# 9.

# Einige Aufgaben aus der Lehre von den wiederkehrenden Reihen.

(Von Herrn *Weiss*, Lehrer der Mathematik zu Fürth bei Nürnberg.)

---

## I.

1. Wenn in einer unendlichen Reihe $t_0 + t_1 x + t_2 x^2 \dots t_k x^k \dots$ die Coefficienten, von $t_r$ an, durch die Gleichung

$$t_k = p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2} + p_3 t_{k-3} \dots p_r t_{k-r}$$

bestimmt werden, so heisst bekanntlich die Reihe *rücklaufend.* Die $p$ sind feststehende Grössen und ihr Aggregat $p_1 + p_2 + p_3 \dots p_r$ heisst *Beziehungsscale*; sie selbst heissen Glieder der Scale. Hat die Scale einer rücklaufenden Reihe, wie die obige, $r$ Glieder, so heisst sie $r$ter Ordnung und hat innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz zur Summe den Bruch: $\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_{r-1} x^{r-1}}{1 + b_1 x + b_2 x^2 \dots b_r x^r}$, wo

$b_1 = -p_1$; $b_2 = -p_2$; $b_3 = -p_3 \dots b_r = -p_r$ und

$a_0 = t_0$; $a_1 = t_1 - p_1 t_0$; $a_2 = t_2 - p_1 t_1 - p_2 t_0$; $a_3 = t_3 - p_1 t_2 - p_2 t_1 - p_0 t_0$ u. s. w.

$$a_{r-1} = t_{r-1} - p_1 t_{r-2} - p_2 t_{r-3} \dots - p_{r-1} t_0 \text{ ist.}$$

2. Man sieht, dass die Zahl der Glieder der Scale gleich ist der Ordnungszahl der Reihe, und gleich der Anzahl der Anfangsglieder, welche nicht durch die Beziehungsscale bestimmt werden können. Ferner ist durch die Gleichungen in (1.) der Summenbruch leicht zu finden, wenn die Scale und die Anfangs-Coefficienten ($r$ bei der Reihe $r$ter Ordnung) bekannt sind.

3. Es sei nun die Scale $= p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_r$ nebst den $r$ Coefficienten $t_q, t_{q-1}, t_{q-2}, \dots t_{q-(r-1)}$ gegeben, und durch diese sei die Reihe, d. h. ihr Summenbruch, zu bestimmen. Die Aufgabe beschränkt sich darauf, die $r$ Anfangs-Coefficienten zu finden.

4. Für eine Reihe 1ter Ordnung ist $t_k = p_1 t_{k-1} = p_1^2 t_{k-2} = p_1^3 t_{k-3} = \dots p_1^m t_{k-m}$, und hier $k - m = q$ gesetzt giebt: $t_k = p_1^{k-q} t_q = \mathfrak{C}_{k-q} t_q$, wenn $\mathfrak{C}_{k-q}$ die Summe aller Combinationen mit Wiederholung zur Summe $k - q$ bedeutet und $p_1$ das Element ist.

5. Für Reihen der zweiten Ordnung ist.

$$t_k \;\; = p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2},$$
$$t_{k-1} = p_1 t_{k-2} + p_2 t_{k-3},$$
$$t_{k-2} = p_1 t_{k-3} + p_2 t_{k-4},$$
$$t_{k-3} = p_1 t_{k-4} + p_2 t_{k-5}.$$

Und wenn man hier je die nachfolgenden Gleichungen in die vorhergehenden substituirt, so erhält man:

$$t_k = (p_1^2 + p_2) t_{k-2} + p_2 p_1 t_{k-3},$$
$$t_k = (p_1^3 + 2 p_1 p_2 + p_3) t_{k-3} + p_2 (p_1^2 + p_2) t_{k-4},$$
$$t_k = (p_1^2 + 3 p_2 p_2 + p_2^2) t_{k-4} + p_2 (p_1^3 + 2 p_1^2 p_2) t_{k-5};$$

das heisst, es ist

$$t_k = \mathfrak{C}_2 t_{k-2} + p_2 \mathfrak{C}_1 t_{k-3},$$
$$t_k = \mathfrak{C}_3 t_{k-3} + p_2 \mathfrak{C}_2 t_{k-4},$$
$$t_k = \mathfrak{C}_4 t_{k-4} + p_2 \mathfrak{C}_3 t_{k-5},$$

wo $\mathfrak{C}_m$ die Summe aller Combinationen mit Wiederholung zur Summe $m$ bedeutet, wenn $p_1$ und $p_2$ die Elemente sind. Jede Combination ist mit der ihr zugehörigen Permutationszahl zu multipliciren.

Vermöge des Gesetzes, welches sich in den Formeln für $t_k$ zeigt, ist

$$\text{I.} \qquad t_k = \mathfrak{C}_m t_{k-m} + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} t_{k-(m+1)},$$

wo $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet, $k$ jedoch $\overline{\gtrless}\; m + 1$ sein muss. Nimmt man diese Formel als erwiesen an, so ist, wegen $t_{k-m} = p_1 t_{k-m-1} + p_2 t_{k-m-2}$, auch $t_k = (\mathfrak{C}_m \times p_1 + p_2 \mathfrak{C}_{m-1}) t_{k-(m+1)} + p_2 \mathfrak{C}_m t_{k-(m+2)}$. Nun ist aber $p_1 \mathfrak{C}_m + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} = \mathfrak{C}_{m+1}$ *), also folgt aus $t_k = \mathfrak{C}_m t_{k-m} + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} t_{k-(m+1)}$ auch

$$t_k = \mathfrak{C}_{m+1} t_{k-(m+1)} + p_2 \mathfrak{C}_m t_{k-(m+2)},$$

d. h. aus den bereits oben erwiesenen Formeln für $t_k$ folgt die Richtigkeit und Gültigkeit des durch die Formel (I.) ausgesprochenen Gesetzes.

Setzt man hier wieder $k - m = q$, also auch $m = k - q$, so erhält man aus (I.)

$$t_k = \mathfrak{C}_{k-q} t_q + \mathfrak{C}_{k-q-1} t_{q-1}.$$

6. Für eine Reihe dritter Ordnung ist

$$t_k \;\; = p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2} + p_3 t_{k-3},$$
$$t_{k-1} = p_1 t_{k-2} + p_2 t_{k-3} + p_3 t_{k-4},$$
$$t_{k-2} = p_1 t_{k-3} + p_2 t_{k-4} + p_3 t_{k-5},$$
$$t_{k-3} = p_1 t_{k-4} + p_2 t_{k-5} + p_3 t_{k-6};$$

---

*) In der Combinationslehre wird bewiesen, dass $\overset{\prime}{V}{}^{n}_{m} = a_1 \overset{\prime}{V}{}^{n}_{m-1} + a_2 \overset{\prime}{V}{}^{n}_{m-2} + a_3 \overset{\prime}{V}{}^{n}_{m-3} \dots a_{m-n+1} \overset{\prime}{V}{}^{n-1}_{n-1}$ ist, wo $\overset{\prime}{V}{}^{n}_{m}$ die $n$te Combinationsclasse mit Wiederholung zur Summe $m$ von den Elementen $a_1, a_2, a_3 \dots$ bedeutet. Aus dieser Formel ist die Richtigkeit der obigen leicht zu ersehen.

Hieraus folgt wieder

$$t_k = (p_1^2+p_2)t_{k-2} + (p_2p_1+p_3)t_{k-3} + p_3p_1t_{k-4},$$
$$t_k = (p_1^3+2p_1p_2+p_3)t_{k-3} + (p_2(p_1^2+p_2)+p_3p_1)t_{k-4} + p_3(p_1^2+p_2)t_{k-5},$$
$$t_k = (p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_1^2)t_{k-4} + (p_2(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_3(p_1^2+p_2))t_{k-5} + p_3(p_1^3+2p_1p_2+p_3)t_{k-6},$$

oder

$$t_k = \mathfrak{C}_2 t_{k-2} + (p_2.\mathfrak{C}_1 + p_3\mathfrak{C}_2)t_{k-3} + p_3\mathfrak{C}_1 t_{k-4},$$
$$t_k = \mathfrak{C}_3 t_{k-3} + (p_2\mathfrak{C}_2 + p_3\mathfrak{C}_1)t_{k-4} + p_3\mathfrak{C}_2 t_{k-5},$$
$$t_k = \mathfrak{C}_4 t_{k-4} + (p_2\mathfrak{C}_3 + p_3\mathfrak{C}_2)t_{k-5} + p_3\mathfrak{C}_3 t_{k-6}.$$

Es hat hier $\mathfrak{C}_m$ dieselbe Bedeutung wie in (5.); nur sind jetzt $p_1$, $p_2$, $p_3$ die Elemente der Combinationen. Es lässt sich auch hier wieder, wie in (5.), die allgemeine Gültigkeit der Formel

$$t_k = \mathfrak{C}_m t_{k-m} + (p_2\mathfrak{C}_{(m-1)} + p_3\mathfrak{C}_{(m-2)})t_{k-m-1} + p_3\mathfrak{C}_{m-1}t_{k-m-2}$$

auf dieselbe Art beweisen. Also hat man hier, wenn $k-m=q$ gesetzt wird,

$$t_k = \mathfrak{C}_{k-q}t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2})t_{q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-1}t_{q-2}.$$

7. Auf ganz ähnliche Weise erhält man für Reihen vierter Ordnung:

$$t_k = \mathfrak{C}_{k-q}t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3})t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-2})t_{q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-1}t_{q-3};$$

Hier sind $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ die Elemente der Combinationen.

8. Im Folgenden sind die Werthe von $t_k$ für die sechs ersten Ordnungen, so wie man sie durch Betrachtungen ähnlich denen in (5. und 6.) findet, aufgestellt.

1te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}t_q$.

2te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}t_q + p_2\mathfrak{C}_{k-q-1}t_{q-1}$.

3te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2})t_{q-1} + p_2\mathfrak{C}_{q-k-1}t_{q-2}$.

4te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3})t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3})t_{q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-4}t_{q-3}$.

5te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-4})t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-3})t_{q-2} + (p_4\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-2})t_{q-3} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-1}t_{q-4}$.

6te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-1}t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-4} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-3})t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-3} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-4})t_{q-2} + (p_4\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-3})t_{q-3} + (p_5\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-2})t_{q-4} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-1}t_{q-5}$.

Für die einzelnen Ordnungen ist:

Für die 1te Ordnung a) $q \gtreqless 0$, b) Elemente der Combinationen sind $p_1$,

Für die 2te Ordnung a) $q \gtreqless 1$, b) Elemente der Combinationen sind $p_1, p_2$,

Für die 3te Ordnung a) $q \gtreqless 2$, b) Elemente der Combinationen sind $p_1, p_2, p_3$,

Für die 4te Ordnung a) $q \gtreqless 3$, b) Elemente der Combinationen sind $p_1, p_2, p_3, p_4$,

Für die 5te Ordnung a) $q \gtreqless 4$, b) Elemente der Combinationen sind $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$,

Für die 6te Ordnung a) $q \gtreqless 5$ b) Elemente der Combinationen sind $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$.

Ueberall ist $k > q$ und $\mathfrak{C}_m$ bedeutet die Summe aller Combinationen mit Wiederholung, jede noch mit der ihr zugehörigen Permutationszahl multiplicirt.

9. Für eine Reihe $r$ter Ordnung ist

$$
\begin{aligned}
t_k &= p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2} + p_3 t_{k-3} \dots + p_{r-1} t_{k-(r-1)} + p_r t_{k-r},\\
t_{k-1} &= p_1 t_{k-2} + p_2 t_{k-3} + p_3 t_{k-4} \dots + p_{r-1} t_{k-r} + p_r t_{k-r-1},\\
t_{k-2} &= p_1 t_{k-3} + p_2 t_{k-4} + p_3 t_{k-5} \dots + p_{r-1} t_{k-r-1} + p_r t_{k-r-2},\\
t_{k-3} &= p_1 t_{k-4} + p_2 t_{k-5} + p_3 t_{k-6} \dots + p_{r-1} t_{k-r-2} + p_r t_{k-r-3}.
\end{aligned}
$$

Dies giebt durch Substitutionen der je nachfolgenden Gleichungen in die vorhergehenden:

$$
\begin{aligned}
t_k &= (p_1^2 + p_2) t_{k-2} + (p_1 p_2 + p_3) t_{k-3} + (p_1 p_3 + p_4) t_{k-4} \dots\\
&\qquad \dots + (p_1 p_{r-1} + p_r) t_{k-r} + p_1 p_r t_{k-r-1},\\
t_k &= (p_3 + 2p_1 p_2 + p_3) t_{k-3} + (p_2(p_1^2 + p_2) + p_3 p_1 + p_4) t_{k-4}\\
&\quad + (p_3(p_1^2 + p_2) + p_4 p_1 + p_5) t_{k-5} + \dots + (p_{r-1}(p_1^2 + p_2) + p_r p_1) t_{k-r-1}\\
&\qquad + p_r(p_1^2 + p_2) t_{k-r-2},\\
t_k &= (p_1^4 + 3p_1^2 p_2 + 2p_1 p_3 + p_2^2 + p_4) t_{k-4}\\
&\quad + (p_2(p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3) + p_3(p_1^2 + p_2) + p_4 p_1 + p_5) t_{k-5}\\
&\quad + (p_3(p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3) + p_4(p_1^2 + p_2) + p_5 p_1 + p_6) t_{k-6} \dots\\
&\quad + (p_{r-1}(p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3) + p_r(p_1^2 + p_2)) t_{k-r-2} + p_r(p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3) t_{k-r-3},
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
t_k &= \mathfrak{C}_2 t_{k-2} + (p_2 \mathfrak{C}_1 + p_3 \mathfrak{C}_0) t_{k-3} + (p_3 \mathfrak{C} + p_4 \mathfrak{C}_0) + \dots\\
&\qquad \dots + (p_r + \mathfrak{C}_1 + p_r \mathfrak{C}_0) t_{k-r} + p_r \mathfrak{C}_1 t_{k-r-1}\\
t_k &= \mathfrak{C}_3 t_{k-3} + (p_2 \mathfrak{C}_2 + p_3 \mathfrak{C}_1 + p_4 \mathfrak{C}_0) t_{k-4} + (p_3 \mathfrak{C}_2 + p_4 \mathfrak{C}_1 + p_5 \mathfrak{C}_0) t_{k-5} + \dots\\
&\qquad \dots + (p_{r-1} \mathfrak{C}_2 + p_r \mathfrak{C}_1) t_{k-r-1} + p_r \mathfrak{C}_2 t_{k-r-2},\\
t_k &= \mathfrak{C}_4 t_{k-4} + (p_1 \mathfrak{C}_3 + p_3 \mathfrak{C}_2 + p_5 \mathfrak{C}_0) t_{k-5} + (p_3 \mathfrak{C}_3 + p_4 \mathfrak{C}_3 + p_5 \mathfrak{C}_1 + p_6 \mathfrak{C}_0) t_{k-6} + \dots\\
&\qquad \dots + (p_{r-1} \mathfrak{C}_3 + p_r \mathfrak{C}_2) t_{k-r-2} + p_r \mathfrak{C}_3 t_{k-r-3}.
\end{aligned}
$$

Aus dem Bildungs-Gesetz, welches sich in diesen Formeln für $t_k$ kund giebt, erhält man die Formel

$$\begin{aligned} t_k = \mathfrak{C}_m t_{k-m} &+ (p_2 \mathfrak{C}_{m-1} + p_3 \mathfrak{C}_{m-2} \dots + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)}) t_{k-m-1} \\ &+ (p_3 \mathfrak{C}_{m-1} + p_4 \mathfrak{C}_{m-2} + \dots p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)}) t_{k-m-2} + \dots \\ &\dots + (p_{r-1} \mathfrak{C}_{m-1} + p_r \mathfrak{C}_{m-2}) t_{k-m-(r-2)} + p_r \mathfrak{C}_{m-1} t_{k-m-(r-1)}. \end{aligned}$$

Nimmt man diese Formel als erwiesen an und erwägt, dass

$$t_{k-m} = p_1 t_{k-m-1} + p_2 t_{k-m-2} + p_3 t_{k-m-3} \dots + p_{r-1} t_{k-m-(r-1)} + p_r t_{k-m-r}$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} t_k = &(p_1 \mathfrak{C}_m + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} \dots + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)}) t_{k-(m+1)} \\ &+ (p_2 \mathfrak{C}_m + p_3 \mathfrak{C}_{m-1} + \dots p_r \mathfrak{C}_{m-(r-2)}) t_{k-(m+1)-1} \\ &+ (p_3 \mathfrak{C}_m + p_4 \mathfrak{C}_{m-1} + \dots + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-3)}) t_{k-(m+1)-2} \dots \\ &\dots + (p_{r-2} \mathfrak{C}_m + p_{r-1} \mathfrak{C}_{m-1} + p_r \mathfrak{C}_{m-2}) t_{k-(m+1)-(r-3)} \\ &+ (p_{r-1} \mathfrak{C}_m + p_r \mathfrak{C}_{m-1}) t_{k-(m+1)-(r-2)} + p_r \mathfrak{C}_m t_{k-(m+1)-(r-1)}. \end{aligned}$$

Nun ist $p_1 \mathfrak{C}_m + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} \dots + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)} = \mathfrak{C}_{m+1}$, und wenn man dies noch in letzte Formel für $t_k$ setzt, so zeigt sich, dass sie aus (II.) abgeleitet werden kann, wenn man dort $m+1$ statt $m$ setzt; d. h.: das Gesetz, nach welchem die Formel (II.) construirt ist, gilt für alle auf $m$ folgende positive ganze Zahlen (für $m$ gesetzt), sobald es für *irgend eine* ganze Zahl $m$ nachgewiesen ist. Letzteres ist aber für $m = 2$, 3 und 4 geschehen, also ist die Gültigkeit der Formel (II.) erwiesen. $\mathfrak{C}_m$ ist die Summe aller Combinationen zur Summe $m$, und bei jeder Combination steht noch als Factor die betreffende Permutationszahl. Die Elemente der Combinationen sind $p_1, p_2, \dots p_r$.

Setzt man endlich in (II.) statt $k-m$ wieder $q$, also auch $k-q$ statt $m$, so erhält man für eine Reihe $r$ter Ordnung:

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} t_k = p_1 \mathfrak{C}_{k-q} t_q &+ (p_2 \mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3 \mathfrak{C}_{k-q-2} + \dots p_r \mathfrak{C}_{k-q-(r-1)}) t_{q-1} \\ &+ (p_3 \mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4 \mathfrak{C}_{k-q-2} + \dots p_r \mathfrak{C}_{k-q-(r-2)}) t_{q-2} + \dots \\ &\dots + (p_{r-1} \mathfrak{C}_{k-q-1} + p_r \mathfrak{C}_{k-q-2}) t_{q-(r-2)} + p_r \mathfrak{C}_{k-q-1} t_{q-(r-1)}. \end{aligned}$$

Hier ist $q \overline{>} r-1$, und da $m$ eine ganze positive Zahl sein soll, auch $k > q$.

Die Formel (III.) stimmt genau mit derjenigen überein, welche sich durch Analogie aus den in (8.) zusammengestellten Formeln findet; und umgekehrt: in (III.) $r = 1$; $r = 2$; $r = 3$; $r = 4$; $r = 5$; $r = 6$ gesetzt, giebt die in (8.) aufgestellten Formeln.

10. Mittels der Formel (III.) lassen sich aus den Coefficienten $t_q, t_{q-1}, \dots t_{q-(r-1)}$ und aus der Scale alle auf $q$ folgenden Coefficienten ganz unabhängig finden. Die Aufgabe erheischt aber die Bestimmung der r *Anfangs-*

*Coefficienten.* Um sie zu finden, setze man in (III.), was noch gestattet ist, $q = r - 1$; dann geht die Gleichung (III.) in

$$t_k = M_1 t_{r-1} + M_2 t_{r-2} + M_3 t_{r-3} \ldots . + M_{r-1} t_1 + M_r t_0$$

über, und wenn man nun in diese Gleichung für $t_k$ nach und nach die $r$ gegebenen Coefficienten $t_q, t_{q-1}, \ldots . t_{q-(r-1)}$ setzt, so erhält man ein System von $r$ Gleichungen, aus welchen sich die unbekannten *Anfangs-Coefficienten* $t_0, t_1, t_2, \ldots . t_{r-1}$ finden lassen.

11. *Beispiel.* Es sei

$$p_1 = 1; \quad p_2 = 0; \quad p_3 = 1; \quad t_{10} = 5; \quad t_9 = 3; \quad t_8 = 2.$$

Hier ist $r=3$, $q=10$. Combinations-Elemente sind $p_1, p_2, p_3$; die Gleichungen heissen

$$t_{10} = M_1 t_2 + M_2 t_1 + M_3 t_0 = (k-10) = p_1 \mathfrak{C}_8 t_2 + (p_2 \mathfrak{C}_7 + p_3 \mathfrak{C}_6) t_1 + p_3 \mathfrak{C}_7 t_0,$$

$$t_9 = M'_1 t_2 + M'_2 t_1 + M'_3 t_0 = (k-9) = p_1 \mathfrak{C}_7 t_2 (p_2 \mathfrak{C}_6 + p_3 \mathfrak{C}_5) t_1 + p_3 \mathfrak{C}_6 t_0,$$

$$t_8 = M''_1 t_2 + M''_2 t_1 + M''_3 t_0 = (k-8) = p_1 \mathfrak{C}_6 t_2 (p_2 \mathfrak{C}_5 + p_3 \mathfrak{C}_4) t_1 + p_3 \mathfrak{C}_5 t_0.$$

$$\mathfrak{C}_8 = p_1^8 + 7 p_1^6 p_2 + 6 p_1^5 p_3 + 15 p_1^4 p_2^2 + 20 p_1^3 p_2 p_3 + 10 p_1^2 p_2^3 + 6 p_1^2 p_3^2 + 12 p_1 p_2^2 p_3$$
$$+ p_2^4 + 3 p_2 p_3^2 = 1 + 6 + 6 = 13.$$

$$\mathfrak{C}_7 = p_1^7 + 6 p_1^5 p_2 + 5 p_1^4 p_2 + 10 p_1^3 p_2^2 + 12 p_1^2 p_2 p_3 + 4 p_1 p_2^3 + 3 p_1 p_3^2 + 3 p_2^2 p_3$$
$$= 1 + 5 + 3 = 9.$$

$$\mathfrak{C}_6 = p_1^6 + 5 p_1^4 p_2 + 4 p_1^3 p_3 + 6 p_1^2 p_1^2 + 6 p_1 p_2 p_3 + p_2^3 + p_3^2 = 1 + 4 + 1 = 6.$$

$$\mathfrak{C}_5 = p_1^5 + 4 p_1^3 p_2 + 3 p_1^2 p_3 + 3 p_1 p_2^2 + 2 p_2 p_3 = 1 + 3 = 4.$$

$$\mathfrak{C}_4 = p_1^4 + 3 p_1^2 p_2 + 2 p_1 p_3 + p_2^2 = 1 + 2 = 3.$$

Die Gleichungen für das Beispiel sind also:

$$5 = 13 t_2 + 6 t_1 + 9 t_0, \quad 3 = 9 t_2 + 4 t_1 + 6 t_0 \quad \text{und} \quad 2 = 6 t_2 + 3 t_1 + 4 t_0.$$

Hieraus folgt $2 = 4t_2 + 2t_1 + 3t_0$ und $1 = 3t_2 + t_1 + 2t_0$, und hieraus $1 = t_2 + t_1 + t_0$. Dies giebt $0 = 2t_2 + t_0$ und $-1 = 3t_2 + t_0$, also endlich $-1 = t_2$, $2 = t_0$, $0 = t_1$

$$b_1 = -p_1 = -1; \quad b_2 = -p_2 = 0; \quad b_3 = -p_3 = -1;$$
$$a_1 = t_0 = 2; \qquad a_1 = t_1 - p_1 t_0 = 0 - 2 = -2;$$
$$a_2 = t_2 - p_1 t_1 - p_2 t_0 = -1 + 0 + 0 = -1.$$

Also ist der Summenbruch der Reihe

$$\frac{2 - 2x - x^2}{1 - x - x^3} = 2 - x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} \ldots .$$

Von dieser Reihe findet man mittels der Gleichung (III.)

$$t_{16} = \mathfrak{C}_8\, t_8 + \mathfrak{C}_6\, t_7 + \mathfrak{C}_7\, t_6 = 2.13 + 2.6 + 1.9 = 47,$$
$$t_{17} = \mathfrak{C}_8\, t_9 + \mathfrak{C}_6\, t_8 + \mathfrak{C}_7\, t_7 = 3.13 + 2.6 + 2.9 = 69,$$
$$t_{18} = \mathfrak{C}_7 t_{10} + \mathfrak{C}_6\, t_9 + \mathfrak{C}_7\, t_8 = 5.13 + 3.6 + 2.9 = 101,$$
$$t_{19} = \mathfrak{C}_8 t_{11} + \mathfrak{C}_6 t_{10} + \mathfrak{C}_7\, t_9 = 7.13 + 5.6 + 3.9 = 148.$$

Als Probe für die Richtigkeit der letzten Resultate ist z. B.

$$t_{19} = p_1 t_{18} + p_2 t_{17} + p_3 t_{16} = 101 + 0 + 47 = 148;$$ wie es sein soll.

Es war aber Bedingung, dass $k > q$ sei. Bei der Construction der Gleichungen ist $q = r - 1$; also ist es hier Bedingung, dass $k > r - 1$ sei. Diese Bedingung muss für alle Werthe, welche man statt $k$ nach und nach setzt, erfüllt werden. Der kleinste Werth, der für $k$ gesetzt wird, ist $q - (r-1)$ und es ist also Bedingung, dass $q - (r-1) > r - 1$; d. h. $q > 2r - 2$ sei.

Es sei $q < 2r - 2$, z. B. $= 2r - 2 - l$; welcher Fall eintritt, wenn unter den auf einander folgenden $r$ gegebenen Coefficienten $2r - 2 - l - (r - 1) = r - (l+1)$ Coefficienten sind, die nicht zu den Anfangs-Coefficienten gehören, also $l + 1$ der letztern mitgegeben sind.

Für $q = r - 2 - l$ heisst die $m$te der aufgestellten Gleichungen:

$$t_{2r-2-l-(m-1)} = \mathfrak{C}_{2r-2-l-m+2}\, t_{r-1}$$
$$+ (p_2 \mathfrak{C}_{s-1} t_1 p_3 \mathfrak{C}_{s-2} \ldots) t_{r-2} + (p_3 \mathfrak{C}_{s-1} + \ldots) t_{r-3} \ldots + p_r \mathfrak{C}_{s-1} t_0,$$

Da es $r$ Gleichungen giebt, so kann $m$ alle Werthe von 1 bis $r$ haben. Die Summe $s$, zu welcher beim ersten Posten combinirt wird, ist $r - l - m$. Ist dies $= 0$, so heisst die Gleichung $t_{r-1} = t_{r-1}$, und weil dann $m = r - l$ ist, und alle darauf folgenden Gleichungen (da die Summen, zu welchen darin combinirt werden soll, negativ ausfallen) nichts bestimmen, so bleiben, da auch die $r - l$te als identische Gleichung als nichtbestimmend angesehen werden muss, in dem vorgelegten Falle bloss $r - l - 1$ bestimmende Gleichungen; wie es auch sein soll, indem in diesem Falle $l + 1$ Anfangs-Coefficienten gegeben und also nur noch $r - l - 1$ Coefficienten zu bestimmen sind.

*Beispiel.* Es sei

$$t_4 = 1;\ t_5 = 2;\ t_6 = 3;\ t_7 = 4;\ t_8 = 5;\ t_9 = 6;$$
$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0;\ p_6 = 1.$$

Hier ist $r = 6$; $q = 9$. Da $2r - 2 = 10$, $q = 10 - 1$ ist, so ist $l = 1$; also sind hier $l + 1 = 2$ Anfangs-Coefficienten mitgegeben und man erhält bloss $6 - 2 = 4$ bestimmende Gleichungen; wie es sich auch ergiebt.

Die Gleichungen heissen

$$t_9 = \mathfrak{C}_4 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_3 + p_3\mathfrak{C}_2 + p_4\mathfrak{C}_1 + p_5\mathfrak{C}_0] t_4 + [p_3\mathfrak{C}_3 + p_4\mathfrak{C}_2 + p_5\mathfrak{C}_1 + p_6\mathfrak{C}_0] t_3$$
$$+ [p_4\mathfrak{C}_3 + p_5\mathfrak{C}_2 + p_6\mathfrak{C}_1] t_2 + [p_5\mathfrak{C}_3 + p_6\mathfrak{C}_2] t_1 + p_6\mathfrak{C}_3 t_0,$$
$$t_8 = \mathfrak{C}_3 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_2 + p_3\mathfrak{C}_1 + p_4\mathfrak{C}_0] t_4 + [p_5\mathfrak{C}_2 + p_4\mathfrak{C}_1 + p_5\mathfrak{C}_0] t_3$$
$$+ [p_4\mathfrak{C}_2 + p_5\mathfrak{C}_1 + p_6\mathfrak{C}_0] t_2 + [p_5\mathfrak{C}_2 + p_6\mathfrak{C}_1] t_1 + p_6\mathfrak{C}_2 t_0,$$
$$t_7 = \mathfrak{C}_2 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_1 + p_3\mathfrak{C}_0] t_4 + [p_3\mathfrak{C}_1 + p_4\mathfrak{C}_0] t_3 + [p_4\mathfrak{C}_1 + p_3\mathfrak{C}_0] t_2$$
$$+ [p_5\mathfrak{C}_1 + p_6\mathfrak{C}_0] t_1 + p_6\mathfrak{C}_1 t_0,$$
$$t_6 = \mathfrak{C}_1 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_0] t_4 + p_3\mathfrak{C}_0 t_3 + p_4\mathfrak{C}_0 t_2 + p_2\mathfrak{C}_0 t_1 + p_6\mathfrak{C}_0 t_0,$$
$$t_5 = \mathfrak{C}_0 t_5 = t_5.$$

Nun ist

$$\mathfrak{C}_4 = p_1^4 + 3p_1^2 p_2 + 2p_1 p_3 + p_2^2 + p_4 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_3 = p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_2 = p_1^2 + p_2 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_1 = p_1 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_0 = 1;$$

also sind die Gleichungen für das Beispiel:

$$t_9 = t_3 = 6;\quad t_8 = t_2 = 5;\quad t_2 = t_1 = 4 \quad \text{und} \quad t_6 = t_0 = 3 \quad \text{und es ist}$$
$$b_1 = 0,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 0,\quad b_4 = 0,\quad b_5 = 0,\quad b_6 = -1;$$
$$a_0 = 3,\quad a_1 = 4,\quad a_2 = 5,\quad a_3 = 6,\quad a_4 = 1,\quad a_5 = 2.$$

Der Summenbruch ist $= \dfrac{3+4x+5x^2+6x^3+x^4+2x^5}{1-x^6} = 3. + 4x + 5x^2 + 6x^3 + x^4$ $+ 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 \ldots.$

Es lehrt also vorstehende Auflösung: *Erstlich*, eine neue unabhängige Herstellung der Coefficienten, und *Zweitens*, die sonst unbeachtete Aufsuchung des Summenbruches aus der Scale und aus $r$ Coefficienten, welche von einer bekannten Stelle an ununterbrochen auf einander folgen.

## II.

1. Für den Bruch $\dfrac{a_0 + a_1 a \ldots, a_{r-1} x_{r-1}}{1 - b_r x^r}$ ist

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots . p_{r-1} = 0,\quad p_r = b_r;$$
$$t_0 = a_0,\quad t_r = b_r a_0,\quad t_{2r} = b_r^2 a_0,$$
$$t_1 = a_1,\quad t_{r+1} = b_r a_1,\quad t_{2r+1} = b_r^2 a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{r-1} = a_{r-1},\quad t_{2r-1} = b_r a_{r-1},\quad t_{3r-1} = b_r^2 a_{r-1},$$

und hieraus

$$t_{kr} = b_r^k a_0,\quad t_{kr+1} = b_r^k a_1,\quad \ldots . \quad t_{kr+r-1} = b_r^k a_{r-1}.$$

2. Für das allgemeine Glied einer dem vorgelegten Bruch entsprechenden Reihe erhält man also, für $n = rq + s$, wo $q$ und $s$ ganze Zahlen sind und zwar $s \overline{\gtrless} r - 1$ ist, $t_n x^n = b_r^q a_s$, oder, da $q = \frac{n-s}{r}$ ist,

$$t_n x^n = b_r^{\frac{n-s}{r}} a_s x^n.$$

Die Zahl $s$ ist immer leicht zu finden. Sie ist eine der ganzen Zahlen von $0$ bis $r - 1$, welche, von $n$ abgezogen, ein Multiplum von $r$ geben ($q$ ist eine ganze Zahl). Ist $n < r - 1$, so ist nothwendig $s = n$.

3. Die Reihe selbst hat nach dem Vorhergehenden folgende Form:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_{r-1} x^{r-1} + \dots \\ + b_r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_{r-1} x^{r-1}) x^r + \dots \\ + b_r^2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_{r-1} x^{r-1}) x^{2r} + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ + b_r^k (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_{r-1} x^{r-1}) x^{kr} + \dots \end{array}$$

4. Umgekehrt: Hat eine Reihe diese Gestalt, so hat sie innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz obigen Bruch zur Summe. Ist $r = 1$, so bilden die Glieder der Reihe Perioden, und umgekehrt: Perioden geben der Reihe innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz zur Summe einen Bruch, der die Coefficienten der Periode zu Zähler-Coefficienten hat und dessen Nenner $= 1 - x^r$ ist, wo $r$ die Gliederzahl der Periode ist. Es sei z. B.

$$1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{8}x^3 + x^4 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{3}{4}x^6 - \tfrac{1}{8}x^7 + x^8 \dots$$

Hier ist die Periode $1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$; also ist der Bruch

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3}{1 - x^4} = \frac{8 - 4x + 6x^2 - x^3}{8 - 8x^3}.$$

5. Die Summe der $kr + r$ ersten Glieder ist aus (3.), wenn man $a_0 + a_1 x \dots a_{r-1} x^{r-1} = Z$ setzt,

$$= Z[1 + b_r x^r + (b_r x^r)^2 + (b_r x^r)^3 \dots + (b_r x^r)^k] = Z \frac{1 - b_r^{k+1} x^{r(k+1)}}{1 - b_r x^r}.$$

Deshalb ist die Summe aller auf die $kr + r - 1$ ersten Glieder folgenden Glieder:

$$\begin{aligned} &= \frac{Z}{1 - b_r x^r} - Z \frac{1 - b_r^{k+1} x^{r(k+1)}}{1 - b_r x^r} \\ &= \frac{b_r^{k+1} x^{r(k+1)}}{1 - b_r x^r} (a_0 + a_1 x \dots a_{r-1} x^{r-1}) \\ &= \frac{(b_r x^r)^{k+1}}{1 - b_r x^r} (a_0 + a_1 x \dots a_{r-1} x^{r-1}). \end{aligned}$$

Diese Summe nimmt für $b_r x^r < 1$ unendlich ab, wenn $k$ unendlich zunimmt; und da es für die Convergenz einer Reihe Bedingung ist, dass der Rest der ganzen Reihe, weniger einer Anzahl Anfangsglieder, unendlich abnehme, wenn diese Anzahl unendlich zunimmt, so ist $b_r x^r < 1$ die Bedingung für die Convergenz einer solchen Reihe. Ist also $b_r \overline{\gtrless} 1$, so divergirt die Reihe für alle Werthe, die $\overline{\gtrless} 1$ sind, und convergirt für alle, welche $\overline{\gtrless} 0 < 1$ sind. Ist aber $b_r < 1$, so kann $x$ auch grösser als 1 sein. Z. B. die Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{3}{16}x^5 + \tfrac{1}{256}x^6 + \tfrac{1}{128}x^7 + \tfrac{1}{256}x^8 \ldots.$$

convergirt für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 2$ einschliesslich, denn sie ist $= \left(\frac{1}{16}\right)^0 (1+2x+3x^2) + \left(\frac{1}{16}\right)^1 (1+2x+3x^2)x^3 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 (1+2x+3x^2)x^6 + \ldots.,$ folglich ist hier $r = 3$, $p_r = \frac{1}{16}$, $Z = 1 + 2x + 3x^2$. Demnach ist es Bedingung für die Convergenz, dass $\frac{x^3}{16} < 1$, also $x < \sqrt[3]{16} < 2{,}519842$ sei. Es darf demnach hier $x$ noch $= 2{,}519841$ sein, also noch über 2; immer noch wird die Reihe convergiren.

Hieraus folgt ferner die Gleichung

$$\frac{1+2x+3x^2}{1-\frac{1}{16}x^3} = 1 + 2x + 3x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{3}{16}x^5 + \ldots.$$

für alle Werthe von $x$, welche zwischen 0 und 2,519842 liegen. Für $x = 1$ folgt

$$\frac{7}{\frac{15}{16}} = \frac{7.16}{15} = 1 + 2 + 3 + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{256} + \frac{2}{256} + \frac{3}{256}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{256} + \frac{2}{256} + \frac{3}{256} \ldots.$$

und auch für $x = 2$:

$$\frac{17}{\frac{1}{2}} = 34 = 1 + 4 + 12 + \frac{8}{16} + \frac{32}{16} + \frac{96}{16} + \frac{64}{256} + \ldots.$$

Für die 1002 ersten Glieder ist die Summe $= 34 \times N$; wo $N$ gleich einer Decimalzahl ist, die 0 vor dem Comma, dann 999 Stellen mit 9 besetzt und endlich 300078 als Decimalstellen hat. Endlich hat die Reihe

$$\frac{8}{16} + \frac{32}{16} + \frac{96}{16} + \frac{64}{256} + \frac{256}{256} + \frac{768}{256} \ldots.$$

die Zahl 17 zur Summe.

Fürth im August 1847.