Werk

Titel: 3. Opérateurs aux différences p-adiques.

Jahr: 1996

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0306|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Pour obtenir cet énoncé qui sort du contexte monomial où notre théorie est a priori confinée, nous utilisons la transformation de Laplace (section 7). Remarquons que la transformation de Laplace jouait déjà un rôle essentiel dans l'approche de Dwork [D3].

Je tiens à remercier B. Dwork et F. Baldassarri dont les remarques ont permis d'améliorer le présent texte.

2. La fonction gamma p-adique de Dwork

On utilisera la variante suivante, dûe à Dwork, de la fonction Γ_p.

Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, on note $(s)_k$ la fraction rationnelle $\frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}$ (où Γ est la fonction gamma usuelle).

Soit (c_i) la suite d'éléments de K définie par

$$\exp\pi(x - x^p) = \sum_{i \geq 0} c_i x^i .$$

Soient s et s' des éléments de $\mathbf{Z}_p - \mathbf{N}^\times$ tels que $ps' - s = i \in \mathbf{Z}$. On pose

$$\gamma_p(s, s') = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{pk+i} \frac{(s')_k}{(-\pi)^k} .$$

Pour $p = 2$ il peut être préférable de prendre un autre π (cf. [A-D]).

Rappelons quelques propriétés de γ_p démontrées dans [D3], [A-D].

Propriétés *(1) Pour i fixé, $\gamma_p(s, s')$ est une fonction localement méromorphe de la variable s' sur $\mathbf{Z}_p$.*

(2) On a $\gamma_p(s, s') = 0$ si et seulement si $s \in \mathbf{N}^\times$ et $-s' \in \mathbf{N}$.

(3) On a $\gamma_p(s, s')^{-1} = 0$ si et seulement si $-s \in \mathbf{N}$ et $s' \in \mathbf{N}^\times$.

(4) Pour $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ on a l'équation fonctionnelle

$$\gamma_p(s + n, s' + m) = \frac{(s)_n}{(-\pi)^n} \frac{(-\pi)^m}{(s')_m} \gamma_p(s, s').$$

(5) On a

$$\Gamma_p(s) = \pi^{-\mathrm{Rep}(-s)} \gamma_p(s, \frac{s + \mathrm{Rep}(-s)}{p}),$$

en notant $\mathrm{Rep}(-s)$ *l'unique entier dans* $\{0, \cdots, p-1\}$ *tel que* $|s + \mathrm{Rep}(-s)| < 1$.

3. Opérateurs aux différences p-adiques

3.1. Rappels sur la transformation de Mellin algébrique[La][L-S]

Soit K un corps de caractéristique nulle et soit T un K-tore déployé de dimension n, c'est à dire un K-schéma en groupes abéliens isomorphe à $\mathbf{G}_{m,K}^n$. On note

$X_T = \mathrm{Hom}_{K\,\mathrm{gr}}(T, \mathbf{G}_{m,K})$ le groupe des caractères algébriques de T et Ω_T le K-espace vectoriel des 1-formes différentielles invariantes sur T. On a une action algébrique libre de X_T sur Ω_T donnée par

$$(\chi, \omega) \mapsto \omega + \chi^*(\frac{dx}{x}),$$

en notant x la coordonnée canonique sur $\mathbf{G}_{m,K}$.

Notons Δ_T l'anneau non commutatif formé des sommes finies $\sum_{\chi \in X_T} f_\chi \cdot \chi$ avec f_χ dans $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})$, les f_χ étant nuls pour tout χ hors d'une partie finie de X_T, avec la relation de commutation

$$\chi \cdot f_\chi = \chi(f_\chi) \cdot \chi,$$

l'action de X_T sur $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})$ provenant de l'action sur Ω_T.

Soit $D_T := H^0(T, \mathscr{D}_T)$ la K-algèbre des opérateurs différentiels algébriques sur T. Rappelons que D_T est la K-algèbre non commutative engendrée par $H^0(T, \mathscr{O}_T) \simeq K[X_T]$ et par l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_K \Omega_T^\vee$ avec la relation de commutation

$$[D, \chi] = \langle \chi^*(\frac{dx}{x}), D \rangle \cdot \chi$$

en notant $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement canonique. On a un isomorphisme canonique $D_T \simeq \Delta_T$ donné par l'identité sur $K[X_T]$ et par $-$ l'identité sur $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T}) \simeq \mathrm{Sym}_K \Omega_T^\vee$ qui induit une équivalence de catégorie $\mathfrak{M}$, la transformation de Mellin, entre les catégories de complexes de modules à cohomologie bornée $D^b(D_T)$ et $D^b(\Delta_T)$. On dit qu'un Δ_T-module est holonome si le D_T-module correspondant l'est. On note $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$ la sous-catégorie de $D^b(\Delta_T)$ formée des objets à cohomologie holonome. Bien sûr $\mathfrak{M}$ induit une équivalence de catégories entre $D^b_{\mathrm{hol}}(D_T)$ et $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$.

Etant donné un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}^n_{m,K}$, on a des isomorphismes de K-algèbres non commutatives

$$H^0(T, \mathscr{D}_T) \simeq K[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_n, x_n^{-1}, \partial_{x_1}, \cdots \partial_{x_n}]$$

et

$$\Delta_T \simeq K[\tau_1, \tau_1^{-1}, \cdots, \tau_n, \tau_n^{-1}, s_1, \cdots s_n]$$

$K[\tau_1, \tau_1^{-1}, \cdots, \tau_n, \tau_n^{-1}, s_1, \cdots s_n]$ étant l'algèbre des opérateurs aux différences avec les relations $\tau_i s_i = (s_i + 1)\tau_i$, $[\tau_i, s_j] = 0$ pour $i \neq j$, $[\tau_i, \tau_j] = [s_i, s_j] = 0$. L'isomorphisme $H^0(T, \mathscr{D}_T) \simeq \Delta_T$ est alors donné par $x_i \mapsto \tau_i$ et $x_i \partial_{x_i} \mapsto -s_i$.

Rappelons brièvement, bien que ce soit inutile pour la suite, que l'équivalence de catégories $\mathfrak{M}$ est donnée géométriquement par un noyau (cf. [La][L-S]). On munit $\mathscr{O}_{T \times \Omega_T}$ d'une connexion intégrable relativement à Ω_T donnée par $d + \tilde{\omega}$: $\mathscr{O}_{T \times \Omega_T} \to \Omega^1_{T \times \Omega_T / \Omega_T}$, où $\tilde{\omega}$ est la 1-forme différentielle universelle, et de l'action diagonale de X_T, définie par $\chi(f \otimes g) = (\chi f) \otimes (\chi g)$. Ces deux actions commutent. Soit $\mathscr{H}$ l'objet ainsi défini. Le foncteur $\mathfrak{M}$ est canoniquement isomorphe au foncteur

$$M \mapsto \mathrm{DR}_{T \times \Omega_T / \Omega_T}(p^* M \otimes_{\mathscr{O}_{T \times \Omega_T}} \mathscr{H}).$$

En coordonnées $\mathscr{H}$ est engendré par x^s avec l'action naturelle des opérateurs différentiels et des translations, et, pour tout objet M de $D^b(D_T)$, $\mathfrak{M}(M)$ s'identifie à

$$\mathrm{DR}_{T\otimes_K K[s]/K[s]}(M \otimes_K x^s),$$

$M \otimes_K x^s$ étant naturellement vu comme objet de $D^b(D_{T\otimes_K K[s]})$.

3.2. *Fonctions localement analytiques sur l'espace des caractères*

Soit p un nombre premier. Soit K un corps normé complet contenant $\mathbf{Q}_p$, la norme prolongeant celle de $\mathbf{Q}_p$. Soit T un K-tore déployé de dimension n. Le choix de la forme différentielle invariante $\frac{dx}{x}$ sur $\mathbf{G}_{m,K}$ permet d'identifier Ω_T au K-espace vectoriel $K \otimes_{\mathbf{Z}} X_T$, l'inclusion $X_T \hookrightarrow \Omega_T$ étant donnée par $\chi \mapsto \chi^*(\frac{dx}{x})$. L'image de $\mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} X_T$ dans Ω_T est un $\mathbf{Z}_p$ module libre de rang n que l'on note Ω_T^0. L'espace vectoriel Ω_T est canoniquement muni d'une structure de K-espace vectoriel normé, correspondant pour tout isomorphisme $\Omega_T \simeq K^n$ associé à un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}_{m,K}^n$ à la norme $||(x_1, \cdots, x_n)|| = \sup|x_i|$. Pour cette norme Ω_T^0 est exactement la boule unité.

On note $\mathscr{C}(\Omega_T^0)$ la K-algèbre des fonctions localement analytiques (i.e. coïncidant localement avec leur série de Taylor) sur Ω_T^0 à valeurs dans K. Pour tout entier positif ou nul r, on note $\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_T^0)$ la K-algèbre des fonctions analytiques (i.e. coïncidant avec leur série de Taylor) sur toutes les boules fermées de rayon $|p|^r$ contenues dans Ω_T^0 à valeurs dans K. Pour tout entier strictement négatif r, on note $\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_T^0)$ la K-algèbre des fonctions analytiques sur la boule fermée de centre l'origine et de rayon $|p|^r$ de Ω_T à valeurs dans K. L'algèbre $\mathscr{C}(\Omega_T^0)$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim \mathscr{C}^{(r)}(\Omega_T^0)$. On notera χ_0 la fonction caractéristique de $p\Omega_T^0$ (i.e. de la boule fermée de rayon $|p|$ et de centre l'origine). Cette fonction appartient à $\mathscr{C}^{(1)}(\Omega_T^0)$.

Donnons une description explicite des algèbres $\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_T^0)$ et $\mathscr{C}(\Omega_T^0)$. Pour cela on fixe un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}_{m,K}^n$, ce qui permet d'identifier Ω_T^0 à $\mathbf{Z}_p^n$. Si $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbf{Z}_p^n$ et $i = (i_1, \cdots, i_n) \in \mathbf{N}^n$, on note $\binom{s}{i} = \prod_{j=1}^n \binom{s_j}{i_j}$, $i! = \prod_{j=1}^n (i_j!)$ et $||i|| = \sum_{j=1}^n i_j$. D'après un résultat de Mahler une fonction $f : \mathbf{Z}_p^n \to K$ est continue si et seulement si elle s'écrit

$$f(s) = \sum_{i \in \mathbf{N}^n} a_i \binom{s}{i}$$

avec $|a_i| \to 0$ quand $||i|| \to \infty$. Le résultat suivant est dû à Y. Amice [Am].

Théorème 3.2.1. *Soit $f = \sum_{i\in\mathbf{N}^n} a_i \binom{s}{i}$ une fonction continue $\mathbf{Z}_p^n \to K$. La fonctions f appartient à $\mathscr{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}^n})$ si et seulement si il existe des constantes réelles strictement positives A et B, avec $B < 1$, telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}^n$,*

$$|a_i| \leq AB^{||i||}.$$

Si r est un entier positif ou nul, la fonction f appartient à . $\mathscr{E}^{(r)}(\Omega^0_{\mathbf{G}^n_{m,K}})$ si et seulement si on a

$$\lim_{||i||\to\infty} \left| \frac{a_i}{\prod_{j=1}^n \left[\frac{i_j}{p^r}\right]!} \right| = 0.$$

Si r est un entier strictement négatif, la fonction f est la restriction d'un élément de . $\mathscr{E}^{(r)}(\Omega^0_{\mathbf{G}^n_{m,K}})$ si et seulement si on a

$$\lim_{||i||\to\infty} \left| \frac{a_i p^{||i||r}}{i!} \right| = 0.$$

Corollaire 3.2.2. *Pour λ dans K, on pose $f_\lambda(s) = \sum_{i\in\mathbf{N}}(\lambda-1)^i \binom{s}{i} = (1+(\lambda-1))^s$. La fonction f_λ appartient à . $\mathscr{E}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$ si et seulement si $|1-\lambda| < 1$. Pour $r \geq 0$, la fonction f_λ appartient à . $\mathscr{E}^{(r)}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$ si et seulement si $|1-\lambda| < p^{-\frac{1}{(p-1)p^r}}$.* □

3.3. Opérateurs aux différences et opérateurs différentiels

Soit A l'une des K-algèbres . $\mathscr{E}^{(r)}(\Omega^0_T)$ ou . $\mathscr{E}(\Omega^0_T)$. L' action du $\mathbf{Z}$-module X_T sur $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})$ se prolonge en une action par translation sur A

$$\chi(f)(s) = f(s+\chi),$$

(on voit ici X_T comme plongé dans Ω_T).

On définit $\Delta_T^{(r)}$ (resp. $\Delta_T^\vee$) comme l'anneau non commutatif formé des sommes finies $\sum_{\chi\in X} f_\chi \cdot \chi$, avec f_χ dans A, avec la relation de commutation $\chi \cdot f_\chi = \chi(f_\chi)\cdot\chi$. On a des isomorphismes canoniques $\Delta_T^{(r)} \simeq \Delta_T \otimes_{H^0(\Omega_T,\mathscr{O}_{\Omega_T})} \mathscr{E}^{(r)}(\Omega^0_T)$ et $\Delta_T^\vee \simeq \Delta_T \otimes_{H^0(\Omega_T,\mathscr{O}_{\Omega_T})} \mathscr{E}(\Omega^0_T)$.

Compte tenu de l'isomorphisme canonique $\Delta_T \simeq D_T$ les algèbres $\Delta_T^{(r)}$ et $\Delta_T^\vee$ peuvent être vues comme des algèbres d'opérateurs différentiels d'ordre infini. Plus précisément on a l'énoncé suivant.

Proposition 3.3.1. *Notons $\partial^i = \prod_{j=1}^n \partial_{x_j}^{i_j}$ pour $i \in \mathbf{N}^n$. Etant donné un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}^n_{m,K}$, l'algèbre $\Delta_T^\vee$ est canoniquement isomorphe à la K-algèbre des opérateurs différentiels de la forme $\sum_{\substack{k\in\mathbf{Z}^n \\ i\in\mathbf{N}^n}} a_{k,i} x^{k+i} \frac{\partial^i}{i!}$ avec $a_{k,i} \in K$ tels que pour presque tout $k \in \mathbf{Z}^n$, $a_{k,i}$ est nul pour tout $i \in \mathbf{N}^n$, et tels que il existe des constantes réelles strictement positives A et B, avec $B < 1$, telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}^n$, $|a_{k,i}| \leq AB^{||i||}$. De façon similaire, si r est un entier positif ou nul (resp. strictement négatif) $\Delta_T^{(r)}$ est canoniquement isomorphe à la K-algèbre des opérateurs différentiels de la forme $\sum_{\substack{k\in\mathbf{Z}^n \\ i\in\mathbf{N}^n}} a_{k,i} x^{k+i} \frac{\partial^i}{i!}$ avec $a_{k,i} \in K$ tels que pour presque tout $k \in \mathbf{Z}^n$, $a_{k,i}$ est nul pour tout $i \in \mathbf{N}^n$, et tels que*

$$\lim_{||i||\to\infty} \left| \frac{a_{k,i}}{\prod_{j=1}^{n} \left[\frac{i_j}{p^r}\right]!} \right| = 0$$

et

$$\lim_{||i||\to\infty} \left| \frac{a_{k,i} p^{||i||r}}{i!} \right| = 0$$

respectivement.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 3.2.1 et de la relation $t^i \partial_t^i = i! \binom{t\partial_t}{i}$. □

Remarque. La proposition précédente permet de voir $\Delta_T^\vee$ comme une sous-algèbre d'une algèbre de sections globales d'un faisceau d'opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes au sens de Berthelot [Be1]. Plus précisément, soit $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel k et de corps des fractions K. On pose $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}\,\mathscr{V}$. Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse de réduction X sur k et soit $Z \subset X$ un diviseur dans X. P. Berthelot a défini dans [Be1] 4.2.5 le faisceau $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z)$ des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes le long de Z. On pose $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z)_{\mathbf{Q}} = \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z) \otimes \mathbf{Q}$. On prend $\mathscr{X} = \hat{\mathbf{P}}^n_{\mathscr{S}}$ muni des coordonnées homogènes $[X_0, \cdots, X_n]$. On note Z_i le diviseur d'équation $X_i = 0$ dans X, Z la réunion des Z_i et $\mathscr{U}_i$ le complémentaire de $X_i = 0$ dans $\mathscr{X}$. On pose $x_i = \frac{X_i}{X_0}$ pour $i \geq 1$ sur $\mathscr{U}_0$. Notons $A_n(K)^\dagger$ (resp. $B_n(K)^\dagger$) la K-algèbre des opérateurs différentiels de la forme $\sum_{\substack{l\in\mathbf{N}^n \\ k\in\mathbf{N}^n}} a_{l,k} x^l \frac{\partial^k}{k!}$ (resp. $\sum_{\substack{l\in\mathbf{Z}^n \\ k\in\mathbf{N}^n}} a_{l,k} x^l \frac{\partial^k}{k!}$) avec $a_{l,k} \in K$ tels qu'il existe des constantes réelles strictement positives A et B, avec $B < 1$, telles que, pour tout $l \in \mathbf{N}^n$ (resp. $\mathbf{Z}^n$) et tout $k \in \mathbf{N}^n$ on ait $|a_{l,k}| \leq AB^{||l||+||k||}$ (en posant $||l|| = \sum_i |l_i|_a$ avec $|\ |_a$ la norme archimédienne). D'après un résultat de C. Huyghe ([H] Théorème 3.2.3) le morphisme de restriction $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z_0)_{\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathscr{U}_0, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z_0)_{\mathbf{Q}})$ induit un isomorphisme canonique d'algèbres $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z_0)_{\mathbf{Q}}) \simeq A_n(K)^\dagger$. En reprenant sa démonstration on obtient que le morphisme de restriction $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z)_{\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathscr{U}_0, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z)_{\mathbf{Q}})$ induit un isomorphisme canonique d'algèbres $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(^\dagger Z)_{\mathbf{Q}}) \simeq B_n(K)^\dagger$. D'après la proposition précédente $\Delta^\vee_{\mathbf{G}^n_{m,K}}$ est donc canoniquement isomorphe à une sous-algèbre (stricte dès que $n > 0$) de $B_n(K)^\dagger$.

Proposition 3.3.2. *(1) Les K-algèbres $\Delta_T^{(r)}$ sont noethériennes.*

(2) Les anneaux $\Delta_T^{(r')}$ et $\Delta_T^\vee$ sont plats sur $\Delta_T^{(r)}$ pour $r' \geq r$.

(3) La K-algèbre $\Delta_T^\vee$ est cohérente.

Démonstration. Comme les K-algèbres $\mathscr{E}^{(r)}(\Omega_T^0)$ sont noethériennes, l'énoncé (1) est une conséquence du théorème de Hilbert pour les extensions de Ore d'anneaux noethériens (cf. [M-R] 1.2.9 (iv)). Le point (2) résulte directement de la platitude des anneaux $\mathscr{E}^{(r')}(\Omega_T^0)$ et $\mathscr{E}(\Omega_T^0)$ sur $\mathscr{E}^{(r)}(\Omega_T^0)$ pour $r' \geq r$. Le point (3) est alors conséquence directe de (1) et (2). □

Si A est un anneau on note Mod$A$ la catégorie des A-modules à gauche, $D^-(A)$ la catégorie dérivée des complexes de A-modules à gauche à cohomologie bornée supérieurement et $D^b(A)$ la catégorie dérivée des complexes de A-modules à gauche à cohomologie bornée.

3.4. *Opérations*

Soient T_1 et T_2 des K-tores déployés. On dit qu'un morphisme $T_1 \to T_2$ est monomial s'il peut être obtenu en composant un morphisme de tores $T_1 \to T_2$ avec des translations multiplicatives sur T_1 et T_2. Tout morphisme monomial $\varpi : T_1 \to T_2$ induit des morphismes $\varpi^* : K[X_{T_2}] \to K[X_{T_1}]$, $\varpi_* : H^0(\Omega_{T_1}, \mathscr{O}_{\Omega_{T_1}}) \to H^0(\Omega_{T_2}, \mathscr{O}_{\Omega_{T_2}})$, $\varpi_* : .\mathscr{A}(\Omega^0_{T_1}) \to .\mathscr{A}(\Omega^0_{T_2})$ et $\varpi_* : .\mathscr{A}^{(r)}(\Omega^0_{T_1}) \to .\mathscr{A}^{(r)}(\Omega^0_{T_2})$, pour $r \geq 0$.

On considère

$$\Delta_{T_1 \to T_2} := K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}.$$

C'est de façon naturelle un $(\Delta_{T_1}, \Delta_{T_2})$-bimodule; la structure de Δ_{T_2}-module à droite est la structure évidente et la structure de Δ_{T_1}-module à gauche est l'unique structure compatible avec la structure de $K[X_{T_1}]$-module à gauche vérifiant $\varphi(1 \otimes m) = 1 \otimes \varpi_*(\varphi)m$ pour φ dans $H^0(\Omega_{T_1}, \mathscr{O}_{\Omega_{T_1}})$ et m dans Δ_{T_2}. On définit de même le $(\Delta^\vee_{T_1}, \Delta^\vee_{T_2})$-bimodule

$$\Delta^\vee_{T_1 \to T_2} := K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta^\vee_{T_2}$$

et le $(\Delta^{(r)}_{T_1}, \Delta^{(r)}_{T_2})$-bimodule

$$\Delta^{(r)}_{T_1 \to T_2} := K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta^{(r)}_{T_2}.$$

On définit de façon similaire le $(\Delta_{T_2}, \Delta_{T_1})$-bimodule

$$\Delta_{T_2 \leftarrow T_1} := H^0(\Omega_{T_2}, \mathscr{O}_{\Omega_{T_2}}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_1}, \mathscr{O}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1},$$

le $(\Delta^\vee_{T_2}, \Delta^\vee_{T_1})$-bimodule

$$\Delta^\vee_{T_2 \leftarrow T_1} := .\mathscr{A}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{.\mathscr{A}(\Omega^0_{T_1})} \Delta^\vee_{T_1}$$

et le $(\Delta^{(r)}_{T_2}, \Delta^{(r)}_{T_1})$-bimodule

$$\Delta^{(r)}_{T_2 \leftarrow T_1} := .\mathscr{A}^{(r)}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{.\mathscr{A}^{(r)}(\Omega^0_{T_1})} \Delta^{(r)}_{T_1}.$$

Définissons par exemple la structure de bimodule sur $\Delta^{(r)}_{T_2 \leftarrow T_1}$. La structure de $\Delta^{(r)}_{T_1}$-module à droite est la structure évidente, et la structure de $\Delta^{(r)}_{T_2}$-module à gauche est l'unique structure compatible avec la structure de $.\mathscr{A}^{(r)}(\Omega^0_{T_2})$-module à gauche telle que $m(1 \otimes \varphi) = 1 \otimes \varpi^*(m)\varphi$ pour m dans $K[X_{T_2}]$ et φ dans $\Delta^{(r)}_{T_1}$.

Ceci permet de définir, pour $? \in \{\ , \vee, (r)\}$, des foncteurs $\varpi^{!?} : D^-(\Delta^?_{T_2}) \to D^-(\Delta^?_{T_1})$ et $\varpi^?_+ : D^-(\Delta^?_{T_1}) \to D^-(\Delta^?_{T_2})$ par les formules

$$\varpi^{!?}M := \Delta^{?}_{T_1 \to T_2} \otimes^{L}_{\Delta'_{T_2}} M[d]$$

et

$$\varpi^{?}_{+}M := \Delta^{?}_{T_2 \leftarrow T_1} \otimes^{L}_{\Delta'_{T_1}} M,$$

avec $d = \dim T_1 - \dim T_2$.

Pour les anneaux Δ_T ces foncteurs correspondent aux foncteurs d'image inverse et d'image directe usuels des $\mathscr{D}$-modules définis dans [B].

Si $\varpi : T_1 \to T_2$ et $\varpi' : T_2 \to T_3$ sont des morphismes monomiaux on a des isomorphismes de foncteurs $(\varpi' \circ \varpi)^{!?} \simeq \varpi^{!?} \circ \varpi'^{!?}$ et $(\varpi' \circ \varpi)^{!}_{+} \simeq \varpi'^{!}_{+} \circ \varpi^{!}_{+}$. La démonstration est similaire à celle de [B].

Soient T_1 et T_2 des K-tores déployés. Soit M_1 (resp. M_2) un objet de $D^{-}(\Delta^{?}_{T_1})$ (resp. $D^{-}(\Delta^{?}_{T_2})$) pour $? = , \vee, (r)$. Le produit tensoriel externe de complexes de K-espaces vectoriels $M_1 \boxtimes M_2$ est naturellement un objet de $D^{-}(\Delta^{?}_{T_2} \otimes_K \Delta^{?}_{T_2})$. On pose

$$M_1 \boxtimes^{?} M_2 := \Delta^{?}_{T_1 \times T_2} \otimes^{L}_{\Delta'_{T_2} \otimes_K \Delta'_{T_2}} M_1 \boxtimes M_2.$$

C'est un objet de $D^{-}(\Delta^{?}_{T_1 \times T_2})$.

Si M_1 et M_2 sont des objets de $D^{-}(\Delta^{?}_{T})$ on définit leur produit de convolution par $M_1 *^{?} M_2 := M_1 \otimes^{L}_{A} M_2$, le produit tensoriel étant pris sur $A = H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})$, $\mathscr{B}(\Omega^0_T)$ ou $\mathscr{B}^{(r)}(\Omega^0_T)$ suivant que $? = , \vee, (r)$. On a un isomorphisme canonique dans $D^{-}(A)$

$$M_1 *^{?} M_2 \simeq \varpi^{?}_{+}(M_1 \boxtimes^{?} M_2),$$

en notant $\varpi : T \times T \to T$ le morphisme produit, ce qui permet de voir $M_1 *^{?} M_2$ comme un objet $D^{-}(\Delta^{?}_{T})$.

3.5. Compatibilités faciles

Proposition 3.5. *Soit $\varpi : T_1 \to T_2$ un morphisme monomial de K-tores déployés.*

(1) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta^{\vee}_{T_2}, \Delta_{T_1})$-bimodules

$$\Delta^{\vee}_{T_2} \otimes^{L}_{\Delta_{T_2}} \Delta_{T_2 \leftarrow T_1} \simeq \Delta^{\vee}_{T_2 \leftarrow T_1}.$$

(2) On a un morphisme canonique de $(\Delta^{\vee}_{T_1}, \Delta_{T_2})$-bimodules

$$\Delta^{\vee}_{T_1} \otimes^{L}_{\Delta_{T_1}} \Delta_{T_1 \to T_2} \longrightarrow \Delta^{\vee}_{T_1 \to T_2}.$$

Si ϖ est surjectif et si le nombre de composantes géométriquement connexes des fibres de ϖ est premier à p, alors ce morphisme est un isomorphisme.

Démonstration. Démontrons (1). On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \Delta^{\vee}_{T_2} \otimes^{L}_{\Delta_{T_2}} \Delta_{T_2 \leftarrow T_1} &\simeq \Delta^{\vee}_{T_2} \otimes_{\Delta_{T_2}} \Delta_{T_2 \leftarrow T_1} \\ &\simeq . \mathscr{B}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_2}, \mathscr{O}_{\Omega_{T_2}})} \Delta_{T_2 \leftarrow T_1} \\ &\simeq . \mathscr{B}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_1}, \mathscr{O}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1}, \end{aligned}$$

le premier isomorphisme résultant de la platitude de $\Delta_{T_2}^{\vee}$ sur Δ_{T_2}.

De même, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\Delta_{T_2\leftarrow T_1}^{\vee} &\simeq \Delta_{T_2\leftarrow T_1}^{\vee} \otimes_{\Delta_{T_1}} \Delta_{T_1} \\ &\simeq .\mathscr{O}(\Omega_{T_2}^{0}) \otimes_{.\mathscr{A}(\Omega_{T_1}^{0})} \Delta_{T_1}^{\vee} \otimes_{\Delta_{T_1}} \Delta_{T_1} \\ &\simeq .\mathscr{O}(\Omega_{T_2}^{0}) \otimes_{.\mathscr{A}(\Omega_{T_1}^{0})} .\mathscr{O}(\Omega_{T_1}^{0}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_1},\mathscr{C}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1} \\ &\simeq .\mathscr{O}(\Omega_{T_2}^{0}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_1},\mathscr{C}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1}.\end{aligned}$$

Démontrons (2). On a de même des isomorphismes canoniques

$$\Delta_{T_1}^{\vee} \otimes_{\Delta_{T_1}}^{L} \Delta_{T_1\to T_2} \simeq \Delta_{T_1}^{\vee} \otimes_{\Delta_{T_1}} K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}$$

et

$$\Delta_{T_1\to T_2}^{\vee} \simeq K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}^{\vee}.$$

On définit $\Phi : \Delta_{T_1}^{\vee} \otimes_{\Delta_{T_1}} K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2} \to K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}^{\vee}$ comme l'unique morphisme de $(\Delta_{T_1}^{\vee}, \Delta_{T_2})$-bimodules tel que $\Phi(f \otimes b \otimes m) = b \otimes \varpi_*(b^{-1}f)m$ pour f dans $.\mathscr{O}(\Omega_{T_1}^{0})$, b dans X_{T_1}, et m dans Δ_{T_2}. Il reste à vérifier que si ϖ est surjectif et si le nombre de composantes géométriquement connexes de $\operatorname{Ker}\varpi$ est premier à p, alors Φ est un isomorphisme.

Commençons par traiter le cas où

$$T_1 = \operatorname{Spec} K[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}], \qquad T_2 = \operatorname{Spec} K[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_m, t_m^{-1}],$$

avec $m \le n$ et ϖ est donné par $(t_1, \cdots, t_n) \mapsto (t_1, \cdots, t_m)$. Dans ce cas le Δ_{T_1}-module à gauche $K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}$ a pour résolution le complexe de Koszul $K.(\Delta_{T_1}, (s_{m+1}, \cdots, s_n))$. Par platitude de $\Delta_{T_1}^{\vee}$ sur Δ_{T_1} on en tire que le $\Delta_{T_1}^{\vee}$-module à gauche $\Delta_{T_1}^{\vee} \otimes_{\Delta_{T_1}} K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}$ a pour résolution le complexe de Koszul $K.(\Delta_{T_1}^{\vee}, (s_{m+1}, \cdots, s_n))$. Comme $K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}^{\vee}$ a pour résolution le même complexe, on en tire un isomorphisme entre les deux $\Delta_{T_1}^{\vee}$-modules dont on vérifie qu'il est égal à Φ.

Considérons maintenant le cas où

$$T_1 = \operatorname{Spec} K[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}], \qquad T_2 = \operatorname{Spec} K[t_1', t_1'^{-1}, \cdots, t_n', t_n'^{-1}],$$

et ϖ est un morphisme monomial de la forme $t_i' = \lambda_i \prod_{1\le j\le n} t_j^{a_{ij}}$ avec a_{ij} dans $\mathbf{Z}$, tel que le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ soit premier à p. Remarquons que le morphisme $\varpi_* : .\mathscr{O}(\Omega_{T_1}^{0}) \to .\mathscr{O}(\Omega_{T_2}^{0})$ est alors donné par $f(s_1, \cdots, s_n) \mapsto f(\sum_i a_{i1}s_i', \cdots, \sum_i a_{in}s_i')$. La condition que le déterminant de A soit premier à p assure que ϖ_* est un isomorphisme, d'où l'on tire directement que Φ est un isomorphisme.

Dans le cas général ϖ est obtenu par composition à partir de morphismes du type précédent, d'où le résultat. □

Remarque. On peut vérifier que la condition sur ϖ imposée dans (2) pour avoir un isomorphisme est nécessaire.