Werk

Titel: Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wi...

Autor: Olivier, Louis

Jahr: 1827

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0002|log28

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

21.

Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie der Cosinus und Sinus.

(Von Herrn *Louis Olivier.*)

1.

Wenn e die Zahl bezeichnet, deren natürlicher Logarithme 1 ist, so ist bekanntlich

$$1.\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \cdots + \frac{x^m}{2.3 \ldots m},$$

welche Reihe auch für jeden beliebigen, endlichen Werth von x convergirt.

Wenn man ferner eine der imaginairen Wurzeln der Gleichung

$$2.\quad x^n - 1 = 0,$$

gleichviel welche, durch α bezeichnet, so sind bekanntlich die n Wurzeln dieser Gleichung, der Reihe nach:

$$3.\quad \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3 \ldots \alpha^n,$$

und wenn man irgend eine von den Wurzeln der Gleichung

$$4.\quad x^n + 1 = 0$$

durch β bezeichnet, so sind die n Wurzeln dieser Gleichung, der Reihe nach:

$$5.\quad \beta\alpha,\ \beta\alpha^2,\ \beta\alpha^3 \ldots \beta\alpha^n.$$

Desgleichen ist bekanntlich

$$6.\quad \begin{cases} \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots + \alpha^n = 0 \text{ und} \\ \beta\alpha + \beta\alpha^2 + \beta\alpha^3 \ldots + \beta\alpha^n = 0. \end{cases}$$

Setzt man in (1.), der Reihe nach, αx, $\alpha^2 x$, $\alpha^3 x \ldots \alpha^n x$ und $\beta\alpha x$, $\beta\alpha^2 x$, $\beta\alpha^3 x \ldots \beta\alpha^n x$ statt x, so erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^m x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\alpha^2 x} = 1 + \alpha^2 x + \frac{\alpha^4 x^2}{2} + \frac{\alpha^6 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^{2m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\alpha^3 x} = 1 + \alpha^3 x + \frac{\alpha^6 x^2}{2} + \frac{\alpha^9 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^{3m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\alpha^n x} = 1 + \alpha^n x + \frac{\alpha^{2n} x^2}{2} + \frac{\alpha^{3n} x^3}{2.3} \ldots + \frac{\alpha^{nm} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \end{cases}$$

und

$$8.\quad \begin{cases} e^{\beta\alpha x} = 1 + \beta\alpha x + \frac{\beta^2 \alpha^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 \alpha^3 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^m x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\beta\alpha^2 x} = 1 + \beta\alpha^2 x + \frac{\beta^2 \alpha^4 x^2}{2} + \frac{\beta^3 \alpha^6 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^{2m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ e^{\beta\alpha^3 x} = 1 + \beta\alpha^3 x + \frac{\beta^2 \alpha^6 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 \alpha^9 x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^{3m} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\beta\alpha^n x} = 1 + \beta\alpha^n x + \frac{\beta^2 \alpha^{2n} x^2}{2} + \frac{\beta^3 \alpha^{3n} x^3}{2.3} \ldots + \frac{\beta^m \alpha^{nm} x^m}{2.3 \ldots m} \ldots \end{cases}$$

Insofern nun n eine Primzahl ist, so sind die Potenzen

$$\alpha^m,\ \alpha^{2m},\ \alpha^{3m} \ldots\ldots \alpha^{nm}$$

von α, weil z. B. $\alpha^{n+1} = \alpha$, $\alpha^{n+2} = \alpha^2$ etc., für jedes beliebige m, welches nicht 1, oder ein beliebiges Vielfache von n ist, den Potenzen

$$\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^n$$

von α gleich, nur in verschiedener Aufeinanderfolge. Also ist nicht allein

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots\ldots + \alpha^n = 0 \quad (6.),$$

sondern auch,

$$9.\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 \ldots\ldots + \alpha^{2n} = 0, \\ \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 \ldots\ldots + \alpha^{3n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^m + \alpha^{2m} + \alpha^{3m} \ldots\ldots + \alpha^{mn} = 0, \end{cases}$$

in sofern m nicht 1 oder ein Vielfaches von n ist. Hingegen für $m = n$ ist $\alpha^n = 1$, $\alpha^{2n} = 1$ etc., also

$$10.\quad \alpha^n + \alpha^{2n} + \alpha^{3n} \ldots\ldots + \alpha^{n^2} = n.$$

Desgleichen ist

$$11.\quad \beta^n = -1,\ \beta^{2n} = +1,\ \beta^{3n} = -1 \text{ etc.}$$

Nimmt man daher die Summe der Gleichungen (7. und 8.), so findet man, vermöge (6., 9., 10. und 11.):

12.

$$12.\quad e^{\alpha x} + e^{\alpha^2 x} + e^{\alpha^3 x} \ldots + e^{\alpha^n x}$$
$$= n\left(1 + \frac{x^n}{2.3\ldots n} + \frac{x^{2n}}{2.3\ldots 2n} + \frac{x^{3n}}{2.3\ldots 3n} \ldots\right) \text{ und}$$

$$13.\quad e^{\beta\alpha x} + e^{\beta\alpha^2 x} + e^{\beta\alpha^3 x} \ldots + e^{\beta\alpha^n x}$$
$$= n\left(1 + \frac{x^n \beta^n}{2.3\ldots n} + \frac{x^{2n} \beta^{2n}}{2.3\ldots 2n} + \frac{x^{3n} \beta^{3n}}{2.3\ldots 3n} + \ldots\right).$$

Multiplicirt man ferner in (7. und 8.) die erste Gleichung mit α^{n-1}, die zweite mit α^{n-2}, die dritte mit α^{n-3} u. s. w., und nimmt die Summe der Producte, so findet man, wie leicht zu sehen:

$$14.\quad \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \alpha^{n-2} e^{\alpha^2 x} + \alpha^{n-3} e^{\alpha^3 x} \ldots e^{\alpha^n x}$$
$$= n\left(x + \frac{x^{n+1}}{2.3\ldots n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2.3\ldots 2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{2.3\ldots 3n+1} \ldots\right) \text{ und}$$

$$15.\quad \alpha^{n-1} e^{\beta\alpha x} + \alpha^{n-2} e^{\beta\alpha^2 x} + \alpha^{n-3} e^{\beta\alpha^3 x} + \ldots e^{\beta\alpha^n x}$$
$$= n\beta\left(x + \frac{x^{n+1} \beta^n}{2.3\ldots n+1} + \frac{x^{2n+1} \beta^{2n}}{2.3\ldots 2n+1} + \frac{x^{3n+1} \beta^{3n}}{2.3\ldots 3n+1} + \ldots\right).$$

Multiplicirt man in (7. und 8.) die erste Gleichung mit $\alpha^{2(n-1)}$, die zweite mit $\alpha^{2(n-2)}$, die dritte mit $\alpha^{2(n-3)}$ u. s. w., und nimmt die Summe der Producte, so findet man:

$$16.\quad \alpha^{2(n-1)} e^{\alpha x} + \alpha^{2(n-2)} e^{\alpha^2 x} + \alpha^{2(n-3)} e^{\alpha^3 x} \ldots + e^{\alpha^n x}$$
$$= n\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{n+2}}{2.3\ldots n+2} + \frac{x^{2n+2}}{2.3\ldots 2n+2} + \frac{x^{3n+2}}{2.3\ldots 3n+2} \ldots\right) \text{ und}$$

$$17.\quad \alpha^{2(n-1)} e^{\beta\alpha x} + \alpha^{2(n-2)} e^{\beta\alpha^2 x} + \alpha^{2(n-3)} e^{\beta\alpha^3 x} \ldots + e^{\beta\alpha^n x}$$
$$= n\beta^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{n+2}}{2.3\ldots n+2} + \frac{x^{2n+2}}{2.3\ldots 2n+2} + \frac{x^{3n+2}}{2.3\ldots 3n+2} \ldots\right).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man allgemein:

$$18.\quad \frac{\alpha^{m(n-1)} e^{\alpha x} + \alpha^{m(n-2)} e^{\alpha^2 x} + \alpha^{m(n-3)} e^{\alpha^3 x} \ldots + e^{\alpha^n x}}{n}$$
$$= \frac{x^m}{2.3\ldots m} + \frac{x^{n+m}}{2.3\ldots m+n} + \frac{x^{2n+m}}{2.3\ldots 2n+m} + \frac{x^{3n+m}}{2.3\ldots 3n+m} - \ldots$$

und

$$19.\quad \frac{\alpha^{m(n-1)} e^{\beta\alpha x} + \alpha^{m(n-2)} e^{\beta\alpha^2 x} + \alpha^{m(n-3)} e^{\beta\alpha^3 x} \ldots + e^{\beta\alpha^n x}}{n\beta^m}$$
$$= \frac{x^m}{2.3\ldots m} + \frac{x^{n+m}\beta^n}{2.3\ldots m+n} + \frac{x^{2n+m}\beta^{2n}}{2.3\ldots 2n+m} + \frac{x^{3n+m}\beta^{3n}}{2.3\ldots 3n+m} - \ldots$$

So kann man die Reihen rechterhand in (18. und 19.) für ein beliebiges m und n, durch Exponential-Gröfsen ausdrücken. Die Gleichung (19.)

findet man auch aus der Gleichung (18.), wenn man blos βx statt x setzt; wie gehörig.

2.

Wenn $n=1$, so ist $\alpha=1$ und $\beta=-1$, desgleichen kann m nur 0 sein. Also ist in diesem Falle, wegen der allgemeinen Gleichungen (18. und 19.):

$$20.\quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}\cdots \text{ und}$$

$$21.\quad e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}\cdots,$$

welches mit (1.) übereinstimmt.

Wenn $n=2$ ist, so ist $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{-1}(=i)$, und m kann 0 und 1 sein; also ist, zufolge (18. und 19.):

$$22.\quad \begin{cases} \frac{e^{-x}+e^{+x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^6}{2.3....6}+\frac{x^8}{2.3....8}\cdots \\ \frac{-e^{-x}+e^{+x}}{2} = x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3...5}+\frac{x^7}{2.3....7}+\frac{x^9}{2.3....9}\cdots \end{cases}$$

$$23.\quad \begin{cases} \frac{e^{-ix}+e^{+ix}}{2} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3....6}+\frac{x^8}{2.3....8}\cdots \\ \frac{-e^{-ix}+e^{+ix}}{2i} = x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2\,3...5}-\frac{x^7}{2.3....7}+\frac{x^9}{2.3....9}\cdots \end{cases}$$

Die Gröfsen in (23.) linkerhand bezeichnet man auch durch $\cos x$ und $\sin x$, und die Reihen rechterhand sind die bekannten für $\cos x$ und $\sin x$.

3.

Wenn $n=3$, welches der nächste Fall nach $n=2$ ist, so ist $\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $\beta=-1$ und m kann 0, 1 oder 2 sein. Also ist, zufolge (18. und 19.):

$$24.\quad \begin{cases} \frac{e^{ax}+e^{a^2x}+e^{a^3x}}{3} = 1+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^6}{2.3....6}+\frac{x^9}{2.3....9}+\frac{x^{12}}{2.3....12}\cdots \\ \frac{\alpha^2 e^{ax}+\alpha e^{a^2x}+e^{a^3x}}{3} = x+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^7}{2.3....7}+\frac{x^{10}}{2.3....10}+\frac{x^{13}}{2.3...13}\cdots \\ \frac{\alpha e^{ax}+\alpha^2 e^{a^2x}+e^{a^3x}}{3} = \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{2.3....5}+\frac{x^8}{2.3....8}+\frac{x^{11}}{2.3....11}+\frac{x^{14}}{2.3....14}\cdots \end{cases}$$

$$25.\quad \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x}+e^{-\alpha^2 x}+e^{-\alpha^3 x}}{3} = 1-\dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^6}{2.3....6}-\dfrac{x^9}{2.3....9}+\dfrac{x^{12}}{2.3....12}\cdots \\ -\dfrac{\alpha^2 e^{-\alpha x}+\alpha e^{-\alpha^2 x}+e^{-\alpha^3 x}}{3} = x-\dfrac{x^4}{2.3.4}+\dfrac{x^7}{2.3....7}-\dfrac{x^{10}}{2.3....10}+\dfrac{x^{13}}{2.3....13}\cdots \\ \dfrac{\alpha\, e^{-\alpha x}+\alpha^2\, e^{-\alpha^2 x}+e^{-\alpha^3 x}}{3} = \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{2.3....5}+\dfrac{x^8}{2.3....8}-\dfrac{x^{11}}{2.3....11}+\dfrac{x^{14}}{2.3....14}\cdots \end{cases}$$

Man erhält auch die Reihen (25.) aus denjenigen (24.), wenn man blos $-x$ statt $+x$ setzt. Desgleichen sind, wie leicht zu sehen, die Gleichungen (24.) die Differentiale von einander. Bezeichnet man daher die Reihen rechts in (24. und 25.), der Kürze wegen, durch $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$ und $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x$, und zwar so, dafs

$$26.\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^5}{2.3....5}+\dfrac{x^8}{2.3....8}+\dfrac{x^{11}}{2.3....11}\cdots = \varphi_3 x, \\ x+\dfrac{x^4}{2.3.4}+\dfrac{x^7}{2.3....7}+\dfrac{x^{10}}{2.3....10}\cdots = \varphi_2 x, \\ 1+\dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^6}{2.3....6}+\dfrac{x^9}{2.3....9}\cdots = \varphi_1 x, \end{cases}$$

$$27.\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{2.3....5}+\dfrac{x^8}{2.3....8}-\dfrac{x^{11}}{2.3....11}\cdots = f_3 x, \\ x-\dfrac{x^4}{2.3.4}+\dfrac{x^7}{2.3....7}-\dfrac{x^{10}}{2.3....10}\cdots = f_2 x, \\ 1-\dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^6}{2.3....6}-\dfrac{x^9}{2.3....9}\cdots = f_1 x, \end{cases}$$

so ist, weil $\alpha^3 = 1$:

$$28.\quad \begin{cases} e^x + e^{\alpha x} + e^{\alpha^2 x} = 3\varphi_1 x = 3\partial\varphi_2 x = 3\partial^2\varphi_3 x, \\ e^x + \alpha^2 e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha^2 x} = 3\varphi_2 x = 3\partial\varphi_3 x = 3\partial^2\varphi_1 x, \\ e^x + \alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x} = 3\varphi_3 x = 3\partial\varphi_1 x = 3\partial^2\varphi_2 x, \end{cases}$$

und

$$29.\quad \begin{cases} e^{-x} + e^{-\alpha x} + e^{-\alpha^2 x} = 3f_1 x = 3\partial f_2 x = 3\partial^2 f_3 x, \\ e^{-x} + \alpha^2 e^{-\alpha x} + \alpha e^{-\alpha^2 x} = -3f_2 x = -3\partial f_3 x = +3\partial^2 f_1 x, \\ e^{-x} + \alpha e^{-\alpha x} + \alpha^2 e^{-\alpha^2 x} = 3f_3 x = -3\partial f_1 x = -3\partial^2 f_2 x. \end{cases}$$

Hieraus kann man für die Functionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$ und $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x$ allerhand Folgerungen ziehen.

Erstlich. I. Man findet z. B.

$$30.\quad \begin{cases} 27\varphi_1 x^3 = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 3e^{(2+\alpha)x} + 3e^{(2+\alpha^2)x} + 3e^{(2\alpha+1)x} \\ \qquad\qquad + 3e^{(2\alpha+\alpha^2)x} + 3e^{(2\alpha^2+1)x} + 3e^{(2\alpha^2+\alpha)x} + 6, \\ 27\varphi_2 x^3 = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 3\alpha^2 e^{(2+\alpha)x} + 3\alpha e^{(2+\alpha^2)x} + 3\alpha e^{(2\alpha+1)x} \\ \qquad\qquad + 3\alpha^2 e^{(2\alpha+\alpha^2)x} + 3\alpha^2 e^{(2\alpha^2+1)x} + 3\alpha e^{(2\alpha^2+\alpha)x} + 6, \\ 27\varphi_3 x^3 = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 3\alpha e^{(2+\alpha)x} + 3\alpha^2 e^{(2+\alpha^2)x} + 3\alpha^2 e^{(2\alpha+1)x} \\ \qquad\qquad + 3\alpha e^{(2\alpha+\alpha^2)x} + 3\alpha e^{(2\alpha^2+1)x} + 3\alpha^2 e^{(2\alpha^2+\alpha)x} + 6. \end{cases}$$

Dieses giebt, wenn man die Summe nimmt:

$$31.\quad 9(\varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3) = e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} + 6,$$

und weil, vermöge der ersten Gleichung (28.),

$$e^{3x} + e^{3\alpha x} + e^{3\alpha^2 x} = 3\varphi_1(3x) \text{ ist:}$$

$$32.\quad 3(\varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3) = \varphi_1(3x) + 2.$$

II. Nimmt man von der Gleichung (32.) das erste Differential, so findet man, vermöge (28.):

$$33.\quad 3(\varphi_1 x^2 \varphi_3 x + \varphi_2 x^2 \varphi_1 x + \varphi_3 x^2 \varphi_2 x) = \varphi_3(3x).$$

Nimmt man von dieser Gleichung das erste Differential, so erhält man:

$$34.\quad 3(\varphi_1 x^2 \varphi_2 x + \varphi_2 x^2 \varphi_3 x + \varphi_3 x^2 \varphi_1 x) = \varphi_2(3x).$$

Nimmt man von dieser letzten Gleichung das erste Differential, so findet man:

$$35.\quad 6\varphi_1 x \varphi_2 x \varphi_3 x + \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3 = \varphi_1(3x).$$

Dieses giebt auch, wenn man die Gleichung (35.) dreimal nimmt, und davon die Gleichung (32.) abziehet:

$$18\varphi_1 x \varphi_2 x \varphi_3 x = 2\varphi_1(3x) - 2, \text{ oder}$$

$$36.\quad 9\varphi_1 x \varphi_2 x \varphi_3 x = \varphi_1(3x) - 1.$$

Ziehet man (36.) von (35.) ab, so erhält man:

$$37.\quad \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^3 + \varphi_3 x^3 - 3\varphi_1 x \varphi_2 x \varphi_3 x = 1.$$

III. Wenn man zu den drei Gleichungen (28.) mit x, ähnlich mit y setzt, nemlich:

$$38.\quad \begin{cases} e^y + e^{\alpha y} + e^{\alpha^2 y} = 3\varphi_1 y, \\ e^y + \alpha^2 e^{\alpha y} + \alpha e^{\alpha^2 y} = 3\varphi_2 y, \\ e^y + \alpha e^{\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 y} = 3\varphi_3 y, \end{cases}$$

und multiplicirt nun die Gleichungen (28.) mit den Gleichungen (38.), so erhält man:

$$39.\quad \begin{cases} 9\Phi_1 x\Phi_1 y = e^{x+y} + e^{\alpha x+y} + e^{\alpha^2 x+y} + e^{x+\alpha y} + e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + e^{x+\alpha^2 y} + e^{\alpha x+\alpha^2 y} + e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_2 x\Phi_2 y = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha x+y} + \alpha e^{\alpha^2 x+y} + \alpha^2 e^{x+\alpha y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha e^{x+\alpha^2 y} + e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_3 x\Phi_3 y = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha x+y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+y} + \alpha e^{x+\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha^2 e^{x+\alpha^2 y} + e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_1 x\Phi_2 y = e^{x+y} + e^{\alpha x+y} + e^{\alpha^2 x+y} + \alpha^2 e^{x+\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha e^{x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_1 x\Phi_3 y = e^{x+y} + e^{\alpha x+y} + e^{\alpha^2 x+y} + \alpha e^{x+\alpha y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha^2 e^{x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_2 x\Phi_1 y = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha x+y} + \alpha e^{\alpha^2 x+y} + e^{x+\alpha y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + e^{x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_2 x\Phi_3 y = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha x+y} + \alpha e^{\alpha^2 x+y} + \alpha e^{x+\alpha y} + e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha^2 e^{x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha x+\alpha^2 y} + e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_3 x\Phi_1 y = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha x+y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+y} + e^{x+\alpha y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + e^{x+\alpha^2 y} + \alpha e^{\alpha x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 9\Phi_3 x\Phi_2 y = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha x+y} + \alpha^2 e^{\alpha^2 x+y} + \alpha^2 e^{x+\alpha y} + e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2 x+\alpha y} \\ \qquad + \alpha e^{x+\alpha^2 y} + \alpha^2 e^{\alpha x+\alpha^2 y} + e^{\alpha^2(x+y)}. \end{cases}$$

Daraus folgt, wie leicht zu sehen,

$$40.\quad \begin{cases} 3(\Phi_1 x\Phi_1 y + \Phi_2 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_2 y) = e^{x+y} + e^{\alpha(x+y)} + e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 3(\Phi_2 x\Phi_2 y + \Phi_1 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_1 y) = e^{x+y} + \alpha e^{\alpha(x+y)} + \alpha^2 e^{\alpha^2(x+y)}, \\ 3(\Phi_3 x\Phi_3 y + \Phi_1 x\Phi_2 y + \Phi_2 x\Phi_1 y) = e^{x+y} + \alpha^2 e^{\alpha(x+y)} + \alpha e^{\alpha^2(x+y)}, \end{cases}$$

also ist, vermöge (28.):

$$41.\quad \begin{cases} \Phi_1 x\Phi_1 y + \Phi_2 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_2 y = \Phi_1(x+y), \\ \Phi_2 x\Phi_2 y + \Phi_1 x\Phi_3 y + \Phi_3 x\Phi_1 y = \Phi_3(x+y), \\ \Phi_3 x\Phi_3 y + \Phi_1 x\Phi_2 y + \Phi_2 x\Phi_1 y = \Phi_2(x+y). \end{cases}$$

Desgleichen folgt aus (41. und 39.):

$$42.\quad (\Phi_1 x+\Phi_2 x+\Phi_3 x)(\Phi_1 y+\Phi_2 y+\Phi_3 y) = \Phi_1(x+y)+\Phi_2(x+y)+\Phi_3(x+y$$

IV. Aus (28.) folgt:

$$43.\quad \begin{cases} e^x = \Phi_1 x + \Phi_2 x + \Phi_3 x, \\ e^{\alpha x} = \Phi_1 x + \alpha\Phi_2 x + \alpha^2\Phi_3 x, \\ e^{\alpha^2 x} = \Phi_1 x + \alpha^2\Phi_2 x + \alpha\Phi_3 x, \end{cases}$$

also ist für einen beliebigen Exponenten m:

$$44.\quad \begin{cases} (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m = \varphi_1 mx + \varphi_2 mx + \varphi_3 mx, \\ (\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m = \varphi_1 mx + \alpha\varphi_2 mx + \alpha^2\varphi_3 mx, \\ (\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m = \varphi_1 mx + \alpha^2\varphi_2 mx + \alpha\varphi_3 mx. \end{cases}$$

Daraus folgt auch:

$$45.\quad \begin{cases} 3\varphi_1 mx = (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m + (\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m \\ \qquad\qquad + (\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m, \\ 3\varphi_2 mx = (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m + \alpha^2(\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m \\ \qquad\qquad + \alpha(\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m, \\ 3\varphi_3 mx = (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x)^m + \alpha(\varphi_1 x + \alpha\varphi_2 x + \alpha^2\varphi_3 x)^m \\ \qquad\qquad + \alpha^2(\varphi_1 x + \alpha^2\varphi_2 x + \alpha\varphi_3 x)^m. \end{cases}$$

Zweitens. V. Die Gleichungen (29.) geben auf die Weise wie (30., 31. und 32.), wie leicht zu sehen:

$$46.\quad 3(f_1 x^3 - f_2 x^3 + f_3 x^3) = f_1(3x) + 2.$$

Nimmt man davon das erste Differential, so findet man, vermöge (29.):

$$47.\quad 3(f_1 x^2 f_3 x + f_2 x^2 f_1 x - f_3 x^2 f_2 x) = f_3(3x).$$

Das erste Differential von dieser neuen Gleichung giebt:

$$48.\quad 3(f_1 x^2 f_2 x - f_2 x^2 f_3 x - f_3 x^2 f_1 x) = f_2(3x).$$

Das erste Differential von dieser neuen Gleichung giebt:

$$49.\quad f_1 x^3 - f_2 x^3 + f_3 x^3 - 6 f_1 x f_2 x f_3 x = f_1(3x).$$

Dieses giebt auch, wenn man die Gleichung (49.) dreimal nimmt und von der Gleichung (47.) abziehet:

$$18 f_1 x f_2 x f_3 x = -2 f_1(3x) + 2, \text{ oder}$$

$$50.\quad 9 f_1 x f_2 x f_3 x = 1 - f_1(3x).$$

VI. Verfährt man ferner mit den durch f_1, f_2, f_3 bezeichneten Functionen wie in (III.), so werden die Resultate, welche man findet, wie leicht zu sehen, den dortigen ähnlich sein, nur dafs immer Alles, was f_2 enthält, das entgegengesetzte Zeichen hat. Es ist also, vermöge (41.):

$$51.\quad \begin{cases} f_1 x f_1 y - f_2 x f_3 y - f_3 x f_2 y = f_1(x+y), \\ f_2 x f_2 y + f_1 x f_3 y + f_3 x f_1 y = f_3(x+y), \\ -f_3 x f_3 y + f_1 x f_2 y + f_2 x f_1 y = f_2(x+y), \end{cases}$$

und, vermöge (42.):

$$52.\quad (f_1 x - f_2 x + f_3 x)(f_1 y - f_2 y + f_3 y) = f_1(x+y) - f_2(x+y) + f_3(x+y),$$

desgleichen, vermöge (44. 45.):

$$53.\quad \begin{cases} (f_1x - f_2x + f_3x)^m = f_1mx - f_2mx + f_3mx, \\ (f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m = f_1mx - \alpha f_2mx + \alpha^2 f_3mx, \\ (f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m = f_1mx - \alpha^2 f_2mx + \alpha f_3mx, \end{cases}$$

$$54.\quad \begin{cases} 3f_1mx = (f_1x - f_2x + f_3x)^m + (f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m + (f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m, \\ -3f_2mx = (f_1x - f_2x + f_3x)^m + \alpha^2(f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m + \alpha(f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m, \\ 3f_3mx = (f_1x - f_2x + f_3x)^m + \alpha(f_1x - \alpha f_2x + \alpha^2 f_3x)^m + \alpha^2(f_1x - \alpha^2 f_2x + \alpha f_3x)^m. \end{cases}$$

Wie man siehet, haben alle diese Resultate eine gewisse Aehnlichkeit mit den Gleichungen, welche die Eigenschaften der Sinus und Cosinus ausdrücken.

Man kann ferner $n = 4$, $n = 5$ u. s. w. setzen, und wird ähnliche Resultate finden. Wir überlassen einstweilen dem Leser den Gegenstand weiter zu verfolgen *).

---

*) Fast zu derselben Zeit, als ich diesen Aufsatz für das Journal erhielt, wurde mir auch von Herrn Magnus, Lehrer der Mathematik zu Berlin, eine Abhandlung über den nemlichen Gegenstand übergeben, dessen auf anderem Wege gefundenen Resultate mit den obigen, wo sie darauf zutreffen, auch übereinstimmen. Herr Magnus, nachdem er von dem gegenwärtigen Aufsatze gehört, willigte aber nicht ein, den seinigen in dem Journal abdrucken zu lassen. Da mir nun mit Gewifsheit bekannt ist, dafs die Verfasser der beiden Aufsätze von einander nicht wufsten, und einer des anderen Arbeit nicht kannte, so habe ich die Ueberzeugung, dafs beiden die obigen Ideen mit gleichem Recht angehören, welches ich zu bemerken nöthig glaubte.

Der Herausgeber.