Werk

Titel: Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung.

Autor: Hachette, J.

Jahr: 1826

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0001|log38

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

$$5,\ (-2\cos x)^m \cdot \cos m(2\varrho+1)\pi = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x + \cdots \begin{cases} \text{von } x=(2\varrho+\frac{1}{2})\pi \\ \text{bis } x=(2\varrho+\frac{3}{2})\pi \end{cases}$$

$$6,\ (-2\cos x)^m \cdot \sin m(2\varrho+1)\pi = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x + \cdots \begin{cases} \text{bis } x=(2\varrho+\frac{3}{2})\pi \end{cases}$$

$$7,\ (-2\sin x)^m \cdot \cos m(2\varrho+\tfrac{3}{2})\pi = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x - \cdots \begin{cases} \text{von } x=(2\varrho+1)\pi \end{cases}$$

$$8,\ (-2\sin x)^m \cdot \sin m(2\varrho+\tfrac{3}{2})\pi = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x - \cdots \begin{cases} \text{bis } x=(2\varrho+2)\pi \end{cases}.$$

Diese Ausdrücke gelten für jeden Werth von x, wenn m positiv ist. Liegt m zwischen -1 und 0, so mufs man 1) unter den Werthen von x in den Formeln (1), (2), (5), (6), die Werthe $x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$ und $x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$, 2) in den Formeln (3), (4), (7), (8), die Werthe $x = 2\varrho\pi$ und $x = (2\varrho + 1)\pi$ ausnehmen.

In jedem anderen Falle sind die in Rede stehenden Reihen convergent.

Als besondere Fälle kann man folgende beide betrachten:

$$(\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x + \ldots\ldots$$

$$0 = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x + \ldots\ldots$$

$$\left(\text{von } x = -\frac{\pi}{2} \text{ bis } x = +\frac{\pi}{2}\right).$$

30.

Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *Hachette.*)

Zusatz zu des Verfassers *Traité de géométrie descriptive. Paris*, 1822.

---

1. Von den fünf Flächen der zweiten Ordnung, welche wir Ellipsoïd, Hyperboloïd mit einer Schale *(à une nappe)*, Hyperboloïd mit zwei Schalen, elliptisches Paraboloïd, und hyperbolisches Paraboloïd genannt haben, besitzen die zweite und fünfte die characteristische Eigenschaft, dafs sie auf zweierlei Art von einer beweglichen geraden Linie, welche sich auf drei andere beliebige gerade

Linien lehnt, die dieser oder jener Erzeugungsart entsprechen, hervorgebracht werden können. Der allgemeinste Fall ist, wenn die drei bestimmenden geraden Linien der Bedingung allein unterworfen sind, dafs sie sich nicht schneiden; kommt aber zu dieser Bedingung noch die zweite hinzu, dafs sie mit einer und derselben Ebene parallel seyn sollen, so erzeugt die bewegliche gerade Linie nicht mehr das Hyberboloïd mit einer Schale, sondern das hyperbolische Paraboloïd. Im 128sten Art. des „*Traité de Géométrie descriptive*," S. 71, ist bewiesen worden, dafs diese letztere Fläche auf doppelte Weise, als von einer geraden Linie erzeugt, betrachtet werden könne, wenn man sie als den geometrischen Ort einer geraden Linie ansiehet, welche sich parallel mit einer gegebenen Ebene bewegt, und an zwei gerade Linien anlehnt, die auf irgend eine Weise gegen jene Ebene liegen. Wir haben ferner gezeigt, dafs wenn man die bewegliche gerade Linie in drei bestimmten Lagen betrachtet, und die drei geraden Linien, welche diesen Lagen entsprechen, als die bestimmenden Bahnen einer zweiten, beweglichen geraden Linie betrachtet, dafs alsdann diese letztere in allen Lagen mit einer zweiten Ebene parallel ist, und wiederum die nemliche Fläche erzeugt, wie die erste bewegliche gerade Linie. Der Zweck dieses Zusatzes ist, zu zeigen, wie sich die Eigenschaft der doppelten Erzeugbarkeit durch eine gerade Linie, sowohl für das Hyberboloïd mit einer Schale, als für das hyperbolische Paraboloïd, aus einigen einfachen Sätzen ergiebt, welche ich meinen „*Élémens de Géométrie à trois dimensions*" hinzufügen zu müssen glaube.

Erster Satz.

2. Wenn drei beliebige gerade Linien im Raume gegeben sind, die sich nirgend schneiden, so giebt es nur ein Parallelepipedum, von welchem drei Kanten die nemliche Richtung haben, wie die drei gegebenen geraden Linien.

Beweis. Die drei geraden Linien im Raume, von denen gegeben ist, dafs sie sich nicht schneiden, seyen A, B, C. Bekanntlich ist die Lage einer Ebene bestimmt, wenn man weifs, dafs sie mit zwei geraden Linien parallel ist. Daraus folgt:

1) Dafs man durch einen beliebigen Punct im Raume drei Ebenen legen kann, welche resp. den Linien-Paaren (A, B), (B, C) und (C, A) parallel sind;

2) dafs man durch irgend eine der drei geraden Linien, A, B, C, z. B. durch A, zwei Ebenen legen kann, deren eine mit der Geraden B, die andere mit der Geraden C parallel ist. Dieses giebt sechs Ebenen, von welchen zwei und zwei parallel sind, und welche das Parallelepipedum bestimmen, dessen Kanten die Richtung der Durchschnitte der Ebenen haben. Von diesen sechs

Ebenen gehen aber, nach der Voraussetzung, drei durch die gegebenen geraden Linien A, B, C; folglich haben diese geraden Linien nothwendig die Richtung dreier Kanten eines einzigen Parallelepipedi über den drei gegebenen geraden Linien A, B, C.

Geometrische Construction eines Parallelepipedi über drei sich nicht schneidenden geraden Linien AB, $B'C'$, CA', (Tafel I. Fig. 1.)

3. Man lege 1. durch die erste gerade Linie AB eine Ebene parallel mit der zweiten Geraden $B'C'$: diese Ebene wird von der dritten geraden Linie CA' im Puncte C geschnitten werden, durch welchen man CD parallel mit AB, und CB parallel mit $B'C'$ ziehet. 2. Man lege durch die zweite gegebene gerade Linie $B'C'$ eine Ebene parallel mit der dritten Geraden CA; diese Ebene schneidet die Ebene der drei geraden Linien AB, BC, CD, in der geraden Linie AD, welche das Parallelogramm $ABCD$, oder die eine Seite des Parallelepipedi über den drei gegebenen geraden Linien, vollendet.

Um den Körper vollends zu beschreiben, ziehe man die drei Parallelen BD', AC', DB', mit $A'C$; die beiden letzteren werden die gegebene Gerade $B'C'$ in den Puncten B', C' schneiden, durch welche man $B'A'$, $C'D'$ mit der gegebenen AB parallel zieht. Die erste Parallele wird die Gerade CA' im Puncte A' treffen. Durch diesen Punct ziehe man $A'D'$ parallel mit $B'C'$, so sind die sechs Seiten-Ebenen des Parallelepipedi beschrieben. Die drei Kanten dieses Körpers, in der Richtung der gegebenen geraden Linien, haben die Länge der bestimmten geraden Linien AB, $B'C'$, $A'C$. Zwei beliebige Diagonalen AA', DD' schneiden sich im Mittelpunct I des Parallelepipedi.

Zusatz.

4. Es ist leicht zu sehen, dafs nicht allein drei von den zwölf Kanten des, über den drei gegebenen Geraden AB, $B'C'$, $A'C$ (Fig. 1.) beschriebenen Parallelepipedi, die Richtung dieser Linien haben, sondern dafs auch drei andere Geraden die Eigenschaft haben, dafs jede derselben zugleich mit einer von den drei gegebenen Linien, parallel ist, und die beiden andern schneidet, oder eine Transversale derselben ist. Diese drei letzten Kanten, oder vielmehr die geraden Linien, in welchen sie liegen, werde ich symmetrische Transversalen der drei gegebenen geraden Linien nennen. Haben die gegebenen geraden Linien die Richtung der drei Kanten AB, $B'C'$, CA', so haben ihre symmetrischen Transversalen die Richtung der drei anderen Kanten $A'B'$, BC, $C'A$.

Um die Kanten eines Parallelepipedi, welche die Richtung dreier, einander sich nicht schneidenden geraden Linien haben, zu unterscheiden, sollen sie Haupt-Kanten heifsen, während unter symmetrischen Kanten zu den Hauptkanten die Kanten zu verstehen sind, welche die Richtung der symmetrischen Transversalen der drei gegebenen geraden Linien haben.

Zweiter Satz.

5. Wenn von zwei geraden Linien X und Y, die eine die drei Hauptkanten eines Parallelepipedi, die andere die drei symmetrischen Kanten desselben schneidet, so schneiden sich entweder diese beiden Transversalen X und Y der Hauptkanten und ihrer symmetrischen Kanten nothwendig; oder sie sind parallel.

Beweis. Es seyen (Fig. 2.) lmP, $l'm'P'$ die beiden Transversalen, welche die Hauptkanten AB, $B'C'$, CA' eines Parallelepipedi in den Puncten l, m, P, und ihre symmetrischen Kanten $A'B'$, BC, $C'A$ in den Puncten l', m', P' schneiden; so kommt es darauf an, zu zeigen, dafs die beiden geraden Linien lmP, $l'm'P'$ in einer und derselben Ebene liegen, und sich nothwendig in einem Puncte T dieser Ebene schneiden.

Nimmt man auf den Kanten $A'C$ und AC' zwei beliebige Puncte P, P' an, und legt durch dieselben, parallel mit der Seiten-Ebene $ABCD$ des Parallelepipedi, zwei Ebenen, welche diesen Körper in zwei einander und dem Parallelogramm $ABCD$ gleichen Parallelogrammen $PQRS$ und $P'Q'R'S'$ schneiden: so sieht man, dafs die Gerade lmP durch den Durchschnitt der Ebenen der beiden Parallelogramme $ABPQ$, $B'C'PS$ entsteht, und dafs die Gerade $l'm'P'$ in dem Durchschnitte der Ebenen der beiden Parallelogramme $A'B'P'Q'$, $BCP'S'$ liegt. Nimmt man nun an, dafs die Seiten-Ebene $ABCD$ des Parallelepipedi horizontal liege, so schneiden sich die beiden Ebenen $ABPQ$, $A'B'P'Q'$ in einer horizontalen UV, die mit der Kante AB oder $A'B'$ parallel ist, und die beiden Ebenen $B'C'PS$, $BCP'S'$ in einer anderen horizontalen $U'V'$, die mit den Kanten $B'C'$, BC parallel ist; woraus folgt, dafs die beiden Geraden lmP, $l'm'P'$ nothwendig die beiden Horizontalen UV, $U'V'$ schneiden müssen. Wir wollen nun beweisen, dafs sie dieselben in einem und demselben Puncte T schneiden, und dafs dieser Punct der Durchschnittspunct der Horizontalen UV, $U'V'$ ist, welche in einer und derselben horizontalen Ebene liegen.

Construction der horizontalen Linien UV, $U'V'$.

6. Die Ebenen der Parallelogramme $ABPQ$, $A'B'P'Q'$ gehen, die eine durch die gerade Linie AQU, die andere durch die gerade Linie $P'B'U$. Diese

beiden Linien befinden sich aber in der Seiten-Ebene $AB'C'D$ des Parallelepipedi; folglich schneiden sie sich in einem Punct U der horizontalen Linie UV.

Die Ebenen der Parallelogramme $B'C'PS$ und $BCP'S'$ gehen, die eine durch die gerade Linie $B'P$, die andere durch CS'; diese beiden geraden Linien befinden sich aber in der Seiten-Ebene $A'B'CD$ des Parallelepipedi; mithin schneiden sie sich in einem Punct U' der horizontalen Linie $U'V'$.

Legt man durch die erste horizontale Linie UV eine horizontale Ebene, welche das Parallelepipedum in dem, der Seiten-Ebene $ABCD$ gleichen Parallelogramme $\alpha\beta\gamma\delta$ schneidet, so befindet sich, wie die folgende Rechnung zeigen wird, die mit den Seiten $\alpha\beta$, $\delta\gamma$ parallele gerade Linie $U'V'$ in der Ebene des Parallelogramms über diesen Seiten, und schneidet folglich die Gerade UV in einem Punct T, welcher beiden Transversalen lmP, $l'm'P'$ gemein ist.

Die Hauptkanten AB, $B'C'$, CA' des Parallelepipedi $AA'BB'$ mögen durch f, g, h bezeichnet werden. Die Puncte P, P' seien beliebig auf den Kanten $A'C$, AC' angenommen, CP sey $= p$; $C'P' = p'$, so ist, zufolge der obigen Constructionen:

$$CP = BS = AR = p,\quad AB = RS = \beta\gamma = f,$$
$$B'C' = QR = \alpha\beta = g,\quad AC' = A'C = h.$$

Da die Dreiecke AQR und $AU\beta$ ähnlich sind, so ist

$$AR : RQ = A\beta : \beta U, \text{ oder } p : g = A\beta : \beta U = \frac{g \cdot A\beta}{p}.$$

Vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke $B'P'C'$, $UP'\beta$, ist

$$P'C' : C'B' = P'\beta : \beta U;$$

oder

$$p' : g = p' + h - A\beta : \beta U, \text{ oder } \frac{g \cdot A\beta}{p}, \text{ woraus } A\beta = \frac{p\,(p'+h)}{p+p'} \text{ folgt.}$$

Aus der Vergleichung der Dreiecke $C'RS$, $C'\beta V'$, ergiebt sich

$$C'R : RS = C'\beta : \beta V', \text{ oder: } h - p : f = h - A\beta : \beta V' = \frac{fp'}{p+p'}.$$

Dieses ist die Länge von $\beta V'$, wenn man V' als den Durchschnitt der horizontalen Ebene $UV\beta\gamma$ und der geraden Linie $C'S$ ansieht.

In den Dreiecken $AP'B$, $\beta P'V'$ ist:

$$P'A : AB = P'\beta : \beta V'; \text{ oder } h + p' : f = h + p' - A\beta : \beta V' = \frac{fp'}{p+p'}.$$

Dieses ist ein anderer Ausdruck der Linie $\beta V'$, wenn man den Punct V' dieser Linie als den Durchschnitt der horizontalen Ebene $UV\beta\gamma$ und der Geraden BP' betrachtet. Der zweite Ausdruck ist aber dem ersteren gleich. Daraus

folgt: 1. dafs sich die beiden geraden Linien $C'S$, BP' in einem Punct V' der hortzontalen Ebene $UV\beta\gamma$ schneiden, 2. dafs sich die Gerade $U'V'$ in derselben Ebene befindet, in welcher schon die Horizontale UV liegt, und endlich 3. dafs sich diese Horizontalen UV, $U'V'$, welche in einer und derselben Ebene liegen, nothwendig in einem und demselben Punct T schneiden, welcher den beiden geraden Linien $lmPT$, $l'm'P'T'$ gemein ist; was zu beweisen war.

7. Dafs die geraden Linien UV, $U'V'$ in einer und derselben, mit der Seite $ABCD$ des Parallelepipedi parallelen Ebene liegen, läfst sich noch einfacher zeigen, wenn man erwägt, dafs der obige erste Werth, $\frac{p(p+h)}{p+p'}$, von $A\beta$, nur die Länge h der Kante CA' enthält, und von den Längen f, g der beiden anderen Hauptkanten AB, $B'C'$ unabhängig ist. Man kann also annehmen, dafs die beiden Kanten AB, AD ihre Stellen vertauschen, woraus weder eine Aenderung in dem Parallelepipedum, noch in den Werthen für p und p' entsteht. Nach dieser Vertauschung könnte man den Theil der Kante AC', welcher zwischen der Seiten-Ebene $ABCD$ und der mit ihr parallelen, durch die horizontale Linie $U'V'$ gehenden Ebene liegt, wie oben berechnen, und man würde für diese Länge den nemlichen Werth von $A\beta$, nemlich $\frac{p(p+h)}{p+h'}$ finden.

Da die geraden Linien UV, $U'V'$, welche den Kanten AB, $B'C'$ parallel sind, in einer und derselben Ebene liegen, so schneiden sie sich nothwendig in einem und demselben Puncte T; woraus folgt, dafs dieser Punct T den beiden geraden Linien lmP und $l'm'P'$ gemein ist.

Zusatz.

8. Die vier Puncte l, m, l', m' der geraden Linien lmP, $l'm'P'$ lassen sich auf folgende Art unmittelbar construiren.

Das Parallelogramm $B'C'PS$, dessen verlängerte Seiten durch die Puncte l, n der Kanten AB, CD gehen, liegt in der Ebene durch den Punct P und durch die gegebene gerade Linie $B'C'$. Nun ist ln der Durchschnitt der Ebene jenes Parallelogramms mit der horizontalen Ebene, in welcher die Seite $ABCD$ des Parallelepipedi liegt; also ist der Punct l dieser geraden Linie der Durchschnitt der gegebenen geraden Linie AB und der Ebene durch die drei Puncte P, B', C'.

Die geraden Linien AQ, BP schneiden, verlängert, die Kanten $B'C'$, $A'D'$ in den Puncten m, o, welche in der mit $A'B'$ parallelen Linie mo liegen; folglich

folglich schneidet die Ebene durch die drei Puncte P, A, B die gerade Linie $B'C'$ im Puncte m. Eben so schneidet die Ebene durch die drei Puncte P', B, C die Seiten-Ebene des Parallelogramms $A'B'C'D$ in der mit $B'C'$ parallelen Linie $l'n'$, und diese Parallele, welche durch den bekannten Punct n' geht, in welchem sich die Geraden $P'BD'C'$ schneiden, begegnet der Geraden $A'B'$ im Puncte l'.

Die Ebene durch die drei Puncte P', A', B' schneidet die Seiten-Ebene des Parallelogramms $ABCD$ in der, mit ab parallelen geraden Linie $o'm'$, und diese Parallele, welche durch den bekannten Punct o' gehet, in welchem sich die geraden Linien $P'B'$, AD schneiden, begegnet der Geraden BC in dem Puncte m'.

Dritter Satz.

9. Der Mittelpunct des Parallelepipedi, über drei beliebigen geraden Linien eines Hyperboloïds mit einer Schale ist auch der Mittelpunct dieses Hyperboloïds.

Beweis. Wenn ein Parallelepipedum über drei beliebigen geraden Linien eines Hyperboloïds mit einer Schale construirt ist, so haben die drei Haupt-Kanten (Art. 4.) die Richtung jener geraden Linien, und ihre symmetrischen Kanten die Richtung dreier anderen geraden Linien, welche auf dem Hyperboloïd eben so liegen. Ferner ist (Art. 5, 6) bewiesen, dafs alle geraden Linien, welche sich auf drei unbestimmt verlängerte Hauptkanten, oder auf drei verlängerte symmetrische Kanten lehnen, demselben Hyperboloïd zugehören; denn in diesen beiden Systemen gerader Linien, ist keine des ersten, welche nicht alle Geraden des zweiten schnitte, und umgekehrt, woraus folgt, dafs jeder beliebige Punct des Hyperboloïds mit einer Schale der Durchschnitt zweier Geraden ist, deren eine sich auf die drei Haupt-Kanten des Parallelepipedi, die andere auf die drei symmetrischen Kanten desselben lehnet.

Nun nehme man eine gerade Linie des ersten Systems, d. h. eine solche an, die sich auf die Haupt-Kanten des Parallelepipedi lehnt, so schneidet die Ebene durch diese Linie und durch den Mittelpunct des Parallelepipedi, die drei symmetrischen Kanten in drei Puncten einer zweiten, mit der ersteren parallelen geraden Linie, und in gleicher Entfernung vom Mittelpunct; woraus folgt, dafs jede gerade Linie durch den Mittelpunct, die in der Ebene der beiden parallelen geraden Linien des Hyperboloïds liegt, diese Parallelen, und folglich das Hyperboloïd, in zwei, gleich weit vom Mittelpunct entfernten Puncten schneiden wird. Eine beliebige Linie durch den Mittelpunct des Parallelepipedi wird aber einer von den geraden Linien des Hyperboloïds, welche sich auf die drei Haupt-Kanten

stützen, und folglich auch der mit jener Geraden parallelen Linie, welche sich auf die drei symmetrischen Kanten lehnt, begegnen; mithin schneidet jede gerade Linie durch den Mittelpunct des Parallelepipedi das Hyperboloïd in zwei vom Mittelpunct gleich weit entfernten Puncten; woraus folgt, dafs dieser Mittelpunct auch der Mittelpunct des Hyperboloïds mit einer Schale ist.

10. Ich hätte die drei so eben bewiesenen Sätze aus der Gleichung für das Hyperboloïd mit einer Schale, welche sich in meinen „*Traité des Surfaces du second degré*" (erste Ausgabe, 1807, 4., p. 35; dritte Ausgabe, 1817. 8., p. 216) befindet, herleiten können. Nachdem das Hyperboloïd auf drei schräge Axen bezogen worden, die mit den drei geraden Bahnlinien der beweglichen Geraden, von welcher diese Fläche erzeugt wird, parallel sind, so ergab sich, dafs die Gleichung, welche man findet, sich nicht ändert, wenn man an die Stelle der drei Bahnlinien drei andere setzt, deren eine mit jener ersteren parallel ist, und zugleich die beiden anderen schneidet. Diese sechs geraden Linien sind die Kanten des Parallelepipedi. Binet hat diesen Körper auch noch auf eine andere Art construirt, welche er in einer, im sechzehnten Hefte des *Journal de l'école polytechnique* (4. 1813) befindlichen analytischen Abhandlung (vom 30. November 1812) vorgetragen hat. Um das Verfahren von Binet zu zeigen, ist folgende Gleichung nöthig, deren ich oben erwähnte: nemlich die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} xy\,(h'-g)+zx\,(f'-h)+yz\,(g'-f) \\ +z(fh-f'g')+y(fg-g'h')+x(gh-f'h')+f'g'h'-fgh \end{array}\right\} = 0. \quad (I.)$$

Da die Constanten dieser Gleichung die Lage der drei Bahnlinien der Geraden bestimmen, durch deren Bewegung die Fläche erzeugt wird, so ist:

Für die erste gerade Richtungslinie, $x=f,\ y=f'$.
» » zweite » » » $z=g,\ x=g'$.
» » dritte » » » $y=h,\ z=h'$.

Legt man den Anfangspunct der Coordinaten in Beziehung auf die drei Bahnlinien willkürlich, so läfst sich derselbe, während die Richtung der Axen bleibt, leicht versetzen, und es lassen sich leicht diejenigen Werthe der Coordinaten für den neuen Anfangspunct finden, für welche die lineären Glieder x, y, z der obigen Gleichung (I.) verschwinden.

Diese, mit den ursprünglichen Axen der x, der y und der z parallelen Coordinaten sind:

$$\frac{g'+f}{2},\ \frac{f'+h}{2},\ \frac{h'+g}{2}\ldots\ldots$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (I.), so geht sie in:
$xy(h'-g)+zx(f'-h)+yz(g'-f)+\frac{1}{4}(h'-g)(f'-h)(g'-f)=0$ (II.),
oder wenn man

$$g'-f=\alpha;\ f'-h=\beta;\ h'-g=\gamma\ (a)$$

setzt, in

$$\frac{x}{\alpha}\cdot\frac{y}{\beta}+\frac{y}{\beta}\cdot\frac{z}{\gamma}+\frac{z}{\gamma}\cdot\frac{x}{\alpha}+\tfrac{1}{4}=0\ \text{(III.)}$$

über.

In dieser Gestalt hat Binet die Gleichung des Hyperboloïds mit einer Schale genommen, und sie mit der folgenden Gleichung für das nemliche Hyperboloïd, auf die conjugirten Durchmesser a', b', c' bezogen, nemlich mit der Gleichung

$$\frac{x}{a'}\cdot\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}\cdot\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}\cdot\frac{z}{c'}-\tfrac{1}{4}=0.\ \text{(IV.)}$$

verglichen.

Es war bekannt, dafs man, um ein, unter dem Namen des congugirt-umschriebenen bekanntes Parallelepipedum zu construiren, sechs Puncte auf den Axen der x, y, z der Gleichung (IV.), nehmen müsse, deren Entfernung vom Anfangspunct gleich

$$\pm\frac{a'}{2},\ \pm\frac{b'}{2},\ \pm\frac{c'}{2}$$

sind (Seite 321 der Abhandlung von Binet), und dafs man darauf durch diese Puncte sechs Ebenen legen müsse, von denen zwei und zwei den drei Ebenen, in welchen die conjugirten Durchmesser a', b', c' liegen, parallel sind.

Binet, indem er die nemliche Construction auf die Gleichung III anwendet, trägt vom Anfangspunct aus, auf die Axen der x, der y und der z, die sechs Geraden:

$$\pm\frac{\alpha}{2},\ \pm\frac{\beta}{2},\ \pm\frac{\gamma}{2}$$

auf, und legt durch die sechs Endpuncte dieser Geraden, sechs Ebenen, zu zweien mit den Ebenen der Coordinaten x, y, z parallel, welche ein Parallelepipedum bilden, das dem conjugirt-umschriebenen Parallelepipedo analog ist.

Man hatte bewiesen, dafs der Inhalt dieses letzten Körpers für jedes beliebige System der congugirten Durchmesser, über welchen er beschrieben worden, constant ist. Binet hat gezeigt, dafs das Nemliche auch noch für den analogen Körper gilt, dessen Inhalt sich nicht ändert, wenn gleich die Richtung der Axen, worüber er beschrieben ist, sich ändert. (Man sehe S. 323 seiner Abhandlung.)

11. Gehet man auf die Gleichungen (a) zurück, so siehet man, dafs die halben Längen $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ der Kanten des Parallelepipedi bei Binet, von den Kanten des Parallelepipedi, welches ich über drei beliebige gerade Linien in einem Hyperboloïd mit einer Schale construirt habe, nicht verschieden sind. Die Identität folgt noch aus der Gleichung (III.), wenn man in derselben $x = \pm\frac{\alpha}{2}$, oder $y = \pm\frac{\beta}{2}$, oder $z = \pm\frac{\gamma}{2}$ setzt. Das Erste giebt:

$$\pm\frac{\gamma y}{2} + yz \pm \frac{\beta z}{2} + \tfrac{1}{4}\beta\gamma = 0,$$

welche Gleichung sich in

$$\left(\pm y + \frac{\beta}{2}\right)\left(\pm z + \frac{\gamma}{2}\right) = 0$$

zerlegen läfst. Hieraus folgt, dafs die sechs Seiten-Ebenen des Parallelepipedi durch die Gleichungen: $x = \pm\frac{\alpha}{2}$, $y = \pm\frac{\beta}{2}$, $z = \pm\frac{\gamma}{2}$ bestimmt werden, und dafs jede dieser Ebenen das Hyperboloïd mit einer Schale in zwei geraden Linien schneidet, welche die Richtung zweier Kanten des Parallelepipedi haben.

Ueber die stereographische Projection.

(Man sehe Art. 199, S. 254 des *Traité de géométrie descriptive.*)

Die zweite Eigenschaft der stereographischen Projection bestehet in der Gleichheit zweier Winkel, deren einer Tangenten der Kugelfläche, der andere die stereographischen Projectionen dieser Tangenten zu Schenkeln hat. Diese Eigenschaft läfst sich sehr einfach auf folgende Art erweisen:

Es sey COE eine Ebene, die durch den Mittelpunct C der Kugel, durch den Durchschnitt O der Projections-Linien und durch den Scheitel E des gegebenen Winkels geht. Diese Ebene schneidet die Kugel in dem gröfsten Kreise $ABOE$ des Durchmessers AB, und die Ebene des Winkels zweier Tangenten, in der auf dem Radius CE senkrechten Linie EG. Die gerade Linie OE schneidet den Durchmesser AB im Puncte e, welcher offenbar die stereographische Projection des Scheitels E des Winkels zwischen den beiden Tangenten der Kugelfläche ist.

Nimmt man die Ebene durch die drei Puncte C, O, E vertical an, so liegt