20.

Nouvelle théorie de l'action capillaire*).

(Par Mr. le Baron *de Poisson.*)

L'élévation de l'eau et l'abaissement du mercure dans un tube de verre d'un très petit diamètre sont des phénomènes très anciennement connus, qui se présentent, au premier aspect, comme des exceptions aux lois de l'Hydrostatique, et dont on a donné pendant long-temps des explications qu'il serait inutile de rappeler. Les théories qui ne sont pas fondées sur le calcul et l'observation doivent maintenant être bannies de la Physique, comme elles le sont de l'Astronomie. Lors même que la véritable cause des phénomènes est connue, il n'y a que l'analyse mathématique qui puisse découvrir leur liaison réciproque, et les déduire les uns des autres, en employant les seules données indispensables de l'expérience. Les effets, si nombreux et si variés, qui se rapportent à l'action capillaire, en offrent l'exemple le plus remarquable; car, sans le secours de l'analyse, ils seraient restés isolés, et l'on ne serait pas parvenu à les prévoir ou à les expliquer tous avec précision, et encore moins à en déterminer la grandeur, au moyen de deux données spéciales empruntées à l'observation, l'une relative à la matière du liquide, et l'autre dépendante de cette matière et de celle du corps dont le contact donne naissance aux différens effets dont il s'agit.

Quoique l'ascension d'un liquide au-dessus de son niveau soit produite par l'action du tube dans lequel elle a lieu, on sait cependant qu'elle ne dépend pas de son épaisseur, et Jurin a fait voir que, pour un même liquide, l'ascension ou la dépression dans des tubes capillaires formés d'une même matière suit la raison inverse de leurs diamètres intérieurs. Ces deux faits importans étaient constatés par l'expérience, lorsque Clairaut essaya, le premier, de ramener les phénomènes de la capillarité aux lois de l'équilibre des fluides, dont il venait de trouver les équations générales**). Il considère un canal infiniment étroit, situé dans l'axe du tube, et se pro-

*) Cet article et le préambule d'un ouvrage qui paroîtra incessamment à Paris chez Mr. Bachelier et à Berlin chez Mr. Schlesinger.

**) *Théorie de la figure de la Terre*, première partie, chapitre X.

longeant au-dessous de son extrémité inférieure, pour se relever ensuite en-dehors et aboutir à la surface plane et horizontale du liquide; il montre que l'action du liquide sur la partie inférieure et sur les deux branches ascendantes de ce canal se détruit en partie, et qu'il ne subsiste que l'action du ménisque qui termine le liquide dans l'intérieur du tube; et, selon Clairaut, cette force, jointe à celle qui provient de l'action directe du tube, doit faire équilibre au poids de la partie du canal élevée au-dessus du niveau extérieur. Cette conclusion est exacte; mais il aurait dû ajouter que la seconde force, qu'il regardait comme la principale, était au contraire insensible, et ne conserver, en conséquence, que la seule action du ménisque. En effet, si l'action du tube ne dépend pas de son épaisseur, il en faut conclure qu'elle n'émane que de sa couche intérieure, d'une épaisseur insensible, en sorte que les points du tube qui sont à une distance sensible du liquide n'agissent pas sur ses molécules, ni par conséquent sur les points du canal dont la distance au tube est égale à son demi-diamètre. Faute d'avoir fait cette remarque et de l'avoir étendue à l'action du liquide sur lui-même, Clairaut a seulement ouvert la route, et n'a pas pu déduire de son analyse la loi expérimentale que Jurin avait trouvée. Mais quoique ces idées nous paraissent aujourd'hui très naturelles, et qu'on trouvât déjà un exemple du calcul de ce genre de forces dans la manière dont Newton avait déterminé l'action des corps sur la lumière, il s'est néanmoins écoulé un long intervalle de temps avant que nous eussions une théorie de l'action capillaire où l'action du tube et celle du liquide fussent envisagées sous ce point de vue.

Dans cette théorie, que Laplace a publiée en 1806 et 1807, il considère l'action des molécules du tube sur celles du liquide et l'action mutuelle des molécules du liquide, comme des forces attractives, décroissantes très rapidement suivant une loi inconnue, depuis le contact jusqu'à une distance insensible, où elles disparaissent entièrement. Ces forces ont lieu en même tems que l'attraction newtonienne qui suit la raison inverse du carré des distances; mais l'effet de celle-ci n'est sensible que dans des masses très grandes, qui peuvent balancer l'action de la terre entière sur le fil-à-plomb placé dans leur voisinage, ou bien encore, quand on l'oppose à une force de torsion très délicate, comme dans l'expérience de Cavendish pour mesurer l'attraction d'un globe de plomb d'une assez petite étendue. Les phénomènes de la capillarité ne dépendent donc pas de l'attraction qui s'étend à de grandes distances, et qu'il sera permis de négliger, sans aucune erreur, pour ne s'occuper que de celle dont la sphère d'activité est supposée tout-à fait insensible, et qu'on appelle proprement *l'attraction moléculaire.* En partant de cette hypothèse, Laplace obtient l'équation de la surface d'un liquide dans son état d'équilibre, soit en considérant son action normale sur un canal infiniment étroit et prolongé indéfiniment, soit d'après l'action tangentielle qu'il exerce sur chaque molécule superficielle; méthodes qui ne sont pas essentiellement différentes, et dont l'une doit conduire à la différentielle de l'équation donnée par l'autre, ainsi que Laplace l'a fait voir *à priori.* Il regarde l'angle sous lequel la surface intérieure du tube est coupée par celle du liquide, comme ne dépendant uniquement que de la matière du liquide et de celle du tube; en sorte que cet angle est constant et donné, dans chaque cas, pour tous les points du contour de la surface capillaire; le liquide étant supposé homogène, aussi bien que la matière du tube. L'équation qui résulte de cette considération et celle qui appartient à la surface entière sont les deux équations du problème; elles renferment les deux constantes spéciales dont j'ai parlé tout à l'heure; et c'est de ces deux équations que Laplace a déduit l'explication des différens phénomènes observés par les physiciens.

Un ou deux ans avant Laplace, Th. Young s'était déjà occupé de ces questions *). Des idées ingénieuses l'avaient conduit à reconnaître l'invariabilité de l'angle sous lequel la surface capillaire vient couper celle du tube, et le rapport qui existe entre l'élévation d'un liquide dans un tube d'un très petit diamètre et son adhésion à un disque formé de la même matière que le tube; mais il s'appuyait sur l'identité de la surface du liquide avec celle d'une membrane également tendue en tous ses points; identité qui ne peut être que la conséquence, et non le principe, de la solution du problème. Lorsque le travail de Laplace eut paru, Th. Young éleva contre sa théorie plusieurs objections, parmi lesquelles il n'y en a que deux qui me paraissent fondées: l'une, que Laplace n'a pas eu égard à l'action de la chaleur dans le calcul des forces moléculaires **), et l'autre, tirée de l'expérience, qui se rapporte au cas de plusieurs liquides superposés dans un même tube ***). J'examinerai celle-ci lorsqu'il

*) *Transactions philosophiques,* année 1805.
**) *Supplément à la Théorie de l'Action capillaire,* page 75.
***) *Supplément à l'Encyclopédie britannique,* article *Cohésion de liquides.*

sera question, dans cet ouvrage, de l'équilibre de ces liquides; quant à la nécessité de tenir compte de la répulsion calorifique, il ne peut rester aucun doute à ce sujet: mais, pour cela, il suffit de prendre pour l'action mutuelle de deux molécules, l'excès de l'attraction de leurs matières pondérables sur la répulsion de leurs quantités de chaleur, et de considérer, en conséquence, la fonction qui l'exprime comme une quantité qui peut changer de signe dans l'étendue de ses valeurs sensibles. Mais Laplace a omis, dans ses calculs, une circonstance physique dont la considération était essentielle: je veux parler de la variation rapide de densité que le liquide éprouve près de sa surface libre et près de la paroi du tube, sans laquelle le phénomènes capillaires n'auraient pas lieu, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer dans mon Mémoire sur l'équilibre des liquides *).

En effet, dans l'état d'équilibre, chaque couche infiniment mince d'un liquide est comprimée également sur ses deux faces par l'action répulsive des molécules voisines, diminuée de leur force attractive, ou, ce qui est la même chose, on peut la considérer comme appuyée sur la partie du liquide située d'un côté, et comprimée par la partie située du côté opposé; et son degré de condensation est déterminé par la grandeur de la force comprimante. A une distance sensible de la superficie du liquide, cette force provient d'une couche du liquide adjacente à la couche infiniment mince, dont l'épaisseur est complète et partout la même, c'est-à-dire égale au rayon d'activité des molécules fluides; et, pour cette raison, la densité intérieure du liquide est aussi constante, abstraction faite de la petite condensation due à la pesanteur, qui varie avec la distance à la surface supérieure. Mais quand cette distance est moindre que le rayon d'activité moléculaire, l'épaisseur de la couche située au-dessus de celle que l'on considère est aussi plus petite que ce rayon: la force comprimante qui provient de cette couche supérieure décroît alors très rapidement avec la distance à la surface, et s'évanouit entièrement à la surface même, où la couche infiniment mince n'est plus comprimée que par la pression atmosphérique. Par conséquent, la condensation du liquide décroît de même, suivant une loi inconnue, à mesure que l'on s'approche de sa surface libre, et sa densité est très différente à cette surface et à une profondeur qui excède un tant soit peu le rayon d'activité de ses molécules, ce qui suffit

*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome IX. page 76. et suivantes.

pour qu'elle soit égale à la densité intérieure du liquide. Or, on démontrera, dans le premier chapitre de cet ouvrage, que si l'on négligeait cette variation rapide de la densité dans l'épaisseur de la couche superficielle *), la surface capillaire demeurerait plane et horizontale, et il n'y aurait ni élévation ni abaissement du liquide. On fera voir de même la nécessité d'avoir égard à la compression variable que le liquide éprouve près de la paroi du tube, et qui s'étend jusqu'à la limite de l'action exercée par ce corps solide.

En ayant donc égard à ces données physiques de la question, je suis parvenu à former, dans les chapitre II. et III., l'équation commune à tous les points de la surface de contact de deux liquides superposés et contenus dans un tube quelconque, et l'équation particulière aux points de son contour, ce qui comprend, comme cas particulier, les équations relatives à la surface libre d'un seul liquide. Leur forme est la même que celle des équations de la *Mécanique céleste;* mais les expressions en intégrales définies des deux constantes spéciales qu'elles renferment sont très différentes, de sorte que leurs valeurs numériques le seraient également si, au lieu de les déterminer par l'expérience, on pouvait les calculer directement d'après leurs expressions analytiques, ce qui exigerait que l'on connût les lois des actions du tube sur le liquide et du liquide sur lui-même. On trouvera, dans les chapitres suivans, les applications de ces équations générales à l'équilibre des liquides dans les tubes d'un très petit diamètre et à d'autres questions analogues, et l'on y pourra remarquer l'usage que j'ai fait des tables elliptiques de M. Legendre, pour la solution rigoureuse de problèmes qui n'auraient pu, sans ce secours, être résolus que par approximation.

Depuis que cet ouvrage est écrit, j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Gauss, qui paraît en ce moment sous le titre de *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* **). Pour former les équations de cet équilibre, l'auteur a recours au principe des vitesses virtuelles, qu'il

---

*) Cette épaisseur doit être de grandeur finie, mais absolument insensible, d'après l'hypothèse qu'on a faite sur le peu d'étendue de la sphère d'activité moléculaire. Cela est confirmé par une expérience de M. Gay-Lussac. Ayant réduit un corps en poussière très fine, il a trouvé sa pesanteur spécifique sensiblement la même avant et après cette opération; d'où il faut conclure que l'épaisseur de la couche dilatée qui termine chacune des parcelles de poussière, est insensible eu égard à leurs dimensions.

**) Gottingue, 1830.

applique à la masse entière du liquide, et non pas, comme dans la *Mécanique analytique*, à un élément différentiel de cette masse. Il trouve, de cette manière, qu'une certaine intégrale sextuple, étendue à toute cette masse, doit être un *minimum*. Dans le cas d'un liquide homogène et incompressible, il réduit d'abord cette quantité à une intégrale quadruple; et en considérant spécialement le cas où les forces appliquées au liquide sont la pesanteur et l'attraction mutuelle de ses molécules, dont la sphère d'activité est insensible, il réduit de nouveau la quantité dont il s'agit, qui est ensuite composée de trois termes, savoir, le produit du poids du liquide et de l'ordonnée verticale de son centre de gravité, l'aire de sa surface libre multipliée par une constante qui ne dépend que de la matière du liquide, et l'aire des parois fixes contre lesquelles il s'appuie, multipliée par une seconde constante dépendante de la matière du liquide et de celle de la partie solide du système. Par les règles connues du calcul des variations, on détermine la surface inconnue du liquide qui rend cette somme un *minimum*, et, comme on sait, on trouve à la fois l'équation générale de cette surface et l'équation particulière de son contour, ce qui est l'avantage caractéristique de la méthode que M. Gauss a suivie. Mais cet illustre géomètre étant parti des mêmes données physiques que Laplace, et n'ayant pas non plus considéré la variation de densité aux extrémités du liquide, qu'il a regardé, au contraire, comme incompressible dans toutes ses parties, les objections qui s'élèvent contre la théorie de Laplace s'appliquent également à la sienne, qui ne diffère de l'autre que par la manière de former les équations d'équilibre. On peut, à cet égard, employer différens moyens; mais, sans craindre de compliquer le calcul et d'en augmenter les difficultés, il importe de ne négliger aucune des circonstances essentielles de la question, parmi lesquelles il faut compter surtout la dilatation du liquide près de sa surface libre et la condensation qui peut être produite par l'attraction du tube.

La conséquence générale que l'on tirera de notre théorie, c'est que les phénomènes de la capillarité sont dus à l'action moléculaire, modifiée, non-seulement par la courbure des surfaces, comme Laplace l'avait dit, mais aussi par l'état particulier des liquides à leurs extrémités.