Math. Ann. 198, 99—122 (1972)

Markov-Komposition und eine Anwendung auf Martingale

HANS G. KELLERER

Hans Richter zum 60. Geburtstag

Einleitung

Es bezeichne "$\mu \prec \nu$" die durch

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu \leqq \int_{\mathbb{R}} f\,d\nu \quad \text{für alle isotonen konvexen Funktionen } f \qquad (*)$$

definierte Ordnungsrelation für Wahrscheinlichkeitsmaße, deren erstes Moment existiert. Dann gilt, wie 1965 von Straßen [5] bewiesen wurde: zu einer bezüglich der betrachteten Ordnung aufsteigenden Folge μ_n, $n \geqq 0$, von Wahrscheinlichkeitsmaßen existiert stets ein Submartingal a_n, $n \geqq 0$, mit diesen Marginalverteilungen, das gleichzeitig ein Markov-Prozeß ist. Dieser Satz wurde 1968 von Doob [1] vom zeitlich diskreten auf den zeitlich kontinuierlichen Fall übertragen – unter etwas anderen Voraussetzungen, doch vor allem unter Verzicht auf die Markov-Eigenschaft.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist in erster Linie der Nachweis, daß zu einer bezüglich der betrachteten Ordnung aufsteigenden Familie μ_t, $t \geqq 0$, von Wahrscheinlichkeitsmaßen stets ein stochastischer Prozeß a_t, $t \geqq 0$, mit diesen Marginalverteilungen existiert, der gleichzeitig ein Submartingal und ein Markov-Prozeß ist (vgl. Theorem 3).

Dazu wird im ersten Teil der Arbeit eine allgemeine Theorie der „Markov-Komposition" entwickelt. Ausgehend von einer geeigneten Metrik im Raum aller Baireschen Maße über einem metrischen Raum, die mit der schwachen Topologie verträglich ist und die Eigenschaften einer Norm besitzt (vgl. Satz 1 und Satz 3), wird zunächst eine Klasse zweidimensionaler Verteilungen mit besonderen Regularitätseigenschaften eingeführt (vgl. Definition 3). Daran anschließend wird gezeigt, daß die Markov-Komposition (vgl. Definition 4) bei Beschränkung auf diese Klasse eine stetige Operation ist (vgl. Satz 14), woraus schließlich die zum Beweis von Theorem 1 benötigte – und ohne Zusatzvoraussetzungen nicht gegebene – Abgeschlossenheit von Mengen von Markov-Prozessen bezüglich der schwachen Topologie folgt.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die erhaltenen Ergebnisse auf das eingangs formulierte Problem angewandt. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei eine in Theorem 2 enthaltene Integraldarstellung von „Subdilationen" (vgl. Definition 6). Dabei handelt es sich – in naheliegender Verallgemeinerung einer früheren Arbeit [3] – um die Konstruktion einer besonders einfachen Klasse von Markov-Kernen, mit deren Hilfe sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ in die Wahrscheinlichkeitsmaße ν mit $\mu \prec \nu$ transformieren läßt.

Abschließend sei erwähnt, daß sich die Überlegungen des ersten Teils unter sehr allgemeinen topologischen Voraussetzungen durchführen lassen, während eine Übertragung der im zweiten Teil enthaltenen Ergebnisse etwa auf den mehrdimensionalen Fall ein offenes Problem darstellt.

1.1. Eine Metrik zur schwachen Topologie

Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so bezeichne $\mathfrak{G}(X)$ das System der offenen Mengen in X, $\mathscr{C}(X)$ den linearen Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf X und $\mathfrak{C}(X)$ die σ-Algebra der Baireschen Mengen in X. Im Fall metrischer Räume wird daneben – an Stelle der Indikatorfunktionen – eine Klasse kontrahierender Abbildungen benötigt:

Definition 1. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so bezeichnet $\mathscr{D}(X)$ die Gesamtheit aller Abbildungen $f: X \to [0, 1]$ mit*

$$|f(x) - f(y)| \leqq d(x, y) \quad \textit{für} \quad x, y \in X .$$

Diese Gesamtheit hängt also – ohne daß es in der Bezeichnung ausdrücklich vermerkt wird – wesentlich von der zugrundeliegenden Metrik ab. Dabei gelten die folgenden einfachen Hilfssätze:

Lemma 1. *$\mathscr{D}(X)$ ist ein vollständiger Verband.*

Beweis. Mit f_i, $i \in I$, enthält $\mathscr{D}(X)$ offenbar auch die Funktionen

$$\underline{f}(x) := \inf_{i \in I} f_i(x) \quad \text{und} \quad \bar{f}(x) := \sup_{i \in I} f_i(x) . \quad \square$$

Lemma 2. *Ist (Y, d) ein Teilraum des metrischen Raumes (X, d), so existiert zu jeder Funktion $g \in \mathscr{D}(Y)$ eine Fortsetzung $f \in \mathscr{D}(X)$.*

Beweis. Mit einer dichten Teilmenge A von Y bzw. B von $[0, 1]$ werde definiert

$$f_{ab}(x) := (b - d(x, a))^+ \quad \text{für} \quad a \in A, b \in B .$$

Dann gilt zunächst $f_{ab} \in \mathscr{D}(X)$, also gemäß Lemma 1 auch

$$f := \sup\{f_{ab} : b \leqq g(a)\} \in \mathscr{D}(X);$$

ferner gilt $f(a) = g(a)$ für $a \in A$ und damit auch

$$f(y) = g(y) \quad \text{für} \quad y \in Y. \quad \square$$

Lemma 3. *Ist der metrische Raum* (X, d) *separabel, so existiert eine abzählbare Teilmenge* $\mathscr{E}$ *von* $\mathscr{D}(X)$ *mit folgender Eigenschaft:*

$$\text{zu } f \in \mathscr{D}(X) \text{ existieren } g_n \in \mathscr{E} \text{ mit } g_n \uparrow f. \tag{1}$$

Beweis. Mit $Y = X$ lassen sich die Mengen A und B im Beweis zu Lemma 2 abzählbar wählen. Dann genügt es, für $\mathscr{E}$ die Gesamtheit der folgenden Funktionen zu wählen:

$$g = \sup\{f_{ab} : (a, b) \in C\} \quad \text{mit} \quad C \subset A \times B \quad \text{endlich.} \quad \square$$

Lemma 4. *Zu* $f \in \mathscr{C}(X)$ *mit* $0 \leqq f \leqq 1$ *existieren Funktionen* $\underline{f}_n, \bar{f}_n$ *mit*

$$\frac{1}{n} \underline{f}_n, \ \frac{1}{n} \bar{f}_n \in \mathscr{D}(X), \tag{2}$$

$$\underline{f}_n \uparrow f \text{ und } \bar{f}_n \downarrow f. \tag{3}$$

Beweis. Offenbar genügt die Konstruktion der Folge $(\underline{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dazu werde definiert

$$\underline{f}_n := \sup\left\{g : \frac{g}{n} \in \mathscr{D}(X) \quad \text{und} \quad g \leqq f\right\}.$$

Dann ist gemäß Lemma 1 die Bedingung (2) erfüllt und es gilt nach Konstruktion $\underline{f}_1 \leqq \underline{f}_2 \leqq \cdots$, während aus der Stetigkeit von f ohne Schwierigkeit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \underline{f}_n = f$ folgt. $\square$

Lemma 5. *Ist* X *der Produktraum der metrischen Räume* (X_i, d_i), $1 \leqq i \leqq n$, *versehen mit der Metrik* $d(x, y) := \sum_{1 \leqq i \leqq n} d_i(x_i, y_i)$, *so gilt:*

$$f := f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in \mathscr{D}(X), \quad \textit{falls} \quad f_i \in \mathscr{D}(X_i) \quad \textit{für} \quad 1 \leqq i \leqq n\,[1].$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich sofort aus der Zerlegung

$$f(x) - f(y) = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \prod_{i<k} f_i(x_i) \cdot [f_k(x_k) - f_k(y_k)] \prod_{i>k} f_i(y_i). \quad \square$$

Sind die metrischen Räume (X_i, d_i) identisch, so folgt aus dem letzten Hilfssatz mittels der Abbildung $x \mapsto (x, \ldots, x)$, daß mit $f_1, \ldots, f_n$ auch die Funktion $f := \frac{1}{n} \prod_{1 \leqq i \leqq n} f_i$ in $\mathscr{D}(X)$ liegt.

Um den Zusammenhang zwischen dem System $\mathscr{D}(X)$ und der schwachen Topologie herstellen zu können, werden zunächst einige weitere

[1] Sind $\mathscr{F}_i$ lineare Räume von Abbildungen $f_i : X_i \to \mathbb{R}$, so bezeichnet $\mathscr{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{F}_n$ den von den Abbildungen

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{1 \leqq i \leqq n} f_i(x_i)$$

erzeugten linearen Raum.

Abkürzungen benötigt. Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so bezeichne $\mathcal{M}(X)$ bzw. $\mathcal{M}_+(X)$ bzw. $\mathcal{M}_+^1(X)$ die Gesamtheit aller signierten bzw. nicht-negativen bzw. nicht-negativen normierten Baireschen Maße über X; ferner bezeichne „$\to$" stets die Konvergenz im Sinne der in $\mathcal{M}(X)$ definierten schwachen Topologie, also im Sinne der gröbsten Topologie, bezüglich derer die Abbildungen

$$\mathcal{M}(X) \ni \mu \mapsto \mu f \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{C}(X)$$

stetig sind (wobei an Stelle von $\int_X f\,d\mu$ kurz μf geschrieben wird).

Im Fall metrischer Räume erweist sich daneben – an Stelle der durch

$$|\mu| := \mu^-(X) + \mu^+(X)$$

definierten Norm – folgende Definition als zweckmäßig:

Definition 2. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist*

$$\|\mu\| := \sup\{|\mu f| : f \in \mathscr{D}(X)\} \quad \textit{für} \quad \mu \in \mathcal{M}(X).$$

Mit $\mathscr{D}(X)$ hängt also auch $\|\mu\|$ wesentlich von der zugrunde liegenden Metrik ab. Dabei gilt:

Satz 1. *$\|\mu\|$ definiert eine Norm in $\mathcal{M}(X)$.*

Beweis. Ist $\|\mu\| = 0$, so gilt $\mu f = 0$ für alle $f \in \mathscr{D}(X)$ und damit gemäß Lemma 4 auch für alle $f \in \mathscr{C}(X)$ mit $0 \leqq f \leqq 1$, d. h. es ist $\mu = 0$. Die übrigen Forderungen an eine Norm sind trivialerweise erfüllt. □

Wesentlich für die weiteren Überlegungen ist nun ein Vergleich dieser Norm mit der folgenden auf Prochorov [4] zurückgehenden Metrik in $\mathcal{M}_+(X)$: für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ ist $d(\mu, \nu)$ das Infimum aller $\delta > 0$ derart, daß für alle Mengen $A \in \mathfrak{C}(X)$ die Ungleichungen

$$\mu(A) \leqq \nu(A_\delta) + \delta \quad \text{und} \quad \nu(A) \leqq \mu(A_\delta) + \delta$$

erfüllt sind, in denen A_δ die δ-Umgebung von A bezeichnet. Mit diesen Abkürzungen läßt sich zeigen:

Satz 2. *Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ mit $\mu(X), \nu(X) \leqq 1$ gilt:*

$$d^2(\mu, \nu) \leqq \|\mu - \nu\| \leqq 2d(\mu, \nu) - d^2(\mu, \nu).$$

Beweis. 1. Es sei $\gamma := d(\mu, \nu)$, also gemäß Voraussetzung $0 \leqq \gamma \leqq 1$. Dann existiert zu $0 \leqq \delta < \gamma$ eine Menge $A \in \mathfrak{C}(X)$ mit

$$\mu(A) > \nu(A_\delta) + \delta \quad (\text{oder } \nu(A) > \mu(A_\delta) + \delta).$$

Mit dieser Menge A werde definiert

$$f(x) := (\delta - d(x, A))^+ \quad \text{für} \quad x \in X;$$

wegen $\delta < 1$ gilt dabei $f \in \mathscr{D}(X)$ und es ist

$$f(x) = \delta \text{ bzw. } 0 \quad \text{für} \quad x \in A \quad \text{bzw.} \quad x \notin A_\delta .$$

Das ergibt zusammen

$$\|\mu - \nu\| \geqq \mu f - \nu f \geqq \delta \mu(A) - \delta \nu(A_\delta) \geqq \delta^2$$

und damit die Richtigkeit der ersten Ungleichung.

2. Zum Nachweis der zweiten Ungleichung sei $\gamma < \delta \leqq 1$ und $f \in \mathscr{D}(X)$ beliebig. Dann gilt mit den Mengen

$$A(t) :\!= \{x : f(x) > t\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \mu f &= \int_0^1 \mu(A(t))\, dt \\ &\leqq \int_\delta^1 \mu(A(t))\, dt + \delta \\ &\leqq \int_\delta^1 [\nu(A(t)_\delta) + \delta]\, dt + \delta \\ &\leqq \int_\delta^1 \nu(A(t-\delta))\, dt + (1-\delta)\,\delta + \delta \\ &\leqq \int_\delta^1 \nu(A(t))\, dt + (1-\delta)\,\delta + \delta \\ &= \nu f + (2\delta - \delta^2), \end{aligned}$$

wobei in der dritten Ungleichung die Voraussetzung $f \in \mathscr{D}(X)$ Verwendung findet. Das ergibt zusammen mit der durch Vertauschung von μ und ν entstehenden Ungleichung die Behauptung. □

Daß beide Abschätzungen in Satz 2 – auch bei Beschränkung auf $\mathscr{M}_+^1(X)$ – scharf sind, zeigen die folgenden Beispiele:

Es sei $X = [0, 1]$ und mit $0 \leqq \gamma \leqq 1$ werde definiert[2]

$$\mu := \varepsilon_0, \; \nu_1 := (1-\gamma)\,\varepsilon_0 + \gamma \varepsilon_\gamma \quad \text{und} \quad \nu_2 := (1-\gamma)\,\varepsilon_\gamma + \gamma \varepsilon_1 ;$$

dann folgt durch einfache Rechnung

$$d(\mu, \nu_i) = \gamma, \; \|\mu - \nu_1\| = \gamma^2 \quad \text{und} \quad \|\mu - \nu_2\| = 2\gamma - \gamma^2 .$$

Mittels Satz 2 ergibt sich nun ohne Schwierigkeit:

Satz 3. (a) *Ist der metrische Raum X separabel, so induziert die Norm $\|\mu\|$ in $\mathscr{M}_+(X)$ die schwache Topologie.*

(b) *Ist X ein polnischer Raum, so ist $\mathscr{M}_+(X)$ bezüglich der Norm $\|\mu\|$ vollständig.*

---

[2] ε_x bezeichnet das zu $x \in X$ gehörige Einheitsmaß.

Beweis. (a) Gilt für μ_n, $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$ eine der Beziehungen $\mu_n \to \mu$ oder $\|\mu_n - \mu\| \to 0$, so ist die Folge $(\mu_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. für geeignetes $\alpha > 0$ erfüllen $\alpha\mu_n$ und $\alpha\mu$ die Voraussetzungen von Satz 2. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun die Richtigkeit der Behauptung von der Metrik $d(\mu, \nu)$ auf die betrachtete Norm übertragen.

(b) Die Aussage ergibt sich analog zu Teil (a) des Beweises. □

1.2. Verteilungen über Produkträumen

Ist X Produktraum endlich oder unendlich vieler topologischer Räume X_t, $t \in T$, so gelten für die schwache Topologie in $\mathscr{M}_+(X)$ einige Aussagen, die im folgenden besondere Bedeutung besitzen. Dabei bezeichne π_S für nicht-leere Teilmengen S von T die Projektion von X auf $\prod_{t \in S} X_t$, wobei im Fall $S = \{t_1, \ldots, t_n\}$ auch kurz $\pi_{t_1 \ldots t_n}$ geschrieben wird.

Im Fall endlicher Produkte gilt zunächst:

Satz 4. *Es sei X der Produktraum der separablen metrischen Räume $X_1, \ldots, X_n$. Dann ist die schwache Topologie in $\mathscr{M}_+(X)$ die gröbste Topologie, bezüglich derer die Abbildungen*

$$\mathscr{M}_+(X) \ni \mu \mapsto \mu(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \quad \text{für} \quad f_i \in \mathscr{C}(X_i)$$

stetig sind.

Beweis. 1. Es sei $G \in \mathfrak{G}(X)$ beliebig gewählt. Da die Räume X_i eine abzählbare Basis besitzen, existieren zu G Mengen $G_i^j \in \mathfrak{G}(X_i)$ derart, daß

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_1^j \times \cdots \times G_n^j. \tag{4}$$

Da die Räume X_i metrisch sind, existieren zu G_i^j Funktionen $f_i^{jk} \in \mathscr{C}(X_i)$ derart, daß

$$f_i^{jk} \geqq 0 \quad \text{und} \quad f_i^{jk} \uparrow \chi_{G_i^j} \quad \text{für} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Für die Funktionen

$$f^k := 1 - \prod_{1 \leqq j \leqq k} (1 - f^{jk}) \quad \text{mit} \quad f^{jk} := f_1^{jk} \otimes \cdots \otimes f_n^{jk}$$

folgt aus (4) und (5) schließlich

$$f^k \geqq 0 \quad \text{und} \quad f^k \uparrow \chi_G \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

2. Nun sei $\mathscr{M}_+(X)$ versehen mit der in der Behauptung des Satzes genannten gröbsten Topologie. Dann sind auch die Abbildungen

$$\mathscr{M}_+(X) \ni \mu \mapsto \mu f \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{C}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(X_n)$$

stetig, so daß aufgrund der Beziehungen

$$f^k \in \mathscr{C}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(X_n) \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mu f^k \uparrow \mu(G) \quad \text{für} \quad \mu \in \mathscr{M}_+(X)$$

die Abbildung $\mathscr{M}_+(X) \ni \mu \mapsto \mu(G)$ nach unten halbstetig ist. Da $G \in \mathfrak{G}(X)$ beliebig gewählt war, folgt daraus in bekannter Weise die Stetigkeit der Abbildungen

$$\mathscr{M}_+(X) \ni \mu \mapsto \mu f \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{C}(X)$$

und damit die Richtigkeit der Behauptung. □

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist:

Satz 5. *Es sei X der Produktraum der separablen metrischen Räume $X_1, \ldots, X_n$. Dann definiert*[3]

$$\varphi : (\mu_1, \ldots, \mu_n) \mapsto \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$$

eine injektive und bezüglich der schwachen Topologie in beiden Richtungen stetige Abbildung von $\mathscr{M}_+^1(X_1) \times \cdots \times \mathscr{M}_+^1(X_n)$ in $\mathscr{M}_+^1(X)$.

Beweis. Aufgrund der topologischen Eigenschaften der Räume X_i gilt zunächst

$$\mathfrak{C}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{C}(X_n) = \mathfrak{C}(X),$$

d. h. φ definiert tatsächlich eine – offenbar injektive – Abbildung in $\mathscr{M}_+^1(X)$. Die behauptete Stetigkeit folgt nun aus Satz 4 und der Gleichung

$$(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \prod_{1 \leq i \leq n} \mu_i f_i . \quad \square$$

Schließlich läßt sich im Fall endlicher Produkte zeigen:

Satz 6. *Es sei X der Produktraum der polnischen Räume $X_1, \ldots, X_n$. Dann ist bei beliebiger Wahl von $\mu_i \in \mathscr{M}_+^1(X_i)$ die Menge*

$$\mathscr{M} := \{\mu \in \mathscr{M}_+^1(X) : \ \pi_i(\mu) = \mu_i \ \text{für} \ 1 \leq i \leq n\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie[4].

Beweis. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen π_i ist $\mathscr{M}$ jedenfalls abgeschlossen. Aufgrund der topologischen Eigenschaften der Räume X_i sind die Maße μ_i straff, d. h. zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existieren kompakte Mengen $K_i \subset X_i$ mit $\mu_i(X_i - K_i) < \frac{\varepsilon}{n}$. Dann ist auch die Menge

[3] $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ bzw. $\bigotimes_{t \in T} \mathfrak{A}_t$ bezeichnet die Produktbildung bei σ-Algebren, $\mu_1 \otimes \mu_2$ bzw. $\bigotimes_{t \in T} \mu_t$ die Produktbildung bei Maßen (soweit definiert).

[4] Ist $X = \prod_{t \in T} X_t$, so bezeichnet $\pi_S(\mu)$ das zu $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$ und $\emptyset \neq S \subset T$ gehörige Marginalmaß.

$K := K_1 \times \cdots \times K_n$ kompakt und es gilt

$$\mu(X - K) \leqq \sum_{1 \leqq i \leqq n} \mu_i(X_i - K_i) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad \mu \in \mathcal{M},$$

d. h. $\mathcal{M}$ ist gleichgradig straff. Daraus folgt nach dem Satz von Prochorov die Behauptung. □

Im Fall beliebiger Produkte gilt zunächst:

Satz 7. *Es sei X der Produktraum der separablen metrischen Räume X_t, $t \in T$, und $\mathfrak{S} := \{S \subset T : 0 < |S| < \infty\}$. Dann ist die schwache Topologie in $\mathcal{M}_+(X)$ die gröbste Topologie, bezüglich derer die Abbildungen*

$$\mathcal{M}_+(X) \ni \mu \mapsto \mu(f_S \circ \pi_S) \quad \textit{für} \quad f_S \in \mathscr{C}\left(\prod_{t \in S} X_t\right) \quad \textit{mit} \quad S \in \mathfrak{S}$$

stetig sind.

Beweis. 0. Gemäß [2] ist jede Funktion $f \in \mathscr{C}(X)$ von der Gestalt $f_S \circ \pi_S$ mit abzählbarer Indexmenge S. Daher läßt sich T ohne Einschränkung als abzählbar annehmen, so daß auch $\mathfrak{S}$ abzählbar ist.

1. Nun sei $G \in \mathfrak{G}(X)$ beliebig gewählt. Nach Definition der Produkt-Topologie existieren zu G Mengen $G_S \in \mathfrak{G}\left(\prod_{t \in S} X_t\right)$ derart, daß

$$G = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \pi_S^{-1}(G_S). \tag{6}$$

Da die Räume $\prod_{t \in S} X_t$ metrisierbar sind, existieren zu G_S Funktionen $f_S^k \in \mathscr{C}\left(\prod_{t \in S} X_t\right)$ derart, daß

$$f_S^k \geqq 0 \quad \text{und} \quad f_S^k \uparrow \chi_{G_S} \quad \text{für} \quad k \to \infty. \tag{7}$$

Für die Funktionen

$$f^k := 1 - \prod_{1 \leqq j \leqq k} (1 - f_{S_j}^k \circ \pi_{S_j}) \quad \text{mit} \quad \{S_j : j \in \mathbb{N}\} = \mathfrak{S}$$

folgt aus (6) und (7) schließlich

$$f^k \geqq 0 \quad \text{und} \quad f^k \uparrow \chi_G \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

2. Der weitere Beweis verläuft nun analog zu Teil 2 des Beweises von Satz 4. □

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist:

Satz 8. *Es sei X der Produktraum der separablen metrischen Räume X_t, $t \in T$, und $\mathfrak{S} := \{S \subset T : 0 < |S| < \infty\}$. Dann definiert*

$$\psi : \mu \mapsto (\pi_S(\mu))_{S \in \mathfrak{S}}$$

eine injektive und bezüglich der schwachen Topologie in beiden Richtungen stetige Abbildung von $\mathcal{M}_+^1(X)$ in $\prod_{S \in \mathfrak{S}} \mathcal{M}_+^1\left(\prod_{t \in S} X_t\right)$.

Beweis. Gemäß [2] gilt zunächst

$$\mathfrak{C}(X) = \bigotimes_{t \in T} \mathfrak{C}(X_t),$$

d. h. die Abbildung ψ ist injektiv. Die behauptete Stetigkeit folgt nun aus Satz 7 und der Gleichung

$$\mu(f_S \circ \pi_S) = (\pi_S(\mu))\, f_S. \quad \square$$

Damit läßt sich auch im Fall beliebiger Produkte zeigen:

Satz 9. *Es sei X der Produktraum der polnischen Räume X_t, $t \in T$. Dann ist bei beliebiger Wahl von $\mu_t \in \mathcal{M}_+^1(X_t)$ die Menge*

$$\mathcal{M} := \{\mu \in \mathcal{M}_+^1(X) : \ \pi_t(\mu) = \mu_t \quad \textit{für} \quad t \in T\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie.

Beweis. Es sei $\mathfrak{S} := \{S \subset T : 0 < |S| < \infty\}$ und

$$\mathcal{M}_S := \left\{\mu_S \in \mathcal{M}_+^1\left(\prod_{t \in S} X_t\right): \ \pi_t(\mu_S) = \mu_t \text{ für } t \in S\right\} \quad \text{für} \quad S \in \mathfrak{S}.$$

Dann ist nach Satz 6 $\mathcal{M}_S$ und damit nach dem Satz von Tychonov auch $\prod_{S \in \mathfrak{S}} \mathcal{M}_S$ kompakt. Da die Mengen

$$\{(\mu_{S_1}, \mu_{S_2}) : \pi_{S_1}(\mu_{S_2}) = \mu_{S_1}\}$$

für $S_i \in \mathfrak{S}$ mit $S_1 \subset S_2$ abgeschlossen sind, ist also auch

$$\mathcal{M}' := \{(\mu_S)_{S \in \mathfrak{S}} : \quad \mu_S \in \mathcal{M}_S \text{ und } (\mu_S)_{S \in \mathfrak{S}} \text{ projektives System}\}$$

eine kompakte Menge. Da für die Abbildung ψ aus Satz 8 nach dem Satz von Kolmogorov $\mathcal{M}' = \{\psi(\mu) : \mu \in \mathcal{M}\}$ gilt, ist damit auch $\mathcal{M}$ kompakt. $\square$

1.3. Eine Klasse zweidimensionaler Verteilungen

Um die im folgenden wesentliche Eigenschaft zweidimensionaler Verteilungen formulieren zu können, wird eine weitere Bezeichnung benötigt. Ist X das Produkt topologischer Räume X_t, $t \in T$, die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ bezüglich $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ integrierbar und $S \subset T$ beliebig, so bezeichnet $\mu(f \mid \pi_t, t \in S)$ den bedingten Erwartungswert von f bezüglich $\pi_t, t \in S$, also im Fall $S = \emptyset$ die Konstante μf und im Fall $S \neq \emptyset$ die – μ-fast eindeutig bestimmte – bezüglich μ integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ von der Gestalt $g_S \circ \pi_S$ mit

$$\mu(f(h_S \circ \pi_S)) = \mu(g(h_S \circ \pi_S)) \quad \text{für} \quad \textit{alle} \ h_S \in \mathscr{C}\left(\prod_{t \in S} X_t\right).$$

Von besonderem Interesse sind nun jene Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$, die in folgendem Sinne mit den Klassen $\mathcal{D}(X_i)$ verträglich sind:

Definition 3. *Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, so bezeichnet $\mathcal{N}(X_1; X_2)$ die Gesamtheit aller Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$ mit folgender Eigenschaft:*

$$\left.\begin{array}{c} \text{zu } f_2 \in \mathcal{D}(X_2) \text{ existiert } f_1 \in \mathcal{D}(X_1) \text{ derart, daß} \\ f_1 \circ \pi_1 = \mu(f_2 \circ \pi_2 | \pi_1). \end{array}\right\} \tag{8}$$

Mit $\mathcal{D}(X_i)$ hängt also auch $\mathcal{N}(X_1; X_2)$ wesentlich von der zugrunde liegenden Metrik ab; ferner ist die Reihenfolge X_1, X_2 von Bedeutung. Offenbar enthält $\mathcal{N}(X_1; X_2)$ alle Produktmaße aus $\mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$; weniger triviale Beispiele werden sich im folgenden ergeben.

Die wichtigste Aussage über die Gesamtheit $\mathcal{N}(X_1; X_2)$ lautet:

Satz 10. *Die metrischen Räume (X_i, d_i) seien separabel. Dann ist die Menge $\mathcal{N}(X_1; X_2)$ abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie.*

Beweis. 1. Für $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$ sei im folgenden $\mu_1 := \pi_1(\mu)$. Es genügt, zu zeigen, daß μ genau dann in $\mathcal{N}(X_1; X_2)$ liegt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{l} \int\limits_{X_1 \times X_2} g_1(y_1) f_2(x_2)\, d\mu \cdot \int\limits_{X_1} h_1(z_1)\, d\mu_1 \\ - \int\limits_{X_1 \times X_2} h_1(z_1) f_2(x_2)\, d\mu \cdot \int\limits_{X_1} g_1(y_1)\, d\mu_1 \\ \leqq \int\limits_{X_1 \times X_1} g_1(y_1) h_1(z_1) d_1(y_1, z_1)\, d(\mu_1 \otimes \mu_1) \\ \text{für alle } f_2 \in \mathcal{D}(X_2) \text{ und } g_1, h_1 \in \mathcal{C}(X_1) \text{ derart, daß} \\ g_1, h_1 \geqq 0 \text{ und } \mathrm{Tr}(g_1), \mathrm{Tr}(h_1) \text{ beschränkt}^5. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Denn der Integrand auf der rechten Seite liegt in $\mathcal{C}(X_1 \times X_1)$ und mit $\mu \mapsto \mu_1$ ist gemäß Satz 5 auch die Abbildung $\mu \mapsto \mu_1 \otimes \mu_1$ stetig, so daß jede der angegebenen Ungleichungen eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$ definiert.

2. Nun gelte zunächst $\mu \in \mathcal{N}(X_1; X_2)$; ferner seien f_2 und g_1, h_1 gemäß (9) sowie f_1 zu f_2 gemäß (8) gewählt. Dann gilt

$$[f_1(y_1) - f_1(z_1)]\, g_1(y_1)\, h_1(z_1) \leqq d_1(y_1, z_1)\, g_1(y_1)\, h_1(z_1),$$

und daraus folgt durch Integration mit dem Maß $\mu_1 \otimes \mu_1$ unter Verwendung der Gleichung $f_1 \circ \pi_1 = \mu(f_2 \circ \pi_2 | \pi_1)$ sofort das Bestehen der Ungleichung in (9).

3. Nun sei umgekehrt die Bedingung (9) erfüllt; ferner sei zu festem $f_2 \in \mathcal{D}(X_2)$ eine Funktion f_1^0 mit $f_1^0 \circ \pi_1 = \mu(f_2 \circ \pi_2 | \pi_1)$ gewählt. Dann

[5] $\mathrm{Tr}(f)$ bezeichnet den Träger der Funktion f.

folgt ähnlich wie in Teil 2 des Beweises ohne Schwierigkeit, daß

$$A := \{(y_1, z_1) : |f_1^0(y_1) - f_1^0(z_1)| > d_1(y_1, z_1)\}$$

eine $(\mu_1 \otimes \mu_1)$-Nullmenge und damit

$$N_1' := \{z_1 : \mu_1(A_{z_1}) > 0\}$$

eine μ_1-Nullmenge ist. Ist also Z_1 eine – gemäß Voraussetzung vorhandene – abzählbare dichte Teilmenge von $X_1 - N_1'$, so ist auch

$$N_1'' := \bigcup \{A_{z_1} : z_1 \in Z_1\}$$

eine μ_1-Nullmenge. Mit der μ_1-Nullmenge $N_1 := N_1' \cup N_1''$ gilt dann

$$|f_1^0(y_1) - f_1^0(z_1)| \leqq d_1(y_1, z_1) \quad \text{für} \quad y_1, z_1 \notin N_1 . \tag{10}$$

Denn wegen $N_1' \subset N_1$ existiert eine Folge $(z_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Z_1 mit $z_1^n \to z_1$ und wegen $N_1'' \subset N_1$ gilt

$$|f_1^0(y_1) - f_1^0(z_1^n)| \leqq d_1(y_1, z_1^n),$$

$$|f_1^0(z_1) - f_1^0(z_1^n)| \leqq d_1(z_1, z_1^n),$$

woraus für $n \to \infty$ die Richtigkeit von (10) folgt. Fortsetzung der Restriktion $f_1^0 | X_1 - N_1$ gemäß Lemma 2 liefert nun eine Funktion $f_1 \in \mathscr{D}(X_1)$ mit $f_1 \circ \pi_1 = \mu(f_2 \circ \pi_2 | \pi_1)$, d. h. es gilt $\mu \in \mathscr{N}(X_1; X_2)$. □

Die Aussage von Satz 10 wird falsch, wenn in Definition 3 die Gesamtheiten $\mathscr{D}(X_i)$ durch $\mathscr{C}(X_i)$ ersetzt werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei $X_i = [-1, +1]$, a_1 eine über X_1 gleichverteilte Zufallsvariable und

$$a_2^k := \operatorname{med}(-1, k a_1, +1)^6;$$

dann ist leicht einzusehen, daß die Verteilungen μ_k zu (a_1, a_2^k) zwar die (8) entsprechende Eigenschaft besitzen, jedoch schwach gegen eine Verteilung μ ohne diese Eigenschaft konvergieren.

Unter zusätzlichen topologischen Voraussetzungen läßt sich die Gesamtheit $\mathscr{N}(X_1; X_2)$ etwas einfacher beschrieben. Für einen Markov-Kern P von X_1 nach X_2 sei dabei

$$(Pf_2)(x_1) := \int_{X_2} f_2(x_2)\, P(x_1; dx_2)$$

und

$$(\mu_1 P)(A_2) := \int_{X_1} P(x_1; A_2)\, \mu_1(dx_1)$$

(soweit definiert).

[6] Für reelle Zahlen (und entsprechend für Funktionen) bezeichnen $a \wedge b$ und $a \vee b$ Minimum und Maximum sowie med (a, b, c) den gemeinsamen Wert

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Satz 11. *Es seien* (X_1, d_1) *und* (X_2, d_2) *polnische Räume sowie* $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$ *mit* $\mu_1 := \pi_1(\mu)$. *Notwendig und hinreichend für* $\mu \in \mathcal{N}(X_1; X_2)$ *ist dann die Existenz einer Desintegration*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} P(x_1; A_2)\, d\mu_1 \quad \textit{für} \quad A_i \in \mathfrak{C}(X_i)$$

mit einem Markov-Kern P *von* X_1 *nach* X_2 *derart, daß*

$$\|P(y_1; \cdot) - P(z_1; \cdot)\| \leqq d_1(y_1, z_1) \quad \textit{für} \quad y_1, z_1 \in \mathrm{Tr}(\mu_1)^7.$$

Beweis. 1. Zunächst gelte $\mu \in \mathcal{N}(X_1; X_2)$. Da X_2 ein polnischer Raum ist, existiert jedenfall eine Desintegration von μ bezüglich μ_1 mit einem Markov-Kern P^0. Für $f_2 \in \mathcal{D}(X_2)$ und $f_1 \in \mathcal{D}(X_1)$ mit $f_1 \circ \pi_1 = \mu(f_2 \circ \pi_2 | \pi_1)$ gilt dann

$$f_1 = P^0 \; f_2 \quad \mu_1\text{-fast.}$$

Ist also $\mathscr{E}_2$ zu $\mathcal{D}(X_2)$ gemäß Lemma 3 gewählt, so existiert eine Menge $A_1 \in \mathfrak{C}(X_1)$ mit $\mu_1(A_1) = 1$ und

$$\left.\begin{array}{l} |P^0(y_1; \cdot)\, f_2 - P^0(z_1; \cdot)\, f_2| \leqq d_1(y_1, z_1) \\ \text{für} \quad y_1, z_1 \in A_1 \quad \text{und alle} \quad f_2 \in \mathscr{E}_2, \end{array}\right\} \tag{11}$$

d. h. gemäß Lemma 3 gilt

$$\|P^0(y_1; \cdot) - P^0(z_1; \cdot)\| \leqq d_1(y_1, z_1) \quad \text{für} \quad y_1, z_1 \in A_1. \tag{12}$$

Daher definiert $x_1 \mapsto P^0(x_1; \cdot)$ eine kontrahierende Abbildung von A_1 in den gemäß Satz 3 bezüglich der betrachteten Metrik vollständigen Raum $\mathcal{M}_+^1(X_2)$, läßt sich also fortsetzen zu einer kontrahierenden Abbildung $x_1 \mapsto P(x_1; \cdot)$ von der abgeschlossenen Hülle B_1 zu A_1 in $\mathcal{M}_+^1(X_2)$. Wegen $\mu_1(B_1) = 1$ gilt dabei $B_1 \supset \mathrm{Tr}(\mu_1)$, so daß jede auf $X_1 - B_1$ konstante Fortsetzung der Abbildung $x_1 \mapsto P(x_1; \cdot)$ einen Markov-Kern P von X_1 nach X_2 mit der gewünschten Eigenschaft definiert.

2. Nun sei umgekehrt die angegebene Bedingung erfüllt. Für beliebiges $f_2 \in \mathcal{D}(X_2)$ definiert dann $f_1^0 := P f_2$ eine Funktion mit $f_1 \circ \pi_1 = \mu(f_2 \circ \pi_2 | \pi_1)$ derart, daß

$$|f_1^0(y_1) - f_1^0(z_1)| \leqq d_1(y_1, z_1) \quad \text{für} \quad y_1, z_1 \in \mathrm{Tr}(\mu_1). \tag{13}$$

Fortsetzung der Restriktion $f_1^0 | \mathrm{Tr}(\mu_1)$ gemäß Lemma 2 liefert nun eine Funktion $f_1 \in \mathcal{D}(X_1)$ mit $f_1 \circ \pi_1 = \mu(f_2 \circ \pi_2 | \pi_1)$, d.h. es gilt $\mu \in \mathcal{N}(X_1; X_2)$. □

---

[7] $\mathrm{Tr}(\mu)$ bezeichnet den Träger des Maßes μ.

1.4. Markov-Komposition

Ist T eine total-geordnete Menge und X das Produkt topologischer Räume X_t, $t \in T$, so besitzt ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ die „Markov-Eigenschaft", falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{l} \mu(f_t \circ \pi_t \mid \pi_r, r \leqq s) = \mu(f_t \circ \pi_t \mid \pi_s) \ \mu\text{-fast} \\ \text{für } s, t \in T \text{ mit } s < t \text{ und alle } f_t \in \mathscr{C}(X_t)\,. \end{array}\right\} \tag{14}$$

Im einfachsten nicht-trivialen Fall ist $|T| = 3$, also etwa $T = \{1, 2, 3\}$ mit der natürlichen Ordnung. Hier gilt zunächst:

Satz 12. *Es sei X der Produktraum der polnischen Räume X_1, X_2, X_3. Dann existiert zu zwei Maßen $\mu_{12} \in \mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$ und $\mu_{23} \in \mathcal{M}_+^1(X_2 \times X_3)$ mit*

$$\pi_2(\mu_{12}) = \mu_2 = \pi_2(\mu_{23})$$

genau ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ mit der Markov-Eigenschaft derart, daß

$$\pi_{12}(\mu) = \mu_{12} \quad \textit{und} \quad \pi_{23}(\mu) = \mu_{23}\,.$$

Beweis. Da X_3 ein polnischer Raum ist, existiert eine Desintegration von μ_{23} bezüglich μ_2 mit einem Markov-Kern P. Dann definiert

$$\mu(A) := \int_{X_1 \times X_2} P(x_2; A_{x_1 x_2})\, d\mu_{12} \quad \text{für} \quad A \in \mathfrak{C}(X)$$

ein Maß μ mit den gewünschten Eigenschaften, und dies ist zugleich die einzig mögliche Definition. □

Damit läßt sich folgende „Markov-Komposition" einführen:

Definition 4. *Ist X der Produktraum der polnischen Räume X_1, X_2, X_3, so bezeichnet*

$$(\mu_{12}, \mu_{23}) \mapsto \mu_{12} \circ \mu_{23}$$

die durch Satz 12 definierte Abbildung von

$$\mathcal{M} := \{(\mu_{12}, \mu_{23}) \in \mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2) \times \mathcal{M}_+^1(X_2 \times X_3) : \ \pi_2(\mu_{12}) = \pi_2(\mu_{23})\}$$

in $\mathcal{M}_+^1(X)$.

Mit dieser Bezeichnung gilt zunächst:

Satz 13. *Es sei X der Produktraum der polnischen Räume X_1, X_2, X_3 und $\mu_{12} \in \mathcal{N}(X_1; X_2)$, $\mu_{23} \in \mathcal{N}(X_2; X_3)$ mit $\pi_2(\mu_{12}) = \pi_2(\mu_{23})$. Dann gilt auch*

$$\pi_{13}(\mu_{12} \circ \mu_{23}) \in \mathcal{N}(X_1; X_3)\,.$$

Beweis. Zu $f_3 \in \mathscr{D}(X_3)$ lassen sich Funktionen $f_i \in \mathscr{D}(X_i)$ bestimmen derart, daß

$$f_i \circ \pi_i = \mu_{i\,i+1}(f_{i+1} \circ \pi_{i+1} \mid \pi_i) \quad \text{für} \quad i = 1, 2\,.$$

Dann folgt für $\mu = \mu_{12} \circ \mu_{23}$ aus der Markov-Eigenschaft zunächst

$$f_1 \circ \pi_1 = \mu(f_3 \circ \pi_3 | \pi_1)$$

und daraus schließlich die Behauptung. □

Die wichtigste Aussage über die Komposition „$\circ$“ lautet:

Satz 14. *Es sei X der Produktraum der polnischen Räume X_1, X_2, X_3. Dann ist die Abbildung $(\mu_{12}, \mu_{23}) \mapsto \mu_{12} \circ \mu_{23}$ auf*

$$\mathcal{N} := \{(\mu_{12}, \mu_{23}) \in \mathcal{N}(X_1; X_2) \times \mathcal{N}(X_2; X_3) : \pi_2(\mu_{12}) = \pi_2(\mu_{23})\}$$

stetig bezüglich der schwachen Topologie.

Beweis. 1. Es sei eine einfache Hilfsaussage vorausgeschickt:

Ist $\mu_2^0 \in \mathcal{M}_+^1(X_2)$ und $g_2^k \in \mathcal{D}(X_2)$ für $k \geqq 0$, so folgt aus

$$\mu_2^0(g_2 \cdot g_2^k) \to \mu_2^0(g_2 \cdot g_2^0) \quad \text{für alle} \quad g_2 \in \mathcal{D}(X_2)$$

die Beziehung

$$g_2^k(x_2) \to g_2^0(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_2 \in \mathrm{Tr}(\mu_2^0).$$

Zum Nachweis dieser Behauptung sei $h_2^k := g_2^k - g_2^0$. Bezeichnet d_2 die Metrik in X_2, so definiert $g_2(x_2) := (\varepsilon - d_2(x_2, y_2))^+$ für $y_2 \in \mathrm{Tr}(\mu_2^0)$ und $0 < \varepsilon < 1$ eine Funktion $g_2 \in \mathcal{D}(X_2)$ mit $\mu_2^0 g_2 > 0$ und

$$|h_2^k(x_2) - h_2^k(y_2)| \leqq 2\varepsilon \quad \text{für} \quad x_2 \in \mathrm{Tr}(g_2),$$

so daß noch Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \to \infty} \int_{X_2} (\varepsilon - d_2(x_2, y_2))^+ \, h_2^k(x_2) \, d\mu_2^0 \\ &\leqq \int_{X_2} (\varepsilon - d_2(x_2, y_2))^+ \, d\mu_2^0 \cdot \liminf_{k \to \infty} (h_2^k(y_2) + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit einer entsprechenden Ungleichung für $\limsup_{k \to \infty} (h_2^k(y_2) - 2\varepsilon)$ die Beziehung $\lim_{k \to \infty} h_2^k(y_2) = 0$.

2. Gemäß Satz 4 ist nun die Stetigkeit der Abbildungen

$$\mathcal{N} \ni (\mu_{12}, \mu_{23}) \mapsto (\mu_{12} \circ \mu_{23})(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3) \quad \text{für} \quad f_i \in \mathscr{C}(X_i)$$

zu zeigen, wobei sich ohne Einschränkung $0 \leqq f_i \leqq 1$ annehmen läßt. Zusätzlich kann im folgenden $f_i \in \mathcal{D}(X_i)$ vorausgesetzt werden; denn aus der Stetigkeit in diesem Fall folgt mittels Lemma 4 die Halbstetigkeit nach unten und nach oben im allgemeinen Fall. Da die Räume $\mathcal{M}_+^1(X_1 \times X_2)$ und $\mathcal{M}_+^1(X_2 \times X_3)$ metrisierbar sind, bleibt zu zeigen:

Ist $(\mu_{12}^k, \mu_{23}^k) \in \mathcal{N}$ für $k \geqq 0$, so folgt aus

$$\mu_{12}^k \to \mu_{12}^0 \quad \text{und} \quad \mu_{23}^k \to \mu_{23}^0$$

die Beziehung

$$(\mu_{12}^k \circ \mu_{23}^k)(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3) \to (\mu_{12}^0 \circ \mu_{23}^0)(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3) \quad \text{für} \quad f_i \in \mathscr{D}(X_i).$$

3. Im folgenden sei

$$\mu_2^k := \pi_2(\mu_{12}^k) = \pi_2(\mu_{23}^k) \quad \text{für} \quad k \geqq 0.$$

Dann existieren zu f_3 wegen $\mu_{23}^k \in \mathscr{N}(X_2; X_3)$ Funktionen $g_2^k \in \mathscr{D}(X_2)$ derart, daß

$$\mu_{23}^k(g_2 \otimes f_3) = \mu_2^k(g_2 \cdot g_2^k) \quad \text{für alle} \quad g_2 \in \mathscr{D}(X_2).$$

Wegen $\mu_{23}^k \to \mu_{23}^0$ folgt daraus zunächst

$$\mu_2^k(g_2 \cdot g_2^k) \to \mu_2^0(g_2 \cdot g_2^0) \quad \text{für alle} \quad g_2 \in \mathscr{D}(X_2);$$

wegen $\|\mu_2^k - \mu_2^0\| \to 0$ und $\frac{1}{2} g_2 \cdot g_2^k \in \mathscr{D}(X_2)$ gilt weiter

$$\mu_2^k(g_2 \cdot g_2^k) - \mu_2^0(g_2 \cdot g_2^k) \to 0 \quad \text{für alle} \quad g_2 \in \mathscr{D}(X_2).$$

Das ergibt zusammen die Voraussetzung der Hilfsaussage in Teil 1 des Beweises, so daß schließlich

$$g_2^k(x_2) \to g_2^0(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_2 \in \operatorname{Tr}(\mu_2^0). \tag{15}$$

4. *Aufgrund der Markov-Eigenschaft gilt nun*

$$\begin{aligned}
&(\mu_{12}^k \circ \mu_{23}^k)(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3) - (\mu_{12}^0 \circ \mu_{23}^0)(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3) \\
&= \mu_{12}^k(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^k)) - \mu_{12}^0(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^0)) \\
&= [\mu_{12}^k(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^k)) - \mu_{12}^0(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^k))] \\
&\quad + [\mu_{12}^0(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^k)) - \mu_{12}^0(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^0))].
\end{aligned}$$

Dabei liegen die Funktionen $\frac{1}{2}(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^0))$ bezüglich der in Lemma 5 definierten Metrik in $\mathscr{D}(X_1 \times X_2)$, so daß wegen $\|\mu_{12}^k - \mu_{12}^0\| \to 0$ die erste Differenz gegen Null konvergiert. Ferner werden die Funktionen $\frac{1}{2}(f_1 \otimes (f_2 \cdot g_2^k))$ majorisiert durch die Konstante 1, so daß wegen (15) auch die zweite Differenz gegen Null konvergiert. Das ergibt zusammen die behauptete Konvergenz. □

Die Beschränkung auf die Menge $\mathscr{N}$ ist in Satz 14 wesentlich, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei $X_1 = \{0, 1\} = X_3$ und $X_2 = [0, 1]$ sowie μ_i die Gleichverteilung über X_i. Ferner sei $(A_2^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine – etwa durch sukzessive dyadische Unterteilung konstruierte – Folge in $\mathfrak{C}(X_2)$ mit $\mu_2(A_2^k) = \frac{1}{2}$ und

$$\int_{A_2^k} f_2 \, d\mu_2 \to \frac{1}{2} \int_{X_2} f_2 \, d\mu_2 \quad \text{für alle} \quad f_2 \in \mathscr{C}(X_2).$$

Schließlich sei a_2 eine Zufallsvariable mit der Verteilung μ_2 sowie

$$a_1^k := \chi_{A_2^k} \circ a_2 \quad \text{und} \quad a_3^k := \chi_{A_2^k} \circ a_2.$$

Dann läßt sich für die Verteilungen μ_{12}^k bzw. μ_{23}^k zu (a_1^k, a_2) bzw. (a_2, a_3^k) ohne Schwierigkeit zeigen

$$\mu_{12}^k \to \mu_1 \otimes \mu_2 =: \mu_{12} \quad \text{und} \quad \mu_{23}^k \to \mu_2 \otimes \mu_3 =: \mu_{23},$$

$$\pi_{13}(\mu_{12}^k \circ \mu_{23}^k) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1),$$

$$\pi_{13}(\mu_{12} \circ \mu_{23}) = \mu_1 \otimes \mu_3,$$

so daß $\mu_{12}^k \circ \mu_{23}^k$ nicht schwach gegen $\mu_{12} \circ \mu_{23}$ konvergiert.

Wie leicht einzusehen ist, ist die Komposition „$\circ$" assoziativ, so daß die Schreibweise $\mu_{12} \circ \cdots \circ \mu_{n-1\,n}$ im folgenden eindeutig ist. Aus Satz 14 ergibt sich nun die für den Beweis von Theorem 1 wesentliche Aussage:

Satz 15. *Es sei X der Produktraum der polnischen Räume $X_1, \ldots, X_n$ und $\mu_i \in \mathcal{M}_+^1(X_i)$; ferner sei $\mathcal{N}_{i\,i+1} \subset \mathcal{N}(X_i; X_{i+1})$ mit*

$$\pi_i(\mu_{i\,i+1}) = \mu_i \quad \textit{und} \quad \pi_{i+1}(\mu_{i\,i+1}) = \mu_{i+1} \quad \textit{für} \quad \mu_{i\,i+1} \in \mathcal{N}_{i\,i+1}.$$

Dann ist mit $\mathcal{N}_{12}, \ldots, \mathcal{N}_{n-1\,n}$ auch die Menge

$$\mathcal{N}_{12} \circ \cdots \circ \mathcal{N}_{n-1\,n} := \{\mu_{12} \circ \cdots \circ \mu_{n-1\,n} : \mu_{i\,i+1} \in \mathcal{N}_{i\,i+1}\}$$

abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie.

Beweis. Da der Raum $\mathcal{M}_+^1(X)$ metrisierbar ist, genügt es, zu zeigen, daß mit einer schwach konvergenten Folge $(\mu_{12}^k \circ \cdots \circ \mu_{n-1\,n}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ auch ihr Limes μ in $\mathcal{N}_{12} \circ \cdots \circ \mathcal{N}_{n-1\,n}$ liegt. Wegen

$$\mu_{i\,i+1}^k \to \mu_{i\,i+1} := \pi_{i\,i+1}(\mu) \in \mathcal{N}_{i\,i+1} \quad \text{für} \quad 1 \leqq i < n$$

folgt mittels vollständiger Induktion aus Satz 14 sofort

$$\mu = \mu_{12} \circ \cdots \circ \mu_{n-1\,n}.$$

Dabei ist lediglich zu beachten, daß bezüglich der in Lemma 5 definierten Metrik in $X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ aufgrund der Markov-Eigenschaft

$$\mathcal{N}_{12} \circ \cdots \circ \mathcal{N}_{n-1\,n} \subset \mathcal{N}(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}; X_n). \quad \square$$

Nun läßt sich das Hauptergebnis des ersten Teils beweisen:

Theorem 1. *Es sei T eine total-geordnete Menge und X der Produktraum der polnischen Räume X_t, $t \in T$. Für $\mu_t \in \mathcal{M}_+^1(X_t)$, $t \in T$, und $\mathcal{N}_{st} \subset \mathcal{M}_+^1(X_s \times X_t)$, $s < t$, seien folgende Bedingungen erfüllt:*

(M$_1$) $\mathcal{N}_{st} \neq \emptyset$,

(M$_2$) $\pi_s(\mu_{st}) = \mu_s$ *und* $\pi_t(\mu_{st}) = \mu_t$ *für* $\mu_{st} \in \mathcal{N}_{st}$,

(M$_3$) $\mathcal{N}_{st}$ *abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie,*

(M$_4$) $\{\pi_{rt}(\mu_{rs} \circ \mu_{st}) : \mu_{rs} \in \mathcal{N}_{rs}$ *und* $\mu_{st} \in \mathcal{N}_{st}\} \subset \mathcal{N}_{rt}$ *für* $r < s < t$,

(M$_5$) $\mathcal{N}_{st} \subset \mathcal{N}(X_s; X_t)$.

Dann existiert ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ *mit der Markov-Eigenschaft derart, daß*

$$\pi_{st}(\mu) \in \mathcal{N}_{st} \quad \textit{für} \quad s, t \in T \quad \textit{mit} \quad s < t.$$

Beweis. 1. Mit der Abkürzung

$$\mathcal{M} := \{\mu \in \mathcal{M}_+^1(X) : \ \pi_t(\mu) = \mu_t \quad \textit{für} \quad t \in T\}$$

werde für $S = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ mit $t_1 < \cdots < t_n$ definiert

$$\mathcal{M}_S := \{\mu \in \mathcal{M} : \ \pi_S(\mu) \in \mathcal{N}_{t_1 t_2} \circ \cdots \circ \mathcal{N}_{t_{n-1} t_n}\}.$$

Für beliebige $\mu_{t_i t_{i+1}} \in \mathcal{N}_{t_i t_{i+1}}$ gilt dabei wegen (M_2)

$$\mu := \left(\bigotimes_{t \notin S} \mu_t\right) \otimes (\mu_{t_1 t_2} \circ \cdots \circ \mu_{t_{n-1} t_n}) \in \mathcal{M}_S,$$

so daß $\mathcal{M}_S$ wegen (M_1) nicht-leer ist. Ferner folgt aus (M_3) und (M_5) mittels Satz 15, daß $\mathcal{M}_S$ abgeschlossen ist. Außerdem ergibt (M_4)

$$\mathcal{M}_{S_1} \subset \mathcal{M}_{S_2} \quad \text{für} \quad S_1 \supset S_2.$$

2. Da die Menge $\mathcal{M}$ gemäß Satz 9 kompakt ist, folgt aus diesen drei Eigenschaften der Mengen $\mathcal{M}_S$ schließlich

$$\mathcal{M}_T := \bigcap \{\mathcal{M}_S : S \subset T \text{ endlich}\} \neq \emptyset.$$

Ein beliebiges Maß $\mu \in \mathcal{M}_T$ genügt dann der Bedingung

$$\pi_{st}(\mu) \in \mathcal{N}_{st} \quad \text{für} \quad s, t \in T \quad \text{mit} \quad s < t$$

und erfüllt die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \mu(f_{t_n} \circ \pi_{t_n} | \pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_{n-1}}) = \mu(f_{t_n} \circ \pi_{t_n} | \pi_{t_{n-1}}) \ \mu\text{-fast} \\ \text{für } \ t_i \in T \ \text{ mit } \ t_1 < \cdots < t_n \ \text{ und alle } \ f_{t_n} \in \mathscr{C}(X_{t_n}), \end{array}\right\} \tag{16}$$

woraus sich in bekannter Weise die Markov-Eigenschaft von μ ergibt. □

Wie bereits die Gegenbeispiele zu Satz 10 und Satz 14 zeigen, ist (M_5) die wesentliche Bedingung in Theorem 1. Zugleich ist (M_5) die einzige Bedingung, in der die zugrundeliegenden Metriken von Bedeutung sind. Sind insbesondere alle Räume X_t diskret, so kann auf die Bedingung (M_5) verzichtet werden; denn bei Wahl der Metriken

$$d_t(x_t, y_t) := 0 \text{ bzw. } 1 \quad \text{für} \quad x_t = \text{bzw.} \neq y_t$$

liegt jede Abbildung $f_t : X_t \to [0, 1]$ in $\mathscr{D}(X_t)$, so daß die Gesamtheit $\mathcal{N}(X_s; X_t)$ mit $\mathcal{M}_+^1(X_s \times X_t)$ übereinstimmt.

2.1. Integraldarstellung von Subdilationen

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, bezieht sich die wichtigste Anwendung von Theorem 1 auf Submartingale (oder – damit gleichwertig – auf Supermartingale). Dazu ist eine naheliegende Verallgemeinerung der in [3] enthaltenen Ergebnisse erforderlich, auf die dort zur Vermeidung von Fallunterscheidungen verzichtet wurde. Dabei beschränkt sich dieser Abschnitt darauf, unter Verzicht auf ausführliche Beweise die im folgenden tatsächlich benötigten Aussagen zusammenzustellen.

Zunächst werden einige Bezeichnungen benötigt: mit der Abkürzung $\underline{v}(x) := x^+ + 1$ sei

$$\underline{\mathscr{G}} \text{ die Gesamtheit aller konvexen Funktionen } g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g = O(v) \text{ für } |x| \to \infty, \tag{17}$$

$$\underline{\mathscr{M}} \text{ die Gesamtheit aller Maße } \mu \in \mathscr{M}_+^1(\mathbb{R}) \text{ mit } \mu\underline{v} = \int_0^\infty x\, d\mu + 1 < \infty; \tag{18}$$

Funktionen $g \in \underline{\mathscr{G}}$ sind also stetig und isoton sowie bezüglich aller Maße $\mu \in \underline{\mathscr{M}}$ integrierbar.

Nun läßt sich folgende Ordnungsrelation einführen:

Definition 5. *Für $\mu, \nu \in \underline{\mathscr{M}}$ gilt „$\mu \precsim \nu$" genau dann, wenn*

$$\mu g \leqq \nu g \quad \textit{für alle} \quad g \in \underline{\mathscr{G}}.$$

Dann folgt:

Satz 16. *Die Relation „$\precsim$" definiert eine teilweise-Ordnung in $\underline{\mathscr{M}}$, bezüglich derer $\underline{\mathscr{M}}$ ein beschränkt-vollständiger Verband ist.*

Beweis. 1. Ähnlich wie in [3] (Satz 4, Satz 5 und Satz 7) läßt sich zeigen: die durch

$$\underline{\mu}^*(t) := \int_{\mathbb{R}} (x-t)^+\, d\mu \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

definierte Transformation $\mu \mapsto \underline{\mu}^*$ ergibt eine bijektive Abbildung zwischen $\underline{\mathscr{M}}$ und der Gesamtheit $\mathscr{H}$ aller konvexen Funktionen $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \to -\infty} \frac{h(t)}{-t} = 1,$$

die bezüglich „$\precsim$" und „$\leqq$" ordnungstreu ist, so daß der Nachweis der entsprechenden Aussagen für $\mathscr{H}$ genügt.

2. Zunächst definiert „$\leqq$" eine teilweise-Ordnung in $\mathscr{H}$. Ist ferner $\mathscr{H}_0$ eine nicht-leere nach unten bzw. nach oben beschränkte Teilmenge

von $\mathscr{H}$ und

$$h_i(x) := \sup\{h(x) : h \in \mathscr{H} \text{ und } h \leqq h_0 \text{ für alle } h_0 \in \mathscr{H}_0\}$$

bzw.

$$h_s(x) := \sup\{h_0(x) : h_0 \in \mathscr{H}_0\},$$

so folgt ohne Schwierigkeit, daß diese Funktionen in $\mathscr{H}$ liegen und die Gleichung $h_i = \inf \mathscr{H}_0$ bzw. $h_s = \sup \mathscr{H}_0$ erfüllen. □

Als einfache Beispiele zur Ordnungsrelation „$\preceq$" seien angeführt:

$$\varepsilon_a \preceq \mu \quad \text{ist gleichwertig mit} \quad a \leqq \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu, \tag{19}$$

$$\mu \preceq \varepsilon_a \quad \text{ist gleichwertig mit} \quad \mu(]a, \infty[) = 0. \tag{20}$$

Mit der betrachteten Ordnungsrelation hängt eng die folgende Klasse von Markov-Kernen zusammen:

Definition 6. *Ein Markov-Kern P von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt „Subdilation", falls*

$$\mu P \in \mathscr{M} \quad \textit{für alle} \quad \mu \in \mathscr{M}, \tag{21}$$

$$\varepsilon_x \preceq \varepsilon_x P \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Dann ist leicht einzusehen, daß (22) beim Bestehen von (21) mit jeder der folgenden Bedingungen gleichwertig ist:

$$g \leqq Pg \quad \textit{für alle} \quad g \in \mathscr{G}, \tag{23}$$

$$\mu \preceq \mu P \quad \textit{für alle} \quad \mu \in \mathscr{M}. \tag{24}$$

Besonders einfache Subdilationen ergeben sich aus folgendem Ansatz:

Definition 7. *Es sei $T \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Mit den Abkürzungen*

$${}_Tx := \sup\{t \in T : t \leqq x\} \quad \textit{und} \quad x_T := \inf\{t \in T : t \geqq x\}$$

ist dann

$$P_T(x; \cdot) := \begin{cases} \varepsilon_{x_T} & \textit{für} \quad x < \inf T \\ \dfrac{x_T - x}{x_T - {}_Tx}\,\varepsilon_{{}_Tx} + \dfrac{x - {}_Tx}{x_T - {}_Tx}\,\varepsilon_{x_T} & \textit{sonst} \\ \varepsilon_{{}_Tx} & \textit{für} \quad x > \sup T \end{cases}$$

(mit $P_T(x; \cdot) := \varepsilon_x$ für $x \in T$).

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich zeigen:

Satz 17. *Unter den Voraussetzungen von Definition 7 gilt:*
(a) *P_T ist stets ein Markov-Kern,*
(b) *P_T ist eine Subdilation genau dann, wenn* $\sup T = \infty$.

Beweis. Vgl. [3] (Satz 16). □

Im Fall (b) läßt sich P_T auch folgendermaßen beschreiben:

Satz 18. *Es sei* $T \subset \mathbb{R}$ *abgeschlossen mit* $\sup T = \infty$. *Dann gilt:*

$$P_T g = \sup\{h \in \underline{\mathscr{G}} : h(x) \leqq g(x) \text{ für } x \in T\} \quad \text{für} \quad g \in \underline{\mathscr{G}},$$

$$\mu P_T = \inf\{\nu \in \underline{\mathscr{M}} : \mu \precsim \nu \text{ und } \operatorname{Tr}(\nu) \subset T\} \quad \text{für} \quad \mu \in \underline{\mathscr{M}}.$$

Beweis. Vgl. [3] (Lemma 8 und Lemma 9). □

Aufgrund von Satz 17 ist folgende Bezeichnung zweckmäßig:

Definition 8. $\underline{\mathfrak{T}}$ *sei der Raum aller abgeschlossenen Teilmengen T von $\mathbb{R}$ mit* $\sup T = \infty$, *versehen mit der gröbsten Topologie, bezüglich derer die Abbildungen*

$$\underline{\mathfrak{T}} \ni T \mapsto d(x, T) := \inf\{|x-t| : t \in T\} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

stetig sind.

Dann ergibt sich wie in [3], daß die Abbildungen $T \mapsto P_T(x; A)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathfrak{C}(\mathbb{R})$ bezüglich eines jeden Maßes $\tau \in \mathscr{M}_+^1(\underline{\mathfrak{T}})$ integrierbar sind, so daß folgende Verallgemeinerung der Markov-Kerne P_T möglich ist:

Definition 9. *Es sei* $\tau \in \mathscr{M}_+^1(\underline{\mathfrak{T}})$; *dann ist*

$$P_\tau(x; A) := \int_{\underline{\mathfrak{T}}} P_T(x; A)\, d\tau \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad A \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}).$$

Mit dieser Bezeichnung läßt sich zeigen:

Satz 19. *Unter der Voraussetzung von Definition 9 gilt:*

(a) P_τ *ist stets ein Markov-Kern,*

(b) P_τ *ist eine Subdilation genau dann, wenn* $\int_{\underline{\mathfrak{T}}} d(0, T)\, d\tau < \infty$.

Beweis. Vgl. [3] (Satz 20). □

Aufgrund von Satz 19 ist folgende Bezeichnung zweckmäßig:

Definition 10. $\underline{\mathscr{T}} := \left\{\tau \in \mathscr{M}_+^1(\underline{\mathfrak{T}}) : \int_{\underline{\mathfrak{T}}} d(0, T)\, d\tau < \infty\right\}$.

Nun lassen sich die Hauptergebnisse von [3] übertragen:

Theorem 2. *Es sei* $\mu \in \underline{\mathscr{M}}$ *und* $\mathscr{N} := \{\nu \in \underline{\mathscr{M}} : \mu \precsim \nu\}$. *Dann gilt:*

(a) $\mathscr{N}$ *ist konvex,*

(b) *Extremalpunkte von* $\mathscr{N}$ *sind genau die Maße* μP_T, $T \in \underline{\mathfrak{T}}$,

(c) $\mathscr{N}$ *ist identisch mit der Gesamtheit aller Maße* μP_τ, $\tau \in \underline{\mathscr{T}}$,

(d) *für eine Subdilation P mit* $\mu P = \mu P_T$ *gilt*

$$P(x; \cdot) = P_T(x; \cdot) \ \mu\text{-fast}.$$

Beweis. Vgl. [3] (Abschnitt 3.1 und 3.2). □

Die Subdilationen $P_\tau, \tau \in \underline{\mathscr{T}}$, besitzen zusätzliche Eigenschaften; beispielsweise liegt mit g stets auch $P_\tau g$ in $\underline{\mathscr{G}}$. Von besonderer Bedeutung ist im folgenden:

Satz 20. *Ist $\tau \in \underline{\mathscr{T}}$, so gilt (bezüglich der euklidischen Metrik):*

$$\|P_\tau(y;\cdot) - P_\tau(z;\cdot)\| \leqq d(y,z) \quad \textit{für alle} \quad y,z \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Ist $T \in \mathfrak{T}$ beliebig gewählt, so ergibt sich $P_T f$ aus f durch stückweise affine (bzw. konstante) Interpolation der Restriktion $f \mid T$, d. h. mit f liegt auch $P_T f$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Daher gilt

$$\|P_T(y;\cdot) - P_T(z;\cdot)\| \leqq d(y,z) \quad \textit{für alle} \quad y,z \in \mathbb{R},$$

woraus durch Integration mittels τ die Behauptung folgt. □

2.2. Anwendung auf Submartingale

Ist T eine total-geordnete Menge und $X = \mathbb{R}^T$, so besitzt ein Maß $\mu \in \mathscr{M}_+^1(X)$ die „Submartingal-Eigenschaft", falls neben

$$\pi_t(\mu) \in \underline{\mathscr{M}} \quad \text{für alle} \quad t \in T \tag{25}$$

folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{l} \mu(g \circ \pi_t \mid \pi_r, r \leqq s) \geqq g \circ \pi_s \quad \mu\text{-fast} \\ \text{für } s,t \in T \text{ mit } s<t \text{ und alle } g \in \underline{\mathscr{G}}\,. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Überlegungen wie im Beweis zu Satz 16 zeigen, daß es möglich ist, sich in dieser Bedingung auf die Funktionen $g(x) = x \vee a$, $a \in \mathbb{R}$, zu beschränken. Die sich so ergebende Ungleichung

$$\mu(\pi_t \vee a \mid \pi_r, r \leqq s) \geqq \pi_s \vee a \quad \mu\text{-fast} \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}$$

ist offenbar gleichwertig mit

$$\mu(\pi_t \vee a \mid \pi_r, r \leqq s) \geqq \pi_s \quad \mu\text{-fast} \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt durch den Grenzübergang $a \downarrow -\infty$, daß die Bedingung (26) ersetzt werden kann durch die – wegen (25) sinnvolle – Bedingung

$$\mu(\pi_t \mid \pi_r, r \leqq s) \geqq \pi_s \quad \mu\text{-fast} \quad \text{für} \quad s,t \in T \quad \text{mit} \quad s<t. \tag{27}$$

Werden die Abbildungen π_t als Zufallsvariablen zum Wahrscheinlichkeitsfeld $(X, \mathfrak{C}(X), \mu)$ betrachtet und wird demgemäß die Familie $\pi_t, t \in T$, beim Vorliegen der entsprechenden Eigenschaft von μ als

Markov-Prozeß bzw. Submartingal bezeichnet, so liefert die Kombination von Theorem 1 und Theorem 2 als Hauptergebnis:

Theorem 3. *Es sei T eine total-geordnete Menge und μ_t, $t \in T$, eine Familie von Maßen aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R})$ derart, daß*

$$\mu_t \in \underline{\mathcal{M}} \quad \textit{für alle} \quad t \in T,$$

$$\mu_s \preceq \mu_t \quad \textit{für} \quad s, t \in T \quad \textit{mit} \quad s \leqq t.$$

Dann existiert ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^T)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\pi_t(\mu) = \mu_t \quad \textit{für alle} \quad t \in T, \tag{28}$$

$$\pi_t,\ t \in T, \quad \textit{ist ein Markov-Prozeß}, \tag{29}$$

$$\pi_t,\ t \in T, \quad \textit{ist ein Submartingal}. \tag{30}$$

Beweis. 1. Mit $X_t := \mathbb{R}$ für $t \in T$ sei

$$\mathcal{M}_{st} := \{\mu_{st} \in \mathcal{M}_+^1(X_s \times X_t) : (31) \text{ und } (32)\} \quad \text{für} \quad s < t,$$

wobei die Bedingungen (31) und (32) folgendermaßen lauten:

$$\pi_s(\mu_{st}) = \mu_s \quad \text{und} \quad \pi_t(\mu_{st}) = \mu_t, \tag{31}$$

$$\pi_s, \pi_t \text{ ist ein Submartingal}. \tag{32}$$

Einfache Umformungen – insbesondere der Übergang von f zu $1-f$ – ergeben dann, daß (32) beim Bestehen von (31) mit der folgenden Bedingung gleichwertig ist:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x_s)\, g(x_t)\, d\mu_{st} \leqq \int_{\mathbb{R}} g(x_t)\, d\mu_t - \int_{\mathbb{R}} (1 - f(x_s))\, g(x_s)\, d\mu_s \\ \text{für } f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) \text{ mit } 0 \leqq f \leqq 1 \text{ und alle } g \in \underline{\mathscr{G}}. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Daraus folgt die Abgeschlossenheit der Mengen $\mathcal{M}_{st}$. Denn der Integrand auf der linken Seite dieser Ungleichung ist nach unten beschränkt und stetig, also Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von Funktionen aus $\mathscr{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, so daß die Abbildung

$$\mu_{st} \mapsto \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x_s)\, g(x_t)\, d\mu_{st}$$

auf der durch (31) definierten abgeschlossenen Menge nach unten halbstetig ist; da außerdem die rechte Seite der fraglichen Ungleichung von μ_{st} unabhängig ist, folgt daraus die Behauptung.

2. Um Theorem 1 anwenden zu können, sei nun

$$\mathcal{N}_{st} := \mathcal{M}_{st} \cap \mathcal{N}(X_s; X_t) \quad \text{für} \quad s < t,$$

so daß die Bedingungen (M_2) und (M_5) trivialerweise erfüllt sind. Die Richtigkeit von (M_3) folgt aus Teil 1 des Beweises und Satz 10, während sich diejenige von (M_4) aus Satz 13 und der entsprechenden Aussage für die Mengen $\mathscr{M}_{st}$ ergibt. Um zu zeigen, daß auch die Bedingung (M_1) erfüllt ist, sei zu $\mu_s \preceq \mu_t$ ein Markov-Kern P_τ gemäß Theorem 2 gewählt. Das durch

$$\mu_{st}(A_s \times A_t) := \int_{A_s} P_\tau(x_s; A_t)\, d\mu_s \quad \text{für} \quad A_s, A_t \in \mathfrak{C}(\mathbb{R})$$

definierte Maß μ_{st} liegt dann in $\mathscr{N}_{st}$. Denn zunächst besitzt μ_{st} wegen $\mu_s \mathrm{P}_\tau = \mu_t$ die geforderten Marginalverteilungen; ferner ist P_τ gemäß Satz 19 eine Subdilation, also π_s, π_t ein Submartingal; und schließlich liegt μ_{st} wegen Satz 20 und Satz 11 in $\mathscr{N}(X_s; X_t)$.

Das gemäß Theorem 1 vorhandene Maß $\mu \in \mathscr{M}_+^1(\mathbb{R}^T)$ besitzt nun die gewünschten Eigenschaften. □

Abschließend sei an einem Beispiel gezeigt, daß das Maß $\mu \in \mathscr{M}_+^1(\mathbb{R}^T)$ – auch unter zusätzlichen Voraussetzungen – nicht eindeutig bestimmt ist:

Es sei $I = \{-3, -1, +1, +3\}$ und Q die durch

$$Q(-3, i) = 0 \quad \text{für} \quad i \in I,$$

$$Q(-1,-3) = 1,\ Q(-1,-1) = -2,\ Q(-1,+1) = 1,\ Q(-1,+3) = 0,$$

$$Q(+1,-3) = 1,\ Q(+1,-1) = 0,\ Q(+1,+1) = -3,\ Q(+1,+3) = 2,$$

$$Q(+3, i) = 0 \quad \text{für} \quad i \in I,$$

definierte Matrix mit der Eigenschaft

$$Q(i,k) \geqq 0 \quad \text{für} \quad k \neq i \quad \text{und} \quad \sum_{k \in I} Q(i,k) = 0 \quad \text{für} \quad i \in I.$$

Bezeichnet $P_t = \exp(tQ)$ die zugehörige stochastische Halbgruppe und μ_0 die Gleichverteilung auf I, so existiert also eine Markov-Kette a_t, $t \geqq 0$, mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß P_t und der Anfangsverteilung μ_0. Wegen $\sum_{k \in I} Q(i,k)\, k = 0$ gilt dabei $\sum_{k \in I} P_t(i,k)\, k = i$, d. h. a_t, $t \geqq 0$, ist ein Martingal. Aus der für alle i und k gültigen Gleichung

$$Q(-i, -k) + Q(+i, -k) = Q(-i, +k) + Q(+i, +k)$$

folgt ferner ohne Schwierigkeit die Symmetrie der Verteilungen $\mu_t = \mu_0 P_t$.

Daher sind a_t, $t \geqq 0$, und $-a_t$, $t \geqq 0$, Markov-Prozesse und Martingale mit übereinstimmenden eindimensionalen Verteilungen, denen jedoch aufgrund der Definition von Q verschiedene Maße $\mu \in \mathscr{M}_+^1\left(\prod_{t \geqq 0} \mathbb{R}\right)$ entsprechen.

Literatur

1. Doob, J.: Generalized sweeping-out and probability. J. Funct. Anal. **2**, 207—225 (1968).
2. Kellerer, H.: Stetige Funktionen auf Produkträumen. Arch. Math. **19**, 79—82 (1968).
3. — Integraldarstellung von Dilationen. Trans. Sixth Prague Conf. 1971 (erscheint demnächst).
4. Prochorov, Y.: Convergence of random processes and limit theorems in probability. Theor. Prob. Appl. **1**, 157—214 (1956).
5. Straßen, V.: The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Stat. **36**, 423—439 (1965).

Prof. H. G. Kellerer
Institut für Mathematik
Ruhr-Universität
D-4630 Bochum
Deutschland

(Eingegangen am 10. Januar 1972)