensetzung eines Dampfwagens mit seinen Rädern als ein System (§. 8), und sodann die Räder als für sich mehrere besondere Systeme bildend ansehen.

Ueber die Beschaffenheit der Bahn und die Lage der auf den Dampfwagen wirkenden Kräfte und Widerstände in einer und derselben verticalen Ebene, werden dieselben Voraussetzungen wie bei den Fuhrwerken (§. 4) gemacht, und als solche Kräfte und Widerstände, die Triebkraft des Dampfwagens, die Schwerkraft, der Widerstand der Reibung zwischen den Rädern und der Bahn, so wie der Widerstand zwischen den Achsen der Räder und ihren Lagern, und der bei der grössern Geschwindigkeit, mit der die Dampfwagen sich bewegen, nicht unbeträchtliche Widerstand, welchen die Luft der Bewegung entgegensetzt, in Betracht gezogen werden.

Da die Wirkungen, welche Theile eines Körpersystems durch Druck oder Stoss auf einander ausüben, auf die Bewegung, welche dem System, als Ganzes genommen, durch diese oder jene Kräfte mitgetheilt wird, nur in so fern Einfluss haben können, als diese Wirkungen etwa Veränderungen der relativen Lage, den der Schwerpunct des Systems gegen dessen Theile einnimmt, zur Folge haben, und als etwa zugleich die Lage des Schwerpuncts auf die genannte Bewegung Einfluss hat; und da hier ferner von den jedenfalls unerheblichen Veränderungen, welche die relative Lage des Schwerpuncts des Dampfwagens während dessen Bewegung erleidet, so wie von der Reibung, welche an den Gelenken der verbundenen Theile Statt findet, abgesehen wird: so können auch die zur Uebertragung der Kraft der Maschine auf die Treibräder dienenden Bewegungen, welche den verschiedenen zu dieser Verrichtung bestimmten Theilen des Dampfwagens neben der fortschreitenden Bewegung eigenthümlich sind, bei der Bildung der Gleichungen, welche auf das dem ganzen Dampfwagen mit seinen Rädern umfassende System Bezug haben, ganz unberücksichtigt bleiben, und es geht nur die Kraft der Maschine selbst in die Gleichungen ein, welche dem die Treibräder für sich enthaltenden Systeme angehören.

Erstes Capitel.

Der vierrädrige Dampfwagen ohne Trageräder.

Bezeichnungen.

§. 56.

Die Buchstaben x, X, α, f und g sollen in der für die Fuhrwerke (§. 7 u. 9) angegebenen Bedeutung genommen und der Werth x soll von dem Puncte an gerechnet werden, in welchem das Hinterrad *im Anfange der Bewegung* die Bahnlinie berührt.

P_1 bedeutet das Gewicht des Dampfwagens, mit Ausschluss der Räder und Achsen; h den Abstand des Schwerpuncts dieses Gewichts von der Bahnlinie; i den Abstand des Puncts, in welchem das Hinterrad und die Bahnlinie sich berühren, von der Geraden, welche senkrecht auf der Bahnlinie durch den Schwerpunct geht, und $c = i\cos\alpha - h\sin\alpha$ den Abstand dieses Berührungspuncts von der verticalen Linie durch den Schwerpunct.

$4Q_1$ ist das Gewicht der beiden Räderpaare, mit Inbegriff ihrer Achsen; a der Abstand zwischen den beiden Achsenlinien; r_1 der Halbmesser des auf der Bahnlinie gehenden äussern Umfanges der Räder; ϱ_1 der Halbmesser der in den Lagern laufenden Theile der Achsen.

$2N$ sei der Druck der beiden Hinterräder ⎫ in senkrechter Richtung auf
$2N_1$ der Druck der beiden Vorderräder ⎭ die Bahn;

$4R_1$ das Reibungs-Erforderniss zur rollenden Umdrehung der beiden Räderpaare (§. 54);

φ_1 der Coefficient der Reibung zwischen den Achsen und ihren Lagern;

K die Kraft, womit der Dampfwagen den angehängten Wagenzug nach sich zieht; β der Winkel, unter welchem sie wirkt (in dem oben (§. 7) angegebenen Sinne), und $n\cos\beta$ der Abstand des Puncts der Berührung zwischen dem Hinterrade und der Bahnlinie von der Richtung dieser Kraft.

S sei der mit der Bahnlinie parallele, der Bewegung des Dampfwagens und des Wagenzuges entgegentretende Luftwiderstand; mS das auf den eben genannten Berührungspunct bezogene Moment dieses Widerstandes;

$\frac{2Q_1}{g}k_1^2$ das Trägheitsmoment eines Räderpaares, mit Inbegriff der Achse, in Bezug auf die Achsenlinien.

s_1 ist $=\frac{r_1^2+k_1^2}{r_1}$;

μ_1 die Winkelgeschwindigkeit der Räder, in dem Sinne wie u (§. 7) genommen, und $U_1=\frac{k_1^2}{g}\cdot\frac{du_1}{dt}$;

b die Länge des Arms oder Halbmessers ce (Fig. 5) der Kurbel, mittels welcher die, gewöhnlich durch eine Dampfmaschine erzeugte Triebkraft des Zugwagens an den Rädern arbeitet;

l die Länge der mit der Kolbenstange $a\mathfrak{b}$ des Dampfcylinders verbundenen Kurbelstange ae;

θ der Winkel, welchen der Kurbel-Arm ce in dem der Zeit t entsprechenden Augenblicke der Bewegung beschrieben hat. Er wird, welche Lage der Kurbel-Arm im Anfange der Bewegung oder für $t=0$ übrigens gehabt haben mag, von der (in der verticalen Ebene, die der Voraussetzung nach die Richtungen der einwirkenden Kräfte und Widerstände einschliesst,) durch die Achsenlinie des einen oder des andern Treibräderpaares, parallel mit der Bahnlinie gelegten Geraden cn an gerechnet; so dass bei der Bewegung des Dampfwagens vorwärts, der Kurbel-Arm für $\theta=0$, und so oft θ ein Vielfaches von 360^0 ist, hinter der Achsenlinie, für $\theta=180^0$ vor der Achsenlinie, in diese Parallele fällt, und für $\theta=90^0$ senkrecht über, für $\theta=270^0$ senkrecht unter derselben steht. Nach dieser Bedeutung von θ und der von μ_1 ist $\mu_1=\frac{d\theta}{dt}$.

Der Druck auf den Kolben des Dampfcylinders, welcher als Triebkraft auf die Räder wirkt und dessen mittlere Richtung mit der Parallelen cn zusammenfällt, ändert sich, abgesehen von der wechselnden Länge des Hebel-Armes, an dem er arbeitet, mit dem Stande des Kolbens im Cylinder, oder mit der Lage des Kurbel-Armes ce gegen die Parallele cn. Das Gesetz, nach welchem diese Aenderung sich richtet und welches von den den Ein- und Austritt des Dampfes im Cylinder regelnden Einrichtungen abhangt, wird, obgleich es nicht allgemein näher angegeben werden kann, hier als bekannt vorausgesetzt (§. 85). Es bezeichne T jenen Druck, wie er in demjenigen Augenblicke irgend eines Rad-Umlaufes Statt hat, in welchem der Kurbel-Arm senkrecht über der Parallelen cn sich befindet, und $F\theta$ eine Function des Winkels θ, welche jenes Gesetz ausdrückt und welche für $\theta=90^0$ gleich 1 wird. Hiernach kann für jeden Werth von θ der genannte

Druck gleich $T.F\theta$ gesetzt werden; wobei noch zu bemerken ist, dass unter eben diesem Druck der wirksame Druck auf den Kolben, d. h. der Ueberschuss zu verstehen ist, um welchen der Druck auf die bei der Bewegung des Kolbens nachfolgende Fläche desselben denjenigen übertrifft, welchen die bei dieser Bewegung vorausgehende Fläche des Kolbens etwa erleidet.

Bei der dem Winkel θ entsprechenden schiefen Lage der Kurbelstange fällt von dem auf den Kolben wirkenden Druck $T.F\theta$, der sich nach der Richtung ae_1 dieser Stange und nach der auf der Parallelen cn senkrechten Richtung ad zerlegt, auf die erstere Richtung ein Theil $= \frac{T.F\theta}{\cos eac}$, und von dem letzteren, auf den Kurbelgriff des Rades sich übertragenden Druck in die mit der Bahnlinie parallele Richtung ec_1 ein Theil $= \frac{T.F\theta}{\cos eac}\cos eac = T.F\theta$; in die auf der Bahnlinie senkrechte Richtung ek aber ein Theil$=\frac{T.F\theta}{\cos eac}\sin eac$, d. h.$= T.F\theta \frac{\frac{b}{l}\sin\theta}{\sqrt{(1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2)}}$, indem $\sin eac = \frac{b}{l}\sin\theta$ ist, so dass der letztere Theil des Drucks und der Winkel eac mit $\sin\theta$ zugleich Null und negativ werden.

Für irgend einen Werth des Winkels θ ist daher der mit der Bahnlinie parallele Theil der am Kurbelgriff des einen Treibrades arbeitenden Kraft der Maschine $= T.F\theta$, der auf der Bahnlinie senkrechte Theil derselben $= T.F\theta.\frac{\frac{b}{l}\sin\theta}{\sqrt{(1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2)}}$, wofür zur Abkürzung $T.F_1\theta$ gesetzt werden wird; und zwar hat (bei positiven Werthen) der erste Theil die Richtung nach vorn, der letzte Theil die Richtung nach unten; das Moment aber, mit welchem diese Kraft das Rad um die Achsenlinie zu drehen strebt, ist$= T.F\theta.b\sin\theta.\left(1-\frac{\frac{b}{l}\cos\theta}{\sqrt{(1-(\frac{b}{l}\sin\theta)^2)}}\right)$; wofür das Zeichen $T.F_2\theta$ gebraucht werden wird.

Alle diese Ausdrücke beziehen sich auf die Triebkraft des einen Cylinders; und da die Kraft des andern Cylinders an einem Kurbel-Arm arbeitet, welcher senkrecht auf dem erstern steht, so hat man zu $F\theta$, $F_1\theta$ und $F_2\theta$ je ein zweites, auf den andern Kurbel-Arm, welcher als der in der Bewegung vorausgehende angenommen wird, bezügliches Glied beizufügen, welches den Winkel $\theta + 90^0$ eben so enthält, wie das erste Glied den Winkel θ; was durch das an θ angehängte Zeichen $_+$, nämlich $F\theta_+$, $F_1\theta_+$, $F_2\theta_+$, angedeutet werden wird.

D ist der von dem einen Räderpaar, an welchem die Triebkraft der Maschine unmittelbar arbeitet, dem andern Räderpaar durch die Kuppelstangen mitgetheilte Druck oder Zug, dessen Richtung als stets parallel mit der Bahnlinie zu betrachten ist. Das Verhältniss, in welchem dieser Druck sich auf die beiden winkelrecht auf einander stehenden Kurbel-Arme eines Räderpaares vertheilt, wird durch die Zahl λ bezeichnet, so dass λD auf den in der Beweguug vorausgehenden, $(1-\lambda)D$ auf den nachfolgenden Kurbel-Arm kommt.

Die Buchstaben E, F, G beziehen sich, in der für die Fuhrwerke in (§. 7 u. 27) festgesetzten Bedeutung, auf die Hinterräder, die Buchstaben mit Beistrich E_1, F_1, G_1 in derselben Bedeutung auf die Vorderräder.

Rollende Bewegung.

§. 57.

Der vierrädrige Dampfwagen ohne Tragräder begreift zwei verschiedene Systeme von festen Körpern in sich, von welchen der ganze Dampfwagen mit den Rädern das erste und die beiden gekuppelten Räderpaare zusammen das zweite bilden (§. 55). Um jedoch die in die Gleichungen eingehenden Unbekannten in möglichster Vollständigkeit zu finden, ist es nöthig, jedes Räderpaar für sich als ein besonderes System zu betrachten.

Wie bei den gewöhnlichen Fuhrwerken werden zur Construction der Gleichungen die Kräfte und Widerstände für jedes System nach der Axe der x und der darauf senkrechten Richtung zerlegt, und deren Momente für das erste System in Bezug auf den Berührungspunct zwischen dem Hinterrade und der Bahnlinie, und für jedes der beiden andern Systeme in Bezug auf die Axenlinie des Räderpaares genommen werden.

Die Achsen der Räder werden als an diesen fest, wie sie es gewöhnlich sind, und der gemeinschaftliche Schwerpunct jedes Räderpaares und seiner Achse wird als in die Axenlinie fallend (§. 6) vorausgesetzt.

Werden die Gleichungen der Bewegung im Uebrigen nach den Grundsätzen aufgestellt, welche in Bezug auf die Fuhrwerke (§. 8, 28) Anwendung fanden, und wird zunächst angenommen, die Kraft der Maschine arbeite unmittelbar an den Vorderrädern, oder die Kurbelstangen seien an diesen angebracht und die Hinterräder würden mittels der Kuppelstangen in Bewegung gesetzt, so ergeben sich folgende

(G.) *Gleichungen für die rollende Bewegung*

der vierrädrigen Dampfwagen (bei welcher Bewegung $r_1 u_1 = \frac{dx}{dt}$ oder $U_1 = (s_1 - r_1)X$ ist), für irgend einen Augenblick derselben:

$$1)\ -K\cos\beta - S + 4R_1 - (P_1 + 4Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$2)\ -K\sin\beta + 2(N + N_1) - (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha = 0,$$
$$3)\ -n\cos\beta . K + cP_1 + (a\cos\alpha - 2r_1\sin\alpha)2Q_1 - a.2N_1 - mS - (hP_1 + 4s_1Q_1)X = 0,$$
$$4)\ 2E(G - \varphi_1) + D - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$5)\ -2E(1 + \varphi_1 G) + 2N - 2Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$6)\ -\varphi_1\varrho_1 . 2E\sqrt{(1 + G^2)} + bD[\lambda\cos\theta + (1 - \lambda)\sin\theta] - 2Q_1(s_1 - r_1)X = 0,$$
$$7)\ 2E_1(G_1 - \varphi_1) + 4R_1 - D + T.F\theta_+ - 2Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$8)\ -2E_1(1 + \varphi_1 G_1) + 2N_1 - T.F_1\theta_+ - 2Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$9)\ -\varphi_1\varrho_1 . 2E_1\sqrt{(1 + G_1^2)} - 4r_1R_1 - bD[\lambda\cos\theta + (1 - \lambda)\sin\theta] + T.F_1\theta_+ - 2Q_1(s_1 - r_1)X = 0.$$

Diese neun Gleichungen dienen, für einen gegebenen Werth von λ (und K als bekannt vorausgesetzt), zur Bestimmung der neun Unbekannten X, R, D, N, N_1, E, E_1, G, G_1, und während die in die Rechnung eingehenden Umstände und Bedingungen nicht ausreichen, zugleich, um diese ebenfalls unbekannte Verhältnisszahl λ zu bestimmen.

Die beiden Kräfte $4R_1$ und D wirken gemeinschaftlich auf die beiden Räderpaare, so dass $4R_1 - D$ auf das vordere, D auf das hintere Räderpaar kommt.

Durch Addition der Gleichungen (4 u. 7, 5 u. 8, 6 u. 9) erhält man:

$$4)\ 2E(G - \varphi_1) + 2E_1(G_1 - \varphi_1) + 4R_1 + T.F\theta_+ - 4Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$$
$$5)\ -2E(1 + \varphi_1 G) - 2E_1(1 + \varphi_1 G_1) + 2(N + N_1) - T.F_1\theta_+ - 4Q_1\cos\alpha = 0,$$
$$6)\ -2\varphi_1\varrho_1[E\sqrt{(1 + G^2)} + E_1\sqrt{(1 + G_1^2)}] - 4r_1R_1 + T.F_2\theta_+ - 4Q_1(s_1 - r_1)X = 0;$$

und diese drei Gleichungen sind, wie leicht erhellet, eben wie die Gleichungen (1, 2, 3), ohne Unterschied für die beiden Fälle gültig, es mögen die Vorderräder oder Hinterräder zunächst von der Treibkraft der Maschine angegriffen und in Bewegung gesetzt werden.

Wird nun ferner vorausgesetzt, F verhalte sich zu F_1, wie E zu E_1, oder G sei $= G_1$ (was im Allgemeinen darauf hinauskommt, den Werth der unbestimmten Zahl λ dieser Bedingung gemäss anzunehmen: eine Voraussetzung die um so weniger einen wesentlichen Irrthum veranlassen kann, als bei Vernachlässigung des Widerstandes der Reibung an den Achsen, dessen Moment gegen das der Triebkraft im Ganzen genommen jedenfalls wenig beträchtlich ist, so dass die Entwickelung der Grössen E, E_1, F, F_1 zur Auflösung der Aufgabe gar nicht nöthig ist, oder als diese Grössen nur durch die Reibung an den Achsen auf die Bewegung Einfluss haben können), und setzt man zugleich $E+E_1=E_2$, $F+F_1=F_2$, $\frac{F_2}{E}=G_2$: so wird auch $G_2=G=G_1$ und die Gleichungen (4, 5, 6) vereinfachen sich auf:

$$(4) \quad +2E_2(G_2-\varphi_1)+4R_1+T.F\theta_+-4Q_1(\sin\alpha+X) = 0,$$

$$(5) \quad -2E_2(1+\varphi_1 G_2)+2(N+N_1)-T.F_1\theta_+-4Q_1\cos\alpha = 0,$$

$$(6) \quad -\varphi_1\varrho_1 . 2E_2\sqrt{(1+G_2^2)}-4r_1R_1+T.F_2\theta_+-4Q_1(s_1-r_1)X = 0.$$

Als Unbekannte der Aufgabe sind nunmehr die fünf Grössen X, R_1, $N+N_1$, E_2 und F_2 zu entwickeln; wozu die fünf Gleichungen (1, 2, 4, 5 u. 6) ausreichen, nach deren Entwickelung die Grösse N_1 aus (3) sich ergiebt.

§. 58.

Wird nach der Analogie der gewöhnlichen Räderfuhrwerke (§. 16), um die Gleichung (6) linear zu machen,

$$\frac{1+\varphi_1 G_2}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}} \text{ statt } \sqrt{(1+G_2^2)}, \text{ und zugleich } \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}} = \mu_1,$$

so wie ferner

$$2E_2(G_2-\varphi_1) = Y_2 \quad , \quad 2E_2(1+\varphi_1 G_2) = Z_2,$$

$$\left(\text{wodurch } 2E_2 = \frac{Z_2-\varphi_1 Y_2}{1+\varphi_1^2} \quad , \quad 2F_2 = \frac{Y_2+\varphi_1 Z_2}{1+\varphi_1^2} \quad , \quad G_2 = \frac{Y_2+\varphi_1 Z_2}{Z_2-\varphi_1 Y_2} \text{ wird,}\right)$$

gesetzt, so erhält man aus den Gleichungen

$$(1 \text{ u. } 4.): \quad Y_2 = -K\cos\beta - S - T.F\theta_+ - P_1(\sin\alpha+X),$$

$$(2 \text{ u. } 5): \quad Z_2 = +P_1\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_1\theta_+,$$

$$(4 \text{ u. } 6.): Y_2-\mu_1 Z_2 = 4Q_1\left(\sin\alpha+\frac{s_1}{r_1}X\right) - T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + F\theta_+\right),$$

und hieraus:

$$X = \frac{T\left(\frac{1}{r_1}\cdot F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right) - (P_1+4Q_1)\sin\alpha - \mu_1 P_1\cos\alpha - S - K(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)}{P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1},$$

$$-Y_2 = \frac{P_1\left(T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + F\theta_+\right) - \mu_1(P_1\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_1\theta_+)\right. \\ \left. + 4Q_1\left(\frac{s_1}{r_1}(K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S + T.F\theta_+) - P_1\sin\alpha\right)\right.}{P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1};$$

wozu $\quad Z_2 = P_1\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_1\theta_+,$

und aus (6): $4R_1 = T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right) - \mu_1(P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - 4Q_1\left(\frac{s_1}{r_1} - 1\right)X,$

aus (5) $2(N+N_1) = (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha + K\sin\beta$

kommt.

Diese Ausdrücke, so wie die der Grössen N und N_1, einzeln genommen, so wie sie aus der Gleichung (3) folgen, genügen, vermöge der auch hier anwendbaren Erörterungen (§. 13), unter den Voraussetzungen, dass $G = G_1$ und K bekannt sei, den Gleichungen (G) vollkommen, wenn man an die Stelle von $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ im Exponenten $\mu_1 = \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$

die Wurzelgrösse $= \dfrac{-\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1\sqrt{\left((1+\varphi_1^2)(\mathfrak{B}_1^2+\mathfrak{C}_1^2) - \left(\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}\right)^2\right)}}{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2},$

setzt, in welcher

$$\mathfrak{B}_1 = -\frac{P_1}{\mathfrak{A}_1}\left[T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + F\theta_+\right) - 4Q_1\sin\alpha\right]$$
$$-4\frac{s_1}{r_1}\cdot\frac{Q_1}{\mathfrak{A}_1}(K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S + T.F\theta_+),$$

$$\mathfrak{C}_1 = 1 + 4\frac{s_1}{r_1}\cdot\frac{Q_1}{P_1} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{A}_1 = P_1(P_1\cos\alpha + K\sin\beta - T.F_1\theta_+)$$

ist.

Zugleich mag noch bemerkt werden, dass, wenn näherungsweise

$$\sqrt{(1+G^2)} = \frac{1+\varphi_1 G}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}, \quad \sqrt{(1+G_1^2)} = \frac{1+\varphi_1 G_1}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$$

angenommen (wird unter welchen Annahmen die Voraussetzung $G = G_1$ zur Auflösung der Gleichungen (G) nicht nöthig ist) in den beiden Fällen, es mögen die Vorderräder oder die Hinterräder die zunächst von der Triebkraft angegriffenen sein, für die Grössen X, $4R_1$, N, N_1 dieselben Ausdrücke, wie sie oben entwickelt sind, gefunden werden und nur die Ausdrücke der Unbekannten $2E(G-\varphi_1)$, $2E_1(G_1-\varphi_1)$ und D die Verhältnisszahl λ in sich aufnehmen; wogegen jene der übrigen Unbekannten $X, 4R_1, N, N_1$, $2E(1+\varphi_1 G)$, $2E_1(1+\varphi_1 G_1)$

als unabhängig von dieser Zahl sich ergeben, welche dann erst bei der Verbesserung jener Annahmen, die sich durch ein dem wiederholt gezeigten ähnliches Verfahren ausführen lässt, in die Ausdrücke der letzteren Unbekannten eingeht.

§. 59.

Um aber noch die Kraft V_1 zu finden, mit welcher der Dampfwagen den angehängten Wagenzug nach sich zieht, erhält man eine weitere Gleichung, wenn man den im vorigen Paragraphen gefundenen Ausdruck von X dem der rollenden Bewegung des Wagenzuges entsprechenden, wie er es sein muss, gleich setzt.

Dieser letztere Ausdruck ist, nach (§. 52), wenn der Rad-Effect-Exponent μ für alle Fuhrwerke des Zuges denselben Werth hat, und wenn der Winkel β, unter welchem die Zugkraft wirkt, entweder ebenfalls für alle diese Fuhrwerke gleich gross, oder auch bei den auf das vorderste folgenden Fuhrwerken gleich Null ist, wenn ferner unter $\{P\}$ die Summe aller zum Wagenzuge gehörigen Lasten, wie P, und eben so unter $\{P+4Q\}$ die Summe aller ihm zugehörigen Grössen wie $P+4Q$ u. s. w. verstanden wird:

$$X=\frac{K(\cos\beta+\mu\sin\beta)-\mu\{P\}\cos\alpha-\{P+4Q\}\sin\alpha}{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}},$$

und durch Gleichstellung dieser beiden Ausdrücke von X ergiebt sich, wenn überdiess der Kürze wegen $\{\mathfrak{P}\}$ statt $\mu\{P\}\cos\alpha+\{P+4Q\}\sin\alpha$ geschrieben wird:

$$K=\frac{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}\left(T\left(\frac{1}{r_1}\cdot F_2\theta_{+}+\mu_1F_1\theta_{+}\right)-(P_1+4Q_1)\sin\alpha-\mu_1P_1\cos\alpha-S\right)+\left(P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)\{\mathfrak{P}\}}{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)+\left(P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)},$$

und sodann

$$X=\frac{\left(T\left(\frac{1}{r_1}\cdot F_2\theta_{+}+\mu_1\cdot F_1\theta_{+}\right)-(P_1 4Q_1)\sin\alpha-\mu_1P_1\cos\alpha-S\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)-\{\mathfrak{P}\}(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)}{\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta+\mu_1\sin\beta)+\left(P_1+4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)}.$$

Nachdem auf solche Weise die Grösse K für $\mu_1=\frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$ entwickelt ist, kann die nach dem vorigen Paragraphen zur Ergänzung des Exponenten μ_1 an die Stelle von $\sqrt{(1+\varphi_1^2)}$ zu setzende Wurzelgrösse dazu dienen, den Grad der Genauigkeit des so genommenen Exponenten zu beurtheilen und, wenn es nöthig denselben, so wie eben dadurch die Grösse K selbst, auf dem früher angedeuteten Wege zu verbessern. Und zu gleichmässiger Ergänzung des Exponenten μ in K kann man (nach §. 32) die Ausdrücke

$$\mathfrak{B} = \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\{P\}\sin\alpha + \frac{\{4\frac{s}{r}Q\}}{\mathfrak{A}}(K\cos\beta - \{P\}\sin\alpha),$$

$$\mathfrak{C} = 1 + \frac{\{4\frac{s}{r}Q\}}{\{P\}},$$

$$\mathfrak{A} = \{P\}.(\{P\}\cos\alpha - K\sin\beta)$$

anwenden.

Durch Elimination von K aus Y_2, Z_2 etc. lassen sich zwar die Grössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf eine Form bringen, in welcher die Exponenten μ und μ_1 für sich, (wie beim vierrädrigen Fuhrwerk erster Art (§. 31, 32), ohne dass K dabei in die Rechnung eingeht, allmählig verbessert werden können; wegen der grössern Weitläufigkeit der Ausdrücke von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ etc., in jener Form, übergehen wir hier jedoch die Darstellung derselben.

§. 60.

Werden die Gleichungen ((G) 1, 2, 3, 4, 5, 6), unter der Voraussetzung, dass die Beschleunigung der Bewegung oder die Grösse X, für einen bestimmten Werth des Winkels θ gleich Null sei, aufgelöset, wobei die Druckkraft T statt X in die Reihe der zu suchenden Grössen tritt, so ergiebt sich aus den abgeleiteten Gleichungen (§. 58):

$$T_1 = \frac{(P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + \mu_1 P_1\cos\alpha + S + K(\cos\beta + \mu_1\sin\beta)}{\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+},$$

wenn T_1 den besondern Werth von T bedeutet, welchem $X=0$ entspricht; ferner

$$-Y_2 = K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S + F\theta_+ . T_1,$$

$$+Z_2 = P_1\cos\alpha + K\sin\beta - F_1\theta_+ . T_1;$$

womit zugleich $\quad +4R_1 = (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha.\cos\beta + S,$

$$2(N+N_1) = (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha + K\sin\beta,$$

und mit Hülfe von (3) auch N und N_1, einzeln genommen, entwickelt sind.

Der zu $X=0$ gehörige Werth von K ist $= \dfrac{\{\mathfrak{P}\}}{\cos\beta + \mu.\sin\beta}$.

Bei der Ergänzung des Exponenten μ_1, welche sich, $G=G_1$ angenommen, wie bei der Auflösung im vorigen Paragraphen bewerkstelligen lässt, muss man in der angegebenen Wurzelgrösse,

$$\mathfrak{B}_1 = -\frac{\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + F\theta_+}{\mathfrak{A}_1}(K\cos\beta + P_1.\sin\alpha + S) - \frac{F\theta_+}{\mathfrak{A}_1}4Q_1\sin\alpha,$$

$$\mathfrak{C}_1 = +\frac{\frac{1}{r_1}F_2\theta_+}{\mathfrak{A}_1}(P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - \frac{F_1\theta_+}{\mathfrak{A}_1}(K\cos\beta + (P_1+4Q_1)\sin\alpha + S),$$

$$\mathfrak{A}_1 = -F\theta_+.(P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - F_1\theta_+(K\cos\beta + P_1\sin\alpha + S)$$

setzen, und eben so, in Bezug auf den in K vorkommenden Exponenten μ, nach (§. 31):

$$\mathfrak{B} = \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha.\cos\beta \quad , \quad \mathfrak{C} = 1 - \frac{\{4Q\}}{\mathfrak{A}}\sin\alpha.\sin\beta \quad , \quad \mathfrak{A} = \{P\}\cos(\alpha+\beta)$$

annehmen.

§. 61.

Bei der Auflösung im vorigen Paragraphen wurden für $X = 0$ die Grössen $4R_1$, N und N_1, daher auch der Reibungsquotient $\frac{4R_1}{2N+2N_1}$, als unabhängig von θ, gefunden, nicht aber die Druckkraft T_1, weil die Function $\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+$, wenn auch die beiden Kurbel-Arme, an denen die Triebkraft der Maschine arbeitet, winkelrecht auf einander stehen, im Allgemeinen noch den Winkel θ enthalten wird. Eine Gleichförmigkeit der Bewegung, wie sie in andern Fällen der Voraussetzung $X = 0$ zum Grunde liegt, und die Beständigkeit der Kraft T_1 können daher nicht eigentlich mit einander bestehen, sondern nur in einem etwas erweiterten Sinne kann der Begriff der Gleichförmigkeit hier Anwendung finden.

Man kann sich nämlich die Kraft $T\left(\frac{1}{r_1}F\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$, welche nach der relativen Grösse des Winkels θ im Kreise, sich ändert, durch eine andere Kraft ersetzt vorstellen, welche, am Umfange der Räder angebracht, einem solchen Wechsel nicht unterworfen und übrigens so beschaffen ist, dass die während eines Umlaufs der Räder durch sie hervorgebrachte Zu- oder Abnahme der Umdrehungsgeschwindigkeit nach jedem Umlaufe eben so gross ist, als durch die Wirkung der ersteren Kraft. Diese eingebildete Kraft, welche, auf die beiden Räderpaare gerechnet, mit $2V$ bezeichnet werden mag, ist *unveränderlich*, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit, von einem Umlaufe zum andern, entweder um gleich viel zu- oder abnimmt, oder sich nicht verändert; und in diesem letzteren Falle kann die Bewegung als gleichförmig angesehen werden. Wenn dagegen der Unterschied, um welchen die Geschwindigkeit während eines ganzen Umlaufs zu- oder abnimmt, von einem Umlaufe zum andern nach irgend einem Gesetze sich ändert, so ist die Kraft $2V$ ebenfalls *veränderlich*, und daher als eine Function der Geschwindigkeit, oder des zurückgelegten Weges, oder der absoluten Grösse des Winkels θ zu betrachten.

Zu näherer Bestimmung der ersetzenden Kraft $2V$ führen folgende Erwägungen.

Die Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ lässt sich, bei rollender Bewegung des Dampfwagens und des Wagenzuges, $\left(\text{wenn } \mu_1 = \frac{\varphi_1 \varrho_1}{r_1 \sqrt{(1+\varphi_1^2)}} \text{ genommen wird}\right)$, auf die Form

$$\text{(M.)} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = A \,.\, T\left(\frac{1}{r_1} . F_2 \theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right) - B - H u_1^2$$

bringen, wo A, B und H Grössen vorstellen, die von u_1, θ und t unabhängig sind, und das Glied Hu_1^2 auf den, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstand sich bezieht. Die Kraft T wird zwar im Allgemeinen mit u_1 sich ändern, kann jedoch bei der vorliegenden Frage ohne erheblichen Fehler als während eines Umlaufs der Räder sich gleich bleibend angenommen werden.

Mit $u_1 = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ multiplicirt, geht diese Gleichung über in:

$$\text{(N.)} \quad u_1 \partial u_1 + (B + H u_1^2) \partial \theta = A \,.\, T\left(\frac{1}{r_1} . F_2 \theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right) \partial \theta .$$

Wird unter e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und unter ε irgend eine ganze Zahl verstanden, so ist das Integral der letzteren Gleichung, so genommen, dass $u_1 = u_\varepsilon$ ist, für $\theta = \varepsilon . 2\pi$:

$$\text{(O.)} \; (B + H u_1^2) . e^{2H\theta} = (B + H u_\varepsilon^2) . e^{4\pi\varepsilon H} + 2HAT . \int_{\theta \div 2\pi} e^{2H\theta} \left(\frac{1}{r_1} . F_2 \theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right) \partial\theta ;$$

und wenn die Kraft $2V$, welche als eine von θ unabhängige und, so wie T, während eines Räder-Umlaufs auch mit u_1 sich nicht verändernde Grösse vorausgesetzt wird, an die Stelle von $T\left(\frac{1}{r_1} . F_2 \theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right)$ tritt, ist:

$$\text{(P.)} \qquad (B + H u_1^2) . e^{2H\theta} = (B + H u_\varepsilon^2) . e^{4\pi\varepsilon H} + 4HAV \int_{\theta \div 2\pi\varepsilon} e^{2H\theta} . \partial\theta .$$

Soll nun, der oben angegebenen Bedingung gemäss, die Geschwindigkeit

u_1 nach Vollendung eines Umlaufs, oder für $\theta = (\varepsilon + 1)2\pi$, gleich gross sein, die Umdrehung mag durch $2V$ oder durch $T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1 \theta_+\right)$ hervorgebracht werden, so muss

$$2HT\int_{2\pi(\varepsilon+1)\div 2\pi\varepsilon} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta = 2V.e^{4\pi\varepsilon H}.(e^{4\pi H}-1),$$

sein, woraus

$$2V = \frac{2H.e^{-4\pi\varepsilon H}}{e^{4\pi H}-1}.T\int_{2\pi(\varepsilon+1)\div 2\pi\varepsilon} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta \text{ folgt.}$$

Setzt man $\theta = 2\pi\varepsilon + \theta_1$ und erwägt, dass $F\theta = F\theta_1$ ist, oder nur von der relativen Grösse des Winkels θ im Kreise abhangt, so findet sich, dass die Zahl ε in diesem Ausdrucke von $2V$, wie es sein muss, wegfällt, also gleich Null angenommen werden kann. Man hat daher

$$2V = \frac{2H.T}{e^{4\pi H}-1}\int_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta;$$

und diese Kraft $2V$, welche für

$$H = 0 \text{ auf } \frac{T}{2\pi}\int_{2\pi\div 0}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta \text{ zurückgeht,}$$

bringt nach jedem Umlaufe dieselbe Zunahme der Geschwindigkeit hervor, wie die Kraft $T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$; also ist in der Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ der von θ unabhängige Coefficient $\frac{2H}{e^{4\pi H}-1}\int_{2\pi\div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)\partial\theta$ mit der Function $\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+$ äquivalent.

Wird demnach, wie im Folgenden geschehen wird, in den aus den Gleichungen (G) abgeleiteten Ausdrücken von X, K, $4R_1$, N und N_1 (§. 58 u. 59) jener Coefficient statt der letzteren Function, oder $2V$ statt $T\left(\frac{1}{r_1}F_2\theta_+ + \mu_1 F_1\theta_+\right)$ gesetzt, so werden die Ausdrücke dadurch von derjenigen Veränderlichkeit, welche auf die während des Umlaufs der Räder wechselnde relative Lage der Kurbel-Arme Bezug hat, befreit, und können sodann, nachdem der Kraft $2V$, oder T, derjenige Werth gegeben ist, welcher X zu Null macht, als der *gleichförmigen* Bewegung angehörig betrachtet werden.

Bedeutet $2V_1$ diesen Werth von $2V$, so ist

$$2V_1 = \{\mathfrak{P}\} \cdot \frac{\cos\beta + \mu\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta} + (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + \mu_1 P_1 \cos\alpha + S.$$

Hiebei ist indessen zu bemerken, dass die Kraft $2V$, obgleich der Winkel θ für sich in ihrem Ausdruck nicht enthalten ist, sofern sie, so wie T, im Allgemeinen mit der Geschwindigkeit μ_1 sich ändert, als eine Function von μ_1, und also auch als eine implicite Function der absoluten Grösse des Winkels θ zu betrachten ist.

§. 62.

Wird die Triebkraft $2V$ in die beiden Theile $2V_1 + 2v_1$ getheilt, von welchen $2V_1$ auf die gleichförmige Bewegung mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich bezieht (wegen des Luftwiderstandes ist die zur gleichförmigen Bewegung nöthige Kraft bei dem Dampfwagen nicht, wie beim gewöhnlichen Räderfuhrwerk, bei welchem jener Widerstand unberücksichtigt geblieben ist, unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung,), und werden die in den (§§. 58 u. 59) entwickelten Grössen ebenfalls in die entsprechenden Theile zerlegt (§. 15), so findet man, indem man die dem Theile $2V_1$ zugehörigen Theile dieser Grössen zur Unterscheidung in eckige Klammern einschliesst und den Nenner von X und K in (59), nämlich

$$\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta + \mu_1\sin\beta) + \left(P_1 + 4\frac{s_1}{r_1}Q_1\right)\cos\beta + \mu\sin\beta)$$

der Kürze wegen mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet:

$$X = (\cos\beta + \mu\sin\beta) \cdot \frac{2v_1}{\mathfrak{N}},$$

$$K = [K] + \frac{dK}{d(2V)}2v_1 = \frac{\{\mathfrak{P}\}}{\cos\beta + \mu\sin\beta} + \left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}\frac{2v_1}{\mathfrak{N}},$$

$$4R_1 = [4R_1] + \frac{d(4R_1)}{d(2V)}2v_1 = (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + S + \frac{\{\mathfrak{P}\}\cos\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$$
$$+ \left(\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}\cos\beta + (P_1 + 4Q_1)\cos\beta + \mu\sin\beta)\right)\frac{2v_2}{\mathfrak{N}},$$

$$2(N + N_1) = [2N + 2N_1] + \frac{d(2N + 2N_1)}{d(2V)}2v_1$$
$$= (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha + \frac{\{\mathfrak{P}\}\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta} + \left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}\sin\beta\frac{2v_1}{\mathfrak{N}}.$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass die Beschleunigung der Bewegung der Grösse $2v_1$ proportional ist, und dass die Grössen K, $4R_1$, und bei positivem Werthe des Winkels β, auch $2(N+N_1)$, mit der Beschleunigung zunehmen; so dass diese Zunahmen sich verhalten wie die Beschleunigungen.

Wird zu weiterer Abkürzung

$$\text{der Reibungsquotient } \frac{2(N+N_1)}{4R_1} \text{ mit } R_q$$

$$\mathfrak{N}.\frac{d(4R_1)}{d(2V)} = \left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}\cos\beta+(P_1+4Q_1)(\cos\beta+\mu\sin\beta) \text{ mit } \mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{N}.\frac{d(2N+2N_1)}{d(2V)} = \left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}\sin\beta \text{ mit } \mathfrak{L}$$

bezeichnet, so ergiebt sich:

$$R_q = [R_q] + \frac{\mathfrak{J}[2N+2N_1]-\mathfrak{L}[4R_1]}{\mathfrak{N}[2N+2N_1]}.2v_1;$$

welcher Ausdruck, da der Factor von $2v_1$ im zweiten Gliede wesentlich *positiv* ist, zeigt, dass die beschleunigte *rollende* Bewegung einen grössern Werth des Reibungscoëfficienten f erfordert, als die gleichförmige, wenn sie nicht in theilweise *gleitende* Bewegung übergehen soll.

§. 63.

Wegen der vom Winkel α abhängigen Veränderung der gesuchten Grössen ist zuvörderst einleuchtend, dass die Kraft $2V_1$, so wie auch, für eine bestimmte Beschleunigung, die Kraft K, mit α zugleich wächst, oder abnimmt, die der Beschleunigung proportionale Grösse X aber für einen bestimmten Werth der Kraft $2V$ abnimmt, wenn α wächst, und umgekehrt.

In Bezug auf den Reibungsquotienten R_q ist für gleichförmige Bewegung:

$$\frac{d[R_q]}{d\alpha} = [2N+2N_1]^2 = [2N+2N_1]\frac{d[4R_1]}{d\alpha} - [4R_1]\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha},$$

und $\dfrac{d[4R_1]}{d\alpha} = (P_1+4Q_1)\cos\alpha + (\{P+4Q\}\cos\alpha - \mu\{P\}\sin\alpha)\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta},$

den Luftwiderstand S als unabhängig von α angenommen, ferner:

$$\frac{d(2N+2N_1)}{d\alpha} = -(P_1+4Q_1)\sin\alpha + (\{P+4Q\}\cos\alpha - \mu\{P\}\sin\alpha)\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta};$$

daher $\dfrac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2 = (P_1+4Q_1)\left(P_1+4Q_1+\dfrac{\{P+4Q\}\cos\beta+\mu(P)\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\right)$

$-S\dfrac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}$ wesentlich positiv; der Reibungsquotient nimmt daher für gleichförmige rollende Bewegung mit α zugleich zu und ab.

Für beschleunigte Bewegung hat man

$$\frac{d(4R_1)}{d\alpha}=\frac{d[4R_1]}{d\alpha}+\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{d(2v_1)}{d\alpha},$$

$$\frac{d(2N+2N_1)}{d\alpha}=\frac{d[2N+2N_1]}{a\alpha}+\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{d(2v_1)}{d\alpha},$$

und $\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2$, oder $(2N+2N_1)\frac{d(4R_1)}{d\alpha}-4R_1\,.\,\frac{d(2N+2N_1)}{d\alpha}$, findet sich

$$=\frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2+\frac{2v_1}{\mathfrak{N}}\Big(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha}-\mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\Big)+\frac{d(2v_1)}{d\alpha}\cdot\frac{\mathfrak{J}[2N+2N_1]-\mathfrak{L}[4R_1]}{\mathfrak{N}};$$

wobei sich zwei verschiedene Fälle unterscheiden lassen:

Erstlich. Entweder kann man die Beschleunigung als *bestimmt*, oder $v_1\,(=V-V_1)$ als nach α *unveränderlich* annehmen, so dass V um eben so viel als V_1 mit α zugleich wächst und abnimmt. In diesem Falle ist $\frac{d(2v_1)}{d\alpha}$ gleich Null; das dritte Glied des letzteren Ausdrucks fällt weg, und da das zweite Glied, in welchem für den Factor

$$\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha}-\mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}=(P_1+4Q_1\Big(\Big\{P+4\frac{s}{r}Q\Big\}\sin(\alpha+\beta)$$

$$+(P_1+4Q_1)\sin\alpha(\cos\beta+\mu\sin\beta-(\{P+4Q\}\cos\alpha-\mu\,\}P\{\sin\alpha)\sin\beta\Big)$$

gefunden wird, gegen das erste Glied jedenfalls verhältnissmässig klein ist, so folgt, dass *für eine bestimmte Grösse der Beschleunigung*, bei an- und absteigender Bewegung, $\frac{dR_q}{d\alpha}$ positiv ist und der Reibungsquotient mit dem Reibungswinkel α zugleich zu- und abnimmt.

Zweitens. Oder man kann die Treibkraft $2V$ als nach α beständig annehmen, so dass v_1 kleiner wird, wenn α wächst, oder dass $\frac{d(2v_1)}{d\alpha}=-\frac{d(2V_1)}{d\alpha}$ und folglich wesentlich negativ ist. In diesem Falle hat man

$$\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2=\frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2+\frac{2V-2V_1}{\mathfrak{N}}\Big(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha}-\mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\Big)$$

$$-\frac{\mathfrak{J}[2N+2N_1]-\mathfrak{L}[4R_1]}{\mathfrak{N}}\cdot\frac{d(2V_1)}{d\alpha},$$

oder, da $2V_1=[4R_1]+\mu_1[2N+2N_1]-\mu_1.4Q\cos\alpha$,

$$\frac{d(2V_1)}{d\alpha}=\frac{d[4R_1]}{d\alpha}+\mu_1\,.\,\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}+\mu_1.4Q_1\sin\alpha \text{ ist:}$$

$$\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2 = \frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2\left(1-\frac{\mathfrak{J}+\mu_1\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\right)+\frac{2V+\mu_1 4Q_1\cos\alpha}{\mathfrak{N}}\left(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha}-\mathfrak{J}\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\right)$$
$$-\mu_1.\frac{4Q_1}{\mathfrak{N}}\sin\alpha(\mathfrak{J}[2N+2N_1]-\mathfrak{L}[4R_1]);$$

wo $1-\frac{\mathfrak{J}+\mu.\mathfrak{L}}{\mathfrak{N}}\pm\left(\frac{s_1}{r_1}-1\right)\frac{4Q_1}{\mathfrak{N}}(\cos\beta+\mu\sin\beta)$ ist und die Glieder mit dem Factor $\mu_1.4Q$ bei Beurtheilung des Vorzeichens von $\frac{dR_q}{d\alpha}$ ausser Acht bleiben können, weil sie sich nahezu gegenseitig aufheben. Denn es ist

$$[4R_1]\sin\alpha+\frac{d[4R_1]}{d\alpha}\cos\alpha = S\sin\alpha+P_1+4Q_1+\{P+4Q\}.\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta},$$
$$[2N+2N_1]\sin\alpha+\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\cos\alpha = \{P+4Q\}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} \quad \text{und}$$

$$\frac{\mu_1.4Q_1}{\mathfrak{N}}\left[\mathfrak{L}.\left([4R_1]\sin\alpha+\frac{d[4R_1]}{d\alpha}\cos\alpha\right)-\mathfrak{J}\left([2N+2N_1]\sin\alpha+\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\cos\alpha\right)\right]$$
$$=\frac{\mu_1.4Q}{\mathfrak{N}}\sin\beta\left(S\sin\alpha\left\{P+4\frac{s}{r}Q\right\}+\left\{\left(\frac{s}{r}-1\right)4Q\right\}(P_1+4Q_1)\right).$$

Für den Zweck dieser Beurtheilung genügt es daher,

$$\frac{dR_q}{d\alpha}(2N+2N_1)^2=\frac{4Q_1}{\mathfrak{N}}\left(\frac{s_1}{r_1}-1\right)(\cos\beta+\mu\sin\beta)\frac{d[R_q]}{d\alpha}[2N+2N_1]^2+\frac{2V}{\mathfrak{N}}\left(\mathfrak{L}.\frac{d[4R_1]}{d\alpha}-\mathfrak{J}.\frac{d[2N+2N_1]}{d\alpha}\right)$$

zu setzen, und da der Factor $\mathfrak{L}\frac{\partial[4R_1]}{\partial\alpha}-\mathfrak{J}\frac{\partial[2N+2N_1]}{\partial\alpha}$, dessen entwickelter Ausdruck unter (1) angegeben ist, wenn der Winkel β wie gewöhnlich sehr klein ist, bei positivem α als positiv, und bei negativem α als negativ gelten kann, so lässt sich schliessen, dass *für einen bestimmten Werth der Kraft* $2V$, bei positiven Werthen des Winkels α, oder beim *Ansteigen*, $\frac{\partial R_q}{\partial\alpha}$, als positiv, oder der zur beschleunigten rollenden Bewegung gehörige Reibungsquotient als mit α zugleich zu- und abnehmend zu betrachten, bei *absteigender* Bewegung dagegen, nach Massgabe der relativen Werthe der verschiedenen gegebenen Grössen, insbesondere der Kraft $2V$, die wiewohl entfernte Möglichkeit des umgekehrten Falles vorhanden ist; nämlich, dass dieser Quotient, welcher bei stärker werdender Neigung der Bahn abgenommen hat, wieder zunimmt, wenn der negative Werth des Winkels α ein gewisses Mass überschreitet.

§. 64.

Die zur gleichförmigen rollenden Bewegung des mit dem Wagenzuge verbundenen Dampfwagens erforderliche Triebkraft $2V_1$, welche abnimmt, wenn der Winkel α kleiner wird (§. 63), kann für negative Werthe von α Null und negativ werden; und denjenigen Neigungswinkel α, unter welchem der Dampfwagen durch die Wirkung der Schwerkraft allein, ohne der Beihülfe der eignen Triebkraft zu bedürfen, mit einer bestimmten, beständigen Geschwindigkeit sich rollend abwärts bewegt, giebt die Gleichung $2V_1 = 0$, welche, wenn $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ von α unabhängige Grössen ausdrücken, die Form

$$(\sigma.)\qquad \mathfrak{Q}\cos\alpha_1 + \mathfrak{R}\sin\alpha_1 + \mathfrak{S} = 0$$

annimmt, und aus welcher, wenn zugleich $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} = \operatorname{tang}\delta$ gesetzt wird, $\sin(\alpha_1 + \delta) = -\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}}\cos\delta$ folgt.

Für $\alpha = \alpha_1$ ist $2V = 2v_1$; und wird der negative Winkel α kleiner als α_1, d. h., vom Vorzeichen abgesehen, α grösser als α_1, so wird auch $2V_1$ negativ und $2v_1$ grösser als $2V$. Der Dampfwagen bedarf, indem er in die Verhältnisse der gewöhnlichen Räderfuhrwerke tritt, der Triebkraft der Maschine zur beschleunigten Bewegung nicht mehr, und aus der Gleichung $2V_1 + 2v_1 = 0$ wird für einen solchen Neigungswinkel die Beschleunigung, mit der er ohne Zuthun dieser Triebkraft abwärts rollt, oder auch für eine bestimmte solche Beschleunigung, der entsprechende Werth des Winkels α gefunden.

Bei abnehmendem α wird mit $2V_1$ zugleich auch $[4R_1]$, (das Reibungs-Erforderniss zur gleichförmigen rollenden Bewegung) kleiner, und da für $\mu_1 = 0$ die Kraft $2V_1$ in $[4R_1]$ übergeht (§. 61, 62), so gilt die Gleichung (σ), wenn in $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ der Exponent μ_1 gleich Null gesetzt wird, auch für $[4R_1] = 0$. Bezeichnet $\alpha_{,,}$ den Werth des Winkels α, welcher $[4R_1]$ zu Null macht, so ist $\alpha_{,,}$ ebenfalls negativ, wie $\alpha_{,}$; aber $\alpha_{,,}$, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen genommen, ist noch etwas kleiner als $\alpha_{,}$ oder für $\alpha = \alpha_{,,}$ ist $2V_1$ noch grösser als Null, nämlich $= \mu_1\left(P_1\cos\alpha_{,,} + (\{P+4Q\}\sin\alpha_{,,} + \mu|P|\cos\alpha_{,,}).\frac{\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\right)$. Für $\alpha = \alpha_{,,}$ und $2V = 2V_1$ ist demnach die Bewegung abwärts von selbst rollend, wenn auch keine Reibung zwischen den Rädern und der Bahnfläche Statt findet; und ist die Bahn noch stärker als unter dem Winkel $\alpha_{,,}$ geneigt, so wird das

Reibungs-Erforderniss $[4R_1]$ zur gleichförmigen rollenden Bewegung abwärts negativ, oder der Widerstand $[4R_1]$ nimmt die Richtung an, welche derjenigen der fortschreitenden Bewegung entgegengesetzt ist, und wirkt nicht mehr auf Beschleunigung, sondern auf Verzögerung der Bewegung.

Die Gleichung $4R_1 = [4R_1] + \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{R}}2v_1$ (§. 62) zeigt, dass das Reibungs-Erforderniss zur rollenden Umdrehung der Treibräder für beschleunigte Bewegung grösser, für verzögerte kleiner ist, als für gleichförmige Bewegung, und aus der Gleichung

$$[4R_1] + \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{R}}(2V - 2V_1) = 0\,,$$

welche ebenfalls die Form der Gleichung (σ) hat, ergiebt sich, bei gegebener Triebkraft $2V$, der Winkel α, für welchen, und (bei gegebenem Neigungswinkel) die Grösse der Triebkraft $2V$, für welche das Reibungs-Erforderniss verschwindet und vom Positiven zum Negativen übergeht. Ist $2V_0$ diese Grösse, so findet sich

$$2V_0 = \mu_1\Big(P_1\cos\alpha + \{\mathfrak{P}\}\frac{\sin\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\Big)$$

$$-\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}}\Big(\{\mathfrak{P}\}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + (P_1 + 4Q_1)\sin\alpha + S\Big)\,,$$

und da

$$\frac{d(2V_0)}{d\alpha} = -\mu_1\Big(P_1\sin\alpha - \frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta + \mu\cos\beta}\Big)$$

$$-\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{J}}{\mathfrak{R}}\cdot\Big(\frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + (P_1 + 4Q_1)\cos\alpha\Big)\,,$$

$\Big($wo $\frac{d\{\mathfrak{P}\}}{d\alpha} = \{P + 4Q\}\cos\alpha - \mu\{P\}\sin\alpha$ ist (§. 59)$\Big)$, als wesentlich negativ gelten kann, so nimmt $2V_2$ ab, während α zunimmt; und umgekehrt. Für $\alpha = 0$ ist $2V_0 = \mu_1\Big(P_1 + \mu\{P\}\frac{\sin\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta}\Big) - \frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}}\Big(\mu\{P\}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\beta+\mu\sin\beta} + S\Big)$.

Mit $4R_1$ geht zugleich auch der Reibungsquotient R_q, durch Null, vom Positiven zum Negativen über, weil der Druck $(2N+N_1)$, welchen der Dampfwagen durch die Treibräder auf die Bahn ausübt, weder Null noch negativ werden kann, und es erhellet aus diesen Erörterungen, dass im Allgemeinen sowohl der Reibungsquotient R_q, als das Reibungs-Erforderniss $4R_1$, kleiner ist für negative als für positive Werthe von α, oder dass in der Bewegung abwärts und auf wagerechter Bahn weniger leicht ein Gleiten der Treibräder eintreten kann als bei ansteigender Bewegung.

Die Reibung, welche zwischen dem Umfange der Treibräder und der Oberfläche der Bahn Statt findet, oder finden kann, ist gleichsam als ein Vorrath von Kraft oder Widerstand anzusehen, von welchem immer und überall gerade nur so viel zur Anwendung kommt, als die rollende Bewegung eben erfordert, und welcher bei ansteigender Bewegung und auf wagerechter Bahn allein die, die fortschreitende Bewegung erzeugende Kraft abgiebt, in der Bewegung abwärts dagegen, nach der Grösse des Neigungswinkels, zur Mässigung der Geschwindigkeit dient, welche durch die Wirkung der Schwere hervorgebracht wird. Wenn dieser Vorrath zur Hervorbringung der rollenden Bewegung nicht ausreicht, oder wenn der Reibungsquotient, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen genommen, grösser ist als der Coefficient der wirklich vorhandenen Reibung, so muss gleitende Bewegung eintreten; ein etwa sich ergebendes negatives Vorzeichen des Reibungsquotienten aber kann sich nur auf die Richtung beziehen, nach welcher die Reibung wirken muss, wenn die Räder rollend sich bewegen sollen.

§. 65.

Soll der Dampfwagen aus dem Zustande der Ruhe in Bewegung gesetzt werden, so muss die Kraft $2V$, mit der er arbeitet, in jedem Augenblicke der beginnenden Bewegung grösser sein als die, der Geschwindigkeit, mit der er sich in diesem Augenblicke bewegt, entsprechende Kraft $2V_1$; bis zu dem Zeitpuncte, in welchem er die Geschwindigkeit, die er gleichmässig beibehalten soll, erreicht hat.

Die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = gX$ kann, nachdem in ihr für X der entwickelte Ausdruck dieser Grösse (§. 59) gesetzt und der Winkel θ auf dem in (§. 61) gezeigten Wege aus ihr entfernt ist, entweder in Form einer Gleichung zwischen x und t, oder in der (§. 61) angezeigten Form einer Gleichung zwischen u_1 und t (indem man der Kraft T den als bekannt vorausgesetzten beständigen oder nach irgend einem Gesetze veränderlichen Werth derselben giebt) durch Integration dazu dienen, die fortschreitende Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$, oder die Winkelgeschwindigkeit u_1, welche der Dampfwagen bei beschleunigter Bewegung nach Verfluss irgend einer Zeit t erlangt, so wie den Weg x, den er in dieser Zeit zurücklegt, zu berechnen. (Vergl. §§. 89 – 92.)

Der in den Gleichungen vorkommende Luftwiderstand S ist als eine Function der Geschwindigkeit auszudrücken, für welche man, in der Voraussetzung eines ruhigen, windstillen Zustandes der Atmosphäre, die Function $\frac{\varkappa \Delta \Sigma}{g} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ setzen kann, in welcher die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = r_1 u_1$ auf die Secunde als Zeit-Einheit zu beziehen ist und wo ferner

$\varkappa$ einen numerischen Coefficienten, welcher gewöhnlich $= 0{,}6$ angenommen wird,

Δ die Dichtigkeit der Luft, nämlich das Gewicht einer körperlichen Raum-Einheit derselben und

Σ eine Flächengrösse bedeutet, welche von der Ausdehnung und Gestalt der bei der Bewegung gegen die Luft anstossenden Flächentheile des Dampfwagens und des Wagenzuges, so wie von der Lage dieser Theile gegen die Richtung der Bewegung abhangt.

Auf die *Bewegung rückwärts*, bei welcher der angehängte Wagenzug vor dem Dampfwagen vorausgeht, finden die Gleichungen (G) und deren Ergebnisse gleichfalls Anwendung, wenn nur die Winkel α und β, in dem (§. 7) bestimmten Sinne, auf die Richtung der Bewegung rückwärts bezogen werden, und wenn überhaupt in dem Sinne, welcher den als bekannt angenommenen Grössen beigelegt ist, auf die Vorzeichen derselben gehörige Rücksicht genommen wird.

Der Reibungscoefficient f geht in die Gleichungen (G) und die aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke nicht ein; eben so wenig gehen die Grössen s und s_1 in die, die gleichförmige rollende Bewegung betreffenden Ausdrücke ein. Daher hat die Grösse der Reibung zwischen den Rädern und der Bahn an sich, wenn sie nur überhaupt rollende Bewegung zulässt, auf diese Bewegung, so wie auch das Trägheitsmoment der Räder auf die gleichförmige rollende Bewegung, keinen Einfluss.

Und da ferner die Abstände c und h nur in den Ausdrücken von $2N$ und $2N_1$, einzeln genommen, nicht aber in dem Ausdrucke der Summe $2(N+N_1)$, noch in denen der übrigen gesuchten Grössen vorkommen, so ist die Lage des Schwerpuncts des Dampfwagens zwar auf das Verhältniss, nach welchem der Gewichtsdruck desselben auf die Stützpuncte der beiden Räderpaare sich vertheilt, aber nicht auf die Bewegung von Einfluss.

Gleitende Bewegung.

§. 66.

Die

(H.) *Gleichungen der theilweise gleitenden Bewegung*

des vierrädrigen Dampfwagens, welche Bewegung nach (§. 54) eintritt, sobald f kleiner als $\frac{2R}{N+N_1}$ ist, sind, wenn sogleich $G = G_1$ wie bei rollender Bewegung (§. 57) angenommen und $E+E_1 = E_2$, $F+F_1 = F_2$, $\frac{F_2}{E_2} = G_2$ gesetzt wird, für irgend einen Augenblick der Bewegung folgende:

1) $-K\cos\beta - S + f(2N+2N_1) - (P_1+4Q_1)(\sin\alpha + X) = 0,$
2) $-K.\sin\beta + 2(N+N_1) - (P_1+4Q_1)\cos\alpha = 0,$
3) $-n\cos\beta K + cP_1 + (e\cos\alpha - 2r_1\sin\alpha)2Q_1 - a.2N_1 - mS - (hP_1 + 4r_1Q_1)X - 4Q_1U_1 = 0,$
4) $2E_2(G_2 - \varphi_1) + f(2N+2N_2) + T.F\theta_+ - 4Q_1(\sin\alpha + X) = 0,$
5) $-2E_2(1+\varphi_1 G_2) + 2(N+N_1) - T.F_1\theta_+ - 4Q_1\cos\alpha = 0,$
6) $-\varphi_1\varrho_1.2E_2\sqrt{(1+G_2^2)} - fr_1(2N+2N_1) + T.F_2\theta_+ - 4Q_1U_1 = 0.$

Die aus diesen Gleichungen zu entwickelnden Unbekannten sind, indem K vorerst als bekannt vorausgesetzt wird, X, U_1, N, N_1, E_2 und G_2. Aus (1 u. 2) ergeben sich X und die Summe $2(N+N_1)$; sodann aus (4 u. 5) E_2 und G_2, und nach Entwickelung dieser Grössen U_1 aus der Gleichung (6), ohne dass hier die Entfernung der Wurzelgrösse nöthig ist; zuletzt N und N_1 einzeln aus (3 u. 2).

§. 67.

Aus den Gleichungen (H, 1 u. 2) wird zunächst, wenn auch G und G_1 unter sich verschieden sind:

$$X = f\cos\alpha - \sin\alpha - \frac{S + K(\cos\beta - f\sin\beta)}{P_1 + 4Q_1},$$

$$2(N+N_1) = (P_1+4Q_1)\cos\alpha + K\sin\beta \text{ gefunden.}$$

In Bezug auf den angehängten Wagenzug (dessen Bewegung als rollend vorausgesetzt) ist aber nach (§. 59):

$$X = \frac{K(\cos\beta + \mu\sin\beta) - \{\mathfrak{P}\}}{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}},$$

und wird dieser Ausdruck von X dem vorigen gleich gesetzt, so erhält man:

$$K = \frac{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}[(P+4Q_1)(f\cos\alpha - \sin\alpha) - S] + (P_1 + 4Q_1)\{\mathfrak{P}\}}{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta - f\sin\beta) + (P_1 + 4Q_1)(\cos\beta + \mu\sin\beta)},$$

daher

$$X = \frac{[(P_1 + 4Q_1)(f\cos\alpha - \sin\alpha) - S](\cos\beta + \mu\sin\beta) - \{\mathfrak{P}\}(\cos\beta + f\sin\beta)}{\left\{P + 4\frac{s}{r}Q\right\}(\cos\beta - f\sin\beta) + (P_1 + 4Q_1)(\cos\beta + \mu\sin\beta)}.$$

Man sieht, dass diese Ausdrücke von X, K und $2(N+N_1)$ weder die Triebkraft T, noch den Winkel θ, noch die Grössen φ_1, ϱ_1 und r_1 enthalten; und da aus der Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ durch Integration sowohl die irgend einem Zeitpuncte der Bewegung entsprechende fortschreitende Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}$, als der bis zu diesem Zeitpuncte zurückgelegte Weg x sich finden lassen, so erhellet, dass unter obigen Voraussetzungen, wenn nämlich die Bewegung der Treibräder theilweise gleitend und die der Wagenräder rollend ist, die fortschreitende Bewegung des Dampfwagens, also auch des Wagenzuges, von der Triebkraft T und dem absolut oder relativ genommenen Winkel θ, so wie auch von der Reibung zwischen den Achsen der Treibräder und ihren Lagern, und von den Halbmessern dieser Achsen und Räder gänzlich unabhängig ist.

Nachdem die Unbekannten E_2 und G_2 aus den Gleichungen (4 u. 5) entwickelt sind, ergiebt sich aus (5 u. 6):

$$\frac{4Q_1}{r_1}U = T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + f_1.F\theta_+\right) - f.2E_2(1+\varphi_1 G_2) - \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1}2E_2\sqrt{(1+G_2^2)} - 4Q_1 f\cos\alpha,$$

oder, wenn man wieder, wie in (§. 58), $\mu_1 = \frac{\varphi_1\varrho_1}{r_1\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$, und $\frac{1+\varphi_1 G_2}{\sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$ statt $\sqrt{(1+G_2^2)}$ einführt:

$$\frac{4Q_1}{r_1}U_1 = T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right) - (f+\mu_1)(P_1\cos\alpha + K\sin\beta) - 4Q_1 f\cos\alpha;$$

wo man sich den Exponenten μ_1 durch das im Vorigen wiederholt angewendete Verfahren auf solche Weise ergänzt vorstellen kann, dass dieser Ausdruck von U_1 den Gleichungen (H) vollkommen genügt.

Die Gleichung $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{g}{k_1^2}.U_1$, welche zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit u_1 dienen kann, mit welcher die Treibräder nach Verfluss irgend einer

Zeit t sich bewegen, lässt sich, nachdem die in $S = \frac{\varkappa \Delta \Sigma}{g}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$ enthaltene fortschreitende Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}$ mittels des ersten Integrals der Gleichung $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gX$ aus ihr entfernt ist, als eine Gleichung zwischen u_1, θ und t, oder, wegen $u_1 = \frac{\partial \theta}{\partial t}$, als eine Gleichung zwischen θ und t, betrachten. Auch kann man in dem Ausdrucke von U_1, wenn in ihm $\mu_1 = \frac{\varphi_1 \varrho_1}{r_1 \sqrt{(1+\varphi_1^2)}}$ beibehalten wird, um eine Gleichförmigkeit der umdrehenden Bewegung der Räder leichter vorstellbar zu machen, die Kraft $T\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right)$, wie bei rollender Bewegung, durch eine andere Kraft ersetzt sich vorstellen, welche der auf die relative Lage der Kurbel-Arme bezüglichen Veränderlichkeit nicht unterworfen ist und die Umdrehungsgeschwindigkeit u_1 nach beendigtem Umlaufe eben so gross, wie die erstere Kraft giebt. Die so bestimmte, eingebildete Kraft muss beim Uebergehen der theilweise gleitenden in die rollende Bewegung mit der für die letztere Bewegung surrogirten Kraft $2V$ (§. 61) zusammenfallen. Eine weitere Ausführung einer solchen Substitution kann jedoch bei der theilweise gleitenden Bewegung, als minder wesentlich, übergangen werden.

§. 68.

Jedem Werthe der Triebkraft $2V = \frac{2H.T}{e^{4\pi H}-1}\int_{2\pi \div 0} e^{2H\theta}\left(\frac{1}{r_1}.F_2\theta_+ + \mu_1.F_1\theta_+\right)\partial\theta$

(§. 62) entspricht ein bestimmter Werth des Reibungsquotienten R_q; und wird durch V_f derjenige Werth von V bezeichnet, welcher den Reibungsquotienten dem gegebenen Coefficienten f gleich macht, so wird aus

$$f = R_q = \frac{[4R_1] + \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{R}}(2V - 2V_1)}{[2N + 2N_1] + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{L}}(2V - 2V_1)}:$$

$$2V_f = 2V_1 + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{J} - f\mathfrak{L}}(f[2N + 2N_1] - [4R_1])$$

gefunden. Heisst dann T_f der zu $V = V_f$ gehörige Werth von T, so drückt, da R_q mit V oder T zugleich wächst und abnimmt (§. 62), $T \gtreqless T_f$, eben so wie $f \gtreqless R_q$, die Bedingung für das Entstehen der rollenden, und $T > T_f$, eben so wie $f < R_q$, die Bedingung für das Entstehen der theilweise gleitenden Bewegung aus, und es erhellet, dass die Gleichungen (H) und die aus ihnen abgeleiteten Ausdrücke nur auf Werthe von T, welche grösser oder eben so gross als T_f sind, Anwendung finden können, da der Coefficient f, wenn er grösser als R_q ist, nicht in seinem vollen Werthe wirksam wird (§. 54). Und für solche Werthe von T nimmt nach (§. 67) die Grösse U_1 mit T zugleich zu und ab, während die Grössen X, K und die Summe $N+N_1$ unverändert dieselben bleiben, T_f mag von T um einen grössern oder kleinern Unterschied übertroffen werden.

Aus $X = 0$ erhält man für gleichförmige fortschreitende Bewegung $f = [R_q]$ (§. 62), und wird dann zugleich $U_1 = 0$ gesetzt, so ergiebt sich $T = T_1$; wie bei gleichförmiger rollender Bewegung (§. 60). Eben so wird in Bezug auf beschleunigte Bewegung, wenn man den letzteren Ausdruck von X (§. 67) dem für rollende Bewegung (§. 59) gleich setzt, daraus, wie es sein muss, $f = R_q$ (§. 58, 62), und umgekehrt, gefunden. (Ist $f = [R_q]$, so kann F grösser sein als der Werth dieser Kraft, welcher $R_q = [R_q]$ macht, ohne dass X grösser als Null wird; aber solchem grösseren T entspricht ein grösseres R_q, und f kann dann ebenfalls grösser werden als $[R_q]$, ohne dass die Bewegung aufhört gleitend zu sein; womit sodann auch X grösser als Null wird.)

Die Grösse X nimmt mit f zugleich zu und ab, und erhält daher ihren grössten Werth durch $f = R_q$, oder ist grösser bei rollender als bei theilweise gleitender Bewegung; U_1 wächst dagegen, wenn f abnimmt, und umgekehrt, und ist also für einen bestimmten Werth von T kleiner bei rollender als bei theilweise gleitender Bewegung.

Zu weiterer Erläuterung der Verhältnisse der Bewegung, wie sie bei eintretenden Veränderungen der Grössen f und T sich ergeben, mögen noch folgende Bemerkungen hier Platz finden.

Man nehme an, die als bestimmt gedachten Werthe f und T des Reibungscoefficienten und der Triebkraft ständen in solcher Beziehung zu einander, dass f dem (der Kraft T entsprechenden) Reibungsquotienten für beschleunigte rollende Bewegung gleich, oder dass $U_1 = (s_1 - r_1)X$ ist. Nimmt nun die Triebkraft zu, während f, welches durch T in seinem vollen Werthe zur Geltung kommt, ungeändert bleibt, so bleibt auch X ungeändert, oder die Vermehrung von T ist unnütz für die Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung, U_1 aber nimmt zu durch diese Vermehrung, oder die Umdrehung der Räder wird theilweise gleitend. Nimmt dagegen die Triebkraft bei unverändertem f ab, so ist nur ein entsprechender Theil von f wirksam, die Bewegung bleibt rollend, geht aber bei fortwährender Abnahme der Triebkraft aus dem beschleunigten Zustande, indem X und U_1 zugleich nach und nach Null und negativ werden, in den gleichförmigen und verzögerten über, bis sie zuletzt ganz aufhört. Nimmt der Coefficient f zu, ohne dass die Kraft T sich verändert, so bleibt die Bewegung ebenfalls rollend; X und U_1 bleiben unverändert, indem das, um was f grösser wird, nicht in Thätigkeit kommt oder die Beschleunigung nicht vergrössert. Nimmt dagegen f ab, bei unveränderter Triebkraft, so wird die Bewegung theilweise gleitend, X nimmt ebenfalls ab und kann gleich Null, oder die fortschreitende Bewegung kann gleichförmig werden, während U_1 zunimmt.

Die gleichen Verhältnisse treten beziehungsweise auch in Fällen ein, wenn die als bestimmt angenommenen Werthe von f und T sich so zu einander verhalten, dass die entstehende rollende Bewegung gleichförmig oder verzögert wird, und f dem (zu T gehörigen) Reibungsquotienten gleich ist. Ist insbesondere diese Bewegung eine verzögerte, oder sind X und U_1 negativ, so geht die Bewegung, wenn f abnimmt, bei ungeändertem Werthe von T, oder wenn T zunimmt, ohne dass f sich ändert, oder auch, wenn zu gleicher Zeit T wächst und f abnimmt, in die theilweise gleitende über, und U_1 nimmt zu, so dass es, durch Null hindurchgehend, positiv werden kann, während X mit f zugleich kleiner wird.

Nur bei rollender Bewegung können die beiderlei Bewegungen, die fortschreitende und die umdrehende der Räder, zugleich gleichförmig sein; bei theilweise gleitender Bewegung dagegen muss die eine derselben beschleunigt oder verzögert sein, wenn die andere gleichförmig ist.

Ferner ist zu beachten, dass, wenn der Reibungsquotient für rollende Bewegung negativ wird (§. 64), und wenn zugleich, wie die Anwendbarkeit der Gleichungen (H) fordert, der Coefficient f, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als dieser Quotient ist, das Vorzeichen von f geändert werden muss, weil in diesem Falle der Widerstand $f(2N+2N_1)$ verzögernd, und nicht, wie die Gleichungen (H) voraussetzen, beschleunigend auf die Bewegung wirkt.

Ganz gleitende Bewegung der Räder, ohne fortschreitende Geschwindigkeit, findet nur dann Statt, wenn f so beschaffen ist, dass auch X gleich Null wird.

(Der Schluss folgt im nächsten Heft.)