Werk

Titel: Théorèmes sur les fonctions elliptiqes.

Autor: Abel, N.H.

Jahr: 1829

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0004|log17

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

13.
Théorèmes sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

La formule donnée par Mr. Jacobi dans le tome III. pag. 86. de ce journal peut être établie facilement à l'aide d'un théorème que nous allons démontrer dans ce qui suit.

En faisant $\varphi\theta = x$, on aura, en vertu de ce qu'on a vu dans le §. III. du mémoire No. 12. tome 2. de ce journal p. 117.,

$$1.\quad \varphi(2n+1)\theta = R,$$

où R est une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2 - 1$. L'équation (1.) est donc du degré $(2n+1)^2$ et ses racines peuvent être exprimées par la formule:

$$2.\quad x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ incl.

Soit pour abréger

$$3.\quad \frac{2\omega}{2n+1} = \alpha,\quad \frac{2\varpi i}{2n+1} = \beta,$$

l'expression des racines sera:

$$4.\quad x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).$$

Celà posé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. Soit $\psi\theta$ une fonction entière quelconque de la quantité $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta + \alpha$ et en $\theta + \beta$. Soit ν le plus grand exposans de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$, on aura toujours

$$5.\quad \psi\theta = p + q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$$

où p et q sont deux fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10.) tome 2. pag. 105. on a

$$\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{\varphi\theta.f(m\alpha+\mu\beta).F(m\alpha+\mu\beta) + \varphi(m\alpha+\mu\beta).f\theta.F\theta}{1 + e^2c^2.\varphi^2(m\alpha+\mu\beta).\varphi^2\theta}.$$

Cela fait voir que $\psi\theta$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta.F\theta$.

Or le carré de $f\theta.F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, savoir

$$(f\theta.F\theta)^2 = (1-c^2\varphi^2\theta)(1+e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta.F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire

$$7.\quad \psi\theta = \psi_1\{\varphi\theta\} + \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta,$$

où $\psi_1\{\varphi\theta\}$ et $\psi_2\{\varphi\theta\}$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega-\theta$ à la place de θ, on aura, en remarquant que $\varphi(\omega-\theta)=\varphi\theta$, $f(\omega-\theta)=-f\theta$, $F(\omega-\theta)=F\theta$:

$$8.\quad \psi(\omega-\theta) = \psi_1\{\varphi\theta\} - \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta.$$

Des équations (7. et 8.) on tire:

$$9.\quad \psi_1\{\varphi\theta\} = \tfrac{1}{2}.\{\psi\theta+\psi(\omega-\theta)\},$$

$$10.\quad \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta = \tfrac{1}{2}.\{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)\}.$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$. En y mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra:

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \tfrac{1}{2}.\{\psi(\theta+\alpha)+\psi(\omega-\alpha-\theta)\};$$

or on a $\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta$, et par conséquent aussi, en mettant $\omega-\alpha-\theta$ au lieu de θ:

$$\psi(\omega-\theta) = \psi(\omega-\alpha-\theta);$$

donc

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \tfrac{1}{2}\{\psi\theta+\psi(\omega-\theta)\},$$

c'est-à-dire

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \psi_1(\varphi\theta\}.$$

On aura de la même manière:

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

La première de ces équations donne, en mettant successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, ... au lieu de θ:

$$11.\quad \psi_1\{\varphi(\theta+m\alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\},$$

où m est un nombre entier quelconque.

La seconde équation donne également

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\},$$

d'où, en mettant $\theta+m\alpha$ au lieu de θ, et ayant égard à l'équation (11.) on tire:

$$12.\quad \psi_1\{\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

Donc la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$ reste la même, en y substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1.). En attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et puis ajoutant, la formule (12.) donne:

$$13.\quad \psi_1\{\varphi\theta\} = \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_{0}^{2n}{}_m\sum_{0}^{2n}{}_\mu\psi_1.\{\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)\}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (1.), donc on pourra l'exprimer rationnellement par les coëfficiens de cette équation, c'est-à-dire en $\varphi(2n+1)\theta$. Soit

$$\psi_1\{\varphi\theta\} = p,$$

la quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p sera toujours entier. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p = \frac{p'}{q'}$, où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y = \varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q' = 0$: la quantité $p = \frac{1}{2}\{\varphi\theta + \psi(\omega-\theta)\}$ sera infinie en faisant $\theta = \delta$, donc on aura $\psi\delta + \psi(\omega-\delta) = \frac{1}{0}$; maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$, que cette équation ne peut subsister à moins qu'une quantité de la forme

$$\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta) \text{ ou } \varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)$$

n'ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta) = \frac{1}{0}$, on aura en vertu de l'équation 30. tome 2, pag. 113:

$$\delta = (m'+\tfrac{1}{2})\omega + (n'+\tfrac{1}{2})\varpi i - m\alpha - \mu\beta,$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne:

$$\varphi(2n+1)\delta = \varphi\left\{[(2n+1)m'+n-2m]\omega + [(2n+1)n'+n-2\mu]\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right\},$$

c'est-à-dire (26. pag. 111.):

$$\varphi(2n+1)\delta = \tfrac{1}{0}.$$

Mais cela est impossible, car une racine quelconque de l'équation $q' = 0$ doit être finie. On trouvera également que $\varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)$ donne $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{0}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10.). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$, on aura:

$$\frac{\psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En vertu de ce qu'on a vu tome 2. 45. pag. 117, on aura $f(2n+1)\theta = f\theta.u$, $F(2n+1)\theta = F\theta.v$, où u et v sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi\{\varphi\theta\}$, on aura:

$$\chi\{\varphi\theta\} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra $\psi(\theta+\alpha = \psi\theta$, $\psi[\omega-(\theta+\alpha)] = \psi(\omega-\theta)$,

$$f(2n+1)(\theta+\alpha) = f[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i] = f(2n+1)\theta,$$
$$F(2n+1)(\theta+\alpha) = F[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i] = F(2n+1)\theta,$$

donc on aura

$$\chi\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \chi(\varphi\theta).$$

De la même manière on trouvera

$$\chi\{\varphi(\theta+\beta)\} = \chi(\varphi\theta).$$

On en tire, comme plus haut, à l'égard de la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$, que $\chi(\varphi\theta)$ peut être exprimé par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\chi(\varphi\theta) = q,$$

on aura:

$$\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta = q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

et enfin:

$$14.\quad \psi\theta = p+q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu.\chi\theta$ le terme de $\psi\theta$, dans lequel $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance, on aura, en supposant $\varphi\theta$ infini:

$$\psi\theta = A.(\varphi\theta)^\nu,$$

où A est une constante. De même on aura

$$\psi(\omega-\theta) = A'.(\varphi\theta)^\nu,$$

et par suite:

$$p = \tfrac{1}{2}(A+A').(\varphi\theta)^\nu;$$

mais pour $\varphi\theta$ infini, on a $\varphi(2n+1)\theta = B.\varphi\theta$, où B est une constante. Il suit de là que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu-2$, tout au plus.

Voilà demontré notre théorème.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$, on a $\nu=1$; par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q=0$. Donc on a dans ce cas

$$15.\quad \psi\theta = A+B.\varphi(2n+1)\theta,$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on trouvera facilement en faisant $\theta=0$ et $\varphi\theta=\frac{1}{0}$.

Soit par exemple $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1.), et faisons

$$\psi\theta = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta)$, en remarquant que

$$\pi[\theta + (2n+1)\alpha + \mu\beta] = \pi(\theta + \mu\beta)$$

et

$$\pi[\theta + (2n+1)\beta + m\alpha] = \pi(\theta + m\alpha).$$

Donc:

$$16. \quad \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B.\varphi(2n+1)\theta.$$

Il faut remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A = 0$, si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair, et $B = 0$, si ce nombre est pair. Donc la quantité $\psi\theta$ est indépendante de la valeur de θ. Dans ce dernier cas, par conséquent, en faisant, $\theta = 0$ on a:

$$17. \quad \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha + \mu\beta).$$

Donc en faisant

$$\pi\theta = \varphi\theta.\varphi(\theta + k\alpha + k'\beta),$$

on a:

$$18. \quad \begin{cases} \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).\varphi[\theta + (m+k)\alpha + (\mu+k')\beta] \\ = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta).\varphi[(m+k)\alpha + (\mu+k')\beta], \end{cases}$$

où k et k' sont des nombres entiers quelconques, moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k = 0$, $k' = 0$. Car cela donne $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu = 2$, tandis qu'on doit avoir

$$\nu = 1.$$

De la même manière que nous avons demontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivans:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi\theta = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta),$$

on aura:

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi(\theta) = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.f(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

En vertu du premier théorème on voit sans difficulté que la valeur de $\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$, exprimée en fonction de $\varphi\theta$, sera:

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}.\left\{\sum_{0}^{4n^2+4n}{}_m \sqrt[2n+1]{(p_m + q_m.F\theta.f\theta)}\right\},$$

où p_m et q_m sont deux fonctions entières de $\varphi\theta$, la première impaire et du degré $2n+1$, la seconde paire et du degré $2n-2$. D'ailleurs ces fonctions sont déterminées par l'équation

$$p_m^2 - q_m^2(f\theta)^2.(F\theta)^2 = (\varphi^2\theta - a_m^2)^{2n+1},$$

où a_m est une constante.

Christiania, le 27. Août 1828.