Werk

Titel: Bemerkung über die Lagrangische Interpolations-Formel.

Autor: Dirksen, E.

Jahr: 1826

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0001|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

„Wenn ein Integral von der Form

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}},$$

„wo ϱ und R ganze Functionen von x sind, durch Logarithmen ausgedrückt „werden kann, so kann man es immer auch folgender Maſsen ausdrücken:

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = A \log\left(\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}\right).$$

„wo A constant ist und p und q ganze Functionen von x sind."

Dieses Theorem werde ich bei einer andern Gelegenheit beweisen.

20.

Bemerkung über die Lagrangische Interpolations-Formel.

(Von Herrn Prof. *Dirksen*.)

Bekanntlich kommt die Bildung der Lagrangischen Interpolations-Formel auf die Lösung von folgendem analytischen Probleme zurück:

Man wünscht eine algebraische ganze, die $(n-1)^{te}$ Ordnung nicht übersteigende, Function von x, die hier, der Kürze wegen, mit $f(x)$ bezeichnet werden mag, zu finden, so beschaffen, daſs sie die Werthe A_0, A_1, A_2, ... A_μ ..... A_{n-1} liefere, wenn man darin für x nach und nach die n Werthe $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_\mu \ldots\ldots a_{n-1}$ substituirt.

Der Forderung nach ist

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3 + \ldots\ldots M_\mu x^\mu + \ldots\ldots M_{n-1} x^{n-1}$$

eine algebraische ganze Function von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung; und da das Product aus den n Factoren

$$x - a_0,\ x - a_1,\ x - a_2, \ldots\ldots x - a_\mu, \ldots\ldots x - a_{n-1},$$

die Gröſse $(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_\mu)\ldots\ldots(x-a_{n-1})$ namentlich, eine eben solche Function von der n^{ten} Ordnung ist: so wird, der Theorie der Zerfällung gebrochener Functionen gemäſs, der Bruch:

$$\frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_\mu)\ldots\ldots(x-a_{n-1})}$$

gleich $\dfrac{C_0}{x-a_0} + \dfrac{C_1}{x-a_1} + \dfrac{C_2}{x-a_2} + \dfrac{C_3}{x-a_3} + \ldots\ldots \dfrac{C_\mu}{x-a_\mu} + \ldots\ldots \dfrac{C_{n-1}}{x-a_{n-1}}$

gesetzt werden dürfen, wo ganz allgemein C_μ von x unabhängig ist. Demnach hat man

$$\begin{aligned}1)\quad f(x) = {} & C_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-1}) \\ & +\ldots C(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-1}) \\ & +\ldots C_\mu(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\ldots(x-a_{n-1}) \\ & +\ldots C_n(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-1});\end{aligned}$$

folglich, ganz allgemein,

$$f(a_\mu)=A_\mu=C_\mu(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\ldots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\ldots(a_\mu-a_{n-1}),$$

endlich:

$$C_\mu=\frac{A_\mu}{(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\ldots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\ldots(a_\mu-a_{n-1})}.$$

Substituirt man diesen Werth für C_μ in die Gleichung (1.), so kommt

$$f(x)=\sum_{0\ldots n-1}^{\mu} A_\mu \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\ldots(x-a_{n-1})}{(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\ldots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\ldots(a_\mu-a_{n-1})}.$$

oder, in entwickelter Gestalt,

$$\begin{aligned}f(x)= {} & A_0\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)\ldots(a_0-a_\mu)\ldots(a_0-a_{n-1})} \\ & +A_1\frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_\mu)\ldots(a_1-a_{n-1})} \\ & +A_2\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_\mu)\ldots(a_2-a_{n-1})} \\ & \vdots \\ & +A_\mu\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\ldots(x-a_{n-1})}{(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\ldots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\ldots(a_\mu-a_{n-1})} \\ & \vdots \\ & +A_{n-1}\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\mu)\ldots(x-a_{n-2})}{(a_{n-1}-a_0)(a_{n-1}-a_1)(a_{n-1}-a_2)\ldots(a_{n-1}-a_\mu)\ldots a_{n-1}-a_{n-2})};\end{aligned}$$

welches die bekannte Lagrangische Formel ist.