## Werk

**Titel:** Espace BMO, mesures de Carleson fonctions g de Littlewood-Paley généralisées et c...

**Autor:** Chevalier, Lucien

**Jahr:** 1993

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0297|log23

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Ann. 297, 269–288 (1993)

Mathematische Annalen
© Springer-Verlag 1993

# Espace BMO, mesures de Carleson fonctions $g$ de Littlewood-Paley généralisées et conditions d'annulation

**Lucien Chevalier**

Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S., Institut Fourier, B.P. 74, F-38402 Saint Martin d'Hères, Cedex, France

Reçu le 7 janvier 1993; version révisée reçue le 24 mars 1993

*Mathematics Subject Classification (1991):* 42B25

## 1 Introduction

Soient $v$ et $n$ deux entiers $\geqq 1$. étant donné un "noyau", i.e. une famille $r = (r_t)_{t>0}$ d'applications de $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}^n$, possèdant des propriétés convenables que nous préciserons au par. 2, on peut associer à toute application $f$ de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}$ satisfaisant à certaines conditions d'intégrabilité une famille $(R_t(f))_{t>0}$ d'applications de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}^n$ en posant

$$R_t(f)\ (x) = \int_{\mathbf{R}^v} r_t(x,y) f(y)\, dy \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et tout } x \in \mathbf{R}^v . \tag{1}$$

Les opérateurs ainsi définis toujours notés au moyen de la lettre capitale correspondant à la lettre minuscule utilisée pour désigner le noyau. On peut construire ensuite, pour $T \in [0, +\infty]$, les "fonctions $g$ de Littlewood-Paley généralisées" $g_{r,T}(f)$ définies par

$$g_{r,T}(f)(x) = \left( \int_0^T |R_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^v . \tag{2}$$

On posera plus brièvement $g_{r,+\infty}(f) = g_r(f)$.

L'objet principal de cet article est de donner des "conditions d'annulation" *nécessaires et suffisantes* (cf. par. 3) portant sur $r$ pour que $(g_{r,T}(f))^2 \in$ BMO lorsque $f \in L^\infty$ ou lorsque $f \in$ BMO. L'intérêt de tels résultats est de compléter de manière naturelle, et avec des hypothèses optimales, l'étude de certaines "inégalités de Littlewood-Paley". Si on note $\| \cdot \|_p$ la norme dans l'espace $L^p(\mathbf{R}^v)$ relatif à la mesure de Lebesgue, ces inégalités sont des estimations de la forme

$$\|g_r(f)\|_p \leqq C(p, v, r)\, \|f\|_p , \tag{3}$$

où $1 < p < +\infty$ et $C(p, v, r)$ est une constante ne dépendant que de $p, v, r$ (il est connu qu'on peut avoir $\|f\|_\infty < +\infty$ et $\|g_r(f)\|_\infty = +\infty$). Observons en outre que le fait de compléter les inégalités (3) pour $p = +\infty$ n'est par purement une question d'esthétique: en effet, un de nos résultats montre que ces inégalités sont vérifiées si et seulement si les opérateurs $f \to (g_{r,T}(f))^2$ appliquent $L^\infty$ dans BMO. La preuve des inégalités (3) pour la fonction de Littlewood-Paley "classique" $g(f)$ (dont nous rappelons la définition plus loin), dans le cas où $v$ est quelconque, a été donnée par Stein [7] à la fin des années 50. Depuis, plusieurs spécialistes ont été amenés à généraliser progressivement ces résultats, notamment en considérant des noyaux qui ne sont pas nécessairement de convolution et qui ne vérifient pas nécessairement la condition d'annulation forte usuelle. Une méthode désormais classique pour obtenir ces inégalités consiste à recourir à la théorie des intégrales singulières à valeurs vectorielles; cette méthode est bien connue (cf. [8, chap. XI]) dans le cas des noyaux de convolution homogènes (dont nous rappelons la définition au par. 2). Elle a été étendue à des noyaux plus généraux vérifiant les estimations standard de la théorie des opérateurs de Calderòn-Zygmund et permet, à partir de l'estimation $\|g_r(f)\|_2 \leqq C(v, r)\|f\|_2$, d'obtenir les estimations $L^p$ correspondantes pour $1 < p < +\infty$, ainsi que le fait que (en un sens précisé plus loin) $g_r(f) \in \mathrm{BMO}$ si $f \in L^\infty$ (cf. [4, chap. 4]). La question centrale est donc, comme dans la théorie des intégrales singulières, l'estimation $L^2$, et les résultats récents de [6] dans ce domaine sont une de nos motivations.

Les résultats concernant l'action sur l'espace BMO d'opérateurs du type $g_r$ sont, à notre connaissance, peu nombreux et récents. Dans [9], Wang a étudié le cas de la fonction $g(f)$ de Littlewood-Paley "classique", définie dans $\mathbf{R}^v$ par

$$g(f)(x) = \left( \int_0^{+\infty} t|\nabla u(x,t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^v, \tag{4}$$

où $u$ est l'intégrale de Poisson de $f$, i.e. l'application de $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{C}$ définie par $u(x,t) = P_t(f)(x)$, où $p = (p_t)_{t>0}$ est le noyau de Poisson, et $\nabla$ désigne l'opérateur gradient dans $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+$. Si on pose $\pi(x,t) = p_t(x,0)$ et $r_t(x,y) = t\nabla\pi(x-y,t)$ pour tout $t > 0$ et tout $(x,y) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$, la fonction $g_r(f)$ définie par (2) n'est autre que la fonction $g(f)$ définie par (4). Le résultat obtenu dans [9] est le suivant: si $f \in \mathrm{BMO}$, on a l'alternative suivante: ou bien $g(f)(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^v$, ou bien $g(f) \in \mathrm{BMO}$. Ce résultat a été entendu dans [5] par Quian à des fonctions du type $g_r(f)$, où $r$ est un noyau de convolution un peu plus général.

Des résultats de la théorie des martingales, et des résultats concernant d'autre fonctions quadratiques de nature voisine, notamment la fonction $g*$ de Littlewood-Paley, laissaient supposer que les résultats de [5] et [9] n'étaient pas les meilleurs possibles, et qu'on devait pouvoir remplacer, dans la conclusion, $g_r(f) \in \mathrm{BMO}$ par $(g_r(f))^2 \in \mathrm{BMO}$, qui est une propriété évidemment plus forte. Il restait à trouver une démonstration, ce qui vient d'être fait par Bañuelos et Brossard dans leur article [1], actuellement en cours de publication. Cette démonstration est remarquablement simple et n'utilise aucun résultat vraiment difficile concernant BMO. Observons, pour terminer cette introduction, que la méthode vectorielle évoquée plus haut ne permet pas d'obtenir ce résultat optimal (i.e. $(g_r(f))^2 \in \mathrm{BMO}$ si $f \in \mathrm{BMO}$), même dans le cas relativement simple des noyaux de convolution.

## 2 Notations et hypothèses relatives au noyau $r$. Exemples

Nous considérerons toujours une famille $r = (r_t)_{t>0}$ d'applications de $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}^n$, vérifiant la "condition de décroissance" (i) et les "conditions de Lipschitz" (ii) et (iii) qui suivent:

(i) Il existe $C \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$ tels que, quels que soient $t > 0$ et $(x, y) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$

$$|r_t(x,y)| \leqq \frac{Ct^\alpha}{t^{v+\alpha} + |x-y|^{v+\alpha}}\,.$$

(ii) Il existe $C \in \mathbf{R}$ et $\beta > 0$ tels que, quels que soient $t > 0$ et $(x, y, y') \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$,

$$|r_t(x,y) - r_t(x,y')| \leqq Ct^{-v-\beta}|y-y'|^\beta\,.$$

(iii) Il existe $C \in \mathbf{R}$ et $\gamma > 0$ tels que, quels que soient $t > 0$ et $(x, x', y) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$,

$$|r_t(x',y) - r_t(x,y)| \leqq Ct^{-v-\gamma}|x-x'|^\gamma\,.$$

En outre, nous serons amenés à supposer que le noyau $r$ vérifie l'une des "conditions d'annulation" suivantes:

(iv) $$\int_{\mathbf{R}^v} r_t(x,y)dy = 0 \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et tout } x \in \mathbf{R}^v\,.$$

($\text{iv}_\text{b}$) Il existe un application $b$ de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}$, *para-accrétive*, telle que, quels que soient $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}^v$,

$$\int_{\mathbf{R}^v} r_t(x,y)b(y)dy = 0\,.$$

($\text{iv}_\text{c}$) La mesure sur $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction $(x,t) \to |R_t(\mathbb{1})(x)|^2/t$ est une mesure de Carleson (on notera $\mathbb{1}$ l'application constante $x \to 1$ de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{R}$).

Les fonctions para-accrétives ont été introduites par David et al. dans [2], à propos du "théorème $T(b)$"; nous en rappelons une définition possible: Une application $b$ de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}$ est dite *para-accrétive* si elle satisfait aux conditions suivantes:

(5) Il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que $m \leqq |b(x)| \leqq M$ pour tout $x \in \mathbf{R}^v$.

(6) Il existe trois réels strictement positifs $\delta, \eta$ et $C$ tels que, quels que soient $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, il existe une application $\varphi_{x,t}$ de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant:

$$\left|\int_{\mathbf{R}^v} \varphi_{x,t}(y)b(y)\,dy\right| \geqq \delta\,;$$

$$\varphi_{x,t}(y) = 0 \quad \text{si } |x-y| > t\,;$$

$$|\varphi_{x,t}(y) - \varphi_{x,t}(y')| \leqq Ct^{-v-\eta}|y-y'|^\eta\,.$$

Plusieurs définitions équivalentes sont énoncées dans [2]. Donnons quelques exemples: toute fonction bornée dont la partie réelle est minorée par un nombre $>0$ est para-accrétive; sur $\mathbf{R}$, la fonction $f$ définie par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geqq 0$ l'est également; la fonction $x \to e^{ix}$ ne l'est pas.

Ces conditions d'annulation sont comparables: il est manifeste que (iv) implique ($\text{iv}_\text{b}$); on sait aussi depuis peu (cf. [6]) que ($\text{iv}_\text{b}$) implique ($\text{iv}_\text{c}$). Pour un noyau $r$ défini

par une formule du type $r_t(x,y) = r^v\varphi((x-y)/t)$, où $\varphi$ est une fonction convenable, ces trois conditions sont équivalentes; on voit facilement que ce n'est pas le cas en général.

Voici deux exemples naturels et utiles de noyaux $r$ qui entrent dans le cadre étudié au par. 3:

*Les noyaux de convolution homogènes.* Soit $\varphi$ une application de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}$ possèdant la propriété suivante: Il existe $C \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$, on ait:

$$|\varphi(x)| \leqq C(1+|x|)^{-v-\alpha};$$
$$|\varphi(x+y) - \varphi(x)| \leqq C|y|^{\beta};$$
$$\int_{\mathbf{R}^v} \varphi(y)\,dy = 0.$$

Si on pose $r_t(x,y) = t^{-v}\varphi((x-y)/t)$, on définit un noyau $r$ qui vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv). Tous les résultats antérieurs concernant les relations entre l'opérateur $g_r$ et BMO ont été obtenus dans le cas de noyaux de ce type.

*Le noyau de Cauchy associé à un graphe lipschitzien.* Jones [3] et Semmes [6] ont considéré la question de l'inégalité (3) dans le cas où $p = 2$ pour le noyau $r$ défini (en dimension 1) par

$$r_t(x,y) = t(x-y+i(A(x)-A(y))+it)^{-2},$$

où $A$ est une application lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Ce noyau vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et ($\text{iv}_\text{b}$) (on peut prendre $b = 1 + iA'$); sauf cas particulier, il ne vérifie pas (iv).

Soit $r$ une famille d'applications de $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}^n$ vérifiant la "condition de décroissance" (i). Si $f$ est une fonction appartenant à l'un des espaces $L^p$, avec $1 \leqq p \leqq +\infty$, ou à l'espace BMO l'égalité (1) permet de définir la famille $(R(f))_{t>0}$. On peut donc ensuite définir les fonctions $g_{r,T}(f)$ (à valeurs dans $[0,+\infty]$) au moyen de l'égalité (2). Si la famille $r$ vérifie de plus les "conditions de Lipschitz" (ii) et (iii) et la "condition d'annulation forte" (iv), il est connu que les "fonctions de Littlewood-Paley généralisées" $g_{r,T}(f)$ vérifient les estimations (3); ce résultat est très classique dans le cas des noyaux de convolution (cf. [8, p. 312]); il est moins connu, et plus difficile à établir, dans le cas non convolutif (cf. [4, chap. 4]); on peut également, dans ce contexte, se passer de la condition (iii) (cf. [6], où un schéma de preuve est esquissé). Si on remplace (iv) par la "condition d'annulation faible" ($\text{iv}_\text{b}$), on sait depuis peu que ces résultats subsistent (cf. [6]). En ce qui concerne le problème analogue concernant BMO, nous verrons au paragraphe suivant que la méthode et les résultats de Bañuelos-Brossard s'étendent aux fonctions du type $g_r$ pourvu que $r$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et (iv). En revanche, si on remplace (iv) par ($\text{iv}_\text{b}$) ou ($\text{iv}_\text{b}$), et contrairement à ce qui se passe pour les espaces $L^p$, la situation est complètement changée.

## 3 Fonctions de Littlewood-Paley généralisées et espace BMO

Soit $f$ une application localement intégrable de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{C}$. Pour tout borélien $Q$ de $\mathbf{R}^v$, de mesure de Lebesgue finie $|Q|$, on pose

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx \quad \text{et} \quad f_Q^{\#} = |f - f_Q|_Q.$$

On dit que $f \in \mathrm{BMO}$ si $f$ est localement intégrable et si la quantité

$$\|f\|_* = \operatorname*{Sup}_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx = \operatorname*{Sup}_Q f_Q^\#$$

où $Q$ décrit l'ensemble des cubes (à côtés parallèles aux axes de coordonnées) de $\mathbf{R}^v$, est finie. Etant donné une mesure borélienne $\mu \geqq 0$ sur $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+$, on pose

$$K(\mu) = \operatorname*{Sup}_B \mu(B \times ]0, \delta])/|B|\,,$$

où $B$ parcourt l'ensemble des boules de $\mathbf{R}^v$ et $\delta$ désigne le rayon de $B$. Si cette quantité est finie, on dit que $\mu$ est une *mesure de Carleson* de coefficient $K(\mu)$.

Etant donné un noyau $r$ vérifiant (i) et $f \in \mathrm{BMO}$, la mesure sur $\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction $(x,t) \to |R_t(f)(x)|^2/t$ jouera un rôle important et sera notée $\sigma_r(f)$.

Nos principaux résultats sont les suivants:

**Théorème 1.** *Soit $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i), (ii), (iii). *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(A) *La mesure $\sigma_r(\mathbb{1})$ est une mesure de Carleson (i.e. $r$ vérifie* ($\mathrm{iv}_c$)).

(B) *Il existe une constante $C$, ne dépendant que de $v$ et $r$, telle que, pour toute fonction $f \in L^\infty$:*

($\mathrm{B}_1$) *Pour tout $T \in [0, +\infty[$, le carré de la fonction de Littlewood-Paley $g_{r,T}(f)$ associée à $f$ au moyen de la relation* (2) *appartient à BMO et on a $\|(g_{r,T}(f))^2\|_* \leqq C(\|f\|_\infty)^2$.*

($\mathrm{B}_2$) *On a l'alternative suivante:*
- *ou bien $g_r(f)(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^v$,*
- *ou bien $(g_r(f))^2 \in \mathrm{BMO}$ et $\|(g_r(f))^2\|_* \leqq C(\|f\|_\infty)^2$.*

**Théorème 2.** *Soit $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i), (ii), (iii). *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(A′) *La mesure $\sigma_r(\mathbb{1})$ est nulle (i.e. $r$ vérifie* (iv)).

(B′) *Il existe une constante $C$, ne dépendant que de $v$ et $r$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathrm{BMO}$:*

($\mathrm{B}'_1$) *Pour tout $T \in [0, +\infty[$, le carré de la fonction de Littlewood-Paley $g_{r,T}(f)$ associée à $f$ au moyen de la relation (2) appartient à BMO et on a $\|(g_{r,T}(f))^2\|_* \leqq C(\|f\|_*)^2$.*

($\mathrm{B}'_2$) *On a l'alternative suivante:*
- *ou bien $g_r(f)(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^v$,*
- *ou bien $(g_r(f))^2 \in \mathrm{BMO}$ et $\|(g_r(f)^2\|_* \leqq C(\|f\|_*)^2$.*

Pour abréger, nous dirons dans la suite que *l'opérateur $(g_r)^2$ applique $L^\infty$ (resp.* BMO) dans BMO si la propriété (B) [resp. (B′)] est satisfaite.

L'implication (A′) $\Rightarrow$ (B′) est une extension du résultat de [1] concernant la fonction de Littlewood-Paley classique. Notre démonstration en reprend l'idée de base, et la plus grande généralité est obtenue en remplacant l'estimation

$$|t\nabla u(x,t) - t\nabla u(x',t)| \leqq Ct^{-1}|x - x'|\,\|f\|_*\,,$$

ou $u$ est l'intégrale de Poisson de $f$ (obtenue dans [1] au moyen d'un argument de sous-harmonicité), par notre lemme 3. Les trois autres implications sont entièrement nouvelles.

*Démonstration des implications* (A) $\Rightarrow$ (B) *et* (A') $\Rightarrow$ (B'). Elles résultent immédiatement des deux propositions suivantes:

**Proposition 1.** *Soient $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i), (ii), *et* (iii), $(R_t)_{t>0}$ *la famille des opérateurs définis par la relation* (1). *Il existe un nombre $\eta > 0$, qui ne dépend que de $r$ et $v$, tel que la quantité*

$$\Lambda_r(\eta, \mathbb{1}) = \sup_{(t,x,x')\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^v\times\mathbf{R}^v} t^{\eta}|x-x'|^{-\eta}|R_t(\mathbb{1})(x) - R_t(\mathbb{1})(x')|$$

*soit finie. En outre, pour toute fonction $f \in$ BMO et tout $T \in [0, +\infty]$ tels que la fonction de Littlewood-Paley $g_{r,T}(f)$ associée à $f$ au moyen de la relation* (2) *appartienne localement à $L^2$, on a l'estimation*

(7) $\quad \|(g_{r,T}(f))^2\|_* \leqq C_1(\|f\|_*)^2 + C_2(\|f\|_\infty)^2)$ *(avec la convention $0 \times \infty = 0$),*

*où les $C_i$ sont des nombres qui ne dépendent que de $r$ et $v$, et où on a de plus l'expression suivante:*

$$(C_2)^{1/2} = C\Big(\sup_{t>0}\|R_t(\mathbb{1})\|_\infty + K(\sigma_r(\mathbb{1})) + \Lambda_r(\eta, \mathbb{1})\Big),$$

*où $C$ est une constante universelle.*

**Proposition 2.** *Soit $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i), (ii), (iii), *tel que la measure $\sigma_r(\mathbb{1})$ soit finie sur les boréliens bornés. Soient $f \in L^\infty$ et $g_{t,T}(f)$ $(0 \leqq T \leqq +\infty)$ les fonctions de Littlewood-Paley associées à $f$ au moyen de la relation* (2). *Alors:*
- *Pour tout $T$ fini, $(g_{r,T}(f))^2$ est localement intégrable.*
- *On a l'alternative suivante:*
- *ou bien $g_r(f)(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^v$,*
- *ou bien $(g_r(f))^2$ est localement intégrable.*

*Si de plus le noyau $r$ vérifie* (iv), *la propriété précédente s'étend à toute fonction $f \in$ BMO.*

Observons que, en vertu de la première assertion de la proposition 1, la fonction $R_t(\mathbb{1})$ est continue pour tout $t > 0$, donc les deux formulations que nous donnons pour la propriété (A') sont effectivement équivalentes.

Dans toute la suite, on désignera par $C$ un nombre ne dépendant que de $r$ de $v$, susceptible de changer de place en place.

*Démonstration de la proposition 1.* Soit $T \in [0, +\infty]$. Soient $Q$ un cube de $\mathbf{R}^v$, $x_Q$ son centre et $a$ la longueur de ses arêtes. Suivant une idée de Bañuelos et Brossard [1], nous posons

$$h = \int_0^a |R_t(f)|^2 \frac{dt}{t}; \qquad k = \int_a^{+T} |R_t(f)|^2 \frac{dt}{t} \quad \text{si } a \leqq T \text{ et } k = 0 \text{ si } a > T.$$

Comme nous le verrons plus loin (démonstration de la proposition 2), $k$ est une application continue de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{R}$ dès qu'elle n'est par identiquement égale à $+\infty$; en particulier, $k(x_Q) < +\infty$. Nous allons établir une inégalité de la forme

(8) $$\frac{1}{|Q|}\int_Q |(g_{r,T}(f))^2(x) - k(x_Q)|\,dx$$
$$\leqq C\Big(\|f\|_* + \Big(\sup_{t>0}\|R_t(\mathbb{1})\|_\infty + K(\sigma_r(\mathbb{1})) + \Lambda_r(\eta, \mathbb{1})\Big)\|f\|_\infty\Big)^2.$$

L'estimation (7) en résultera, comme il est bien connu [8, p. 200]. A son tour, l'inégalité (8) résultera évidemment des deux estimations suivantes

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q h(x)\,dx \leqq C(\|f\|_* + K(\sigma_r(\mathbb{1}))\,\|f\|_\infty)^2\,; \tag{9}$$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |k(x)-k(x_Q)|\,dx \tag{10}$$

$$\leqq C\Big(\|f\|_* + \Big(\operatorname*{Sup}_{t>0}\|R_t(\mathbb{1})\|_\infty + \Lambda_r(\eta,\mathbb{1})\Big)\,\|f\|_\infty\Big)^2.$$

Commençons par prouver (9). Soit $B$ une boule contenant $Q$, et telle que $|B| \leqq C|Q|$; on a, en vertu du théorème de Fubini,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q h(x)\,dx \leqq C\frac{1}{|B|}\iint_{B\times]0,a]} |R_t(f)(x)|^2\frac{dx\,dt}{t} \leqq CK(\sigma_r(f))\,,$$

de sorte que l'estimation cherchée est une conséquence immédiate du lemme suivant. Ce lemme formule de manière un peu plus générale un résultat classique [8, p. 373] de Fefferman:

**Lemme 1.** *Soient $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i) *et* (ii), *$(R_t)_{t>0}$ la famille des opérateurs définis par la relation* (1) *et $f \in$ BMO. On a alors*

$$\sigma_r(f) \leqq (\|f\|_*)^2\mu_f + C(\|f\|_\infty)^2\sigma_r(\mathbb{1})\,,$$

*où $\mu_f$ est une mesure de Carleson vérifiant $K(\mu_f) \leqq C$.*

Ce résultat est optimal car si on a, pour toute fonction $f \in$ BMO (resp. $L^\infty$), une estimation de la forme $\mathrm{K}(\sigma_r(f)) \leqq C(\|f\|_*)^2$ (resp. $\mathrm{K}(\sigma_r(f)) \leqq C(\|f\|_\infty)^2$, alors la mesure $\sigma_r(\mathbb{1})$ est nulle (resp. est une mesure de Carleson).

*Démonstration du lemme 1.* L'idée consiste à corriger le noyau $r$ de façon à ce qu'il vérifie la condition d'annulation (iv). Une méthode (cf. [6]) consiste à poser, pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$,

$$s_t(x,y) = r_t(x,y) - R_t(\mathbb{1})(x)p_t(x,y)$$

(rappelons que $p$ désigne le noyau de Poisson; d'autres noyaux conviennent évidemment). On a alors, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^v$,

$$\sigma_r(f) \leqq C(\sigma_s(f) + (\|f\|_\infty)^2\sigma_r(\mathbb{1}))\,.$$

Le nouveau noyau $s$ vérifie encore (i) et (ii) puisque $\operatorname*{Sup}_{t>0}\|R_t(\mathbb{1})\|$ est fini [conséquence de (i)], et de plus vérifie (iv). Comme nous l'avons rappelé à la fin du par. 2, on sait qu'on a alors les estimations $L^2$ $\|g_s(f)\|_2 \leqq C(v,r)\,\|f\|_2$. On peut alors reprendre mot pour mot la démonstration donnée dans [8, pp. 373–374], pour obtenir, à partir de ces estimations, le fait que la mesure $\sigma_s(f)$ est une mesure de Carleson de coefficient $\leqq C(\|f\|*)^2$. Le lemme est donc établi.

Passons à la démonstration de l'estimation (10). Il est clair que

$$\int_Q |k(x)-k(x_Q)|\,dx \leqq C\|R_t(f)\|_\infty \int_a^{+\infty}\left(\int_Q |R_t(f)(x)-R_t(f)(x_Q)|\,dx\right)\frac{dt}{t}\,. \tag{11}$$

Pour majorer le second membre de (11), nous utiliserons les deux résultats suivants (le premier étend aussi une estimation classique [8, p. 373]):

**Lemme 2.** *Soient $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i) *et* (ii), *et $(R_t)_{t>0}$ la famille des opérateurs définis par la relation* (1). *Il existe un nombre $C$, ne dépendant que de $r$, tel que, pour toute fonction $f \in$ BMO et tout $t > 0$, on ait*

$$\|R_t(f)\|_\infty \leqq C(\|f\|_* + \|R_t(\mathbb{1})\|_\infty \|f\|_\infty).$$

On a toujours [en vertu de (i)] une estimation de la forme $\|R_t(f)\|_\infty \leqq C\|f\|_\infty$ pour toute fonction $f \in L^\infty$. On a donc de plus $\|R_t(f)\|_\infty \leqq C\|f\|_*$ pour toute fonction $f \in$ BMO si et seulement si $\operatorname{Sup}_{t>0} \|R_t(\mathbb{1})\|_\infty = 0$. i.e. si $r$ vérifie (iv).

**Lemme 3.** *Soient $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i) *et* (iii), *et $(R_t)_{t>0}$ la famille des opérateurs définis par la relation* (1). *Alors:*
*– Il existe $\eta > 0$, ne dépendant que de $r$, tel que $\Lambda_r(\eta, \mathbb{1}) < +\infty$;*
*– Il existe $\zeta > 0$, ne dépendant que de $r$, tel que, pour tout $K > 0$, il existe une constante $C_K$, dépendant uniquement de $K$, $r$ et $v$, possédant la propriété suivante: Pour toute fonction $f \in$ BMO, tout $t > 0$, et tout $(x, x') \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$ tel que $|x - x'| \leqq Kt$, on a*

$$|R_t(f)(x) - R_t(f)(x')| \leqq C_K t^{-\zeta} |x - x'|^\zeta (\|f\|_* + \Lambda_r(\eta, \mathbb{1}) \|f\|_\infty).$$

Admettons provisoirement ces deux lemmes. Soit $Q'$ une boule centrée en $x_Q$, contenant $Q$, de rayon $\leqq Ka$, où $K$ est un nombre qui dépend uniquement de $v$; on déduit du lemme 3 que

$$\begin{aligned}
&\int_a^{+\infty} \left( \int_Q |R_t(f)(x) - R_t(f)(x_Q)|\, dx \right) \frac{dt}{t} \\
&\quad \leqq C(\|f\|_* + \Lambda_r(\eta, \mathbb{1}) \|f\|_\infty) \left( \int_Q |x - x_Q|^\zeta \, dx \right) \left( \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\zeta}} \right) \\
&\quad \leqq C(\|f\|_* + \Lambda_r(\eta, \mathbb{1}) \|f\|_\infty) a^v,
\end{aligned}$$

et l'estimation (10) découle trivialement de (11), de l'estimation ci-dessus et du lemme 2. Il reste donc à démontrer ces deux lemmes.

*Démonstration du lemme 2.* Elle résulte immédiatement de la décomposition du noyau $r$ utilisé pour démontrer le lemme précédent et de l'application au noyau corrigé $s$ de la méthode utilisée dans [8, p. 373], pour établir le même résultat dans le cas des noyaux de convolution.

*Démonstration du lemme 3.* On reprend la décomposition du noyau $r$ utilisée pour démontrer le lemme 1, ainsi que les mêmes notations. Il est clair que, pour tout $t > 0$ et tout $(x, x') \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$,

$$\begin{aligned}
(12) \qquad |R_t(f)(x) - R_t(f)(x')| \leqq\ & |S_t(f)(x) - S_t(f)(x')| \\
& + \|R_t(\mathbb{1})\|_\infty |P_t(f)(x) - P_t(f)(x')| \\
& + \|f\|_\infty |R_t(\mathbb{1})(x) - R_t(\mathbb{1})(x')|.
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer successivement que:

(13) Si $\eta = \gamma\alpha/2(\alpha + v)$, alors $\Lambda_r(\eta, \mathbb{1}) < +\infty$.

(14) Pour toute fonction $f \in \mathrm{BMO}$, tout $t > 0$ et tout $(x, x') \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$, $|P_t(f)(x) - P_t(f)(x')| \leqq C\|f\|_* t^{-1}|x - x'|$.

(15) Il existe $\xi > 0$, ne dépendant que de $r$, tel que, pour toute fonction $f \in \mathrm{BMO}$, tout $t > 0$, et tout $(x, x') \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$, on ait

$$|S_t(f)(x) - S_t(f)(x')| \leqq Ct^{-\xi}|x - x'|^{\xi}\|f\|_* .$$

Le lemme 3 résultera alors facilement des propriétés (12) à (15) [le nombre $\zeta = \mathrm{Min}(1, \eta, \xi)$ convient].

Commençons par établir (13). Pour tout $\varepsilon > 0$, on écrit, pour tout $t > 0$, et tout $(x, x') \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$,

$$|R_t(\mathbb{1})(x) - R_t(\mathbb{1})(x')| \leqq C \int_{\mathbf{R}^v} |r_t(x, y) - r_t(x', y)|^{1-\varepsilon}(|r_t(x, y)|^{1-\varepsilon} + |r_t(x', y)|^{1-\varepsilon})\, dy .$$

En utilisant les propriétés (i) et (iii), on majore ceci par

$$Ct^{-\gamma\varepsilon}|x - x'|^{\gamma\varepsilon} \int_{\mathbf{R}^v} \frac{dz}{(1 + |z|^{\alpha+v})^{1-\varepsilon}} \leqq Ct^{-\gamma\varepsilon}|x - x'|^{\gamma\varepsilon}$$

si (par exemple) $\varepsilon = \alpha/2(v + \alpha)$. D'où la propriété (13).

Pour obtenir (14), il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} |P_t(f)(x) - P_t(f)(x')| &\leqq t^{-1}|x - x'| \operatorname*{Sup}_{(y,u) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+} |u \nabla_{(y,u)} P_u(f)(y)| \\ &\leqq C\|f\|_* t^{-1}|x - x'| \end{aligned}$$

(conséquence de [8, p. 373], ou du lemme 2).

Prouvons enfin (15), ce qui est un peu plus difficile. Soient $f \in \mathrm{BMO}$ et $t > 0$. Compte-tenu du lemme 2, il suffit de démontrer l'inégalité voulue pour des $(x, x') \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$ tels que $|x - x'| \leqq t$. On notera $Q$ le cube centré au point $(x + x')/2$ et d'aréte $2t$. Suivant une idée classique (cf. [8, p. 373]), on écrit

$$f = (f - f_Q)\mathbb{1}_Q + \sum_{k=0}^{+\infty} (f - f_Q)\mathbb{1}_{E_k} + f_Q , \quad \text{où } E_k = 2^{k+1}Q \cap (2^k Q)^c ,$$

$\lambda Q$ désignant l'homothétique de $Q$ dans l'homothétie de centre $(x + x')/2$ et de rapport $\lambda$. Comme le noyau $s$ vérifie (iv), on en déduit

$$\begin{aligned} (16) \quad |S_t(f)(x) - S_t(f)(x')| \leqq & \int_Q |s_t(x, y) - s_t(x', y)|\, |f(y) - f_Q|\, dy \\ & + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{E_k} |s_t(x, y) - s_t(x', y)|\, |f(y) - f_{2^{k+1}Q}|\, dy \\ & + C\|f\|_* \sum_{k=0}^{+\infty} k \int_{E_k} |s_t(x, y) - s_t(x', y)|\, dy , \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité élémentaire

$$|f_Q - f_{2^k Q}| \leqq 2^v k\|f\|_* \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N} \text{ [8, p. 206]} .$$

Nous allons montrer que le noyau $s$ vérifie aussi la propriété (iii). Pour tout $t > 0$, les fonctions, $r_t$, $s_t$ et $p_t$ sont majorées en norme par $Ct^{-v}$, donc on peut se borner à établir l'inégalité voulue pour des $(x, x', y) \in \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v \times \mathbf{R}^v$ tels que $|x - x'| \leqq t$. On a

$$\begin{aligned}|s_t(x,y) - s_t(x',y)| &\leqq |r_t(x,y) - r_t(x',y)| + \left(\operatorname*{Sup}_{t>0} \|R_t(\mathbb{1})\|_\infty\right)|p_t(x,y) - p_t(x',y)| \\ &\quad + Ct^{-v}|R_t(\mathbb{1})(x) - R_t(\mathbb{1})(x')| \\ &\leqq Ct^{-v}\left(\left|\frac{x-x'}{t}\right|^\gamma + \left|\frac{x-x'}{t}\right| + \left|\frac{x-x'}{t}\right|^\eta\right)\end{aligned}$$

[conséquence du fait que $r$ vérifie (iii) (avec l'exposant $\gamma$), de (14) et de (13)]

$$\leqq Ct^{-v-\delta}|x - x'|^\delta, \quad \text{où } \delta = \operatorname{Min}(\gamma, 1, \eta).$$

Le fait que le noyau $s$ vérifie la propriété (iii) (avec l'exposant $\delta$) donne immédiatement

$$\int_Q |s_t(x,y) - s_t(x',y)|\,|f(y) - f_Q|\,dy \leqq C\|f\|_* t^{-\delta}|x - x'|^\delta. \tag{17}$$

Pour majorer les autres termes du second membre de (16), on observe que, pour tout entier $k$, et tout $y \in E_k$, $|x - y|$ et $|x' - y|$ sont $\geqq C2^k t$; par suite, on obtient en utilisant (i)

$$|s_t(x,y) - s_t(x',y)| \leqq Ct^{-v}2^{-k(\alpha+v)} \quad \text{pour tout } y \in E_k.$$

Soit $\varepsilon \in ]0,1[$, qui sera fixé ultérieurement. En majorant, pour $y \in E_k$, $|s_t(x,y) - s_t(x',y)|^{1-\varepsilon}$ en utilisant la remarque précédente et $|s_t(x,y) - s_t(x',y)|^\varepsilon$ au moyen de (iii), on obtient l'estimation

$$|s_t(x,y) - s_t(x',y)| \leqq Ct^{-\delta\varepsilon}|x - x'|^{\delta\varepsilon}|E_k|^{-1}2^{-k(\alpha-\varepsilon(\alpha+v))}.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{E_k} |s_t(x,y) - s_t(x',y)|\,|f(y) - f_{2^{k+1}Q}|\,dy \leqq C\|f\|_* t^{-\delta\varepsilon}|x - x'|^{\delta\varepsilon}, \tag{18}$$

si on choisit, par exemple, $\varepsilon = \alpha/2(\alpha + v)$. On obtient de même

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \int_{E_k} |s_t(x,y) - s_t(x',y)| \leqq Ct^{-\delta\varepsilon}|x - x'|^{\delta\varepsilon}. \tag{19}$$

L'estimation (15) découle alors des estimations (16) à (19) [pour $\xi$, tout nombre positif $\leqq \delta\alpha/2(\alpha + v)$ convient]. La démonstration du lemme 3 est donc achevée; par suite, la proposition 1 est entièrement démontrée.

*Démonstration de la proposition 2.* Soit $f \in L^\infty$. La première assertion est une conséquence immédiate du lemme 1. Pour prouver la seconde, supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^v$ tel que $g_r(f)(x_0)$ soit fini. Nous allons démontrer que, pour toute boule $B$

centrée en $x_0$, l'intégrale sur $B$ de $(g_r(f))^2$ est finie. Soit $B$ une telle boule, et soit $a$ son rayon; d'après le lemme 1,

$$\int_B \left( \int_0^a |R_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right) dx < +\infty .$$

D'autre part, on a évidemment

$$\int_B \left( \int_a^{+\infty} |R_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right) dx$$
$$\leqq C \left( \int_B \left( \int_a^{+\infty} |R_t(f)(x)|^2 - |R_t(f)(x_0)|^2 \frac{dt}{t} \right) dx + ((g_r(f)(x_0))^2 \right),$$

et on déduit facilement des lemmes 2 et 3, en procédant comme pour la démonstration de l'estimation (10), que, pour tout $b > 0$, la fonction

$$\int_b^{+\infty} |R_t(f)|^2 \frac{dt}{t}$$

est finie partout et continue dès qu'elle est finie en un point. Ceci achève la preuve de l'assertion concernant le cas où $f \in L^\infty$. L'autre se démontre de la même manière.

*Démonstration de l'implication* (B) $\Rightarrow$ (A). Etant donné une fonction $f \in L^\infty$ et $y \in \mathbf{R}^v$, on pose, pour tout $x \in \mathbf{R}^v - \{y\}$,

$$F_r(f)(y,x) = \int_0^1 |R_{|x-y|u}(f)(x)|^2 \frac{du}{u} .$$

Nous commencerons par deux remarques préliminaires:

La première consiste à observer que, dès qu'un noyau $r$ vérifie (i), on a la propriété suivante:

(20) Pour toute fonction $f \in L^\infty$, tout $y \in \mathbf{R}^v$ et toute boule $B$ de centre $y$ et de rayon $\delta$,

$$(F_r(f)(y,\cdot))_B \leqq \frac{1}{|B|} \sigma_r(f)(B\times]0,\delta]) \leqq CK(\sigma_r(f))$$

et

$$\frac{1}{|B|} \sigma_r(f)(B\times]0,\delta]) \leqq C((F_r(f)(y,\cdot))_B + (\|f\|_\infty)^2) .$$

Vérifions, par exemple, la dernière estimation. Soit $B$ une boule de $\mathbf{R}^v$, de centre $y$ et de rayon $\delta$. On a

$$\sigma_r(f)(B\times]0,\delta]) = \int_B F_r(f)(y,x)\,dx + \int_B \left( \int_1^{\delta/|x-y|} |R_{|x-y|u}(f)(x)|^2 \frac{du}{u} \right) dx .$$

Le premier terme du second membre se majore par $C|B|\,(F_r(f)(y,\cdot))_B$, et le second se majore [à cause de la propriété (i)] par

$$C\|f\|_\infty^2 \int_B \left( \int_1^{\delta/|x-y|} \frac{du}{u} \right) dx \leqq C|B|\,\|f\|_\infty^2 \int_{\{|z|<1\}} \mathrm{Log}(1/|z|)\,dz\,,$$

d'où le résultat.

La deuxième remarque consiste à noter que, sous l'hypothèse (B), on a la propriété suivante

(21) Pour toute fonction $f \in L^\infty$, tout $y \in \mathbf{R}^v$ et tout cube $Q$ de centre $y$,

$$(F_r(f(y,\cdot))_Q^{\#} \leqq C\|f\|_\infty^2\,.$$

En effet, si $Q$ est un cube centré en $y$, d'arête $\delta$, on écrit

$$\begin{aligned}
&\int_Q |F_r(f)(y,x) - (F_r(f)(y,\cdot))_Q|\,dx \\
&\leqq \int_Q \left| \int_0^\delta |R_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} - \left( \int_0^\delta |R_t(f)(\cdot)|^2 \frac{dt}{l} \right)_Q \right| dx \\
&\quad + 2 \int_Q \left( \int_1^{\delta/|x-y|} |R_{|y-x|u}(f)(x)|^2 \frac{du}{u} \right) dx\,.
\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre se majore par $C|Q|\,\|g_{r,\delta}(f))^2\|_*$, donc par $C|Q|\,(\|f\|_\infty)^2$ d'après $(B_1)$; le second se majore aussi par cette dernière quantité, comme on l'a déjà vu à propos de la remarque précédente. D'où la propriété voulue.

Ces remarques étant faites, nous allons procéder de la manière suivante: dans une première étape, nouls allons montrer, en utilisant (20) et (21), que la propriété (B) implique la propriété

(22) Pour toute fonction $f \in L^\infty$, tout $y \in \mathbf{R}^v$ et tout cube $Q$ de centre $y$, on a

$$(G_r(f)(y,\cdot))_Q^{\#} \leqq C\|f\|_\infty^2 (1 + \sqrt{(F_r(\mathbb{1})(y,\cdot))_Q})\,,$$

où

$$G_r(f)(y,x) = \int_0^1 |R_{|y-x|u}(\mathbb{1})(x)|^2 |P_{|y-x|u}(f)(x)|^2 \frac{du}{u}\,.$$

Dans une seconde étape, nous déduirons de la propriété (22), en utilisant des fonctions bornées $f$ convenables, la propriété

(23) Pour tout $y \in \mathbf{R}^v$ et tout cube $Q$ de centre $y$, on a

$$(F_r(\mathbb{1})(y,\cdot))_Q \leqq C(1 + \sqrt{(F_r(\mathbb{1})(y,\cdot))_Q})\,.$$

Ceci terminera la démonstration car on déduit de (23), au moyen d'argument bien connu, le fait que $(F_r(\mathbb{1})(y,\cdot))_Q \leqq C$ pour tout $y \in \mathbf{R}^v$ et tout cube $Q$ de centre $y$. Et ceci implique, en vertu de (20), la finitude de $K(\sigma_r(\mathbb{1}))$, i.e. la propriété (A).

*Preuve de la propriété* (22). Nous reprenons la décomposition du noyau $r$ déjà utilisée pour démontrer le lemme 1, avec les mêmes notations. Soient $f \in L^\infty$, $y \in \mathbf{R}^v$ et $Q$ un cube de centre $y$; on a, pour tout $x \in \mathbf{R}^v$, l'égalité

$$F_r(f)(y,x) = F_s(f)(y,x) + G_r(f)(y,x) + 2\,\mathrm{Re}(H_r(f)(y,x)), \tag{24}$$

où

$$H_r(f)(y,x) = \int_0^1 S_{|y-x|u}(f)(x)\, R_{|y-x|u}(\mathbb{1})(x)\, P_{|y-x|u}(f)(x)\, \frac{du}{u}.$$

Par hypothèse et d'après (21), on a

$$(F_r(f(y,\cdot))^{\#}_Q \leqq C\|f\|^2_\infty .$$

D'autre part, comme le noyau $s$ vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv), il vérifie (A), donc aussi (B). Par suite, d'après (21), on a aussi

$$(F_s(f(y,\cdot))^{\#}_Q \leqq C\|f\|^2_\infty .$$

De plus, l'inégalité de Schwarz donne l'estimation

$$|H_r(f)(y,\cdot)|_Q \leqq \sqrt{(F_s(f)(y,\cdot))_Q}\sqrt{(G_r(f)(y,\cdot))_Q}.$$

Compte-tenu des propriétés du noyau $s$, il résulte du lemme 1 que la mesure $\sigma_s(f)$ est une mesure de Carleson de coefficient $\leqq C(\|f\|_\infty)^2$; par conséquent, d'après (20), on a $(F_s(f)(y,\cdot))_Q \leqq C(\|f\|_\infty)^2$. Enfin, il est clair que $(G_r(f)(y,\cdot))_Q \leqq (\|f\|_\infty)^2 (F_r(\mathbb{1})(y,\cdot))_Q$. La propriété à établir résulte facilement de ces cinq estimations et de l'égalité (24).

*Preuve de la propriété* (23). Soit $y = (y_1, \ldots, y_v) \in \mathbf{R}^v$ et soit $Q$ un cube de centre $y$. Pour tout entier $i \in [1, v]$, on désignera par $f_i$ la fonction indicatrice du demi-espace constitué des points $x = (x_1, \ldots, x_v) \in \mathbf{R}^v$ tels que $x_i - y_i > 0$. Pour tout $u > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^v - \{y\}$, on vérifie facilement l'égalité

$$P_{|x-y|u}(f_i)(x) = \Phi((y_i - x_i)/|x-y|u),$$

avec

$$\Phi(h) = \int_{\{\zeta_1 > h\}} \frac{c_v d\zeta}{(|\zeta|^2+1)^{(v+1)/2}} \quad \text{pour tout réel } h,$$

où $c_v$ désigne la constante de normalisation du noyau de Poisson. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}^v - \{y\}$, on a l'égalité

$$G_r(f_i)(y,x) - G_r(\mathbb{1}-f_i)(y,x) = \int_0^1 |R_{|y-x|u}(\mathbb{1})(x)|^2 \left(2\Phi\left(\frac{y_i - x_i}{|y-x|u}\right) - 1\right)\frac{du}{u};$$

par suite, si on pose, pour tout $x \in \mathbf{R}^v - \{y\}$,

$$I_i(x) = G_r(f_i)(y,x) - G_r(\mathbb{1}-f_i)(y,x) - G_r(f_i)(y,2y-x) + G_r(\mathbb{1}-f_i)(y,2y-x),$$

les propriétés de symétrie de $\Phi$ permettent d'obtenir l'égalité

$$I_i(x) = \operatorname{sgn}(x_i - y_i) \int_0^1 (|R_{|y-x|u}(\mathbb{1})(x)|^2 + |R_{|y-x|u}(\mathbb{1})(2y-x)|^2) \left| 2\Phi\left(\frac{y_i - x_i}{|y-x|u}\right) - 1 \right| \frac{du}{u}.$$

On applique la propriété (22) aux fonctions $f_i$ et $\mathbb{1} - f_i$, et on utilise le fait que

$$\phi_Q^{\#} = (\phi(2y - \cdot))_Q^{\#}$$

pour toute fonction localement intégrable $\phi$. On obtient ainsi

$$|I_i|_Q = (I_i)_Q^{\#} \leqq C(1 + \sqrt{(F_r(\mathbb{1})(y,\cdot))_Q}).$$

Cette estimation étant vraie pour tout $i$, on en déduit

$$\left(\sum_{i=1}^{v} |I_i|\right)_Q \leqq C(1 + \sqrt{(F_r(\mathbb{1})(y,\cdot))_Q}). \tag{25}$$

Mais, pour tout $x \in \mathbf{R}^v - \{y\}$, il existe un entier $j \in [1, v]$ tel que $|x_j - y_j|/|x-y| \geqq 1/v$; à fortiori, $|x_j - y_j|/|x-y|u \geqq 1/v$ pour tout $u \in [0,1]$, et par suite

$$\left| 2\Phi\left(\frac{y_j - x_j}{|y-x|u}\right) - 1 \right| \geqq 2 \int_{\{0 \leqq \zeta_1 \leqq 1/v\}} \frac{c_v d\zeta}{(|\zeta|^2 + 1)^{(v+1)/2}} \quad \text{pour tout réel } u \in [0,1].$$

Par conséquent

$$F_r(\mathbb{1})(y,\cdot) \leqq C \sum_{i=1}^{v} |I_i|.$$

L'estimation voulue résulte donc de l'inégalité précédente et de (25), et la démonstration est achevée.

*Démonstration de l'implication* (B′) ⇒ (A′). En utilisant la propriété ($B_1'$) avec la fonction $\mathbb{1}$, on obtient immédiatement le fait que, pour tout $T \in ]0, +\infty[$, la fonction $(g_{r,T}(\mathbb{1}))^2$ est une constante que nous noterons $C_T$; il reste à montrer que $C_T = 0$ pour tout $T \in ]0, +\infty[$. Soit $f$ un élément de BMO, à valeurs réelles, qui sera choisi convenablement plus loin. Nous reprenons la décomposition du noyau $r$ précédemment utilisée, avec les mêmes notations. Pour tout réel $A \geqq 0$, on a $\|f\|_* = \|f + A\|_*$, et par suite, en vertu de l'hypothèse, $\|(g_{r,T}(f + A))^2 - (g_{r,T}(f))^2\|_* \leqq C(\|f\|_*)^2$ pour tout $T \in ]0, +\infty[$. De plus, puisque le noyau $s$ vérifie la condition (iv), on a $S_t(f + A)) = S_t(f))$ pour tout $t > 0$. De ces deux remarques on déduit que, pour tout $A > 0$,

$$\left\| \int_0^T |R_t(\mathbb{1})|^2 P_t(f) \frac{dt}{t} + \operatorname{Re} \int_0^T S_t(f) R_t(\mathbb{1}) \frac{dt}{t} \right\|_* \leqq C \frac{\|f\|_*}{A}.$$

Par conséquent, la somme des deux intégrales précédentes est une constante $K_{T,f}$. En outre, pour toute boule $B$ de rayon $T$,

$$\left|\left(\int_0^T S_t(f)R_t(\mathbb{1})\,\frac{dt}{t}\right)\right|_B \leqq \left(\frac{1}{|B|}\,\sigma_s(f)(B\times]0,T])\right)^{1/2}(C_T)^{1/2} \leqq C\|f\|_*(C_T)^{1/2}$$

(en vertu du lemme 1). On déduit donc de ce qui précède que, pour toute boule $B$ de rayon $T$,

$$\left|\int_0^T |R_t(\mathbb{1})|^2 P_t(f)\,\frac{dt}{t}\right|_B \leqq K_{T,f} + C\|f\|_*(C_T)^{1/2} = C(r,T,f)\,.$$

Prenons pour $f$ la fonction $\mathrm{Log}|\cdot|$. Il est bien connu que $f \in \mathrm{BMO}$; de plus, un calcul simple montre que, pour tout $x$ non nul et tout $t > 0$, on a $P_t(\mathrm{Log}|\cdot|)(x) = \mathrm{Log}|x| + P_{t/|x|}(\mathrm{Log}|\cdot|)(x/|x|)$. Par conséquent, si $|x| \geqq T$ et $t \leqq T$, des considérations élémentaires montrent que $|P_t(\mathrm{Log}|\cdot|)(x) - \mathrm{Log}|x|| \leqq C$. On déduit de ceci et de l'estimation précédente que, pour toute boule $B$ de rayon $T$, dont le centre $y$ vérifie $|y| \geqq 2T$, $C_T(\mathrm{Log}|\cdot|)_B \leqq C(r,T,\mathrm{Log}|\cdot|) + CC_T$, ce qui prouve que $C_T = 0$, et la démonstration est achevée.

Comme la norme $\|\cdot\|_*$ est définie modulo les fonctions constantes, il peut sembler raisonnable, dans la démonstration de l'implication (B′) ⇒ (A′), de supposer seulement que l'on a l'estimation $\|(g_{r,T}(f))^2\|_* \leqq C(\|f\|_*)^2$ pour toute fonction $f \in \mathrm{BMO}$ telle que $\mathrm{Inf}_Q |f_Q| = 0$. En fait, en considérant les fonctions $\mathbb{1} + \varepsilon\,\mathrm{Log}|\cdot|$, on montre facilement que cette hypothèse affaiblie implique aussi que les fonctions $g_{r,T}(\mathbb{1})$ sont constantes; la démonstration est donc peu modifiée, et le résultat est inchangé. Nous donnons au par. 4 (proposition 4) un résultat concernant ce qui se passe si on supprime complètement ce contrôle de norme.

Nous énonçons la conséquence suivante du théorème 1, qui complète les résultats obtenus récemment par Semmes dans [6]:

**Corollaire 1.** *Si un noyau $r$ vérifie les propriétés* (i), (ii), (iii) *et* ($\mathrm{iv_b}$), *alors l'opérateur* $(g_r)^2$ *applique* $L^\infty$ *dans* BMO *(au sens de la propriété* (B) *du théorème 1).*

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser l'implication (A) ⇒ (B) du théorème 1, en vertu du résultat suivant, qui constitue le point crucial de la preuve de l'inégalité "de Littlewood-Paley" $\|g_r(f)\|_2 \leqq C\|f\|_2$ dans ce cadre:

**Lemme 4** (Semmes [6]). *Si un noyau $r$ vérifie les conditions* (i), (ii) *et* ($\mathrm{iv_b}$), *alors la mesure* $\sigma_r(\mathbb{1})$ *est une mesure de Carleson.*

Il est très facile de construire un noyau $r$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii), tel que la mesure $\sigma_r(\mathbb{1})$ soit une mesure de Carleson sans que $r$ vérifie ($\mathrm{iv_b}$), ni même aucune condition d'annulation stricto sensu: par exemple, si $\varphi$ est une application de $]0,+\infty[$ dans $]0,1]$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\varphi(t))^2}{t}\,dt < +\infty\,,$$

le noyau $r$ défini par $r_t(x,y) = \varphi(t)p_t(x,y)$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et ($\mathrm{iv_c}$); néanmoins les seules fonctions $f$ appartenant à l'un des espaces $L^p$ ($1 \leqq p \leqq +\infty$)

qui vérifient $R_t(f)(x) = 0$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$ sont les fonctions nulles presque partout.

Le théorème 1 a aussi pour conséquence le "résultat d'extrapolation" suivant, qui relie les inégalités de Littlewood-Paley à l'action de l'opérateur $g_r$ sur $L^\infty$:

**Corollaire 2.** *Soit $r$ un noyau vérifiant les conditions* (i), (ii), (iii). *Les assertions suivantes sont éequivalentes:*

(LP) *Les inégalités de Littlewood-Paley* (3) *sont vérifiées pour tout $p \geqq 2$.*

(B) *L'opérateur $(g_r)^2$ applique $L^\infty$ dans BMO (au sens de la propriété* (B) *du théorème 1).*

*Démonstration.* Compte-tenu du théorème 1, il suffit de prouver que la propriété (LP) est équivalente au fait que la mesure $\sigma_r(\mathbb{1})$ soit une mesure de Carleson. Dans ce qui suit, nous désignerons par $D_p$ une constante dépendant uniquement de $v$ et $p$. On reprend la décomposition du noyau $r$ déjà utilisée, avec les mêmes notations; comme le noyau $s$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et (iv), il vérifie la propriété (LP). Par conséquent le noyau $r$ la vérifie si et seulement si

(26) Pour tout $p \geqq 2$,

$$\int_{\mathbf{R}^v} \left| \int_{\mathbf{R}_+} |P_t(f)(x) R_t(\mathbb{1})(x)|^2 \frac{dt}{t} \right|^{p/2} dx \leqq D_p \|f\|_p^p \quad \text{pour toute } f \in L^p .$$

Supposons pour commencer que la mesure $\sigma_r(\mathbb{1})$ soit une mesure de Carleson. Soit $q'$ l'exposant conjugué de $p/2$. Pour toute fonction $h \in L^{q'}$, à valeurs $\geqq 0$, le théorème de Fubini donne l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}^v} h(x) \left( \int_{\mathbf{R}_+} |P_t(f)(x) R_t(\mathbb{1})(x)|^2 \frac{dt}{t} \right) dx = \int_{\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}_+} h(x) |P_t(f)(x)|^2 \sigma_r(\mathbb{1})(dx\, dt)$$
$$\leqq C \int_{\mathbf{R}^v} h(x) (N(f)(x))^2 dx ,$$

où $N(f)(x) = \operatorname{Sup}_{|y-x|<t} |P_t(f)(y)|$ [8, p. 373]. Nous majorons cette dernière intégrale en utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants $q'$ et $p/2$, puis nous utilisons l'inégalité maximale bien connue

$$\int_{\mathbf{R}^v} (N(f)(x))^p \, dx \leqq D_p \int_{\mathbf{R}^v} |f(x)|^p \, dx .$$

Nous obtenons ainsi le fait que, pour tout $p \geqq 2$,

$$\int_{\mathbf{R}^v} h(x) \left( \int_{\mathbf{R}_+} |P_t(f)(x) R_t(\mathbb{1})(x)|^2 \frac{dt}{t} \right) dx \leqq D_p \|h\|_{q'} \|f\|_p^2$$

pour toute fonction $h \in L^{q'}$ à valeurs $\geqq 0$, ce qui prouve (26). Réciproquement, soient $a$ un nombre $> 0$, $y \in \mathbf{R}^v$, $B$ la boule de centre $y$ et de rayon $a$ et $f$ la fonction indicatrice de $B$. Des considérations élémentaires montrent que, pour tout

$(x,t) \in B\times]0,a]$, on a $P_t(f)(x) \geqq C(v)f(x)$, où $C(v)$ est un nombre $>0$ qui ne dépend que de $v$. Par conséquent,

$$\frac{1}{C(v)}\sigma_r(\mathbb{1})(B\times]0,a]) \leqq \int_{\mathbf{R}^v\times\mathbf{R}_+} (P_t(f)(x))^2\sigma_r(\mathbb{1})(dx\,dt) \leqq C\|f\|_2^2 = C|B|\,,$$

en raison de la propriété (26) [donc de la propriété (LP)] utilisée pour $p = 2$, ce qui prouve que la mesure $\sigma_r(\mathbb{1})$ est une mesure de Carleson, et la démonstration est achevée.

## 4 Remarques sur l'optimalité des résultats précédents

Les résultats de [1] et les nôtres montrent donc qu'on peut, dans ceux obtenus dans [5] et [9], remplacer la conclusion "$g_r(f) \in$ BMO" par "$(g_r(f))^2 \in$ BMO". Il est raisonnable de se demander si l'exposant 2 est le meilleur possible. C'est effectivement le cas, comme le prouve le résultat suivant; il ne figure pas dans la littérature, même dans les cas particuliers étudiés par nos prédécesseurs:

**Proposition 3.** *Il existe un noyau $r$ vérifiant les conditions* (i), (ii), (iii), (iv), *et une fonction $f \in L^\infty(\mathbf{R})$ vérifiant:*
*– $g_r(f)(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}$;*
*– Pour toute application mesurable $h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, telle que $h(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, la fonction $(h \circ (g_r(f)))(g_r(f))^2 \notin$ BMO. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, $(g_r(f))^{2+\varepsilon} \notin$ BMO.*

*Démonstration.* Nous considérons l'application $w:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $w(u) = u/(1+u^2)^2$ pour tout $u \in \mathbf{R}$; elle vérifie $|w(u)| \leqq 2/(1+|u|^3)$ et $|w'(u)| \leqq 1$ pour tout $u \in \mathbf{R}$ et par suite, si on pose, pour tout $t > 0$ et tout $(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$,

$$q_t(x,y) = \frac{1}{t}\,w\left(\frac{y-x}{t}\right),$$

on définit un noyau $q$ qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iv), avec $\alpha = \beta = \gamma = 1$ (à une constante multiplicative près, $q_t(x,y) = t(\partial/\partial x)(p_t(x,y))$). Par conséquent, il en est de même du noyau $r$ défini par $r_t(x,y) = \mathbb{1}_{]0,1]}(t)q_t(x,y)$. Si on prend pour $f$ la fonction $x \to \operatorname{sgn}(x)$, on obtient, à une constante multiplicative près, $|R_t(f)(x)|^2 = \mathbb{1}_{]0,1]}(t)\,(t^2/(x^2+t^2))^2$, et par conséquent

$$(g_r(f)(x))^2 = \int_0^{1/|x|} \frac{u^3}{(1+u^2)^2}\,du\,.$$

Des considérations élémentaires montrent que, dans un voisinage de 0, $(g_r(f)(x))^2 \geqq 1/2\,\mathrm{Log}(1/|x|)$. Par conséquent, la proposition découle du résultat suivant:

**Lemme 5.** *Soit $u$ une application de $\mathbf{R}^v$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tout $x \in ]0,\delta]$, $u(x) \geqq c\,\mathrm{Log}(1/|x|)$. Alors, pour toute application mesurable $F:\mathbf{R}^v \times \mathbf{R}$, telle que $F(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$, la fonction $uF \notin$ BMO.*

*Démonstration.* Si la fonction $uF$ n'est pas intégrable sur le cube $I = [0,1]^v$, la démonstration est achevée. Sinon, le résultat se déduit facilement (les détails sont laissés au lecteur) de l'estimation élémentaire: pour toute fonction $f \in$ BMO,

$$|f_Q - f_{2^kQ}| \leqq 2^v k\|f\|_* \quad \text{pour tout cube } Q \text{ et tout } k \in \mathbf{N}\ [8, \text{p. } 206]\,.$$

On a vu au cours de la preuve de l'implication (B′) ⇒ (A′) que le contrôle de norme $\|(g_{r,T}(f))^2\|_* \leqq C(\|f\|_*)^2$ était une propriété très forte. On peut donc se demander s'il est possible d'avoir, pour tout noyau $r$ vérifiant par exemple $(\mathrm{iv}_\mathrm{b})$ au lieu de (iv) un résultat de la forme $(g_r(f))^\alpha \in \mathrm{BMO}$ pour toute $f \in \mathrm{BMO}$ (sans imposer de contrôler de norme, et pour un exposant $\alpha$ éventuellement $< 2$). Le résultat suivant montre que la réponse est négative:

**Proposition 4.** *Il existe un noyau $r$ vérifiant les conditions* (i), (ii), (iii), $(\mathrm{iv}_\mathrm{b})$, *et une fonction $f \in \mathrm{BMO}$ vérifiant:*
- $g_r(f)(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^v$;
- *pour tout* $\alpha > 0$, $(g_r(f))^\alpha \notin \mathrm{BMO}$.

*Démonstration.* Nous nous plaçons dans le cas où $v = 1$, et nous posons, pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

$$q_t(x,y) = \frac{1}{t}\, w\left(\frac{|y| - x}{t}\right),$$

où $w$ a le même sens que dans la démonstration de la proposition 3. Le noyau $q$ ainsi défini vérifie les conditions (i), (ii), (iii) (avec $\alpha = \beta = \gamma = 1$). De plus, si on pose $b(y) = -1$ si $y < 0$ et $b(y) = 1$ si $y \geqq 0$, on définit une fonction $b$ para-accrétive telle que $Q_t(b)(x) = 0$ quels que soient $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, ce qui prouve que ce noyau vérifie également $(\mathrm{iv}_\mathrm{b})$. Pour éviter des problèmes à l'infini, nous utiliserons le noyau "tronqué" $r$ défini par $r_t(x,y) = \varphi(t/x)q_t(x,y)$, où $\varphi$ est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et à support compact [avec la convention $\varphi(t/x) = 0$ si $x = 0$]. On vérifie aisément qu'on a, pour tout $t > 0$ et tout $(x, x') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $|\varphi(t/x) - \varphi(t/x')| \leqq C|x - x'|/t$. Comme de plus $\varphi$ est bornée et $|q_t(x,y)| \leqq 1/t$ pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, on voit facilement que le nouveau noyau $r$ vérifie encore les conditions (i), (ii), (iii) (avec $\alpha = \beta = \gamma = 1$) et, bien entendu, $(\mathrm{iv}_\mathrm{b})$. Prenons pour $f$ la fonction $\mathrm{Log}\,|\cdot|$. Nous allons montrer, en calculant explicitement $g_r(f)$, que le noyau $r$ et la fonction $f$ ainsi définis répondent à la question, si la fonction $\varphi$ est choisie convenablement. Quels que soient $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, l'intégrale qui définit $R_t(f)(x)$ se calcule élémentairement et on obtient l'égalité

$$R_t(f)(x) = \varphi(t/x)\left(\frac{t^2}{x^2+t^2}\,\mathrm{Log}\,\sqrt{x^2+t^2} + \frac{xt}{x^2+t^2}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{Arctg}\,\frac{x}{t}\right)\right).$$

Par conséquent $g_r(f)(0) = 0$, et, pour tout $x \in \mathbf{R} - \{0\}$,

$$\begin{aligned}(g_r(f)(x))^2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi^2(u\,\mathrm{sgn}(x))}{(1+u^2)^2}\left(u^2(\mathrm{Log}\,|x| + \mathrm{Log}\,\sqrt{1+u^2})\right.\\ &\qquad \left. + u\,\mathrm{sgn}(x)\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{sgn}(x)}{u}\right)\right)^2 \frac{du}{u}\\ &= A(x)\,(\mathrm{Log}\,|x|)^2 + B(x)\,\mathrm{Log}\,|x| + C(x),\end{aligned}$$

où $A$, $B$ et $C$ sont des fonctions bornées qui ne dépendent en fait que du signe de $x$. Ceci prouve que $g_r(f)(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Nous noterons $A_-$ (resp. $A_+$) la valeur de $A(x)$ pour $x < 0$ (resp. $> 0$); nous choisissons $\varphi$ de façon à ce que $A_+$ et $A_-$ soient distincts et tous deux $> 0$ et nous posons, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = (A(x))^{1/2}|\mathrm{Log}\,|x||$ et $g(x) = g_r(f)(x)$. Comme on sait [8, p. 217] que

$|u|^\beta \in$ BMO si $u \in$ BMO et $0 \leqq \beta \leqq 1$, il suffit de montrer que $g^\alpha \notin$ BMO pour $0 < \alpha \leqq 1$, ce qui résultera des propriétés suivantes:

(27) Pour tout $\delta > 0$, la restriction de $h^\alpha$ à l'intervalle $[-\delta, \delta]$ n'appartient pas à l'espace BMO relatif à cet intervalle.

(28) Si $\alpha \leqq 1$, la fonction $g^\alpha - h^\alpha$ est (essentiellement) bornée au voisinage de 0.

Pour établir (27), on observe que, si la restriction de $h^\alpha$ à l'intervalle $[-\delta, \delta]$ appartenait à l'espace BMO relatif à cet intervalle, il en serait de même pour la fonction $k$ définie par $k(x) = h^\alpha(x) - h^\alpha(-x)$. Ceci est impossible, car $k_{[-\varepsilon,\varepsilon]} = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $|k|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ tend vers l'infini quand $\varepsilon$ tend vers 0 (car $|A_+ - A_-| > 0$). Pour prouver (28), il suffit d'écrire, sur l'ensemble $]-1, 1[-\{0\}$,

$$g^\alpha = h^\alpha + h^\alpha\left(\left(1 + \frac{g^2 - h^2}{h^2}\right)^{\alpha/2} - 1\right).$$

et de considérer la taille au voisinage de 0 des constituants de cette égalité, en tenant compte du fait que $\alpha \leqq 1$ et de la positivité de $A_+$ et $A_-$.

## 5 Le cas particulier du noyau de Cauchy; continuité de $L^\infty$ dans BMO de l'opérateur de Calderòn-Zygmund associé

Dans ce cas, les résultats du par. 3 permettent d'obtenir le resultat suivant:

**Corollaire 3.** *Soit $r$ le noyau de Cauchy associé au graphe $\Gamma$ d'une application lipschitzienne $A: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Alors:*
*– L'opérateur $(g_r)^2$ applique $L^\infty$ dans* BMO *(au sens de la propriété* (B) *du théorème 1).*
*– L'opérateur $(g_r)^2$ applique BMO dans BMO (au sens de la propriété (B') du théorème 2) si et seulement si la condition suivante est remplie*

$$\text{(C)} \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{t\,dy}{(x - y + i(A(x) - A(y) + t))^2} = 0 \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et tout } x \in \mathbf{R}.$$

*Démonstration.* La première assertion se déduit du corollaire 1, puisque le noyau $r$ vérifie la condition $(\text{iv}_\text{b})$, et la seconde résulte du théorème 2. Observons que, si $\Gamma$ est une droite, un calcul élémentaire montre que la condition (C) est satisfaite. Nous conjecturons que la réciproque est vraie, i.e. que la condition (C) impose à la fonction lipschitzienne $A$ d'être affine.

Les méthodes de démonstration de la proposition 1 permettent aussi d'obtenir la continuité de $L^\infty$ dans BMO de l'intégrale de Cauchy associée au graphe d'une fonction lipschitzienne. Voici les grandes lignes de la démonstration: Soit $C_+$ l'opérateur étudié; en négligeant une constante multiplicative, on part de l'expression (cf. [6])

$$C_+(f) = \int_0^{+\infty} R_t M R_t M(f)\,\frac{dt}{t},$$

où $M$ est l'opérateur de multiplication par $b = 1 + iA'$, $A$ désignant la fonction lipschitzienne en question. Il s'agit d'obtenir une estimation de la forme $\|C_+(f)\|_* \leqq$

$C\|f\|_\infty$. Soit $\delta > 0$, et soit $Q = [-\delta, \delta]$ (le cas où $Q$ n'est pas centré en 0 se traite de la même manière). On pose

$$h = \int_0^\delta R_t M R_t M(f) \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad k = \int_\delta^{+\infty} R_t M R_t M(f) \frac{dt}{t}.$$

Il suffit de prouver que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)|\, dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |k(x) - k(0)|\, dx \leqq C\|f\|_\infty.$$

Le lemme 3 donne facilement l'estimation voulue pour le second terme du premier membre. D'autre part, si $\varepsilon h = |h|$, on a

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |h(x)|\, dx = \frac{1}{|Q|} \int_0^\delta \left( \int_{2Q} R_t(bf)(y) R_{-t}(\varepsilon \mathbb{1}_Q)(y) b(y)\, dy \right) \frac{dt}{t}$$
$$+ \frac{1}{|Q|} \int_0^\delta \left( \int_{(2Q)^c} R_t(bf)(y) R_{-t}(\varepsilon \mathbb{1}_Q)(y) b(y)\, dy \right) \frac{dt}{t}.$$

Au moyen de l'inégalité de Schwarz, on majore le premier terme du second membre par

$$C\left( \frac{1}{|2Q|} \sigma_r(bf)((2Q)\times]0, 2\delta]) \right)^{1/2} \left( \frac{1}{|2Q|} \sigma_r(\varepsilon \mathbb{1}_Q)((2Q)\times]0, 2\delta]) \right)^{1/2} \leqq C\|f\|_\infty$$

(d'après les lemmes 1 et 4). Enfin, il est immédiat que, pour $y \in (2Q)^c$,

$$|R_{-t}(\varepsilon \mathbb{1}_Q)(y)| \leqq Ct|Q|y^{-2},$$

ce qui fournit également un contrôle adéquat du dernier terme restant à étudier.

## Références


1. Bañuelos, R., Brossard, J.: The area integral and its density for BMO and VMO functions. Ark. Mat. (à paraître)
2. David, G., Journé, J.L., Semmes, S.: Opérateurs de Calderòn-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation. Rev. Mat. Iberoam. **1**, 1–56 (1985)
3. Jones, P.: Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity and harmonic measure. In: Garcia Cuerva, J. (ed.) Harmonic analysis and partial differential equations (Lect. Notes Math., vol. 1384, pp. 24–68) Berlin Heidelberg New York: Springer 1989
4. Journé, J.L.: Calderòn-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderon (Lect. Notes Math., vol. 994) Berlin Heidelberg New York: Springer 1983
5. Quian, T.: On BMO boundedness of a class of operators. J. Math. Res. Expos. **7**, 331–334 (1987)
6. Semmes, S.: Square function estimates and the $T(b)$ theorem. Proc. Am. Math. Soc. **110**, 721–726 (1990)
7. Stein, E.M.: On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz. Trans. Am. Math. Soc. **88**, 430–466 (1958)
8. Torschinsky, A.: Real-variable methods in harmonic analysis. London New York: Academic Press 1986
9. Wang, S.: Some properties of Littlewood-Paley's $g$-function. Sci. Sinica, Ser. A **28**, 252–262 (1985)