Werk

Titel: Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y, wie ...

Autor: Abel, N.H.

Jahr: 1826

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0001|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

2.

Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Gröſsen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daſs $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von z, x und y ist.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

Wenn man z. B. die Functionen $x+y$ und xy durch $f(x, y)$ bezeichnet, so ist für die erste $f(z, f(x, y)) = z + f(x, y) = z + x + y$ und für die zweite $f(z, f(x, y)) = z.f(x, y) = zxy$. Die Function $f(x, y)$ hat also in den beiden Fällen die merkwürdige Eigenschaft, daſs $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function der drei unabhängig-veränderlichen Gröſsen z, x und y ist. Ich will in diesem Aufsatze die allgemeine Gestalt der Functionen suchen, welche eben diese Eigenschaft haben.

Die Grundgleichung ist:

1. $f(z, f(x, y)) =$ einer symmetrischen Function von x, y und z.

Eine symmetrische Function bleibt die nämliche, wie man auch die veränderlichen Gröſsen, von welchen sie abhängt, unter einander verwechseln mag. Es finden also folgende Gleichungen statt:

$$2.\quad \begin{cases} f(z, f(x, y)) = f(z, f(y, x)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(z, y)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(y, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(x, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{cases}$$

Die erste Gleichung kann nicht anders Statt finden, als wenn

$$f(x, y) = f(y, x)$$

ist; das heiſst $f(x, y)$ muſs eine symmetrische Function von x und y sein. Aus diesem Grunde reduciren sich die Gleichungen (2) auf folgende zwei:

$$3.\quad \begin{cases} f(z, f(x, y)) = f(x, f(z, y)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{cases}$$

Es sei der Kürze wegen

$$f(x, y) = r;\ f(z, y) = v;\ f(z, x) = s;\ \text{so ist}$$

$$4.\ f(z, r) = f(x, v) = f(y, s).$$

Man differentiire der Reihe nach, nach x, y, z, so findet man

$$f'(r)\left(\frac{dr}{dx}\right) = f'(s)\left(\frac{ds}{dx}\right),$$

$$f'(v)\left(\frac{dv}{dy}\right) = f'(r)\left(\frac{dr}{dy}\right),$$

$$f'(s)\left(\frac{ds}{dz}\right) = f'(v)\left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Multiplicirt man die Glieder dieser Gleichungen auf beiden Seiten mit einander und dividirt die Producte durch $f'(r)$, $f'(v)$, $f'(s)$, so erhält man folgende Gleichung

$$5.\ \left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dy}\right)\cdot\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dz}\right)\cdot\left(\frac{ds}{dx}\right),$$

oder auch

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\frac{\left(\frac{dv}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)} = \left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dz}\right)}.$$

Nun setze man z unveränderlich, so reducirt sich $\left(\frac{dv}{dy}\right) : \left(\frac{dv}{dz}\right)$ auf eine Function von y allein. Diese Function sei φy, so muſs zu gleicher Zeit $\left(\frac{ds}{dx}\right) : \left(\frac{ds}{dz}\right) = \varphi x$ sein: denn s ist die nämliche Function von z und x, wie v von z und y.

Es ist also alsdann

$$6.\ \left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\varphi y = \left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\varphi x.$$

Daraus findet man, wenn man integrirt, für den allgemeinen Werth von r,

$$r = \psi\left(\int\varphi x.\ dx + \int\varphi y.\ dy\right),$$

wenn ψ eine willkürliche Function ist.

Man setze der Kürze wegen φx statt $\int(\varphi x.\ dx)$ und φy statt $\int(\varphi y.\ dy)$, so ist

$$7.\ r = \psi(\varphi x + \varphi y)\quad\text{oder}\quad f(x, y) = \psi(\varphi x + \varphi y).$$

Diese Form also ist es, welche die gesuchte Function haben muſs. Sie

kann aber in ihrer ganzen Allgemeinheit der Gleichung (4) nicht genug thun. In der That ist die Gleichung (5), welche die Form der Function $f(x, y)$ giebt, viel allgemeiner als die Gleichung (4), welcher sie entsprechen mufs. Es kommt also auf die Beschränkungen an, denen die allgemeine Gleichung unterworfen ist.

Es ist $f(z, r) = \psi(\varphi z + \varphi r)$.

Aber $r = \psi(\varphi x + \varphi y)$, also

$$f(z, r) = \psi\big(\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y)\big).$$

Dieser Ausdruck soll nach x, y, z, symmetrisch sein. Also mufs

$$\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi\psi(\varphi y + \varphi z)$$

sein. Es sei $\varphi z = 0$ und $\varphi y = 0$, so erhält man

$$\varphi\psi(\varphi x) = \varphi x + \varphi\psi(0) = \varphi x + c,$$

also wenn man $\varphi x = p$ setzt,

$$\varphi\psi(p) = p + c.$$

Bezeichnet man also durch φ_1 die umgekehrte Function von derjenigen, welche φ ausdrückt, nämlich diejenige, für welche

$$\varphi\varphi_1(x) = x$$

ist, so findet man

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c).$$

Die allgemeine Form der gesuchten Function $f(x, y)$ ist also

$$f(x, y) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y),$$

und diese Function hat in der That die verlangte Eigenschaft.

Es folgt daraus

$$\varphi f(x, y) = c + \varphi x + \varphi y,$$

oder wenn man statt φx, $\psi x - c$ setzt, und folglich statt φy, $\psi y - c$, und statt $\varphi\big(f(x, y)\big)$, $\psi\big(f(x, y)\big) - c$,

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Dieses giebt folgenden Lehrsatz:

Sobald eine Function $f(x, y)$ zweier unabhängig veränderlichen Gröfsen x und y die Eigenschaft hat, dafs $f\big(z, f(x, y)\big)$ eine symmetrische Function von x, y und z ist, so mufs es allemal eine Function ψ geben, für welche

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y)$$

ist.

Wenn die Function $f(x, y)$ bekannt ist, so findet man leicht ψx. In

der That erhält man, wenn man die obige Gleichung nach x und nach y differentiirt und der Kürze wegen $f(x, y) = r$ setzt,

$$\psi'(r)\left(\frac{dr}{dx}\right) = \psi' x,$$

$$\psi'(r)\left(\frac{dr}{dy}\right) = \psi' y,$$

also wenn man $\psi' r$ eliminirt,

$$\left(\frac{dr}{dy}\right)\psi' x = \left(\frac{dr}{dx}\right)\psi' y,$$

woraus

$$\psi' x = \psi' y . \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)}$$

folgt. Multiplicirt man also mit dx und integrirt, so erhält man

$$\psi(x) = \psi' y . \int \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)} dx.$$

Es sei zum Beispiel

$$r = f(x, y) = xy,$$

so muſs sich eine Function ψ finden lassen, für welche

$$\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y)$$

ist. Da $r = xy$, so ist $\left(\frac{dr}{dx}\right) = y$ $\left(\frac{dr}{dy}\right) = x$, also

$$\psi x = \psi' y . \int \frac{y}{x} dx = y \psi' y \log(cx),$$

oder weil y unveränderlich angenommen wird,

$$\psi x = a \log(cx).$$

Dieses giebt

$$\psi y = a \log cy, \quad \psi(xy) = a \log cxy;$$

also muſs sein:

$$a \log cxy = a \log cx + a \log cy;$$

welches auch der Fall ist, für $c = 1$.

Durch ein dem obigen ähnliches Verfahren kann man auch Functionen zweier veränderlichen Gröſsen finden, welche gegebenen Gleichungen mit drei

veränderlichen Gröfsen genug thun. Nämlich man kann durch auf einander folgende Differentiationen nach den verschiedenen veränderlichen Gröfsen, Gleichungen finden, aus welchen sich so viele unbekannte Functionen, als man will, eliminiren lassen, und man gelangt zuletzt zu einer Gleichung, welche nur noch eine unbekannte Function enthält. Diese Gleichung wird eine partielle Differential-Gleichung mit zwei unabhängig-veränderlichen Gröfsen sein. Der Ausdruck, welcher diese Gleichung giebt, wird also eine gewisse Zahl willkürlicher Functionen einer einzelnen veränderlichen Gröfse enthalten. Nachdem in die gegebene Gleichung, die auf diese Weise gefundenen unbekannten Functionen substituirt sind, findet man eine Gleichung zwischen mehreren Functionen einer einzelnen unveränderlichen Gröfse. Um diese Functionen zu finden mufs man von Neuem differentiiren, und gelangt dann zu gewöhnlichen Differential-Gleichungen, aus welchen sich die Functionen finden lassen, welche nicht mehr willkürlich angenommen werden können. Auf diese Weise findet man die Form aller der unbekannten Functionen; in sofern nicht etwa die gegebene Gleichung unerfüllbar ist.