Werk

Titel: Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function 4ten Grades von zwei...

Autor: Hesse, O.

Jahr: 1851

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0041|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

16.

Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function 4ten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält.

(Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.)

Es giebt nur zwei homogene ganze Functionen, deren Determinanten respective von demselben Grade sind, wie die Functionen selbst. Ich verstehe unter *Determinante* einer Function die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten zusammengesetzte Determinante. Die Transformation der einen, nämlich der homogenen ganzen Function dritten Grades von drei Variabeln, durch lineäre Substitutionen, habe ich in diesem Journal Bd. 28. S. 68 auseinandergesetzt. Die Transformation der andern, der homogenen ganzen Function 4ten Grades von zwei Variabeln, welche eine in die Augen fallende Analogie mit der ersteren darbietet und gleich wie jene eine einfache geometrische Interpretation gestattet, werde ich im Folgenden behandeln. An diese Aufgabe wird sich die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichungen anschliefsen; nebst der Untersuchung einer irreductibeln Gleichung vom 6ten Grade, welche vermöge gewisser Eigenschaften der Wurzeln sich algebraisch auflösen läfst.

§. 1.

Wenn man durch u eine beliebige gegebene homogene Function 4ten Grades der beiden Variabeln x_1, x_2, durch u_1, u_2 die ersten und durch $u_{11}, u_{12} = u_{21}, u_{22}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten, nach den Variabeln genommen, bezeichnet, so hat man:

$$(1.) \quad \begin{cases} x_1 u_{11} + x_2 u_{12} = 3u_1, \\ x_1 u_{21} + x_2 u_{22} = 3u_2. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen diejenigen Gröfsen x_1, x_2, welche in den Theilen derselben links explicite vorkommen, als die Unbekannten und

löset sie in Rücksicht auf diese Unbekannten lineären Gleichungen auf, so erhält man, wenn man für den Ausdruck $u_{11}u_{22} - u_{12}^2$ (der in dem Folgenden den Namen der *Determinante* der Function u führen soll) der Kürze wegen v setzt:

$$(2.) \quad \begin{cases} x_1 v = +3u_1u_{22} - 3u_2u_{12}, \\ x_2 v = -3u_1u_{12} + 3u_2u_{11}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen gehen nun durch Differentiation nach den Variabeln folgende Gleichungen hervor:

$$(3.) \quad \begin{cases} x_1v_1 - 2v = 3u_1u_{221} - 3u_2u_{112}, \\ x_1v_2 = 3u_1u_{222} - 3u_2u_{122}, \\ x_2v_1 = -3u_1u_{112} + 3u_2u_{111}, \\ x_2v_2 - 2v = -3u_1u_{122} + 3u_2u_{112}, \end{cases}$$

in welchen der Kürze wegen v_1 v_2 für die ersten partiellen Differentialquotienten der Function v und u_{111}, u_{112}, u_{122}, u_{222} für die dritten Differentialquotienten der Function u gesetzt ist.

Es sei ferner die gegebene Function:

$$(4.) \quad u = a_{40}x_1^4 + 4a_{31}x_1^3x_2 + 6a_{22}x_1^2x_2^2 + 4a_{13}x_1x_2^3 + a_{04}x_2^4,$$

und die aus den zweiten Differentialquotienten gebildete Determinante dieser Function:

$$(5.) \quad v = b_{40}x_1^4 + 4b_{31}x_1^3x_2 + 6b_{22}x_1^2x_2^2 + 4b_{13}x_1x_2^3 + b_{04}x_2^4.$$

Alsdann hat man:

$$(6.) \quad \begin{cases} \frac{1}{4}u_1 = a_{40}x_1^3 + 3a_{31}x_1^2x_2 + 3a_{22}x_1x_2^2 + a_{13}x_2^3, \\ \frac{1}{4}u_2 = a_{31}x_1^3 + 3a_{22}x_1^2x_2 + 3a_{13}x_1x_2^2 + a_{04}x_2^3, \\ \frac{1}{4}v_1 = b_{40}x_1^3 + 3b_{31}x_1^2x_2 + 3b_{22}x_1x_2^2 + b_{13}x_2^3, \\ \frac{1}{4}v_2 = b_{31}x_1^3 + 3b_{22}x_1^2x_2 + 3b_{13}x_1x_2^2 + b_{04}x_2^3. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesen vier Gleichungen die vier Gröfsen x_1^3, $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$, x_2^3 ***rechts als die Unbekannten und löset die in Rücksicht auf sie Unbekannten lineären Gleichungen auf, so erhält man Gleichungen von der Form:***

$$(7.) \quad \begin{cases} 4Rx_1^3 = \pi_{40}u_1 + \pi_{31}u_2 + p_{40}v_1 + p_{31}v_2, \\ 4Rx_1^2x_2 = \pi_{31}u_1 + \pi_{22}u_2 + p_{31}v_1 + p_{22}v_2, \\ 4Rx_1x_2^2 = \pi_{22}u_1 + \pi_{13}u_2 + p_{22}v_1 + p_{13}v_2, \\ 4Rx_2^3 = \pi_{13}u_1 + \pi_{04}u_2 + p_{13}v_1 + p_{04}v_2; \end{cases}$$

welche Gleichungen aus eben so vielen verschiedenen Gröfsen p und π zusammengesetzt sind, als die aufzulösenden Gleichungen verschiedene Coëfficienten a und b enthalten. Der gemeinsame Nenner R der Unbekannten ist, da

die Gröfsen b vom zweiten Grade sind, vom 6ten Grade, und homogen in Rücksicht auf die Gröfsen a. Die Gröfsen π und p sind ebenfalls homogen und von den Graden 5 und 4.

Zum Beweise jener Behauptung dienen die Gleichungen (3.), welche ich vorausgeschickt habe. Denn multiplicirt man die erste Gleichung (7.) mit x_2, die zweite mit x_1 und setzt die Werthe von x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 aus (3.), so erhält man

$$\begin{aligned} 4Rx_1^3x_2 &= u_1\{\pi_{40}x_2 - p_{40}3u_{112} - p_{31}3u_{122}\} \\ &\quad + u_2\{\pi_{31}x_2 + p_{40}3u_{111} + p_{31}3u_{112}\} + p_{31}2v, \\ 4Rx_1^3x_2 &= u_1\{\pi_{31}x_1 + p_{31}3u_{221} + p_{22}3u_{222}\} \\ &\quad + u_2\{\pi_{22}x_1 - p_{31}3u_{112} - p_{22}3u_{122}\} + p_{31}2v; \end{aligned}$$

welche beide Gleichungen die Form

$$4Rx_1^3x_2 = u_1A_1 + u_2A_2 + A.2v$$

haben, wo A_1 und A_2 homogene Functionen von x_1 und x_2 ersten Grades sind und A eine Constante ist. Betrachtet man aber in dieser identischen Gleichung die vier Coëfficienten der Variabeln in A_1 und A_2 und die Constante A als fünf Unbekannte, so erhält man, durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung fünf, in Beziehung auf die Unbekannten lineäre Gleichungen, aus welchen sich für die Unbekannte A nur ein einziger Werth ergiebt. Dieser Coëfficient A von $2v$ ist also in den beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derselbe; also ist auch die Gröfse p_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7.) eine und dieselbe. Auf eben die Art läfst sich beweisen, dafs auch die Gröfsen p_{22} in der zweiten und dritten Gleichung denselben Werth haben, etc.

Um zu beweisen, dafs auch π_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7.) eine und dieselbe Gröfse ist, setze ich in den Gleichungen (3.) statt $2v$ seinen Werth $= \frac{1}{2}(x_1v_1 + x_2v_2)$ und statt u_{111}, u_{112}, u_{122}, u_{222} ihre Werthe als lineäre Functionen von x_1, x_2. Wenn man zu diesen Gleichungen, welche, da die erste und letzte Gleichung nicht verschieden sind, nur die Stelle von drei Gleichungen vertreten, noch die Gleichung $4u = x_1u_1 + x_2u_2$ hinzufügt, so hat man vier Gleichungen, deren Theile rechts die vier Gröfsen x_1u_1, x_1u_2, x_2u_1, x_2u_2 und die Theile links die fünf Gröfsen x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 und u auf lineäre Weise enthalten. Es lassen sich also die vier ersten Gröfsen lineär durch die fünf letzten Gröfsen ausdrücken. Setzt man nun diese Ausdrücke für x_1u_1, x_1u_2, x_2u_1, x_2u_2 in die erste mit x_2 multiplicirte Gleichung (7.) und gleich-

zeitig in die zweite mit x_1 multiplicirte Gleichung (7.), so nehmen beide Gleichungen die Form

$$4Rx_1^3x_2 = v_1B_1 + v_2B_2 + B.4u$$

an; wo B_1 und B_2 lineäre homogene Functionen von x_1 und x_2 und B eine Constante bedeuten. Bestimmt man die vier Coëfficienten in B_1 und B_2 und die Constante B, indem man die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der letzten identischen Gleichung einander gleich setzt, so wird sich, weil die aufzulösenden Gleichungen lineär sind, nur ein einziger Werth von B ergeben. Da aber eben sowohl in der ersten, als in der zweiten behandelten Gleichung (7.), um sie auf die genannte gemeinschaftliche Form zurückzuführen, B für π_{31} zu setzen war, so wird auch diese Gröfse π_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7.) denselben Werth haben. Eben so läfst sich beweisen, dafs π_{22} in der zweiten und dritten Gleichung denselben Werth haben etc.

Wenn man die Werthe von x_1^3, $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$, x_2^3 aus den Gleichungen (7.) in die Theile rechts der Gleichungen (6.) setzt, so erhält man durch Gleichstellung der Coëfficienten der Gröfsen u_1, u_2, v_1 und v_2 auf beiden Seiten der Gleichungen (6.) folgende Systeme von Gleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} R = a_{40}\pi_{40} + 3a_{31}\pi_{31} + 3a_{22}\pi_{22} + a_{13}\pi_{13}, \\ 0 = a_{40}\pi_{31} + 3a_{31}\pi_{22} + 3a_{22}\pi_{13} + a_{13}\pi_{04}, \\ 0 = a_{31}\pi_{40} + 3a_{22}\pi_{31} + 3a_{13}\pi_{22} + a_{04}\pi_{13}, \\ R = a_{31}\pi_{31} + 3a_{22}\pi_{22} + 3a_{13}\pi_{13} + a_{04}\pi_{04}, \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} 0 = b_{40}\pi_{40} + 3b_{31}\pi_{31} + 3b_{22}\pi_{22} + b_{13}\pi_{13}, \\ 0 = b_{40}\pi_{31} + 3b_{31}\pi_{22} + 3b_{22}\pi_{13} + b_{13}\pi_{04}, \\ 0 = b_{31}\pi_{40} + 3b_{22}\pi_{31} + 3b_{13}\pi_{22} + b_{04}\pi_{13}, \\ 0 = b_{31}\pi_{31} + 3b_{22}\pi_{22} + 3b_{13}\pi_{13} + b_{04}\pi_{04}, \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} 0 = a_{40}p_{40} + 3a_{31}p_{31} + 3a_{22}p_{22} + a_{13}p_{13}, \\ 0 = a_{40}p_{31} + 3a_{31}p_{22} + 3a_{22}p_{13} + a_{13}p_{04}, \\ 0 = a_{31}p_{40} + 3a_{22}p_{31} + 3a_{13}p_{22} + a_{04}p_{13}, \\ 0 = a_{31}p_{31} + 3a_{22}p_{22} + 3a_{13}p_{13} + a_{04}p_{04}, \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} R = b_{40}p_{40} + 3b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + b_{13}p_{13}, \\ 0 = b_{40}p_{40} + 3b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + b_{13}p_{13}, \\ 0 = b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + 3b_{13}p_{13} + b_{04}p_{04}, \\ R = b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + 3b_{13}p_{13} + b_{04}p_{04}. \end{cases}$$

Diese vier Systeme von Gleichungen lassen sich, als Sätze, wie folgt aussprechen:

(8.) *Die Ausdrücke x_2u_1 und x_1x_2 verschwinden, wenn man in ihnen $\pi_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke x_1u_1 und x_2u_2 den Werth $4R$ annehmen.*

(9.) *Die Ausdrücke x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 verschwinden sämmtlich, wenn man $\pi_{\varkappa\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

(10.) *Die Ausdrücke x_1u_1, x_1u_2, x_2u_1, x_2u_2 verschwinden sämmtlich, wenn man $p_{\varkappa\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

(11.) *Die Ausdrücke x_2v_1 und x_1v_2 verschwinden, wenn man in ihnen $p_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke x_1v_1 und x_2v_2 den Werth $4R$ annehmen.*

Man setze nun statt der Gröfsen a die entsprechenden Gröfsen b. Durch diese Änderung mögen die Gröfsen p, welche allein von den Gröfsen a abhangen, in die entsprechenden Gröfsen q übergehen, so dafs die Gleichungen (10.) in

$$(12.)\quad \begin{cases} 0 = b_{40}q_{40}+3b_{31}q_{31}+3b_{22}q_{22}+b_{13}q_{13}, \\ 0 = b_{40}q_{31}+3b_{31}q_{22}+3b_{22}q_{13}+b_{13}q_{04}, \\ 0 = b_{31}q_{40}+3b_{22}q_{31}+3b_{13}q_{22}+b_{04}q_{13}, \\ 0 = b_{31}q_{31}+3b_{22}q_{22}+3b_{13}q_{13}+b_{04}q_{04} \end{cases}$$

sich verwandeln. Aus der Vergleichung dieses Systemes von Gleichungen mit dem Systeme (9.) ergiebt sich, dafs die Gröfsen q den entsprechenden Gröfsen π proportional sind. Es folgt daher:

$$q_{\varkappa,4-\varkappa} = \mu\pi_{\varkappa,4-\varkappa}.$$

Und wenn man diese Werthe der Gröfsen π in die Gleichungen (8.) setzt, so gehen dieselben in

$$(13.)\quad \begin{cases} \mu R = a_{40}q_{40}+3a_{31}q_{31}+3a_{22}q_{22}+a_{13}q_{13}, \\ 0 = a_{40}q_{31}+3a_{31}q_{22}+3a_{22}q_{13}+a_{13}q_{04}, \\ 0 = a_{31}q_{40}+3a_{22}q_{31}+3a_{13}q_{22}+a_{04}q_{13}, \\ \mu R = a_{31}q_{31}+3a_{22}q_{22}+3a_{13}q_{13}+a_{04}q_{04} \end{cases}$$

über. Diese beiden Systeme enthalten folgende Sätze:

(12.) *Die Ausdrücke x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 verschwinden sämmtlich, wenn man $q_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

(13.) *Die Ausdrücke x_2u_1, x_1u_2 verschwinden, wenn man in ihnen $q_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke x_1u_1, x_2u_2 die Werthe $4\mu R$ annehmen.*

Da die Gröfsen p in Rücksicht auf die Gröfsen a vom vierten Grade sind, so werden die Gröfsen q vom achten und die Gröfse μ wird vom dritten Grade sein.

Man kann die Gröfsen p, π, R, so wie die Gröfsen q und μ, dem Vorhergehenden zufolge, als Functionen von a bestimmt betrachten. Die erstern stellen sich nämlich, wenn man die gegebenen Gleichungen (6.) auflöset, als die Coëfficienten in den aufgelöseten Gleichungen (7.) dar; die Gröfsen q entstehen aus den entsprechenden Gröfsen p, wenn man in den letzteren die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b verändert, und die Gröfse μ stellt sich als der gemeinsame Quotient bei der Division der Gröfsen q durch die entsprechenden Gröfsen π dar. Wenn nun diese Gröfsen auf die angegebene Art als bestimmt betrachtet werden, so kann man umgekehrt die Aufgabe stellen: die Form der Gröfsen a zu bestimmen, welche allein den Gleichungen (13.) genügen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (12.) wird man finden, dafs dieselben von der Form

$$a_{x,4-x} + Nb_{x,4-x}$$

sind, oder, wenn in den Gleichungen (13.) μR eine beliebige Gröfse bedeutet, so werden die Werthe der Gröfsen a von der Form

$$Ma_{x,4-x} + Nb_{x,4-x}$$

sein. Hierauf beruht folgender Satz:

(14.) *Jede homogene Function u vom 4ten Grade, deren Coëfficienten a den Gleichungen (13.) genügen, in welchen μR einen beliebigen Werth hat, die Gröfsen q aber die im Vorhergehenden bestimmten Werthe haben, ist von der Form:*

$$Mu + Nv.$$

Woraus wiederum folgt:

(15.) *Die Determinante w der Function v, das heifst die Determinante der Determinante der Function u ist von der Form:*

$$w = mu + nv.$$

Denn setzt man in den Gleichungen (3.) für die Gröfsen a die entsprechenden Gröfsen b, wodurch die Gröfsen b in die Gröfsen c übergehen mögen und die Functionen u in v und v in w sich verändern, so verschwinden die Theile rechts, der auf diese Weise veränderten Gleichungen, wenn man $q_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^{\varkappa} x_2^{\lambda}$ setzt, nach (12.), und die Gleichungen selbst nehmen die Gestalt der Gleichungen (13.) an; mit dem Unterschiede, dafs die Gröfsen c

die Stelle der Gröfsen a vertreten. Es verschwinden also die Ausdrücke x_2w_1 und x_1w_2, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^{\varkappa}x_2^{\lambda}$ setzt, während die Ausdrücke x_1w_1, x_2w_2 einen und denselben Werth annehmen.

Die Gröfse R war im Vorhergehenden als die Determinante folgender Componenten bestimmt:

$$\begin{array}{cccc} a_{40} & 3a_{31} & 3a_{22} & a_{13}, \\ a_{31} & 3a_{22} & 3a_{13} & a_{04}, \\ b_{40} & 3b_{31} & 3b_{22} & b_{13}, \\ b_{31} & 3b_{22} & 3b_{13} & b_{04}. \end{array}$$

Durch die Änderung der Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b, wodurch die Gröfsen $b_{\varkappa\lambda}$ nach (15.) in die entsprechenden Gröfsen $ma_{\varkappa\lambda}+nb_{\varkappa\lambda}$ übergehen, möge R in S übergehen. Macht man aber die erwähnte Änderung der Componenten der Determinante R und bildet hierauf die Determinante, so zeigt sich leicht, dafs

$$(16.) \qquad S = m^2R$$

ist. Ändert man auch die erste Gleichung (11.) auf die genannte Weise, so geht dieselbe in

$$S = m(a_{40}q_{40}+3a_{31}q_{31}+3a_{22}q_{22}+a_{13}q_{13})$$

über. Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten des Systems (13.), so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (16.):

$$(17.) \qquad \mu = m.$$

Wenn man in den Gleichungen (8.) und (9.), durch welche die Gröfsen π bestimmt sind, die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b übergehen läfst, wodurch die Gröfsen b in die Gröfsen $ma+nb$ und R in m^2R übergehen, so werden die Gleichungen erfüllt, wenn man für die Gröfsen π die entsprechenden Gröfsen m^2p-nq setzt. Daraus folgt:

(18.) *Dafs durch die Änderung der Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b, die Gröfsen b in die entsprechenden Gröfsen $ma+nb$, die Gröfsen π in die entsprechenden Gröfsen m^2p-nq, die Gröfsen p in die entsprechenden Gröfsen $m\pi$, ferner R in m^2R, u in v und v in $w=mu+nv$ übergehen.*

Wenn man eine Function U aus der beliebig gegebenen Function u vierten Grades und ihrer Determinante v in der Art zusammensetzt, dafs

$$(19.) \qquad U = d.u+\delta.v$$

ist, wo d und δ beliebige Constanten bedeuten, so hat die Determinante V

dieser Function die merkwürdige Eigenschaft, dafs sie von *derselben* Form wie U ist.

Denn erwägt man, dafs die Ausdrücke x_2U_1 und x_1U_2 verschwinden und die Ausdrücke x_1U_1 und x_2U_2 den Werth $4mRd$ annehmen, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^{\varkappa}x_2^{\lambda}$ setzt, und verändert man in den Gleichungen (3.) die Buchstaben u in U und v in V: so ist aus diesen geänderten Gleichungen zu ersehen, dafs auch die Ausdrücke x_2V_1 und x_1V_2 verschwinden, während die Ausdrücke x_1V_1 und x_2V_2 gleiche Werthe annehmen, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^{\varkappa}x_2^{\lambda}$ setzt; woraus sich mit Rücksicht auf (14.) Folgendes ergiebt:

(20.) *Die Determinante V der Function $d.U+\delta.V$ ist von der Form*

$$V = D.u+\Delta.v.$$

Um D und Δ zu bestimmen, bemerke ich, dafs u den Werth $2R$ annimmt, und v verschwindet, wenn man $\pi_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^{\varkappa}x_2^{\lambda}$ setzt, und dafs v den Werth $2R$ annimmt und u verschwindet, wenn man $p_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^{\varkappa}x_2^{\lambda}$ setzt. Bezeichnet man nun durch V_π und V_p die Ausdrücke, in welche V übergeht, wenn man $\pi_{\varkappa,\lambda}$ oder $p_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^{\varkappa}x_2^{\lambda}$ setzt, so erhält man aus (20.):

$$(21.) \qquad V_\pi = 2RD; \qquad V_p = 2R\Delta.$$

Durch diese Gleichungen werden zwar die Gröfsen D und Δ als homogene Functionen zweiten Grades in Rücksicht auf d und δ bestimmt, allein die folgende directe Bestimmung dieser Functionen gewährt noch einfachere Resultate. Ich bemerke noch, dafs die Coëfficienten von δ^2 in den Functionen D und Δ respective m und n sind, weil für $d=0$ und $\delta=1$, $V=mu+nv$ wird, und dafs die Coëfficienten von d^2 in den Functionen D und Δ respective 0 und 1 sind, weil für $\delta=0$, $V=v$ wird.

Wenn man die Determinante v der in (4.) gegebenen Function u bildet, so wird man für die Coëfficienten b der Determinante v folgende Werthe erhalten:

$$(22.) \quad \begin{cases} b_{40} = 12^2(a_{40}a_{22}-a_{13}^2), \\ 2.b_{31} = 12^2(a_{40}a_{13}-a_{31}a_{22}), \\ 6.b_{22} = 12^2(a_{40}a_{04}+2a_{31}a_{13}-3a_{22}^2), \\ 2.b_{13} = 12^2(a_{04}a_{31}-a_{13}a_{22}), \\ b_{04} = 12^2(a_{04}a_{22}-a_{13}^2). \end{cases}$$

Bildet man hierauf die Determinante V und setzt die Coëfficienten x_1^4 und x_2^4 auf beiden Seiten der Gleichung (20.) einander gleich, so erhält man die

beiden Gleichungen

$$12^2\{(da_{40}+\delta b_{40})(da_{22}+\delta b_{22})-(da_{31}+\delta b_{31})^2\} = Da_{40}+\Delta b_{40},$$
$$12^2\{(da_{04}+\delta b_{04})(da_{22}+\delta b_{22})-(da_{13}+\delta b_{13})^2\} = Da_{04}+\Delta b_{40},$$

aus welchen sich folgende Werthe von D und Δ und m und n, welches die Coëfficienten von δ^2 in D und Δ sind, ergeben:

$$(23.)\quad \begin{cases} D = -2nd\delta+m\delta^2, \\ \Delta = +d^2+n\delta^2, \\ m = 3.12^5\{a_{22}a_{04}a_{40}+2a_{13}a_{31}a_{22}-a_{22}^3-a_{04}a_{31}^2-a_{40}a_{13}^2\}, \\ n = +12^3\{4a_{13}a_{31}-3a_{22}^2-a_{04}a_{40}\}. \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$(24.)\quad \nabla = d\Delta-\delta\Delta = d^3+3nd\delta^2-m\delta^3,$$

so lassen sich die Gröfsen D und Δ durch die partiellen Differentialquotienten von ∇ wie folgt ausdrücken:

$$D = -\tfrac{1}{3}\frac{\partial\nabla}{\partial\delta}, \qquad \Delta = +\tfrac{1}{3}\frac{\partial\nabla}{\partial d}.$$

Die Determinante von $w = mu+nv$ wird nach dem Vorhergehenden gleich $-n^2m.u+(m^2+n^3)v$. Dieselbe wird aber auch aus $w = mu+nv$ gefunden, wenn man die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b verändert; wodurch u in v und v in $mu+nv$ übergeht. Wenn nun durch diese Änderung m in m' und n in n' übergeht, so geht u in $mn'u+(m'+nn')v$ über. Es ist daher

$$-n^2m = mn' \quad \text{und} \quad m^2+n^3 = m'+nn',$$

woraus

$$m' = m^2+2n^3; \quad n' = -n^2 \text{ folgt.}$$

(25.) *Wenn also die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b übergehen, so geht m in m^2+2n^3 und $(-n)$ in $(-n)^2$ über.*

§. 2.

Die Transformation der gegebenen Function $u = a_{40}x_1^4+4a_{31}x_1^3x_2+6a_{22}x_1^2x_2^2+4a_{13}x_1x_2^3+a_{04}x_2^4$ (4.) durch Substitutionen von der Form

$$(26.)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha y_1+\beta y_2, \\ x_2 = \alpha' y_1+\beta' y_2 \end{cases}$$

in die Form

$$(27.)\quad u = Ay_1^4+6Cy_1^2y_2^2+By_2^4$$

erfordert die Bestimmung von 7 unbekannten Gröfsen α, β, α', β', A, B, C.

Substituirt man die Werthe von x_1 und x_2 und (26.) in die gegebene Function u, welche den Theil links der Gleichung (27.) bildet und setzt auf beiden Seiten dieser Gleichung die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln einander gleich, so erhält man nur 5 Gleichungen; welches beweiset, dafs man zweien von den zu bestimmenden Unbekannten beliebige Werthe geben, z. B. $\alpha' = \beta' = 1$ setzen kann. Von diesen 5 Gleichungen führe ich nur die 3 an, welche die Werthe von A, B, C bestimmen, nemlich:

$$(28.)\quad \begin{cases} A = (u)_\alpha, \quad B = (u)_\beta, \\ 12C = \alpha\alpha(u_{11})_\beta + 2\alpha\alpha'(u_{12})_\beta + \alpha'\alpha'(u_{22})_\beta \\ \qquad = \beta\beta(u_{11})_\alpha + 2\beta\beta'(u_{12})_\alpha + \beta'\beta'(u_{22})_\alpha; \end{cases}$$

wo $(u)_\alpha$, $(u_{11})_\alpha, \ldots, (u)_\beta, (u_{11})_\beta, \ldots$ die Ausdrücke bedeuten, in welche u, $u_{11}, \ldots$ übergehen, wenn man in ihnen statt $x_1 x_2$ entweder $\alpha\alpha'$ oder $\beta\beta'$ setzt. Die beiden andern Gleichungen, welche die Verhältnisse $\alpha : \alpha'$ und $\beta : \beta'$ bestimmen, werde ich durch andere äquivalente Gleichungen ersetzen.

Betrachtet man u als eine Function der Variabeln y_1, y_2, bezeichnet die Determinante $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2$ derselben durch v' und setzt die Determinante $\alpha\beta' - \alpha'\beta = r$, so ist die Determinante:

$$(29.)\quad v = \frac{1}{r^2} v'.$$

Diese Gleichung findet man in diesem Journal (Bd. 28. S. 89) hergeleitet. Die Determinante v' ist nun

$$v' = 12^2 . C\left(Ay_1^4 + \frac{AB - 3C^2}{C} \cdot y_1^2 y_2^2 + By_2^4\right).$$

Wenn man diesen Werth in (29.) setzt, so wird

$$v = \frac{12^2 C}{r^2}\left\{Ay_1^4 + \frac{AB - 3C^2}{C} y_1^2 y_2^2 + By_2^2\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\delta = \frac{r^2 \varrho}{12^2(AB - 9C^2)}$, die Gleichung (27.) mit $d = -\frac{C\varrho}{(AB - 9C^2)}$ und addirt beide Gleichungen, so erhält man

$$(30.)\quad d.u + \delta.v = \varrho y_1^2 y_2^2.$$

Diese Gleichung beweiset, ***dafs sich jede gegebene homogene Function vierten Grades von zwei Variabeln, und ihre Determinante, mit solchen Constanten multipliciren läfst, dafs die Summe ein vollständiges Quadrat wird.***

Um die Constanten d und δ, oder vielmehr ihr Verhältnifs, worauf es hier ankommt, zu bestimmen, bemerke ich, dafs, da $U = d.u + \delta.v$ ein vollständiges Quadrat ist, dieselben Werthe der Variabeln x_1, x_2, welche U verschwinden machen, auch die partiellen Differentialquotienten U_1, U_2 dieser Function werden verschwinden machen. Aus den Gleichungen (2.) ist aber zu ersehen, dafs für die Werthe der Variabeln x_1, x_2, für welche die partiellen Differentialquotienten u_1 und u_2 der Function u verschwinden, auch die Determinante verschwindet. Mithin verschwindet für die Werthe der Variabeln, für welche U verschwindet, auch die Determinante $V = Du + \Delta v$ dieser Function. Nun ist aber, wie aus (26.) erhellet, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ für $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha'$, und $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ für $x_1 = \beta$, $x_2 = \beta'$. Es verschwindet also nach (30.) $U = d.u + \delta.v$ für diese beiden Werthenpaare, und eben so die Determinante $V = Du + \Delta v$ dieser Function. Diese Werthenpaare genügen also den beiden Gleichungen

$$(31.) \quad d.u + \delta.v = 0 \quad \text{und} \quad Du + \Delta v = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen u und v und setzt der Kürze wegen, wie in dem vorigen Paragraphen, $\nabla = d.\Delta - \delta.\Delta$, so erhält man, mit Rücksicht auf (24.), zur Bestimmung des Verhältnisses $d:\delta$ die cubische Gleichung

$$(32.) \quad \nabla = d^3 + 3nd\delta^2 - m\delta^3 = 0.$$

Diese Gleichung beweiset: *dafs sich jede beliebige Function vierten Grades von zwei Variabeln, und ihre Determinante, auf drei verschiedene Arten mit solchen Constanten multipliciren läfst, dafs ihre Summe jedesmal ein vollständiges Quadrat wird.*

Wenn man nun ein Werthenpaar d und δ bestimmt hat, welches der cubischen Gleichung (32.) genügt, und man setzt dieses für d und δ in eine der Gleichungen (31.), z. B. in die erste, so werden die beiden Werthenpaare von x_1, x_2, welche dieser ersten Gleichung genügen, die gesuchten Werthe von $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ sein. Da aber in diese Gleichung nur das Verhältnifs von x_1 zu x_2 eingeht, so wird man von diesen Variabeln die eine, z. B. x_2, und eben so die Unbekannten α' und β', gleich 1 setzen können; worauf sich die beiden andern α und β als die ungleichen Wurzeln der nach x_1 biquadratischen Gleichung darstellen, welche zwei Paare gleicher Wurzeln enthält. Hat man aber durch Auflösung dieser Gleichung die Coëfficienten der Substitutionen (26.) gefunden, so geben die Gleichungen (28.) die Werthe der Coëfficienten A, B, C in der transformirten Function (27.).

Die Verhältnisse $\alpha:\alpha'$ und $\beta:\beta'$ sind nach dem Vorhergehenden als die ungleichen Wurzeln einer der biquadratischen Gleichungen (31.) bezeichnet. Es ist aber wichtig, statt dieser eine quadratische Gleichung zu bilden, deren Wurzeln die ungleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung (31.) sind. Zu diesem Zwecke differentiire ich die durch die Substitutionen (26.) identische Gleichung (30.)

$$d.u+\delta.v = py_1^2y_2^2$$

zweimal partiell nach x_1, was

$$d.u_{11}+\delta.v_{11} = 2\varrho\left\{\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2y_2^2+4\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_2}{dx_1}y_1y_2+\left(\frac{dy_2}{dx_1}\right)^2y_1^2\right\}$$

giebt, oder, wenn man $\alpha\beta'-\alpha'\beta=r$ setzt:

$$d.u_{11}+\delta.v_{11} = \frac{2\varrho}{r^2}\{\beta'^2y_2^2-4\alpha'\beta'y_1y_2+\alpha'^2y_2^2\}.$$

Ich nehme nun an, es sei in dieser identischen Gleichung, sowohl rechts als links, $\alpha\alpha'$ oder $\beta\beta'$ statt x_1x_2 gesetzt. Unter dieser Hypothese verschwindet das Product y_1y_2 und es bleibt die Gleichung richtig, wenn man das Glied $-4\alpha'\beta'y_1y_2$ in $+2\alpha'\beta'y_1y_2$ verändert. Durch diese Änderung geht aber die Gleichung in

$$d.u_{11}+\delta.v_{11} = \frac{2\varrho}{r^2}(\beta'y_2+\alpha'y_1)^2$$

über, oder, wenn man für $\beta'y_2+\alpha'y_1$ seinen Werth x_2 setzt, in:

$$d.u_{11}+\delta.v_{11}-\frac{2\varrho}{r^2}x_2^2 = 0.$$

Dieses ist die gesuchte quadratische Gleichung, deren Wurzeln die ungleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung (31.) sind. Ich führe folgende drei Formen dieser quadratischen Gleichung an:

$$(33.)\quad \begin{cases} d.u_{11}+\delta.v_{11}-\frac{2\varrho}{r^2}x_2^2 = 0, \\ d.u_{12}+\delta.v_{12}+\frac{2\varrho}{r^2}x_1x_2 = 0, \\ d.u_{22}+\delta.v_{22}-\frac{2\varrho}{r^2}x_1^2 = 0. \end{cases}$$

Die zweite und dritte Gleichung erhält man durch einen ähnlichen Calcul, wenn man, statt die identische Gleichung (30.) zweimal nach x_1 zu differentiiren, sie nach x_1 und x_2, oder zweimal nach x_2 differentiirt. Die dritte Gleichung erhält man aber auch unmittelbar aus der ersten, wenn man x_1 mit x_2 ver-

tauscht, und die zweite aus einer angemessenen Combination der ersten und dritten Gleichung mit der Gleichung (31.).

Um diese drei Gleichungen in *eine* von der allgemeinsten Form zu vereinigen, bezeichne ich mit p_1 und p_2 zwei beliebige Gröfsen, multiplicire die drei Gleichungen der Reihe nach mit p_1^2, $2p_1p_2$, p_2^2 und addire die Producte. Dies giebt die Gleichung

$$(34.) \quad d\{\mu_{11}p_1^2+2u_{12}p_1p_2+u_{22}p_2^2\}$$
$$+\delta(v_{11}p_1^2+2v_{12}p_1p_2+v_{22}p_2^2)-\frac{2\varrho}{r^2}(x_1p_2-x_2p_1)^2=0,$$

welche sich auch, wenn man mit (u_{11}), (u_{12}), ... (u_{22}), (v_{11}), ... die Ausdrücke bezeichnet, in welche u_{11}, u_{12}, ... übergehen, wenn man darin statt x_1, x_2 die beliebigen Gröfsen p_1, p_2 setzt, so darstellen läfst:

$$(35.) \quad d\{(u_{11})x_1^2+2(u_{12})x_1x_2+(u_{22})x_2^2\}$$
$$+\delta\{(v_{11})x_1^2+2(v_{12})x_1x_2+(v_{22})x_2^2\}-\frac{2\varrho}{r^2}(x_1p_2-x_2p_1)^2=0.$$

Es bleibt nun noch übrig, den Werth von $\frac{2\varrho}{r^2}$, welche Gröfse in den vorhergehenden Gleichungen vorkommt, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke erinnere man sich, dafs die angegebenen quadratischen Gleichungen dieselben Wurzeln haben, welche die biquadratischen Gleichungen (31.) doppelt enthalten. Aus diesem Umstande läfst sich schliefsen, dafs die quadratischen Gleichungen, z. B. die erste Gleichung (33.), quadrirt, in die biquadratische Gleichung, abgesehen von einem constanten Factor σ, übergehen mufs, oder, dafs folgende identische Gleichung Statt findet:

$$\left\{du_{11}+\delta v_{11}-\frac{2\varrho}{r^2}x_2^2\right\}^2=\sigma(du+\delta v).$$

Setzt man die Coëfficienten von x_1^4 zu beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich, so erhält man

$$\sigma=12^2(da_{40}+\delta b_{40}).$$

Durch Gleichsetzung der Coëfficienten von $x_1x_2^3$ zu beiden Seiten der Gleichung erhält man eine Gleichung, aus welcher sich, wenn man den gefundenen Werth von σ substituirt, folgender Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2}$ ergiebt:

$$-\frac{2\varrho}{r^2}=\frac{\frac{12^2}{2}\{(da_{40}+\delta b_{40})(da_{13}+\delta b_{13})-(da_{31}+\delta b_{31})(da_{22}-\delta b_{22})}{6(da_{31}+\delta b_{31})},$$

Um den Zähler dieses Ausdrucks zu transformiren, nehme ich die zweite

Gleichung (22.), nemlich

$$b_{31} = \frac{12^2}{2}(a_{40}a_{13} - a_{31}a_{22})$$

zu Hülfe. Diese Gleichung geht in

$$Da_{31} + \Delta b_{31} = \frac{12^2}{2}\{(da_{40} + \delta b_{40})(da_{13} + \delta b_{13}) - (da_{31} + \delta b_{31})(da_{22} + \delta b_{22})\}$$

über, wenn man die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen $da + \delta b$ übergehen läfst; durch welche Anordnung u in $du + \delta v$ und v in $Du + \Delta v$ übergeht. Es ist daher:

$$-\frac{2r}{\varrho^2} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{Da_{31} + \Delta b_{31}}{da_{31} + \delta b_{31}}.$$

Da aber nach (32.) $\frac{D}{\Delta} = \frac{d}{\delta}$ ist, so nimmt der gesuchte Werth von $-\frac{2r}{\varrho^2}$ die einfache Gestalt

$$(36.) \qquad -\frac{2\varrho}{r^2} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\Delta}{\delta} \text{ an.}$$

Ich werde nun noch ein Paar Formeln ableiten, welche in der vorliegenden Untersuchung eine Anwendung finden.

In der identischen Gleichung (30.) hatten die Coëfficienten d und δ die Bedeutung:

$$d = -\frac{C\varrho}{AB - 9C^2}, \qquad \delta = \frac{r^2\varrho}{12^2(AB - 9C^2)}.$$

Wenn man die zweite Gleichung in die erste dividirt, so erhält man

$$\frac{d}{\delta} = -12^2\frac{C}{r^2},$$

und wenn man den Werth von $r = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ substituirt,

$$(37.) \qquad C = -\frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}{12^2} \cdot \frac{d}{\delta}.$$

Dieser Werth von C hat eine einfachere Gestalt, als der in (28.). Ferner erhält man aus der zweiten der eben angegebenen Gleichungen, wenn man den Werth von ϱ aus (36.) substituirt:

$$(38.) \qquad AB - 9C^2 = -\frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^4}{12^3} \cdot \frac{\Delta}{\delta^2}.$$

Diese Untersuchung beweiset folgende Auflösungsmethode des behandelten Problems:

„Man bestimme durch Auflösung der cubischen Gleichung (32.) ein „Werthenpaar d und δ, welches dieser Gleichung genügt, setze dasselbe

„und den Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\Delta}{\delta}$ aus (26.) in eine der quadratischen „Gleichungen (33.) und suche zwei Werthenpaare $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, den Wur- „zeln der quadratischen Gleichung entsprechend, welche der Gleichung „genügen. Diese sind dann die Coëfficienten der Substitutionen (26.), „durch welche die gegebene Function u in

$$(39.)\qquad u = (u)_\alpha y_1^4 - \frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}{2.12}\cdot\frac{d}{\delta}y_1^2y_2^2+(u)_\beta y_2^2$$

„transformirt wird."

Jeder Wurzel der cubischen Gleichung (32.) entspricht eine andere Transformation der gegebenen Function.

§. 3.

Mit der Transformation der homogenen Functionen vierten Grades, von den beiden Variabeln x_1, x_2, steht die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichungen in der engsten Verbindung. Setzt man nämlich $\frac{x_1}{x_2}=X$ und $\frac{y_1}{y_2}=Y$, so geht die allgemeine biquadratische Gleichung

$$(40.)\qquad \frac{u}{x_2^4} = a_{40}X^4+4a_{31}X^3+6a_{22}X^2+4a_{13}X+a_{04} = 0$$

durch die Substitution

$$(41.)\qquad X=\frac{\alpha Y+\beta}{\alpha' Y+\beta'}$$

in die nach Y^2 quadratische Gleichung

$$(42.)\qquad AY^4+6CY^2+B=0$$

über. Es seien nun $Y^2=\lambda^2$ und $Y^2=\mu^2$ die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, also $Y=\pm\lambda$ und $Y=\pm\mu$ die vier Wurzeln der Gleichung (42.). Setzt man diese Werthe von Y in (41.) und bezeichnet die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) durch X_1, X_2, X_3, X_4, so erhält man für die Werthe der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.):

$$(43.)\qquad \begin{cases} X_1=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\alpha'\lambda+\beta'}, & X_2=\frac{\alpha\lambda-\beta}{\alpha'\lambda-\beta'}, \\ X_3=\frac{\alpha\mu+\beta}{\alpha'\mu+\beta'}, & X_4=\frac{\alpha\mu-\beta}{\alpha'\mu-\beta'}. \end{cases}$$

Wenn man der Kürze wegen $\frac{\alpha}{\alpha'}=a$ und $\frac{\beta}{\beta'}=b$ setzt, so erhält man durch Elimination von λ und μ aus den Gleichungen (43.) folgende Relationen

zwischen den Wurzeln X der biquadratischen Gleichung (40.) und der Wurzeln $\frac{x_1}{x_2} = a$, $\frac{x_1}{x_2} = b$ der quadratischen Gleichung (33.):

$$(44.)\quad \begin{cases} X_1X_2 - \frac{1}{2}(X_1+X_2)(a+b)+ab = 0, \\ X_3X_4 - \frac{1}{2}(X_3+X_4)(a+b)+ab = 0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (43.) der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) haben eine ungewöhnliche Form. Es ist bekannt, dafs sich jeder Wurzel einer algebraisch auflösbaren Gleichung eine Form von der Art geben läfst, dafs die algebraischen Ausdrücke, aus welcher sie zusammengesetzt ist, sich als rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung darstellen lassen. Es lassen sich aber auf keine Weise die Gröfsen $\alpha\beta$, wenn man $\alpha'\beta'$ etwa $= 1$ setzt, und eben so wenig die Gröfsen λ, μ, rational durch die Wurzeln X ausdrücken. Diese Form der Wurzeln wird man erhalten, wenn man gleichmäfsig alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) in die Rechnung einführt.

Ich werde durch $\frac{d_1}{\delta_1}$, $\frac{d_2}{\delta_2}$, $\frac{d_3}{\delta_3}$ die drei Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) bezeichnen, und die diesen entsprechenden Wurzeln $\frac{x_1}{x_2}$ der quadratischen Gleichung (33.) durch a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3. Die Gleichungen (44.) geben dann:

$$(45.)\quad \begin{cases} X_1X_2 - \frac{1}{2}(X_1+X_2)(a_1+b_1)+a_1b_1 = 0, \\ X_3X_4 - \frac{1}{2}(X_3+X_4)(a_1+b_1)+a_1b_1 = 0. \end{cases}$$

Durch Vertauschung der Wurzeln X_2 und X_3 erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$(46.)\quad \begin{cases} X_1X_3 - \frac{1}{2}(X_1+X_2)(a_2+b_2)+a_2b_2 = 0, \\ X_2X_4 - \frac{1}{2}(X_2+X_4)(a_2+b_2)+a_2b_2 = 0, \end{cases}$$

und durch Vertauschung der Wurzeln X_2 und X_4 in (45.):

$$(47.)\quad \begin{cases} X_1X_4 - \frac{1}{2}(X_1+X_4)(a_3+b_3)+a_3b_3 = 0, \\ X_2X_3 - \frac{1}{2}(X_2+X_3)(a_3+b_3)+a_3b_3 = 0. \end{cases}$$

Aus je zwei dieser drei Systeme von Gleichungen geht eine Gleichung folgenden Systems hervor:

$$(48.)\quad \begin{cases} a_2b_2 - \frac{1}{2}(a_2+b_2)(a_3+b_3)+a_3b_3 = 0, \\ a_3b_3 - \frac{1}{2}(a_3+b_3)(a_1+b_1)+a_1b_1 = 0, \\ a_1b_1 - \frac{1}{2}(a_1+b_1)(a_2+b_2)+a_2b_2 = 0. \end{cases}$$

Wenn man die drei Gleichungen, welche sich aus der quadratischen Gleichung (33.) finden, indem man nach einander statt $\frac{d}{\delta}$ die Wurzeln der

cubischen Gleichung (32.) setzt, mit einander multiplicirt, so erhält man eine Gleichung 6ten Grades, deren Coëfficienten symmetrische Functionen der Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) enthalten. Drückt man diese durch die Coëfficienten der cubischen Gleichung aus, so werden die Coëfficienten in der Gleichung 6ten Grades zu rationalen Functionen der Gröfsen $a_{\varkappa\lambda}$. Diese Gleichung, zwischen deren Wurzeln a, b die Relationen (48.) Statt finden, läfst sich nun umgekehrt mit Hülfe der cubischen Gleichungen (32.) in drei quadratische Gleichungen zerlegen, und ist also algebraisch auflösbar in Rücksicht auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda}$. In dem folgenden Paragraphen werde ich die eben gemachte Bemerkung dahin erweitern, dafs ich beweisen werde, wie jede Gleichung 6ten Grades aufgelöset werden kann, wenn zwischen den Wurzeln derselben die Relationen (48.) Statt finden.

Addirt man die beiden Gleichungen (45.) und setzt für die Summe $X_1+X_2+X_3+X_4$ ihren Werth $-\frac{4a_{31}}{a_{40}}$, so erhält man

$$X_1X_2+X_3X_4+2\cdot\frac{a_{31}(a_1+b_1)+a_{40}a_1b_1}{a_{40}}.$$

Es haben aber a_1+b_1 und a_1b_1 folgende, aus der ersten von den Gleichungen (33.) entnommene Werthe:

$$a_1+b_1 = -2\cdot\frac{\frac{d_1}{\delta_1}a_{31}+b_{31}}{\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}}$$

$$a_1b_1 = \frac{\frac{d_1}{\delta_1}a_{22}+b_{22}-\frac{1}{12}\cdot\frac{2\varrho}{r^2}}{\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}}.$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so kann man derselben, mit Berücksichtigung der Gleichungen (36., 23. und 22.), folgende Gestalt geben:

$$4(X_1X_2+X_3X_4) = -\frac{\frac{d_1^2}{\delta_1^2}a_{40}+\frac{d_1}{\delta_1}(b_{40}-6.12.a_{22}a_{40})-6.12.b_{40}a_{22}}{9a_{40}\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)},$$

oder die noch einfachere:

$$(49.)\quad 4(X_1X_2+X_3X_4) = -\frac{1}{9.a_{40}}\left\{\frac{d_1}{\delta_1}-6.12.a_{22}\right\}.$$

Diese Gleichung beweiset, dafs sich die Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) rational durch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) ausdrücken lassen.

Addirt man zu der Gleichung (49.) die beiden Gleichungen

$$\Sigma X_x^2 = \frac{4a_{22}}{a_{40}} - \tfrac{1}{9}\cdot\frac{b_{40}}{a_{40}^2},$$

$$-2\Sigma X_x X_\lambda = -12\cdot\frac{a_{22}}{a_{40}},$$

so erhält man:

$$(X_1+X_2-X_3-X_4)^2 = -\frac{1}{9.a_{40}^2}\left\{\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right\};$$

woraus durch Wurzel-Ausziehung

$$X_1+X_2-X_3-X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)\right)}$$

hervorgeht. Man hat nun folgende vier Gleichungen:

$$(50.)\quad \begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4 = -\dfrac{4.a_{31}}{a_{40}}, \\ X_1+X_2-X_3-X_4 = \dfrac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\dfrac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)\right)} \\ X_1-X_2+X_3-X_4 = \dfrac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\dfrac{d_2}{\delta_2}a_{40}+b_{40}\right)\right)} \\ X_1-X_2-X_3+X_4 = \dfrac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\dfrac{d_3}{\delta_3}a_{40}+b_{40}\right)\right)}, \end{cases}$$

von denen die beiden letzten durch Vertauschung der Wurzeln aus den ihnen vorhergehenden gefunden werden.

Von den Vorzeichen der Quadratwurzeln in den Gleichungen (50.) bestimmen immer zwei das dritte. Denn multiplicirt man die drei letzten Gleichungen (50.) mit einander, so wird der Theil links der resultirenden Gleichung eine symmetrische Function der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) sein. Drückt man diese durch die Coëfficienten der biquadratischen Gleichung aus, so kann man der genannten Gleichung die einfache Gestalt

$$(51.)\quad 12(a_{31}b_{40}-a_{40}b_{31}) =$$
$$\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)\right)}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_2}{\delta_2}a_{40}+b_{40}\right)\right)}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_3}{\delta_3}a_{40}+b_{40}\right)\right)}$$

geben. Hat man nun Sorge getragen, den drei Quadratwurzeln solche Vorzeichen zu geben, dafs der Gleichung (51.) genügt wird, so erhält man die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) durch Addition und Subtraction der Gleichungen (50.).

Ich will noch darauf aufmerksam machen, dafs die cubische Gleichung (32.), auf welche in dem Vorhergehenden die Auflösung der biquadratischen Gleichung (40.) zurückgeführt worden ist, gerade die Form hat, dafs sich die Cardanische Regel zum Ausdruck ihrer Wurzeln ohne Weiteres anwenden läfst. Setzt man

$$a_{41} = 1, \quad a_{31} = 0, \quad 6a_{22} = p, \quad 4a_{13} = q, \quad a_{04} = r,$$

wodurch die biquadratische Gleichung (40.) in

$$X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

übergeht, in welcher Form man die biquadratischen Gleichungen zu behandeln pflegt, so erhält man aus der cubischen Gleichung (32.) die sogenannte reducirte Gleichung

$$x^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$$

durch die Substitution

$$-\left(\frac{d}{\delta} a_{40} + b_{40}\right) = 36z.$$

§. 4.

Man kann sagen, dafs eine Gleichung $n$ten Grades n durch die Gleichung bestimmte Puncte einer geraden Linie darstelle, wenn man die n Wurzeln der Gleichung als die Abscissen auf der geraden Linie von einem beliebig gewählten Anfangspuncte der geraden Linie betrachtet und unter den n Puncten die Endpuncte dieser Abscissen versteht. Dieses vorausgesetzt, wird die biquadratische Gleichung (40.) vier Puncte in der geraden Linie darstellen, welche ich, wie die Wurzeln der Gleichungen, mit den Buchstaben X_1, X_2, X_3, X_4 bezeichnen werde. Eben so stellt die Gleichung (33.), wenn man in derselben den Gröfsen d und δ die Werthe d_1 und δ_1 giebt, zwei Puncte a_1 und b_1 auf derselben geraden Linie vor. Die erste Gleichung (45.) ist, wie bekannt, die Bedingung, welche die Punctenpaare X_1, X_2 und a_1, b_1 zu erfüllen haben, wenn sie *harmonisch* sein sollen. Demnach werden die Gleichungen (45.) dasjenige Punctenpaar a_1, b_1 bestimmen, welches sowohl mit dem Punctenpaare X_1, X_2 harmonisch ist, als mit dem Punctenpaare X_3, X_4. Auf gleiche Weise bestimmen die Gleichungen (46.) dasjenige Punctenpaar a_2, b_2, welches harmonisch ist zu den Punctenpaaren X_1, X_3 und X_2, X_4. Endlich bestimmen die Gleichungen (48.) das zu den Punctenpaaren X_1, X_4 und X_2, X_3 harmonische Punctenpaar a_3, b_3. Die so bestimmten Punctenpaare sind unter einander harmonisch; wie es die Gleichungen (48.) beweisen.

Man hat also folgenden Lehrsatz:

Wenn vier Puncte auf einer geraden Linie gegeben sind, so giebt es drei Punctenpaare, deren jedes harmonisch ist, zu einem Paare, wie zu dem andern Paare der vier gegebenen Puncte. Diese drei Punctenpaare sind unter einander selbst harmonisch.

Die Abscissen irgend eines von diesen drei Punctenpaaren a, b sind die Coëfficienten α, β in den Substitutionen (41.), wenn man $\alpha' = \beta' = 1$ setzt.

Ich werde nun noch kurz angeben, wie sich die Puncte a und b construiren lassen. Zu diesem Ende lege ich durch die von der biquadratischen Gleichung (40.) gegebenen vier Puncte der Abscissenaxe vier gerade Linien, welche ein Viereck bilden werden. Durch die Ecken dieses Vierecks lege ich die beiden Kegelschnitte, welche zugleich die Abscissenaxe berühren. Die Berührungspuncte werden dann das gesuchte Punctenpaar a, b sein. Erwägt man aber, dafs die vier geraden Linien, welche durch die von der biquadratischen Gleichung gegebenen Puncte gelegt werden, drei verschiedene Vierecke bilden, so wird man auf die angedeutete Weise auch drei Punctenpaare a, b erhalten. Diese drei Punctenpaare werden durch eine Gleichung 6ten Grades bestimmt, welche, wie wir oben bemerkt haben, algebraisch lösbar ist.

Ich werde nun auch unabhängig von der vorhergehenden Untersuchung beweisen: *dafs jede gegebene Gleichung 6ten Grades algebraisch auflösbar ist, wenn zwischen den Wurzeln $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ die Gleichungen* (48.) *Statt finden.*

In der That: setzt man

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= -a', & a_2 + b_2 &= -a'', & a_3 + b_3 &= -a''', \\ a_1 b_1 &= +b', & a_2 b_2 &= +b'', & a_3 b_3 &= +b''', \end{aligned}$$

so stellen sich die Gleichungen (48.) wie folgt dar:

$$(a.) \quad \begin{cases} b'' - \frac{1}{2} a'' a''' + b''' = 0, \\ b''' - \frac{1}{2} a''' a' + b' = 0, \\ b' - \frac{1}{2} a' a'' + b'' = 0, \end{cases}$$

mit deren Hülfe nun die gegebene Gleichung 6ten Grades in folgende drei Gleichungen zerfallen wird:

$$(b.) \quad \begin{cases} x^2 + a'x + b' = 0, \\ x^2 + a''x + b'' = 0, \\ x^2 + a'''x + b''' = 0, \end{cases}$$

deren Product die gegebene Gleichung

$$(c.) \qquad x^6 + c_5 x^5 + c_4 x^4 + c_3 x^3 + \cdots c_0 = 0$$

selbst ist. Denn setzt man die Coëfficienten der Variabeln in dem aus den Gleichungen (*b.*) gebildeten Product den Coëfficienten der Variabeln in (*c.*) einander gleich, so erhält man:

$$\begin{aligned} c_5 &= a' + a'' + a''', \\ c_4 &= a''a''' + a'''a' + a'a'' + b' + b'' + b''', \\ c_3 &= a'a''a''' + a'(b'' + b''') + a''(b''' + b') + a'''(b' + b''), \end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (*a.*):

$$\begin{aligned} c_5 &= a' + a'' + a''', \\ c_4 &= \tfrac{5}{4}(a''a''' + a'''a' + a'a''), \\ c_3 &= \tfrac{5}{2}(a'a''a'''). \end{aligned}$$

Die Coëfficienten a in den Gleichungen (*b.*) sind demnach die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$y^3 - c_5 y^2 + \tfrac{4}{5} c_4 y - \tfrac{2}{5} c_3 = 0.$$

Wenn diese Wurzeln gefunden sind, so ergeben sich die Coëfficienten b in den Gleichungen (*b.*) aus den Gleichungen (*a.*).

Königsberg im Januar 1849.