Math. Ann. 199, 1—11 (1972)

In memoriam Kurt Reidemeister

Am 8. Juli 1971 verschied in Göttingen der emeritierte ordentliche Professor der Mathematik Dr. Kurt Reidemeister. Ein reiches geistiges Leben, das noch stark in der Zeit vor dem ersten Weltkrieg verwurzelt war und sehr bewußt auf den Zeitenwandel reagierte, ist damit erloschen.

Geboren wurde Kurt Reidemeister am 13. Oktober 1893 in Braunschweig als Sohn eines herzoglichen Regierungsrates. Vom Elternhaus, dem humanistischen Gymnasium und der traditionsreichen Vaterstadt empfing er viele geistige Impulse. Richard Dedekind nannte er seinen „Onkel" und erhielt dessen Rat bis weit in die Studienzeit hinein. Der schlanke, blonde, leicht schüchtern wirkende Mensch mit dem bis ins Alter beibehaltenen norddeutschen Akzent verließ die Schule mit einer anspruchsvollen Beherrschung der deutschen Sprache in Wort und Schrift. Sein besonderes Interesse galt schon früh der Mathematik, aber nicht minder der Philosophie und der Kunstgeschichte.

1912 bezog Reidemeister die Universität Freiburg im Breisgau. Er wurde zunächst von der Philosophie, die er bei Edmund Husserl hörte, mehr eingenommen als von der Mathematik. Dann studierte er in Marburg und schließlich in Göttingen. 4 Jahre war sein Studium durch Kriegsdienst unterbrochen. Den Frontkämpfer und Leutnant hat man ihm später bestimmt nicht mehr ansehen können. Diese Rollen muß er in eiserner Disziplin gegen sich selbst bezwungen haben. Sein starker Hang zur Besinnlichkeit paßte gar nicht dazu. Nach Kriegsende ging er wieder nach Göttingen, um das Studium abzuschließen. Er legte das Staatsexamen für das höhere Lehramt in den 5 Fächern Mathematik, Philosophie, Physik, Chemie und Geologie zum gleichen Termin ab. In der Mathematik wurde er von Edmund Landau geprüft. Der brach nach knapp 30 Minuten die Prüfung ab und gab ihm die Note „Auszeichnung". Darauf, es war Oktober 1920, wo Hunger und große Armut das ganze öffentliche Leben lahmlegten, ging er nach Hamburg, um bei Erich Hecke algebraische Zahlentheorie zu erlernen. Schon ein knappes Jahr später wurde er mit einer Arbeit: „Über die Relativklassenzahl gewisser relativ quadratischer Zahlenkörper" promoviert. Aber inzwischen hatte er noch größeres Interesse an Blaschkes affiner Differentialgeometrie gefunden, und bereits vor seiner Promotion entschied er sich, fernerhin sein besonderes Interesse der Geometrie zuzuwenden. Die geistigen Anregungen und Perspektiven, die Blaschke ihm bot, kamen für ihn völlig unerwartet und waren von großer Faszination. Schon im selben Jahr (1921) hatte Reidemeister differentialgeometrische Arbeiten geschrieben und machte sich daran, den zweiten Band von Blaschkes Differentialgeometrie zu bearbeiten. Auch hielt er darüber – erst wenige Monate nach seiner Promotion – einen mit viel Zustimmung aufgenommenen und von Blaschke und ihm gemeinsam angekündigten größeren Vortrag auf der DMV-Tagung in Jena im September 1921.

Seine über die Mathematik hinausragenden allgemeinen Interessen ließ er in dieser Zeit steilen Aufstiegs nicht verkümmern. So nahm er in einem großen Kreis in Hamburg zu dem damals soviel Aufsehen erregenden Buch von Oswald Spengler: „Der Untergang des Abendlandes" Stellung. Er erfüllte damit eine Aufgabe, zu der wir Mathematiker gedrängt wurden, denn der Autor des so umfassenden Werkes hatte uns Mathematiker besonders angesprochen. Aber dazu konnte man in der Öffentlichkeit seine Stimme nur dann erheben, wenn man zugleich die philosophischen und historischen Aspekte zu würdigen wußte, die im Vordergrund von Spenglers Werk standen. Das war bei Reidemeister der Fall, und so hatte er auch mit diesem Vortrag Erfolg. Daneben publizierte er regelmäßig im literarischen Teil einer aristokratischen Hamburger Zeitung, verfaßte Novellen und schrieb Gedichte. Außerdem war es selbstverständlich, daß er in diesen berauschenden Gründungsjahren des Mathematischen Seminars in Hamburg – etwas Ähnliches gab es in dieser ermatteten Welt der Zeit unmittelbar nach dem 1. Weltkrieg kaum irgendwo, gewiß aber nicht ein zweites Mal im darniederliegenden Deutschland – stets als Meister geselliger Veranstaltungen geholt wurde.

Schnell aber kam der erste Ruf. Seine Habilitation in Hamburg war noch in der Planung. Der Ruf kam aus Wien, wo damals Hans Hahn, Wilhelm Wirtinger und Philipp Furtwängler wirkten und gerade zwei Studenten promoviert wurden, die uns später als Meister unseres Faches bekannt wurden: Otto Schreier und Karl Menger. Als Reidemeister im Oktober 1922 nach Wien ging (erst 2 Jahre nach seiner Übersiedlung nach Hamburg!), war in Österreich die Inflation gestoppt, während sie in Deutschland jetzt gerade auf vollen Touren zu laufen begann. Von diesem Elend der rasenden Inflation, in dem selbst ein Bettler 1000-Mark-Scheine wegwarf, dem Elend der ständigen Streiks und der paramilitärischen Unruhen war Reidemeister befreit. Er war damals ein Glückskind. Er gehörte zu den ganz wenigen, die die verlorenen Kriegsjahre wieder eingeholt hatten.

In Wien schloß er sich eng Hans Hahn an. Dieser hatte eine ganz erstaunliche Präsenz an mathematischem Wissen und war immer zu Fachgesprächen aufgelegt. Sein logischer Scharfsinn war eine ausgezeichnete Ergänzung zu Blaschkes rein geometrisch-anschaulichem Denken und Heckes grundsätzlicher Sicht. So kann man die drei Jahre

Wiener Aufenthalt für Reidemeister als die letzten Lehrjahre bezeichnen. Aber er nutzte diese Zeit nicht nur mathematisch. Auch Persönlichkeiten aus der Wiener logischen Schule (genannt der Wiener Kreis) trat er näher und baute intensiv seine mathematisch-philosophische Bildung aus. Die Abende verbrachte er häufig mit harten Diskussionen im Hause eines bekannten politischen Schriftstellers. Das weitete gewiß seinen Horizont, aber führte ihn weit ab von der Haltung, die er bisher im bürgerlichen Leben eingenommen hatte. Doch blieb er, seinem Wesen entsprechend, allen politischen Bestrebungen gegenüber auf Distanz.

In Wien heiratete er Elisabeth Wagner aus Riga, allen Freunden Reidemeisters als „Pinze" in guter Erinnerung.

1925 wurde er nach Königsberg berufen. Mathematischen Umgang konnte er auch hier pflegen. Szegö, Kaluza sen., Rogosinski waren seine Kollegen. Auch hatte er hier bald einen Kreis von jungen Menschen um sich versammelt, mit denen er wissenschaftlich arbeiten konnte. Dazu gehörten der junge Richard Brauer, Ruth Moufang, Werner Burau und Rafael Artzy. In dieser Königsberger Zeit entstanden seine in der geometrischen Forschung im Laufe der Jahre sehr anerkannten Bücher:

A. Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie (1930, Neudruck 1968)

B. Einführung in die Kombinatorische Topologie (1932),

C. Knotentheorie (Ergebnisse der Mathematik, Bd. 1, 1932).

Sehr viel schwerer war es für ihn und seine Frau, ihre bisherigen Ansprüche an ein weitgespanntes, kulturelles Leben aufrechtzuerhalten. Er suchte es in mehreren Richtungen. Aber dabei ergaben sich erhebliche Schwierigkeiten. Beim ersten Wehen des braunen Sturmes wurde er ohne Verfahren abgesetzt. Die Nachricht erfuhr er aus der Zeitung. Aber selbst im Sinne der im Frühjahr 1933 erlassenen Gesetze konnte nichts gegen ihn vorgebracht werden. Man konnte nur sagen: Er macht nicht mit, was damals so ausgedrückt werden konnte: „Er ist ein deutscher Beamter, der dem Führer nicht folgen will".

Das Erlebnis von Königsberg hat bei ihm schwere Wunden hinterlassen, die nie ganz vernarbt sind. Auch die immer leicht zu moralischer Empörung neigende Haltung des alternden Reidemeister hat hier eine Wurzel.

Jedenfalls gelang es Blaschke, schnell Zusagen über seine Wiedereinstellung zu erhalten. Reidemeister nutzte das Jahr der zwangsweisen Passivität zu einem längeren Studienaufenthalt in Rom. Dann übernahm er im Herbst 1934 den Lehrstuhl von Kurt Hensel in Marburg. Zehn ruhige Jahre waren ihm in dieser kleinen Universitätsstadt beschieden, wo er sich schon in der Jugend wohlgefühlt hatte und wo ihm auch jetzt die Möglichkeit gegeben war, in einem weitgespannten Rahmen, der bis zu dem Theologen Bultmann reichte, seiner Leidenschaft der Diskussion unbegrenzt zu frönen. Mathematische Mitarbeiter fand er in Friedrich Bachmann, Hel Braun und Wolfgang Franz. Er selbst gab damals die

D. Topologie der Polyeder und Kombinatorische Topologie der Komplexe

heraus, ein Buch, dessen noch nicht verkaufte Exemplare beim Verleger ausgebombt wurden und das schon deshalb 1953 eine neue Auflage erhalten mußte. In Marburg lebte er ganz im Schatten der lärmenden Ereignisse des braunen Sturmes. Nach außen brauchte er kaum davon Notiz zu nehmen. Im kleinen Kreise aber konnte er ungefährdet seine Meinung zu den Tagesereignissen ausdrücken. Soweit er nicht Zustimmung fand, hatte er jedenfalls die Narrenfreiheit des reinen Toren. Er bestritt natürlich diese Freiheit und hat sie später niemandem gedankt.

Um den alten, sehr einsam gewordenen Hilbert hat er sich in dieser Zeit sehr bemüht und ist ganz offenbar mit seiner Frau gerne in Göttingen in der Wilhelm-Weber-Straße gesehen worden. Der gerade jetzt vorgelegte, von Reidemeister noch herausgegebene Gedenkband „Hilbert" hat seine Wurzeln in jenen Begegnungen und spiegelt Reidemeisters Sicht von Hilberts Wirken wieder. Wer die Biographie von C. Reid über Hilbert gelesen hat, bemerkt sofort, wo Reidemeisters Blick über den von C. Reid hinausgeht. Als Hilbert starb (14. April 1943), war auch die Zeit vorbei, in der man in Deutschland noch reisen konnte. Nun rissen auch für Reidemeister alle Verbindungen ins Ausland ab. Aber er konnte sich glücklich preisen, im noch relativ ruhigen Marburg zu leben.

Nach dem Zusammenbruch galt sein Wort natürlich sehr viel bei den Behörden. Da er immer sehr konsequent dachte, wurde er nun ein unbequemer, wenn auch sehr respektierter Bürger von Marburg. So kam er in den Strudel der Ereignisse von 1945—1947. Darauf folgte er für zwei Jahre einer Einladung an das Institute for Advanced Study in Princeton. Veblen, Siegel und Hermann Weyl, dieser in besonderem Maße, weil er seinen eigenen Gedanken am nächsten stand, waren die großen Häupter in unserer Wissenschaft, in deren Umgebung Reidemeister jetzt lebte. Doch hatte er bald auch für seine anderen Interessen passenden Umgang gefunden. Noch manche Jahre später konnte man bemerken, daß seine Geistigkeit manchen Amerikaner beeindruckt hatte.

Bald nach seiner Rückkehr aus den Staaten erschienen von ihm neben der Einführung in die Kombinatorische Topologie sowie der Topologie der Polyeder (siehe D) bei Claassen und Goverts: „Das exakte Denken der Griechen" und etwas später bei Julius Springer: „Die Unsachlichkeit der Existenzphilosophie“ sowie „Geist und Wirklichkeit, kritische Essays“. Aber diese Schriften waren durchaus nicht das einzige, was Reidemeister außerhalb der Fachgrenzen publizierte. In Herman Nohls Zeitschrift: „Die Sammlung, Zeitschrift für Kultur und Erziehung“ finden wir zwischen 1948 und 1960 (mit demselben Jahr schließt diese Zeitschrift) eine ganze Fülle von Artikeln aus der Feder von Reidemeister, beginnend mit „Über den Ursprung der Theologie Bultmanns“ und endend mit „Das Postulat des vernünftigen Verstehens“, ein Problem, über das er schon in der Jugend diskutiert hatte. Man muß überhaupt annehmen, daß Herman Nohl, der letzte aus der Reihe der großen „klassischen Pädagogen“ (bewußt in Gegensatz gestellt zu den revolutionären Pädagogen unserer Zeit, die die Herrschaft über unsere neuen Gesamtuniversitäten soeben anzutreten sich anschicken), und Reidemeister sehr verwandte Seelen gewesen sind.

1955 wurde Reidemeister nach Göttingen berufen. Obwohl er nun schon in das siebente Jahrzehnt seines Lebens eingetreten war, hatte er viele Pläne für die weitere Arbeit in der Stadt, in der er die schönste Zeit seines Lebens verbracht hatte. Sein Buch: „Raum und Zahl“ kam heraus, ferner die Neuauflage der Grundlagen der Geometrie, die er in seinen frühen Königsberger Jahren verfaßt hatte, und dann der Hilbertsche Gedenkband. Noch mehr war geplant. Doch die Krankheit seiner Frau und seine eigene angeschlagene Gesundheit führten zu einer immer stärkeren Begrenzung seiner Kräfte. Auch tat er sich immer schwerer mit sich selbst und seiner Umwelt. Er wurde altersstarr. Sein ständiges Bemühen, die Menschen nach seinen unerbittlichen philosophischen Prinzipien zu verstehen und zu behandeln, brachten ihn dauernd in Schwierigkeiten und in eine Isolierung. Auch seine Freunde konnten ihm nicht mehr helfen. Sehr einsam hat er die letzten Jahre verbracht. Seine Emeritierung und sein 70. Geburtstag vergingen ohne jegliche Feierlichkeit. Diesen Gegensatz zu den frühen Göttinger Jahren, zur hohen Zeit in Hamburg und Wien, hat er sehr bitter empfunden. Dabei hat er sicher gewußt, daß vieles davon im Unterschied der Generationen begründet war.

Er hatte in einem sehr vergeistigten Sinne zur Jugendbewegung gehört, die 1913 auf dem Hohen Meißner ihre großartige Bestätigung gefunden hatte. Für diese Lebensperspektiven hatte man keinen Sinn mehr, und er konnte aus ihnen nicht heraus. Die Arbeit an dem Gedenkband für Hilbert hat er noch abschließen können. Er hat damit auf eine wesentliche Ergänzung und Vertiefung jener Erkenntnisse über Hilbert hingewiesen, die wir den beiden Hilbert-Biographien von Otto Blumenthal und Constance Reid verdanken. Neben der Beschreibung der einzelnen Phasen in Hilberts Wirken tritt jetzt die große Linie in

Hilberts Lebenswerk hervor. Der Gedenkband ist eine Huldigung an den Genius Hilbert. Unter diesem Zeichen verstarb Kurt Reidemeister.

Reidemeisters Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie. Mit diesem Gebiet hat sich Reidemeister unter verschiedenen Aspekten bis in die letzte Zeit seines Lebens immer wieder beschäftigt. In dem in Hilberts klassischem Werk enthaltenen Theorem: Die Pappusschen affinen Ebenen entsprechen eineindeutig den Körpern, die Desarguesschen den Schiefkörpern, sah Reidemeister eine fundamentale Einsicht in einen Zusammenhang zwischen Geometrie und Algebra; es war für ihn stets reizvoll, solchen Zusammenhängen nachzuspüren.

Das Buch A ist vorwiegend der ebenen affinen Geometrie gewidmet. Durch eine Untersuchung von Schließungssätzen, vor allem bereits in Geweben, wird das Hilbertsche Theorem einer feineren, stufenden Analyse unterzogen. Der Hauptgedanke des zentralen Kapitels "Gewebe und Gruppen“ läßt sich kurz wie folgt wiedergeben[1]:

Ein Drei-Gewebe ist eine Inzidenzstruktur, deren Geradenmenge in drei Geradenscharen 1, 2, 3 zerfällt, wobei gilt:

1. Durch jeden Punkt geht genau eine Gerade jeder Schar.
2. Zwei Geraden verschiedener Schar haben genau einen Punkt gemein.

Zu jeder Gruppe G kann man ein Drei-Gewebe definieren: Man nenne die Tripel

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{mit} \quad a_1, a_2, a_3 \in G \quad \text{und} \quad a_1\, a_2\, a_3 = 1$$

Punkte, die Menge der Punkte mit festem a_1 eine 1-Gerade, die mit festem a_2 eine 2-Gerade, die mit festem a_3 eine 3-Gerade. In dem so definierten Drei-Gewebe schließt sich die „Reidemeister-Figur“. Umgekehrt läßt sich jedes Drei-Gewebe, in dem sich die Reidemeister-Figur schließt, in der angegebenen Weise aus einer Gruppe gewinnen. Den abelschen Gruppen entsprechen die Drei-Gewebe, in denen sich die „Thomsen-Figur“ schließt. Schließt sich in einem Drei-Gewebe die Thomsen-Figur, so schließt sich die Reidemeister-Figur.

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen Vier-Geweben, in denen gewisse Schließungssätze gelten, und Fastkörpern. Aus dem letzten Kapitel des Buches sei die Diskussion des Fundamentalsatzes der affinen und projektiven Geometrie hervorgehoben.

In dem genannten Theorem von Hilbert ist auch der Ausgangspunkt für Reidemeisters Bestreben zu sehen, die ebene metrische Geometrie axiomatisch in einer Allgemeinheit zu entwickeln, die, roh gesagt, der Allgemeinheit des Körperbegriffs entspricht. Dies erforderte den Ver-

[1] Vgl. Blaschke, W., Bol, G.: Geometrie der Gewebe. §4. Berlin 1938. G. Pickert: Projektive Ebenen. Kap. 2. Berlin: Springer 1955.

zicht auf Anordnungsaxiome und auf die Forderung der freien Beweglichkeit. Man darf wohl sagen, daß es diese von Reidemeister in den dreißiger Jahren verfolgte Tendenz gewesen ist, mit der er die weitere Forschung im Bereich der Grundlagen der Geometrie am stärksten beeinflußt hat.

Zusammen mit E. Podehl hat Reidemeister für die ebene elliptische Geometrie sein Bestreben realisiert[2]. Es wird hier ein Axiomensystem für elliptische Ebenen angegeben, das die Cayley-Ebenen $C(K, f)$ über Körpern K von Charakteristik $\neq 2$, mit einer nullteiligen symmetrischen Bilinearform f, charakterisiert[3]. Die einzige Einschränkung für die Körper K mit Char $K \neq 2$ ist die naturgemäße: Es muß über K eine ternäre nullteilige Form geben.

Für den Nachweis, daß sich die axiomatisch gegebenen elliptischen Ebenen E als Cayley-Ebenen darstellen lassen, wird dabei als Hilfsmittel der Gruppenraum (kinematische Raum) $R(G)$ der Bewegungsgruppe G der Ebene E eingeführt: Die Punkte und auch die Ebenen von $R(G)$ seien die Elemente von G; sind $\alpha, \beta \in G$, so heiße der Punkt α inzident mit der Ebene β, wenn $\alpha\beta^{-1}$ involutorisch ist. Dann ist $R(G)$ ein projektiver (und auf eine natürliche Weise sogar ein elliptischer) Raum. Die involutorischen Elemente aus G sind die Punkte der Ebene 1 von $R(G)$ und entsprechen eineindeutig den Punkten von E. Damit weiß man, daß E in einen dreidimensionalen Raum einbettbar, also Desarguessch ist.

Der Gedanke, zu einer metrischen Ebene den Gruppenraum ihrer Bewegungsgruppe zu betrachten, war eine von Reidemeisters geometrischen Lieblingsideen[4]; er regte an, den Gruppenraum auch in der Begründung der ebenen absoluten Geometrie zu benutzen und damit über Hjelmslevs Begründung der ebenen absoluten Geometrie[5], die, etwa nach einer Bemerkung von Dehn, als „recht umständlich" galt[6], ein neues Licht zu verbreiten.

Die Konzeption einer ebenen absoluten Geometrie, die auf Anordnung und freie Beweglichkeit verzichtet, führte Reidemeister auf mancherlei Fragen, so die Frage: Wie kann man in Cayley-Ebenen ohne

---

[2] Podehl, E., Reidemeister, K.: Eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **10**, 231—255 (1934).

[3] Die Cayley-Ebene $C(K, f)$ ist der projektiv interpretierte dreidimensionale metrische Vektorraum $V_3(K, f)$. f heißt nullteilig, wenn die zu f gehörige quadratische Form die Null nur trivial darstellt.

[4] Reidemeister, K.: Geometria proiettiva non-euclidea. Rend. Sem. mat. Univ. Roma, Ser. III, **1**, parte 2, 219—228 (1934).

[5] Hjelmslev, J.: Neue Begründung der ebenen Geometrie. Math. Ann. **64**, 449—474 (1907). Einleitung in die Allgemeine Kongruenzlehre. Danske Vid. Selskab, mat.-fys. Medd. **8**, Nr. 11; **10**, Nr. 1 (1929).

[6] Pasch, M., Dehn, M.: Vorlesungen über neuere Geometrie S. 236. Berlin: 1926.

Anordnung „Eigentlichkeitsbereiche" bestimmen, in denen die Axiome der ebenen absoluten Geometrie gelten? Beruhten doch die damals bekannten Beispiele — das Kleinsche Modell einer hyperbolischen Ebene und die Dehnschen Modelle semi-euklidischer und Nicht-Legendrescher Ebenen[7]—wesentlich auf Anordnung.

Reidemeister und die Topologie. Reidemeisters Forschungen auf dem Gebiet der Topologie verfolgen, so sehr sie von mannigfachen geometrischen, algebraischen und selbst analytischen Gesichtspunkten beeinflußt sind, im wesentlichen ein einheitliches Ziel: Die begriffliche Klarlegung, Erprobung und weitgehende Ausschöpfung der konstruktiven, kombinatorischen Methoden. Hier hat er, seiner Zeit vorauseilend, unter bewußter Vermeidung traditioneller Sackgassen neue zukunftsweisende Wege erspürt und bleibende Erfolge erzielt, deren Wirkung auch in der heutigen Forschung lebendig ist.

Seine frühen topologischen Untersuchungen wurden von ihm 1932 in seinem Buche B zusammengefaßt. Das Buch erhielt zunächst nicht das Echo, das es nach seinem Gehalt verdient hätte. Von den einfachsten Axiomen ausgehend und mit minutiöser Sorgfalt fortschreitend, stellt es doch in seiner eigenwilligen Gedankenführung und Stilistik an den Leser, besonders in dem letzten, unter den Schülern fast berüchtigten siebten Kapitel, erhebliche Anforderungen. Schon der Titel erregte vielfach Erstaunen, enthält doch das Buch in der ersten Hälfte ausschließlich Gruppentheorie und beschränken sich in der zweiten Hälfte auf Strecken- und Flächenkomplexe, ohne die damals lebhaft diskutierten dreidimensionalen Probleme zu berühren. Die Gruppen werden in der für die Topologie angemessenen Form behandelt, nämlich als gegeben durch Erzeugende und definierende Relationen. Das damals wie heute grundlegende Reidemeistersche Verfahren zur Bestimmung von Erzeugenden und Relationen von Untergruppen spielt dabei die entscheidende Rolle. Besonderes Gewicht wird auf die Wechselwirkung von Gruppentheorie und Topologie gelegt; auch die Gruppentheorie erhält Anregungen aus der Topologie, wie dies etwa, um ein einfaches Beispiel zu nennen, in dem graphentheoretischen Beweis für die Freiheit und die Erzeugendenzahl von Untergruppen freier Gruppen von endlichem Index zum Ausdruck kommt. Die Beschränkung auf die Dimensionen 1 und 2 im zweiten Teil des Buches ist vor allem darauf zurückzuführen, daß Reidemeister sich der prinzipiellen Schwierigkeiten und Probleme der kombinatorischen Auffassung der Topologie im Gegensatz zu manchen anderen zeitgenössischen Autoren von An-

[7] Dehn, M.: Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. **53**, 404—439 (1900).

fang an bewußt war. Die Schwierigkeiten betreffen das sog. Dehnsche Lemma, die Poincarésche Vermutung und die Hauptvermutung der Kombinatorischen Topologie. Während das Dehnsche Lemma im Jahre 1957 von Papakyriakopoulos[8] bewiesen wurde, ist die Poincarésche Vermutung auch heute noch offen. Die Hauptvermutung dagegen wurde, nachdem sie 1952 für dreidimensionale Polyeder von Moise bewiesen war, in ihrer allgemeinsten Fassung 1961 von Milnor[9] widerlegt; die aufsehenerregenden modernen Resultate von Kirby und Siebenmann[10] haben die Rolle der Vermutung weitgehend klargelegt. Die hiermit kurz skizzierte historische Entwicklung zeigt, daß damals die Zeit für eine zusammenhängende Darstellung der drei- und höherdimensionalen Topologie noch nicht reif war.

Die genannten Probleme hängen im dreidimensionalen Fall mit der Existenz von Knoten im Euklidischen R^3, in beliebigen Dimensionen mit entsprechenden Isotopiefragen zusammen. Konsequenterweise beschäftigte sich Reidemeister weiterhin mit Knoten. Seine „Knotentheorie" von 1932 war die erste zusammenfassende Darstellung des Themas und blieb die einzige bis zum Erscheinen der Monographie von Crowell und Fox[11] im Jahre 1963. Die Darstellung dieses gleichermaßen durch elementar-anschauliche Fragestellungen wie durch seine Bedeutung für die dreidimensionale Topologie reizvollen Gebietes ist von durchsichtiger Klarheit und enthält zahlreiche neue Erkenntnisse. Sie beschränkt sich ganz im Rahmen der Reidemeisterschen Grundhaltung auf den zunächst wichtigsten Fall „zahmer" Knoten, solcher, die durch endliche Polygone im R^3 darstellbar sind, so daß sich die konstruktiven, kombinatorischen Methoden anwenden lassen. Die dem Buche angefügte Knotentabelle hat einer Generation von Knotentopologen als Beispielsammlung gedient. Die entscheidenden Hilfsbegriffe Reidemeisters sind die Knotengruppe, die Alexander-Matrix bzw. das Alexander-Polynom und die Überlagerungsräume, ferner die quadratische Form eines Knotens. Auf ihnen beruht unverändert auch heute die Knotentheorie.

Im Hinblick auf die oben erwähnten prinzipiellen Schwierigkeiten der Kombinatorischen Topologie empfand Reidemeister es als dringende Aufgabe, den Umfang dieser Disziplin und ihre Stellung innerhalb der Gesamt-Topologie genau zu präzisieren. Die spätere Entwicklung,

[8] Papakyriakopoulos, C. D.: On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Ann. of Math. **66**, 1—26 (1957).

[9] Milnor, J.: Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. Ann. Math. **47**, 575—590 (1961).

[10] Kirby, R. C., Siebenmann, L. C.: On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung. Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 742—749 (1969).

[11] Crowell, R. H., Fox, R. H.: Introduction to Knot Theory. Boston, New York: Ginn and Co. 1963.

besonders die Widerlegung der allgemeinen Hauptvermutung, geben diesem Vorhaben nachträglich seine besondere Berechtigung. Er führte es in „Topologie der Polyeder und Kombinatorische Topologie der Komplexe"[12] aus. Anknüpfend an den Enzyklopädie-Artikel von Dehn und Heegaard[13], jedoch von einem allgemeineren Standpunkt aus und über ihn hinausführend, werden die Polyeder aufgrund der Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome, ohne Stetigkeitseigenschaften, definiert, ferner ihre Zerlegung in konvexe Raumstücke und die daraus entstehenden Kettenkomplexe eingeführt. Es wird der allgemeine Jordansche Satz bewiesen, nachdem es zu einem geschlossenen (n-1)-dimensionalen Polyeder im R^n genau ein n-dimensionales Polyeder gibt, dessen Rand es ist. Zwei Polyeder heißen verwandt, wenn sie isomorphe Zerlegungen besitzen. Dieser Verwandtschaftsbegriff stiftet die Kombinatorische Topologie als wohlabgegrenztes Teilgebiet der Polyedertheorie, „ebenso wie affine oder die projektive Geometrie ein Teilgebiet der euklidischen Geometrie ist". Damit wird die Kombinatorische Topologie im besonderen gegenüber der Stetigkeitstopologie abgegrenzt, ihre Resultate bekommen einen selbständigen, von der Stetigkeitstopologie unabhängigen Sinn, und die Hauptvermutung, nach der zwei homöomorphe Polyeder des R^n verwandt sein sollten, gehört nicht mehr in den Bereich der Kombinatorischen Topologie im Reidemeisterschen Sinne. Die moderne „piecewise linear topology" findet hier ihre Begründung.

Die weiteren Forschungen Reidemeisters galten nun dem Ausbau der so definierten Kombinatorischen Topologie. Sie führten ihn zu dem Begriff des Homotopiekettenringes[14] eines Polyeders P. Die Homotopieketten von P ergeben sich aus den Homologieketten der mittels der Fundamentalgruppe G konstruierten universellen Überlagerung $\tilde{P}$ von P, indem man die Koeffizienten vermöge G, als Deckbewegungsgruppe von $\tilde{P}$ aufgefaßt, als Elemente des Gruppenringes $\tilde{G}$ von G mit ganzen Koeffizienten ansieht. Der Homotopiekettenring, später von anderer Seite als Ring mit lokalen Koeffizienten weiterentwickelt, erweist sich in seiner Verschachtelung von Homologie- und Homotopiebegriffen als ein entscheidendes und in vielen Zusammenhängen wirksames Werkzeug. Mit seiner Hilfe gelang Reidemeister die Klassifikation der dreidimensionalen Linsenräume, die bis dahin allen Versuchen, sie mit klassischen Homologie- oder Homotopiemethoden zu bewältigen, widerstanden hatten, Dabei handelte es sich zunächst um die Klassifi-

[12] Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1938.

[13] Dehn, M., Heegaard, P.: Analysis situs. Enzykl. d. Math. Wissensch. III AB 3. Leipzig: Teubner, 1907.

[14] Reidemeister, K.: Homotopieringe und Linsenräume. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 102—109 (1935).

zierung im Sinne der Reidemeisterschen Kombinatorischen Topologie, aber weiterhin, nachdem die Hauptvermutung in 3 Dimensionen bewiesen war, auch im Sinne der Homöomorphie der Stetigkeitstopologie. Die Untersuchungen Reidemeisters wurden später von einem seiner Schüler ausgebaut, so daß sich eine allgemeine Invariante, die Torsion eines Komplexes, ergab, die insbesondere auch die höherdimensionalen Linsenräume zu klassifizieren gestattete. An weiteren auf den Homotopiekettenring gegründeten Resultaten Reidemeisters sei die Aufstellung aller möglichen kommutativen Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten genannt, ferner die Untersuchung über verallgemeinerte Schnitt- und Verschlingungszahlen.

Die Bedeutung der aus dem Homotopiekettenring abgeleiteten Invarianten geht über die Anwendungen im Bereich der Kombinatorischen Topologie weit hinaus. Auch in einem nicht unmittelbar hiermit zusammenhängenden Gebiet, wie der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, ergeben sich weittragende Anwendungen. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten gestatten nach A. A. Cairns Triangulationen. J. H. C. Whitehead[15] zeigte, daß diese Triangulationen als „differenzierbare“ Zerlegungen, sog. C^1-Komplexe, angenommen werden können und daß für C^1-Komplexe eine der Hauptvermutung analoge Aussage gemacht werden kann. Auf diese Komplexe läßt sich daher die Theorie der Homotopiekettenringe anwenden und führt, Reidemeisters frühzeitig geäußerten Vermutungen entsprechend, zu Begriffen, die den Mannigfaltigkeiten invariant zugeordnet sind. Auch hier zeigt sich in der Weiterentwicklung der Forschung der Weitblick und die Fruchtbarkeit der Begriffsbildungen Reidemeisters.

Friedrich Bachmann
Mathematisches Seminar
der Universität
D-2300 Kiel
Bundesrepublik Deutschland

Heinrich Behnke
Seminar für Didaktik der Mathematik
der Universität
D-4400 Münster
Bundesrepublik Deutschland

Wolfgang Franz
Mathematisches Seminar
der Universität
D-6000 Frankfurt
Bundesrepublik Deutschland

[15] Whitehead, J. H. C.: On C^1-complexes, Ann. of Math. **41**, 809—824 (1940).