Werk

Titel: Verschiedene mathematische Aufgaben und Sätze.

Autor: Beyer, E.

Jahr: 1831

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0007|log29

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

24.

Verschiedene mathematische Aufgaben und Sätze.

(Von dem Herrn Conrector *Beyer* zu Neu-Stettin.)

I. Aufgabe. Das gröfste unter allen Dreiecken zu finden, deren Winkelspitzen in den Peripherien dreier concentrischer Kreise liegen, deren Halbmesser $a<b$ und $b<c$ gegeben sind.

Auflösung. Das zu bestimmende Dreieck *ABD* (Taf. III. Fig. 6.) sei $=F$ und durch die drei von seinen Winkelspitzen nach dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte der concentrischen Kreise gezogenen Halbmesser a, b, c in drei Theile zerlegt. Bezeichnet man die von a, b, von b, c, von a, c gebildeten Winkel durch x, y, z, so ist $z=360°-(x+y)$ und $F=\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}bc\sin y-\frac{1}{2}ac\sin(x+y)$. Soll nun F ein Maximum werden, so mufs

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\tfrac{1}{2}ab\cos x-\tfrac{1}{2}ac\cos(x+y)=0$$

und auch

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\tfrac{1}{2}bc\cos y-\tfrac{1}{2}ac\cos(x+y)=0$$

sein. Hieraus folgt $a\cos x=c\cos y$, $b\cos x=c\cos z$ und $b\cos y=a\cos z$, nach welchen Gleichungen nur $y>270°$ für $x+z<90°$, oder alle drei Winkel x, y, z stumpfe sein können. Aus

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\tfrac{1}{2}ab\cos x-\tfrac{1}{2}ac\cos(x+y)=0$$

ergiebt sich auch

$$b\cos x-c\cos x\cos y+c\sin x\sin y=0$$

oder

$$b\cos x-a\cos x^2=-c\sin x\sin y,$$

indem $\cos y=\frac{a}{c}\cos x$ ist. Quadrirt man nun, so erhält man

$$b^2\cos x^2-2ab\cos x^3+a^2\cos x^3=c^2\sin x^2\sin y^2=c^2(1-\cos x^2)\left(1-\frac{a^2}{c^2}\cos x^2\right)$$
$$=c^2-a^2\cos x^2-c^2\cos x^2+a^2\cos x^4,$$

folglich ist

$$b^2\cos x^2-2ab\cos x^3=c^2-a^2\cos x^2-c^2\cos x^2$$

und

$$\cos x^3-\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\cos x^2+\frac{c^2}{2ab}=0.$$

Für ein Maximum von F mufs ferner $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ negativ sein. Es ist aber

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\tfrac{1}{2}ab\sin x + \tfrac{1}{2}ac\sin(x+y) \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\tfrac{1}{2}bc\sin y + \tfrac{1}{2}ac\sin(x+y).$$

Beide Ausdrücke sind negativ, wenn x, y, z stumpfe Winkel sind, und der erste ist es auch für $y > 270°$ und $x+z<90°$. Für ein Maximum von F mufs endlich $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y}\right)^2$, hier also

$(-\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}ac\sin(x+y))\cdot(-\frac{1}{2}bc\sin y+\frac{1}{2}ac\sin(x+y) > (\frac{1}{2}ac\sin(x+y))^2$,

d. i. $\frac{1}{4}ab^2c\sin x\sin y - \frac{1}{4}a^2bc\sin x\sin(x+y) - \frac{1}{4}abc^2\sin y\sin(x+y)$ $+\frac{1}{4}a^2c^2\sin(x+y)^2 > \frac{1}{4}a^2c^2\sin(x+y)^2$ oder $b\sin a\sin y - a\sin x\sin(x+y)$ $-c\sin y\sin(x+y) > 0$ sein, welches nur für x und $y \gtrless \begin{matrix}90°\\180°\end{matrix}$, nicht aber für $x<90°$ und $y>270°$ statt findet. Folglich ist F ein Maximum, wenn

$$\cos x^3 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\cos x^2 + \frac{c^2}{2ab} = 0 \text{ und } x \gtrless \begin{matrix}90°\\180°\end{matrix} \text{ ist.}$$

Um x selbst zu finden, setze man $\cos x = u + \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab} = u+\frac{1}{3}n$. Dann erhält man $u^3 - \frac{1}{3}n^2.u + \frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27}n^3 = 0$; bezeichnet man nun $\frac{1}{3}n^2$ mit p und $\frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27}n^3$ mit q, so ist

$$u = \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)})},$$

woraus sich u berechnen läfst, wofern nicht $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, d. i. $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{27}n^6$ oder $\frac{1}{2}q < \frac{1}{27}n^3$ oder $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q)} < \frac{1}{3}n$. Da nun u immer negativ und $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q)}$ nicht $<\frac{1}{3}n$ ist, so ist auch $\cos x = u+\frac{1}{3}n$ negativ, wie es der stumpfe Winkel x verlangt. Ist hingegen $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q)} < \frac{1}{3}n$ und $\frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27}n^3$ nicht negativ, also $\frac{c^2}{2ab}$ nicht $< \frac{2}{27}n^3$, so erhält man aus $u^3 - pu + q = 0$ für u folgende drei Werthe: $r\sin\varphi$, $r\sin(\frac{1}{3}\pi-\varphi)$ und $-r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)$, wo $r = \sqrt{(\frac{4}{3}p)} = \frac{2}{3}n$ und $\sin 3\varphi = \frac{4q}{n^3}$ für den kleinsten Werth des Bogens 3φ ist. Unter den drei Werthen von u kann nur der letzte $-r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)$ zur Bestimmung von $\cos x$ gebraucht werden, weil $\cos x$ negativ sein mufs. Er genügt aber auch den Anforderungen des $\cos x$, denn $\sin 3\varphi$ ist positiv, folglich 3φ nicht $>90°$ und φ nicht $>30°$, also $\frac{1}{3}\pi+\varphi > 60°$, aber nicht $>90°$ und $\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi) > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, mithin $r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi) > \frac{1}{2}r\sqrt{3}$ oder $> \frac{1}{3}n\sqrt{3}$, so dafs $\cos x = -r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)+\frac{1}{3}n$ negativ ist. Wäre aber $\frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27}n^3$

negativ, also $\frac{2}{27}n^3 > \frac{c^2}{2ab}$, und setzte man nun $\frac{2}{27}n^3 - \frac{c^2}{2ab} = q$, so würden sich aus $u^3 - pu - q = 0$ für u die drei Werthe $-r\sin\varphi$, $-r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ und $+r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ ergeben, wo $r = \frac{2}{3}n$ und $\sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3}$ für den kleinsten Werth des Bogens 3φ wäre. Zur Bestimmung von $\cos x$ kann nur $u = -r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ gebraucht werden. Denn nicht nur $u = r\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$ macht $\cos x$ positiv, sondern auch $u = -r\sin\varphi$, weil $\sin\varphi < \frac{1}{2}$ also $r\sin\varphi < \frac{1}{2}r$ oder $< \frac{1}{3}n$ ist.

II. Lehrsatz. **Das gröfste Viereck unter allen, deren Winkelspitzen in den Peripherien vier concentrischer Kreise liegen, entsteht, wenn man durch den gemeinschaftlichen Mittelpunct zwei einander rechtwinklig schneidende gerade Linien zieht, von denen die eine aus dem gröfsten und kleinsten und die andere aus den übrigen Halbmessern besteht, und die dadurch bestimmten Puncte der Peripherien durch gerade Linien verbindet.**

Beweis. Die Halbmesser der vier concentrischen Kreise seien a, b, c, d und zwar $a < b$, $b < c$, $c < d$. Zieht man nun die Halbmesser in der Ordnung a, b, d, c, und bezeichnet die von a, b, von b, d, von d, c, von c, a gebildeten Winkel durch x, y, z, u, so ist das zwischen den von a, b, d, c in den Peripherien bestimmten Puncten liegende Viereck

$$= \tfrac{1}{2}ab\sin x + \tfrac{1}{2}bd\sin y + \tfrac{1}{2}cd\sin z + \tfrac{1}{2}ac\sin w,$$

welche Summe am gröfsten ist, wenn $x = y = z = u = 90°$. Dann ist das Viereck $= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}ac$. Folgen aber die Halbmesser in der Ordnung a, b, c, d oder a, c, b, d, so ist das gröfste Viereck

$$= \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{2}cd + \tfrac{1}{2}ad \text{ oder } = \tfrac{1}{2}ac + \tfrac{1}{2}cb + \tfrac{1}{2}bd + \tfrac{1}{2}da.$$

Beide Summen sind kleiner als die erste, weil $\frac{1}{2}c(b-a) < \frac{1}{2}d(b-a)$, d. i. $\frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ad < \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}ac$, und weil $\frac{1}{2}a(d-b) < \frac{1}{2}c(d-b)$, d. i. $\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc < \frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}ab$ ist. Da nun die angegebenen drei Ordnungen der Halbmesser allein verschiedene Vierecke geben, und die erste auf das gröfste führt, so ist die im Lehrsatze aufgestellte Behauptung gerechtfertigt.

III. Aufgabe. **Zu einer dreiseitigen und einer vierseitigen Pyramide sind die in der Spitze zusammenstofsenden Kanten und die Höhe, welche kleiner ist als die kleinste der Kanten, gegeben. Es soll die Grundfläche so bestimmt werden, dafs sie, mithin auch die Pyramide ein Maximum sei.**

Auflösung. Stellt man sich die Kanten in der Spitze so um die Höhe herumbewegt vor, dafs sie in der Ebene der Grundfläche Kreise beschreiben, so entstehen, wofern die Kanten ungleich sind, bei der dreiseitigen Pyramide drei und bei der vierseitigen vier concentrische Kreise, deren Halbmesser durch die gegebenen Kanten und die gegebene Höhe bestimmt sind. Hieraus folgt, dafs diese Aufgabe sich mittelst der vorhergehenden Sätze lösen läfst.

IV. Aufgabe. Die Zahl der Permutationen aus n Elementen ohne Wiederholungen zu finden.

Auflösung. Da aus den Permutationen n gegebener Elemente die Permutationen von $n+1$ Elementen, dadurch gebildet werden können, dafs man das neue Element jeder Complexion beifügt und dann mit jedem der in ihr ursprünglich enthaltenen n Elemente versetzt, so ist die Zahl der Permutationen aus $n+1$ Elementen $n+1$ mal gröfser, als die Zahl der Permutationen aus n Elementen. Umgekehrt wird also die Zahl der Permutationen aus n Elementen $n+1$ mal kleiner sein, als die Zahl der Permutationen aus $n+1$ Elementen.

Wenn daher n Elemente x Permutationen geben, so geben

$n-1$ Elemente $\frac{x}{n}$ Permutationen,

$n-2$ Elemente $\frac{x}{n.(n-1)}$ Permutationen,

. . . . . .

$n-(n-1)$ Elemente $\frac{x}{n.(n-1)....[n-(n-2)]}$ Permutationen, oder

1 Element $\frac{x}{n.(n-1)....2}$ Permutationen.

Ein Element giebt aber nur 1 Complexion, folglich ist $\frac{x}{n.(n-1)....2}=1$, mithin $x=1.2....(n-1).n=$ der Zahl der Permutationen aus n Elementen ohne Wiederholungen.

V. Aufgabe. Die Zahl der Variationen der $r$ten Classe ohne Wiederholungen, aus n Elementen zu finden.

Auflösung. Aus der $r$ten Classe oder den $r$ionen von n Elementen kann man die $r+1$te Classe oder die $r+1$ionen herleiten, indem man jede Complexion der $r$ionen mit jedem der n Elemente der Reihe nach verbindet, mit Ausschlufs derjenigen, welche schon in der Complexion vorkommen. In jeder Complexion der $r$ionen kommen aber r Elemente

vor, daher kann sie nur mit $n-r$ Elementen verbunden werden, um die Complexionen der folgenden Classe zu erhalten, und es mufs also die Zahl der $(r+1)$ionen aus n Elementen $n-r$ mal so grofs, als die Zahl der $r$ionen, und die Zahl der letztern $\frac{1}{n-r}$ mal so grofs, als die Zahl der erstern sein. Ist nun die Zahl der $r$ionen aus n Elementen $= x$,

so ist die Zahl der $(r\text{-}1)$ionen - - - - $= \frac{x}{n+r-1}$,

- - - $(r\text{-}2)$ - - - - - - $= \frac{x}{(n-r+1).(n-r+2)}$,

. . . . . .

die Zahl der $[r-(r\text{-}2)$ - - - - - - $= \frac{x}{(n-r+1).(n-r+2)....n-2}$,

- - - $[r-(r\text{-}1)]$ionen oder Unionen $= \frac{x}{(n\text{-}r+1).(n\text{-}r+2)....(n\text{-}2).(n\text{-}1)}$.

Da nun die Zahl der Unionen aus n Elementen $= n$ ist, so ist

$$\frac{x}{(n-r+1).(n-r+2)....(n-2).(n-1)} = n,$$

also $x = n.(n-1)(n-2)....(n-r+2).(n-r+1)$.

VI. Beweis der im Journal Band 5. S. 318. No. 8. und 9. aufgestellten und ähnlicher Lehrsätze.

1. Es ist $\frac{RS.RP}{QS.QP} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$ (Taf. III. Fig. 7.).

Beweis. Zieht man durch Q die EF parallel mit BD, aus dem Durchschnittspunct G die GH parallel mit AF und die SV in I schneidende Verbindungslinie EH, so ist EH parallel mit AD; folglich $\triangle DRS \sim \triangle EIQ$, also $\frac{RS}{IQ} = \frac{DR}{EQ} = \frac{RW}{QW}$. Aber $IQ : QS = HQ : AQ = GQ : FQ$, mithin $IQ = \frac{QS.GQ}{FQ}$, folglich $\frac{RS}{IQ} = \frac{RS.FQ}{QS.GQ} = \frac{RW}{QW}$. Ferner ist $\frac{RV}{QV} = \frac{RB}{FQ}$; daher $\frac{RS.FQ.RB}{QS.GQ.FQ} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$, und da $\frac{RB}{GQ} = \frac{RP}{QP}$, so ist $\frac{RS.RP}{QS.QP} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$.

2. Es ist $\frac{PQ.PR}{SQ.SR} = \frac{PW.PV}{SW.SV}$ (Fig. 8.).

Beweis. Zieht man EF parallel mit AD, aus G die GH parallel mit AB, und von F durch H die FI, welche parallel mit BD sein wird, so läfst sich der Beweis ähnlich wie bei 1 führen.

Zusätze. 1. Es ist $\frac{PR^2}{QS^2} = \frac{RW.RV.PW.PV}{QW.QV.SW.SV}$ nach Lehrsatz 1. und 2. (Product.)

2. Es ist $\frac{PQ^2}{RS^2} = \frac{PW.PV.QW.QV}{SW.SV.RW.RV}$ nach Lehrsatz 2. und 1. (Quotient.)

3. Fallen die Puncte W und V in v zusammen, und setzt man dann statt der grofsen Buchstaben S, R, Q, P die kleinen s, r, p, q, so ist

a) $\frac{rp.rs}{qp.qs} = \frac{rv^2}{qv^2}$ nach Lehrsatz 1. b) $\frac{pq.pr}{sq.sr} = \frac{pv^2}{sr^2}$ nach Lehrsatz 2.

c) $\frac{pr}{qs} = \frac{rv.pv}{qv\ sv}$ nach Zusatz 1. d) $\frac{pq}{rs} = \frac{pv\ qv}{sv.rv}$ nach Zusatz 2.

4. Fallen die Puncte R und Q zusammen in den Durchschnittspunct der Diagonalen und bezeichnet man diesen mit Q, so ist

$$\frac{PQ^2}{SQ^2} = \frac{PW.PV}{SW.SV} \text{ nach Lehrsatz 2.}$$

5. Fallen nun auch die Puncte W und V in den Durchschnittspunct der verlängerten Seiten DC und AE, und bezeichnet man denselben mit V, so ist $\frac{PQ^2}{SQ^2} = \frac{PV^2}{SV^2}$ oder $\frac{PQ}{SQ} = \frac{PV}{SV}$.

6. Zieht man (Fig. 9.) SV durch Q, EH mit AD, und IM mit BC parallel und verlängert die BD, bis sie HE trifft, so wie die AC und AB, bis sie IM schneiden, so ist 1) $EP = HP$; 2) $FP = GP$; 3) $IS = MS$; 4) $KS = LS$, folglich auch 5) $EF = GH$ und 6) $IK = ML$.

Über die Zerlegung gebrochener Functionen in Partial-Brüche.

Der zu zerlegende echte Bruch

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + m}{x^n + b_1 x^{n-1} \ldots + m_1}$$

sei auf die Form

$$\frac{P}{(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \ldots (x-\mu)^u \ldots (x-w)^z}$$

gebracht, wo also

$$r + s \ldots + u \ldots + z = n.$$

Man setze

1. $$\frac{P}{Q} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\beta)^s} \ldots + \frac{M}{(x-\mu)^u} \ldots + \frac{R}{(x-v)^z},$$

so werden die unbestimmten ganzen Functionen A, B .... M .... R die Gröfse x resp. bis zur $r-1$ten, $s-1$ten, ... $u-1$ten, ... $z-1$ten Potenz enthalten. Um nun z. B. den Zähler M zu finden, verwandele man die Gleichung (1.) in folgende:

2. $$M = \frac{P(x-\mu)^u}{Q} - \frac{A(x-\mu)^u}{(x-\alpha)^r} - \frac{B(x-\mu)^u}{(x-\beta)^s} \ldots - \frac{R(x-\mu)^u}{(x-w)^z};$$

hierin setze man $x-\mu=y$ also $x=\mu+y$ und bezeichne durch P_1, Q_1, A_1, B_1, ... R_1 das, worin dadurch P, Q, A, B, ... R übergehen, so erhält man

$$3.\quad M=\frac{P_1y^u}{Q_1}-\frac{A_1y^u}{(\mu-\alpha+y)^r}-\frac{B_1y^u}{(\mu-\beta+y)^s}\cdots\cdot-\frac{R_1y^u}{(\mu-w+y)^z}.$$

Entwickelt man nun die negativen Glieder durch die Division in Reihen nach Potenzen von y, so werden sie sämmtlich mit einem y^u enthaltenden Gliede anfangen, also sämmtlich von einer höhern Ordnung als M sein, welches x, und folglich auch y nur bis zur $u-1$ten Potenz enthält. Also kann M blofs in dem Gliede $\frac{P_1y^u}{Q_1}$ enthalten, und mufs denjenigen Theilen desselben gleich sein, worin y bis zur $u-1$ten Potenz vorkommt. Nun ist $\frac{P_1y^u}{Q_1}$ so viel als $\frac{P(x-\mu)^u}{Q}$, also so viel als $\frac{P}{Q}$, wenn man in Q den Factor $(x-\mu)^u$ wegläfst. Man darf daher, um den Zähler M des Partialbruchs $\frac{M}{(x-\mu)^u}$ zu finden, nur in dem Nenner des gegebenen Bruchs $\frac{P}{Q}$ den Factor $(x-\mu)^u$ weglassen, darauf in dem entstehenden Bruch $\frac{P}{Q(x-\mu)^u}$, $x-\mu=y$ setzen nnd hierauf diesen Bruch durch die Division in eine Reihe nach Potenzen von y auflösen. Diejenigen Theile dieser Reihe, welche niedrigern Potenzen von y als die $u$te enthalten, sind zusammengenommen M und man findet $\frac{M}{y^u}$ oder $\frac{M}{(x-\mu)^u}$ in x ausgedrückt, wenn man wieder $x-\mu$ statt y setzt.

Auf gleiche Weise findet man die übrigen Partialbrüche.

Beispiel. Es sei

$$\frac{4x+3}{(x+2)^3(x+1)}=\frac{A}{(x+2)^3}+\frac{B}{x+1},$$

so findet man $\frac{A}{(x+2)^3}$, wenn man in $\frac{4x+3}{x+1}$, $x+2=y$ also $x=y-2$ setzt und dividirt. Dieses giebt $\frac{4y-8+3}{y-2+1}=\frac{-5+4y}{-1+y}=5+y+y^2+y^3\ldots.$ also ist $A=5+y+y^2$ und $\frac{A}{y^3}=\frac{5}{y^3}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}$ oder

$$\frac{A}{(x+2)^3}=\frac{5}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}.$$

Setzt man ferner in $\frac{4x+3}{(x+2)^3}$, $x+1=y$ also $x=y-1$ und dividirt nach y, so findet man $\frac{4y-4+3}{(y-1+2)^3}=\frac{-1+4y}{1+3y+3y^2+y^3}=-1+7y-18y^2\ldots.$; also ist $B=-1$ und $\frac{B}{x+1}=-\frac{1}{x+1}$. Folglich ist zusammengenommen

$$\frac{4x+3}{(x+2)^3(x+1)}=\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}.$$